

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

**ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ
ТА ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ**

**Навчально-методичний посібник
для студентів спеціальностей
113 – Прикладна математика та
122 – Комп'ютерні науки**

Рекомендовано
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 3 від 06.10.21 р.

Харків
Друкарня «Мадрид»
2023

УДК 517.3
Т33

Колектив авторів:

Ясницька Н. М., Ахієзер О. Б., Геляровська О. А., Босва А. А.,
Іглін С. П., Решетняк Ю. Б., Тевяшева О. А.

Рецензенти:

М. В. Сидоров, д-р фіз.-мат. наук, проф., Харківський
національний університет радіоелектроніки;
О. О. Ларін, д-р техн. наук, проф., Національний технічний
університет «Харківський політехнічний інститут»

*Рекомендовано редакційно-видавничою радою університету,
протокол № 3 від 06.10.21 р.*

Теорія функцій комплексної змінної та інтегральні перетворення :
Т33 навч.-метод. посіб. / Ясницька Н. М., Ахієзер О. Б., Геляровська О. А.,
Босва А. А., Іглін С. П., Решетняк Ю. Б., Тевяшева О. А. – Харків :
Друкарня Мадрид, 2023. – 246 с.

ISBN 978-617-8254-14-8

Навчальний посібник містить короткі теоретичні відомості, питання для самоперевірки, велику кількість розібраних зразків, а також прикладів для самостійного розв'язання, призначених для практичних занять, як аудиторних, так і домашніх. Наведено обов'язкові домашні завдання, зразки модульних контрольних робіт. Окремий розділ містить довідник з елементарної математики.

Призначено для студентів технічних спеціальностей.

Табл. 1. Бібліогр.: 18 назв.

УДК 517.3

ISBN 978-617-8254-14-8

© НТУ «ХП», 2023
© Н. М. Ясницька, О. Б. Ахієзер,
О. А. Геляровська, та ін., 2023
© ТОВ «Друкарня Мадрид», 2023

ЗМІСТ

ВСТУП	5
Модуль 1. ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОГО ЗМІННОГО	7
1.1. Поле комплексних чисел. Множини на комплексній площині	7
Аудиторне заняття 1.1	23
Самостійна робота 1.1	24
Відповіді до самостійної роботи 1.1.....	25
1.2. Поняття функції комплексного змінного. Основні елементарні функції.....	26
Аудиторне заняття 1.2	33
Самостійна робота 1.2	34
Відповіді до самостійної роботи 1.2.....	34
1.3. Диференціювання функції комплексного змінного. Умови Коші-Рімана. Аналітичність	35
Аудиторне заняття 1.3	43
Самостійна робота 1.3	43
Відповіді до самостійної роботи 1.3.....	44
1.4. Інтегрування функції комплексного змінного. Ряди Тейлора і Лорана.....	45
Аудиторне заняття 1.4	63
Самостійна робота 1.4	63
Відповіді до самостійної роботи 1.4.....	64
1.5. Особливі точки. Лишки. Застосування лишків. Класифікація ізольованих особливих точок.....	65
Аудиторне заняття 1.5	91
Самостійна робота 1.5	92
Відповіді до самостійної роботи 1.5.....	92
Модуль 2. ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ	93
2.1. Перетворення Лапласа і його властивості	94
Аудиторне заняття 2.1	108
Самостійна робота 2.1	109
Відповіді до самостійної роботи 2.1.....	110
2.2. Застосування перетворення Лапласа (операційного числення)	111
Аудиторне заняття 2.2	119
Самостійна робота 2.2	120
Відповіді до самостійної роботи 2.2.....	121

2.3. Інтегральне перетворення Фур'є. Застосування інтегрального перетворення Фур'є	122
Аудиторне заняття 2.3	137
Самостійна робота 2.3	138
Відповіді до самостійної роботи 2.3.....	138
3.1. Теоретичні питання з теми «Функції комплексного змінного»	139
3.2. Теоретичні питання з теми «Інтегральні перетворення»....	141
4.1. Зразки модульної контрольної роботи з теми «Функції комплексного змінного»	143
4.2. Зразки модульної контрольної роботи з теми «Інтегральні перетворення»	144
5.1. Варіанти обов'язкових домашніх завдань з теми «Функції комплексного змінного»	145
5.2. Варіанти обов'язкових домашніх завдань з теми «Інтегральні перетворення».....	211
ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ	236
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	244

ВСТУП

В технічних університетах України протягом останніх років відбуваються зміни у програмах та методиках викладання математичних дисциплін, що пов'язано з необхідністю наблизити курс до потреб інженерних спеціальностей, водночас зберігаючи високий рівень фундаментальної освіти.

Пропонований посібник призначений для студентів вищих технічних навчальних закладів із розширеною програмою з математики. Навчальний посібник також може бути використаний для підготовки бакалаврів за спеціальностями «Прикладна математика» та «Комп'ютерні науки».

Структура посібника відповідає кредитно-модульній системі навчання. Весь курс, що вивчається протягом семестру, розбито на 2 модуля, кожен з яких, у свою чергу, складається з декількох підмодулів. Кожен з підмодулів містить теоретичні відомості, приклади розв'язання типових задач, приблизний набір задач для роботи з викладачем в аудиторії, задачі для самостійної роботи, варіанти індивідуальних домашніх завдань та зразки модульних контрольних робіт.

Теоретична частина підмодуля містить необхідні визначення, формулювання теорем, формули, ілюструється розібраними прикладами і вправами.

Вивчення кожної частини підмодуля допомагає при виконанні аудиторної і домашньої роботи, але не виключає необхідності роботи з підручником і конспектом.

У процесі вивчення матеріалу модуля студенти виконують обов'язкові домашні завдання (ОДЗ). В кожному з двох підмодулів наведено 25 варіантів таких завдань приблизно однакової складності. Студенти усно захищають виконані ОДЗ напередодні написання двох-часової модульної контрольної роботи.

Зразки варіантів модульної контрольної роботи і перелік теоретичних питань, що містяться в ній, наведені у кінці кожного модуля.

Для отримання високої оцінки з модульної контрольної роботи необхідно знати не тільки формулювання та визначення, але і доведення теорем. Це потребує роботи з конспектом та вивчення відповідної літератури. Перелік рекомендованої літератури наведено в кінці навчального посібника.

Структура курсу:

Назва модуля	Назва підмодуля
Модуль 1 Функції комплексного змінного	<i>Підмодуль 1.</i> Поле комплексних чисел. Множини на комплексній площині.
	<i>Підмодуль 2.</i> Поняття функції комплексного змінного. Основні елементарні функції.
	<i>Підмодуль 3.</i> Диференціювання функції комплексного змінного. Умови Коші-Рімана. Аналітичність.
	<i>Підмодуль 4.</i> Інтегрування функції комплексного змінного. Ряди аналітичних функцій.
	<i>Підмодуль 5.</i> Особливі точки. Лишки. Застосування лишків. Класифікація ізольованих особливих точок.
	Модульна контрольна робота №1.
Модуль 2 Інтегральні перетворення	<i>Підмодуль 1.</i> Перетворення Лапласа і його властивості.
	<i>Підмодуль 2.</i> Застосування перетворення Лапласа (операційного числення).
	<i>Підмодуль 3.</i> Перетворення Фур'є .
	Модульна контрольна робота № 2.

Модуль 1. ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОГО ЗМІННОГО

1.1. Поле комплексних чисел. Множини на комплексній площині

1°. *Множиною комплексних чисел* називається множина пар (a, b) дійсних чисел a і b , над якими визначено операції додавання та множення на дійсне число.

2°. *Сумою* двох комплексних чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ і $z_2 = (x_2, y_2)$ називається комплексне число

$$z = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Добутком комплексного числа (x, y) на дійсне число α називається комплексне число

$$z = (\alpha x, \alpha y).$$

Зазначені *лінійні операції* над комплексними числами зводяться до відповідних операцій над дійсними числами, і тому вони задовольняють усім аксіомам операцій над дійсними числами. Очевидною є комутативність і асоціативність додавання, існує єдине комплексне число – комплексний нуль $0 = (0, 0)$ – таке, що виконуються умови $z + 0 = z$, $0 \cdot z = 0$.

Добутком двох комплексних чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ і $z_2 = (x_2, y_2)$ називається комплексне число

$$z = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

При такому визначенні добутку комплексних чисел виконуються переставний $(z_1 z_2 = z_2 z_1)$, сполучний $(z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3)$ і розподільний $((z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3)$ закони.

3°. *Множину комплексних чисел можна розглядати як розширення множини дійсних чисел*, якщо розглядати дійсне число x як пару чисел $(x, 0)$.

Множення комплексного числа z на дійсну одиницю $1 = (1, 0)$ не змінює комплексного числа:

$$z \cdot 1 = (x, y)(1, 0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x, y) = z.$$

4°. Комплексне число виду $z = (0, y)$ називається *уявним*, його можна розглядати як добуток *уявної одиниці* $(0, 1)$ на дійсне число $y = (y, 0)$:

$$(0, 1)(y, 0) = (0 \cdot y - 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 1 \cdot y) = (0, y).$$

5°. Уявну одиницю зазвичай позначають символом i : $(0, 1) = i$. З визначення добутку комплексних чисел випливає, що

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

Це дозволяє представити комплексне число $z = (x, y)$ в *алгебраїчній формі*:

$$z = (x, y) = x + iy.$$

Дійсне число

$$x = \operatorname{Re} z$$

називається *дійсною* або *реальною* частиною комплексного числа z . Аналогічно, дійсне число

$$y = \operatorname{Im} z$$

називається *уявною* частиною числа z .

6°. Для додавання у множині комплексних чисел визначено обернену операцію – віднімання, а для множення – ділення. Інакше кажучи, рівняння $a + x = b$ завжди має розв'язок, а рівняння $ax = b$ – за додаткової умови $a \neq 0$. Таким чином, множина комплексних чисел утворює поле. Нулем і одиницею поля комплексних чисел є, відповідно, дійсні числа 0 і 1 .

7°. Комплексне число $\bar{z} = x - iy$ називається *спряженим* з комплексним числом $z = x + iy$. Очевидно, що $\overline{\bar{z}} = z$.

8°. Множина комплексних чисел не є впорядкованою – в ній не існує таких понять, як більше або менше; комплексні числа можуть бути рівними або не рівними.

Два комплексні числа є рівними, якщо є рівними між собою їх дійсні та уявні частини:

$$z_1 = z_2 \Rightarrow x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

9°. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі визначаються як дії над алгебраїчними многочленами з урахуванням співвідношень: $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $\frac{1}{i} = -i$.

Додавання:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

Зокрема, сума спряжених комплексних чисел є дійсним числом:

$$z + \bar{z} = 2x,$$

а різниця спряжених комплексних чисел – уявним числом:

$$z - \bar{z} = 2iy.$$

Множення:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Зауваження. Результатом множення комплексного числа, яке не дорівнює нулю, на його спряжене буде додатне дійсне число. Насправді,

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 > 0.$$

Ділення:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 - ix_1y_2 + ix_2y_1}{x_2^2 + y_2^2} = \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{-x_1y_2 + x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2}, \quad (z_2 \neq 0). \end{aligned}$$

Правила арифметичних дій над комплексними числами ілюструються наступними прикладами.

Приклади

1. Розв'яжіть рівняння: $(3-2i)x + (4+5i)y = -2+9i$.
2. Представити в алгебраїчній формі комплексне число

$$z = \frac{(1+i)^3}{1-i}.$$

3. Довести, що $\overline{\overline{z_1} + \overline{z_2}} = z_1 + z_2$.

Розв'язання

1. Виділимо в лівій частині рівняння дійсну й уявну частини, а потім скористаємося ознакою рівності комплексних чисел в алгебраїчній формі:

$$(3-2i)x + (4+5i)y = -2+9i \Rightarrow \begin{cases} 3x+4y = -2, \\ -2x+5y = 9, \end{cases} \Rightarrow x = -2, y = 1.$$

2. Представити комплексне число в алгебраїчній формі означає знайти його дійсну та уявну частини. Для цього дане комплексне число помножимо й розділимо на число, що є спряженим до знаменника:

$$\frac{(1+i)^3}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{\left((1+i)^2\right)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+2i+i^2)^2}{1-i^2} = \frac{2^2 i^2}{1+1} = \frac{4(-1)}{2} = -2.$$

3. Нехай

$$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2,$$

і, відповідно,

$$\overline{z_1} = x_1 - iy_1, \overline{z_2} = x_2 - iy_2.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \overline{\overline{z_1} + \overline{z_2}} &= \overline{(x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2)}, \\ \overline{\overline{z_1} + \overline{z_2}} &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = z_1 + z_2, \end{aligned}$$

що й було потрібно довести.

Геометричне зображення комплексних чисел. Тригонометрична форма комплексного числа

10°. Кожному дійсному числу можна поставити у відповідність точку на числовій осі, тобто точку на прямій, на якій обрано додатний напрямок, початок координат і масштабну одиницю. Оскільки комплексне число $z = x + iy$ задається двома числами x та y , то кожному комплексному числу можна поставити у відповідність точку $M(x, y)$ на площині. Таку площину ми будемо називати *комплексною площиною*, а декартові осі координат – *дійсною* (вісь абсцис) і *уявною* (вісь ординат) осями (див. рис. 1). Дійсні числа зображуються точками дійсної осі, а уявні – точками уявної осі, початку координат відповідає комплексне число $z = 0$.

Точкам $M(x, y)$ і $N(x, -y)$, симетричним щодо осі Ox , відповідають взаємно спряжені комплексні числа $z = x + iy$ та $\bar{z} = x - iy$ (див. рис. 2).

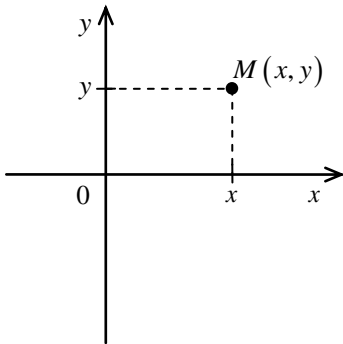


Рисунок 1

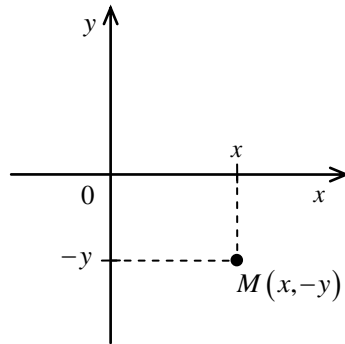


Рисунок 2

Якщо комплексне число є відмінним від нуля, то для його зображення можна використовувати полярну систему координат (ρ, φ) , де ρ – полярний радіус, що дорівнює відстані від точки до початку координат, а φ – полярний кут (див. рис. 3), що визначається з точністю до

$2\pi k$. Стосовно комплексного числа $z = x + iy$ числа ρ і φ відповідно називаються *модулем* і *аргументом* z і позначаються

$$\rho = |z|, \quad \varphi = \text{Arg } z.$$

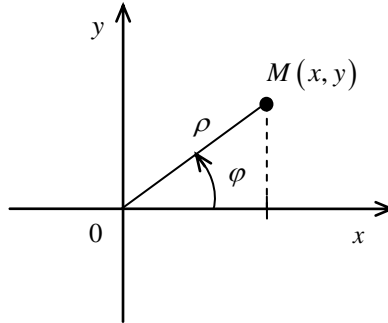


Рисунок 3

Скориставшись зв'язком декартових і полярних координат

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases}$$

одержимо *тригонометричну форму* запису комплексного числа:

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

причому

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \rho \geq 0,$$

$$\varphi = \text{Arctg } \frac{y}{x}.$$

Серед усіх аргументів комплексного числа $z \neq 0$ існує єдине значення, розташоване між $-\pi$ і π . Воно називається *головним значенням аргументу*, позначається $\arg z$ і пов'язане з $\text{Arg } z$ наступною формулою

$$\varphi = \text{Arg } z = \arg z + 2\pi k, \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots).$$

Очевидно, що

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \text{ якщо } x > 0,$$

$$\arg z = \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \text{ якщо } x < 0, y \geq 0,$$

$$\arg z = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \text{ якщо } x < 0, y < 0,$$

$$\arg z = \frac{\pi}{2}, \text{ якщо } x = 0, y > 0,$$

$$\arg z = -\frac{\pi}{2}, \text{ якщо } x = 0, y < 0.$$

Два відмінні від нуля комплексні числа є рівними між собою, якщо є рівними їхні модулі, а аргументи або є рівними, або відрізняються на число, кратне 2π , тобто $2\pi k$:

$$z_1 = z_2 \Rightarrow \begin{cases} \rho_1 = \rho_2, \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots \end{cases}$$

11°. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі визначаються у такий спосіб:

1) *множення комплексних чисел:*

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)) = \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Таким чином, при множенні комплексних чисел *модулі перемножуються, а аргументи додаються.*

Добуток двох комплексно-спряжених чисел дорівнює квадрату модуля.

$$z_1 \cdot \bar{z}_2 = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot \rho (\cos \varphi - i \sin \varphi) = \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2;$$

2) ділення комплексних чисел:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{\rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{\rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{\rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{\rho_1 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)}{\rho_2 (\cos^2 \varphi_2 - i^2 \sin^2 \varphi_2)} = \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned}$$

При діленні комплексних чисел модулі діляться, а аргументи віднімаються;

3) піднесення комплексного числа $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ до цілого додатного степеня n відповідає послідовному множенню числа z на себе n разів, що в результаті зводиться до піднесення модуля до степеня n і множення аргумента на показник степеня. Наприклад:

$$\begin{aligned} z^2 &= (\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi))^2 = \rho^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi), \\ z^3 &= (\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi))^3 = \rho^3 (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi), \\ &\dots\dots\dots \\ z^n &= (\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \end{aligned}$$

Якщо в останньому співвідношенні покласти $z = 1$, то отримаємо формулу Муавра:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Приклади

1. За допомогою формули Муавра виразити $\cos 3\varphi$ і $\sin 3\varphi$ через $\cos \varphi$ і $\sin \varphi$.

2. Представити в алгебраїчній формі комплексне число

$$\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^{40}.$$

Розв'язання

1. Запишемо формулу Муавра для випадку $n = 3$:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi).$$

Виділимо в лівій частині рівності дійсну і уявну частини:

$$\begin{aligned}(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 &= \cos^3 \varphi + i 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi + i^2 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi + i^3 \sin^3 \varphi = \\ &= \left\| \begin{array}{l} i^2 = -1 \\ i^3 = -i \end{array} \right\| = (\cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi) + i(3 \sin \varphi \cos^2 \varphi - \sin^3 \varphi) = \\ &= (\cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi (1 - \cos^2 \varphi)) + i(3 \sin \varphi (1 - \sin^2 \varphi) - \sin^3 \varphi) = \\ &= (4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi) + i(3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi),\end{aligned}$$

а потім скористаємося рівністю комплексних чисел, записаних в алгебраїчній формі:

$$\cos 3\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi,$$

$$\sin 3\varphi = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi.$$

2. Представимо числа в чисельнику і знаменнику в тригонометричній формі

$$\begin{aligned}z_1 = 1 + i\sqrt{3} &= \left\| \begin{array}{l} |z_1| = \sqrt{1+3} = 2 \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} \end{array} \right\| = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right), \\ z_2 = 1 - i &= \left\| \begin{array}{l} |z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{-1}{1} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4} \end{array} \right\| = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right), \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)}{\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)} = \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{40} &= \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40} = (\sqrt{2})^{40} \left(\cos\frac{40\cdot 7\pi}{12} + i\sin\frac{40\cdot 7\pi}{12}\right) = \\ &= 2^{20} \left(\cos\left(23\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(23\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) = 2^{20} \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \\ &= -2^{19} (1+i\sqrt{3}); \end{aligned}$$

4) *добування кореня цілого степеня з комплексного числа.*

Коренем $\sqrt[n]{z}$ називається комплексне число ζ , яке в результаті піднесення до степеня n дає число z :

$$\zeta^n = z.$$

Якщо представити комплексні числа z і ζ у тригонометричній формі

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \zeta = r(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

то задача зводиться до визначення r і α .

Піднесемо обидві частини рівності

$$r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

до степеня n і, використовуючи формулу Муавра, одержимо

$$r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Застосуємо ознаку рівності комплексних чисел у тригонометричній формі:

$$\begin{cases} r^n = \rho, \\ n\alpha = \varphi + 2\pi k, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho}, \\ \alpha = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{cases}$$

Таким чином,

$$\zeta_k = \sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) \right).$$

Для $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ одержимо n різних значень коренів, які мають однакові модулі та різні аргументи, що відрізняються на $\frac{2\pi}{n}$.

Геометрично результат добування кореня n -го степеня з комплексного числа зображується точками ζ_k комплексної площини, розташованими на колі радіуса $\sqrt[n]{\rho}$ на кутовій відстані $\frac{2\pi}{n}$ один від одного, тобто у вершинах правильного n -кутника, вписаного в коло радіуса $\sqrt[n]{\rho}$. Перша точка має координати $\left(\sqrt[n]{\rho}, \frac{\varphi}{n}\right)$, інші точки розташовуються на колі послідовно через кут $\frac{2\pi}{n}$.

Приклади

1. Обчислити.

1.1. $\sqrt[4]{-i}$.

1.2. $\sqrt[6]{1}$.

Розв'язання

$$\begin{aligned} 1.1. \sqrt[4]{-i} &= \left\| \begin{array}{l} \rho = |-i| = 1, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} \\ n = 4 \end{array} \right\| = \sqrt[4]{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \\ &= \cos\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{2\pi k}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{2\pi k}{4}\right), \quad k = \overline{0, 3}. \end{aligned}$$

Таким чином, одержуємо чотири різні значення кореня:

$$\zeta_1 = \sqrt[4]{-i} \Big|_{k=0} = \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \cos \frac{\pi}{8} - i \sin \frac{\pi}{8},$$

$$\zeta_2 = \sqrt[4]{-i} \Big|_{k=1} = \cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} = \sin \frac{\pi}{8} + i \cos \frac{\pi}{8},$$

$$\zeta_3 = \sqrt[4]{-i} \Big|_{k=2} = \cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8} = -\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8},$$

$$\zeta_4 = \sqrt[4]{-i} \Big|_{k=3} = \cos \frac{11\pi}{8} + i \sin \frac{11\pi}{8} = -\sin \frac{\pi}{8} - i \cos \frac{\pi}{8},$$

(див. рис. 4).

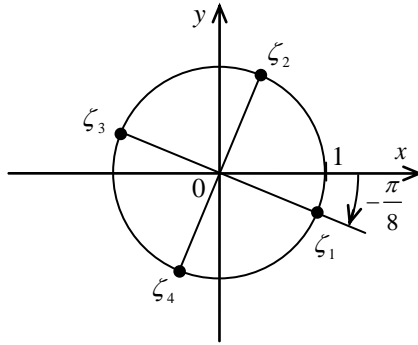


Рисунок 4

1.2.

$$\sqrt[n]{1} = \left\| \begin{array}{l} \rho = |1| = 1, \\ \varphi = 0 \\ n = 6 \end{array} \right\| = \sqrt[n]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \left(\frac{2\pi k}{6} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi k}{6} \right), \quad k = \overline{0, 5}.$$

Таким чином, одержуємо шість різних значень кореня:

$$\zeta_1 = \sqrt[6]{1} \Big|_{k=0} = 1,$$

$$\zeta_2 = \sqrt[6]{1} \Big|_{k=1} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\zeta_3 = \sqrt[6]{1} \Big|_{k=2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\zeta_4 = \sqrt[6]{1} \Big|_{k=3} = \cos \pi + i \sin \pi = -1,$$

$$\zeta_5 = \sqrt[6]{1} \Big|_{k=4} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\zeta_6 = \sqrt[6]{1} \Big|_{k=5} = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

(див. рис. 5).

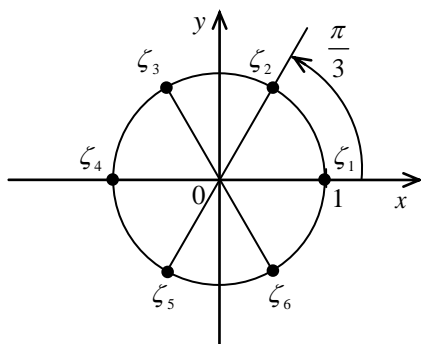


Рисунок 5

Послідовності комплексних чисел Поняття границі послідовності

12°. Нехай \mathbb{N} – множина натуральних чисел. Якщо кожному $n \in \mathbb{N}$ поставити у відповідність комплексне число z_n , то визначиться *послідовність* комплексних чисел, яку позначають $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Послідовність $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ називається *обмеженою*, якщо існує таке додатне число M , що модулі всіх елементів послідовності не перевищують M , тобто

$$|z_n| \leq M \quad \forall n.$$

Геометрично це означає, що існує круг радіуса M із центром на початку координат, усередині якого перебувають усі елементи послідовності.

13°. Множина точок z , що задовольняють умові $|z - z_0| < \varepsilon$, називається ε -окілом точки z_0 . Інакше кажучи, ε -окіл являє собою внутрішню частину круга з радіусом ε і центром у точці z_0 .

Число z_0 називається *границею* послідовності комплексних чисел $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться такий

номер N , починаючи з якого всі елементи послідовності належать до ε -околу точки z_0 , тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N |z - z_0| < \varepsilon.$$

Послідовність, що має скінченну границю, називається *збіжною*. Будь-яка збіжна послідовність є обмеженою.

Послідовність комплексних чисел $\{z_n = x_n + iy_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до границі $z_0 = x_0 + iy_0$ тоді й тільки тоді, коли послідовності дійсних чисел $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігаються відповідно до дійсних чисел x_0 і y_0 . Аналогічне твердження є вірним і для послідовності комплексних чисел $\{z_n = \rho_n (\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}$, представлених у тригонометричній формі. Така послідовність збігається до числа $z_0 = \rho_0 (\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0)$ тоді й тільки тоді, коли послідовність $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до числа ρ_0 , а $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \varphi_0$.

Для збіжності послідовності до нуля достаньно вимагати, щоб $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0$.

14°. Послідовність $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ називається *нескінченно великою*, якщо всі елементи з номерами, більшими за N , лежать поза кругом радіуса R з центром на початку координат, тобто

$$\forall R > 0 \exists N: |z_n| > R \forall n \geq N.$$

Те, що послідовність $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ є нескінченно великою, позначається символом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty.$$

Зовнішність кола будь-якого радіуса з центром в початку координат називається *околою нескінченності*.

Просте геометричне тлумачення нескінченно великої послідовності дає стереографічна проекція точок комплексної площини на сферу.

15°. Комплексна площина з нескінченно віддаленою точкою називається *повною комплексною площиною* (площину без такої точки іноді називають *відкритою*).

Під околком точки N на сфері розуміють частину поверхні сфери, обмежену будь-яким колом, площина якого перпендикулярна ON . Вона і є стереографічною проекцією околу нескінченно віддаленої точки площини, тобто зовнішньою частиною будь-якого круга з центром на початку координат. Зауважимо, що $z = \infty$, як і $z = 0$, не має визначеного аргументу.

16°. Розглянемо сферу зі скінченим радіусом R , що дотикається південним полюсом комплексної площини в точці $z = 0$, тобто діаметр сфери ON є перпендикулярним до площини z . З'єднаємо променем північний полюс із точкою площини z_n . Тоді точка z_n^* перетину променя з поверхнею сфери буде стереографічною проекцією точки z_n на сферу (див. рис. 6). Таким чином, можна встановити взаємно однозначну відповідність між точками комплексної площини і поверхні сфери з виколотим північним полюсом (крім точки N). Якщо послідовність $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ наближається до нескінченності, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, то точки на сфері, що зображують цю послідовність, необмежено наближаються до точки N . Цю точку N і приймають за зображення нескінченності, а відповідну їй *єдину* точку площини називають *нескінченно віддаленою точкою*.

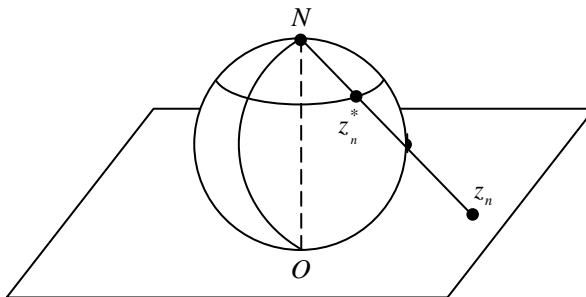


Рисунок 6

17°. Нехай послідовність $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до нескінченно віддаленої точки. Складемо з її елементів послідовність $\left\{\zeta_n = \frac{1}{z_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = 0$. Вірно і зворотнє: якщо з елементів послідовності $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$, що збігається до нуля, можна скласти послідовність $\left\{z_n = \frac{1}{\zeta_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, то така буде збігатися до нескінченно віддаленої точки.

18°. Точка z комплексної площини називається *внутрішньою* точкою множини G , якщо існує ε -окіл точки z , який цілком належить множині G . Точка z комплексної площини називається *зовнішньою* точкою множини G , якщо існує такий окіл точки z , усі точки якого не належать множині G . Точка z називається *межовою* точкою множини G , якщо в будь-якому її околі містяться як внутрішні, так і зовнішні точки.

19°. Множина, що складається тільки з внутрішніх точок, називається *відкритою*. Якщо множина цілком лежить усередині круга скінченного радіуса, то вона називається *обмеженою*, а якщо ні, то *необмеженою*. Множина називається *зв'язною*, якщо будь-які дві точки можна з'єднати ламаною, усі точки якої належать даній множині.

Відкрита і зв'язна множина G комплексної площини називається *областю*. Сукупність усіх межових точок називається *межею* області і позначається ∂G . Область разом з межею називається *замкненою областю* і позначається символом \bar{G} .

Єдиним прикладом області, що не має межі, є розширена площина.

Будь-яка неперервна замкнена крива без точок самоперетину (Жорданова крива) ділить площину на дві області: таку, що містить нескінченно віддалену точку (зовнішню) і таку, що її не містить (внутрішню). Сама крива є межею обох областей.

Область називається *однотвірною*, якщо частина площини, обмежена будь-якою Жордановою кривою, що належить області, також належить області.

Прикладом однозв'язної області є внутрішня частина круга – її межею служить коло. Зовнішня частина круга не є однозв'язною областю, тому що внутрішність будь-якої замкненої кривої, що охоплює коло, не вся належить області. Прикладом багатозв'язної (n -зв'язної) області може служити область, межа якої складається з n Жорданових кривих: l_0, l_1, \dots, l_{n-1} (див. рис. 7).

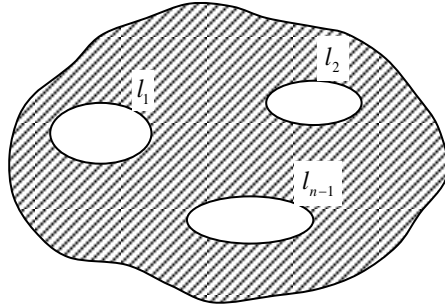


Рисунок 7

Аудиторне заняття 1.1

1. Розв'язати рівняння $\frac{2i}{x} - 4i + 4 = 3i - \frac{7}{x} + 2y$.

2. Представити комплексне число в алгебраїчній формі:

$$\frac{1}{(a+ib)^2} + \frac{1}{(a-ib)^2}.$$

3. Знайти модуль ($|z|$), головне значення аргументу ($\arg z$) і аргумент z ($\text{Arg } z$) комплексних чисел.

3.1. $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$. 3.2. $z = 1 + \cos \alpha - i \sin \alpha$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

4. Обчислити.

4.1. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

4.2. $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{12}$.

5. Знайти всі значення кореня. Зобразити їх на комплексній площині.

5.1. $\sqrt[6]{-1}$.

5.2. $\sqrt[8]{-2+2i}$.

6. Зобразити на комплексній площині множини точок, заданих певними умовами.

6.1. $|z| \geq 3$.

6.2. $|z-1-i| \leq 4$.

6.3. $4 \leq |z-1| + |z+1| \leq 8$.

6.4. $\operatorname{Im} \frac{1}{z} < -\frac{1}{2}$.

6.5. $\frac{1}{4} \leq \operatorname{Re} \frac{1}{\bar{z}} + \operatorname{Im} \frac{1}{\bar{z}} \leq \frac{1}{2}$.

Самостійна робота 1.1

1. Розв'язати рівняння $(x-iy)(a-ib) = i^9$, $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Виразити x , y через u , v , якщо $\frac{1}{x+iy} + \frac{1}{u+iv} = 1$.

3. Знайти модуль ($|z|$), головне значення аргументу ($\arg z$) і аргумент z ($\operatorname{Arg} z$) комплексних чисел.

3.1. $z = -1 - i\sqrt{3}$.

3.2. $z = 1 - \sin \alpha - i \cos \alpha$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

4. Знайти вектор, у який перейде $z = 3 + 4i$ після повороту на 45° і множення на 2.

5. Обчислити і зобразити на комплексній площині.

5.1. $\left(\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}\right)^{14}$.

5.2. $\sqrt[3]{-8i}$.

5.3. $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$.

6. Зобразити на комплексній площині множини точок, заданих певними умовами. Охарактеризувати.

6.1. $1 < |z| < 2$.

6.2. $|z-1-i| > 3$.

6.3. $\operatorname{Re} \frac{1}{z} < -\frac{1}{4}$.

6.4. $5 \leq |z-2| + |z+2| \leq 10$.

Відповіді до самостійної роботи 1.1

1. $x = -\frac{b}{a^2 + b^2}, y = -\frac{a}{a^2 + b^2}.$

2. $x = \frac{u^2 - u - v^2}{(u-1)^2 + v^2}, y = \frac{2uv - v}{(u-1)^2 + v^2}.$

3.1. $|z| = 2, \operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \dots).$

3.2. $|z| = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right), \operatorname{Arg} z = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \dots).$

4. $3\sqrt{2} - i \cdot 4\sqrt{2}.$

5.1. $\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$

5.2. $\zeta_0 = \sqrt{3} - i, \zeta_1 = 2i, \zeta_2 = -\sqrt{3} - i.$

5.3. $\zeta_0 = \frac{1}{2}, \zeta_1 = \frac{1}{2}i, \zeta_2 = -\frac{1}{2}, \zeta_2 = -\frac{1}{2}i.$

6.1. Кругове кільце. Відкрита, обмежена двозв'язна множина.

6.2. Зовнішність кола радіуса 3 з центром в точці (1,1). Необмежена, відкрита, двозв'язна множина.

6.3. Внутрішність кола радіуса 2 з центром в точці (-2,0). Обмежена, відкрита, одностов'язна множина.

6.4. Еліптичне кільце разом із межами. Обмежена, замкнута, двозв'язна множина.

1.2. Поняття функції комплексного змінного Основні елементарні функції

1°. Кажуть, що на множині G комплексної площини задано функцію $w = f(z)$ комплексної змінної z , якщо вказано закон, за яким кожній точці z множини G ставиться у відповідність точка або сукупність точок w . У першому випадку функція називається *однозначною*, у другому – *багатозначною*.

2°. Однозначна функція $f(z)$ називається *однолистою*, якщо функція, обернена до $f(z)$, теж є однозначною.

3°. Якщо $z = x + iy$, а $w = u + iv$, то очевидно, що задання функції $f(z)$ рівносильне завданню двох функцій дійсних змінних x і y – $u(x, y)$ і $v(x, y)$:

$$w = u(x, y) + i v(x, y), \text{ де}$$
$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z).$$

Основні елементарні функції комплексної змінної:

1) *степенева функція*:

$$w = z^n, \quad w = z^{\frac{1}{n}} \quad (n - \text{ціле});$$

2) *показникова функція*:

$$w = e^z;$$

3) *логарифмічна функція*:

$$w = \operatorname{Ln} z \quad (z \neq 0);$$

4) *тригонометричні функції*:

$$w = \sin z, \quad w = \cos z, \quad w = \operatorname{tg} z, \quad w = \operatorname{ctg} z;$$

5) *гіперболічні функції*:

$$w = \operatorname{sh} z, \quad w = \operatorname{ch} z, \quad w = \operatorname{th} z, \quad w = \operatorname{cth} z;$$

6) обернені тригонометричні функції:

$$w = \operatorname{Arcsin} z, \quad w = \operatorname{Arccos} z, \quad w = \operatorname{Arctg} z, \quad w = \operatorname{Arcctg} z;$$

7) обернені гіперболічні функції:

$$w = \operatorname{Arsh} z, \quad w = \operatorname{Arch} z, \quad w = \operatorname{Arth} z, \quad w = \operatorname{Arcth} z;$$

8) загальна степенева функція:

$$w = z^a, \quad a = \alpha + i\beta;$$

9) загальна показникова функція:

$$w = a^z, \quad a = \alpha + i\beta \text{ і } a \neq 0, \text{ тобто } w = e^{z \cdot \operatorname{Ln} a} \quad (a^z \equiv e^{z \cdot \operatorname{Ln} a}).$$

Відзначимо деякі властивості перелічених функцій.

5°. *Степенева функція* $w = z^n$ ($w = (x + iy)^n$) або

$w = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ за цілих n є однозначною функцією, яка ставить у відповідність будь-якому комплексному числу $w = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \neq 0$ число:

$$w = \rho^n e^{in\varphi} = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Функція $w = \sqrt[n]{z}$ кожному значенню z ставить у відповідність n різних чисел:

$$\rho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i(\varphi + 2\pi k)}{n}} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) \right),$$
$$k = 0, 1, \dots, (n-1)$$

і, таким чином, визначає n різних однозначних функцій.

6°. *Показникова функція* $w = e^z$, $z = x + iy$ визначається співвідношенням

$$w = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

де $u = \operatorname{Re} e^z = e^x \cos y$, $v = \operatorname{Im} e^z = e^x \sin y$.

Показникова функція має наступні властивості:

- 1) вона є однозначною;
- 2) для дійсних $z = x$ таке визначення збігається зі звичайним визначенням показникової функції;
- 3) зберігається основна властивість показникової функції

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2};$$

- 4) показникова функція ніде не дорівнює нулю.

Поряд з переліченими властивостями, слушними й у дійсній області, показникова функція в комплексній області є *періодичною* із чисто уявним періодом $T = 2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i} = e^z.$$

7°. *Логарифмічна функція* визначається як обернена до показникової і позначається

$$w = \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln \rho + i(\varphi + 2\pi k) \quad \forall z = \rho e^{i\varphi} \neq 0.$$

Логарифмічна функція має наступні властивості:

- 1) логарифмічна функція є багатозначною, тобто для кожного $z \neq 0$ існує нескінченна множина значень логарифма, з однаковою дійсною частиною $u = \ln|z|$ і уявними частинами, які відрізняються на доданок $2\pi k$. Можна визначити однозначну функцію, яка позначається символом $\ln z$ і називається *головним значенням* $\operatorname{Ln} z$, якщо покласти $k = 0$:

$$\ln z = \ln|z| + i\varphi;$$

- 2) для додатних дійсних чисел головне значення логарифма збігається зі значеннями логарифмічної функції дійсної змінної та має всі її властивості;
- 3) зберігається основна властивість логарифмічної функції:

$$\ln z_1 + \ln z_2 = \ln(z_1 \cdot z_2).$$

8°. Тригонометричні функції визначаються у такий спосіб:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Тригонометричні функції мають наступні властивості:

1) для будь-якого дійсного z , тобто $z = x$, вони збігаються зі звичайними тригонометричними функціями $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ дійсної змінної x ;

2) $\sin z$, $\cos z$ є періодичними з періодом 2π , а $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ – з періодом π ;

3) зберігаються властивості парності та непарності;

4) виконуються всі співвідношення, аналогічні до співвідношень між тригонометричними функціями в дійсній області, наприклад:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \sin 2z = 2 \sin z \cos z;$$

5) Функції комплексної змінної $\sin z$ і $\cos z$ (на відміну від функцій дійсної змінної $\sin x$ і $\cos x$) можуть набувати яких завгодно великих по модулю значень (тобто більших за одиницю).

9°. Гіперболічні функції в комплексній області визначаються за рівностями:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Гіперболічні функції в комплексній площині мають наступні властивості:

1) виконуються всі співвідношення, що зв'язують гіперболічні функції дійсного аргументу;

2) у комплексній площині $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ є періодичними з чисто уявним періодом $2\pi i$, а $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ – з періодом πi .

Зауважимо, що гіперболічні та тригонометричні функції пов'язані співвідношеннями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin iz = i \operatorname{sh} z, \\ \cos iz = \operatorname{ch} z, \\ \operatorname{tg} iz = i \operatorname{th} z, \\ \operatorname{ctg} iz = -i \operatorname{cth} z, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sh} z = -i \sin iz, \\ \operatorname{ch} z = \cos iz, \\ \operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz, \\ \operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz. \end{array} \right.$$

10°. *Обернені тригонометричні та гіперболічні функції виражаються через логарифмічну функцію, тому що тригонометричні та гіперболічні функції визначені через показникову:*

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right),$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right),$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right),$$

$$\operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \left(\frac{z - i}{z + i} \right),$$

$$\operatorname{Arcsh} z = \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right),$$

$$\operatorname{Arcch} z = \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right),$$

$$\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left(\frac{1 + z}{1 - z} \right),$$

$$\operatorname{Arccth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left(\frac{z + 1}{z - 1} \right).$$

Обернені тригонометричні та гіперболічні функції мають наступні властивості:

1) усі вище перелічені функції є нескінченнозначними, оскільки визначаються через Ln ;

2) функції $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arcsh} z$, $\operatorname{Arcch} z$ визначені у всій комплексній площині;

3) функції $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$ визначені у всій комплексній площині, крім точок $z = \pm i$;

4) функції $\operatorname{Arcth} z$, $\operatorname{Arccth} z$ визначені у всій комплексній площині, крім точок $z = \pm 1$.

11°. Загальною степеневою функцією називають $f(z) = z^v$, де $v = \alpha + i\beta$ і визначають її за рівністю

$$z^v = e^{v \cdot \text{Ln } z}.$$

Функція $f(z) = z^{\alpha+i\beta}$ при $\beta \neq 0$ є нескінченнозначною. Якщо $\beta = 0$, а α – раціональне число $\left(\alpha = \frac{p}{q}\right)$, то функція має q різних значень.

Приклади

1. Обчислити, тобто представити число в алгебраїчній формі. (1.1 і 1.3 зобразити на комплексній площині).

$$1.1. \text{Ln}(1+i). \quad 1.2. \text{Arccos}(-3). \quad 1.3. \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{3i}.$$

Розв'язання

1.1.

$$\text{Ln}(1+i) = \ln|1+i| + i(\arg(1+i) + 2\pi k),$$

Знайдемо модуль і аргумент комплексного числа $(1+i)$. Тоді

$$\text{Ln}(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Усі значення $\text{Ln}(1+i)$ зображуються точками, розташованими на прямій $x = \ln\sqrt{2}$ з періодом 2π . Головному значенню $\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$k = 0$ відповідає точка з координатами $\left(\ln\sqrt{2} \approx 0,35, \frac{\pi}{4} \approx 0,79\right)$

(див. рис.8).

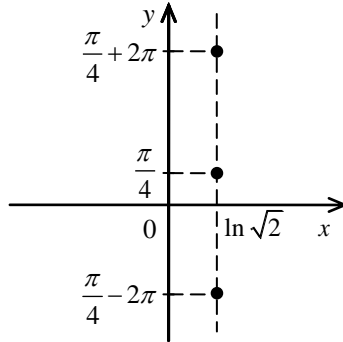


Рисунок 8

1.2. Для розв'язку задачі можна скористатися готовою формулою:

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right),$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Arccos}(-3) &= -i \operatorname{Ln}(-3 \pm \sqrt{8}) = \left\| \begin{array}{l} \arg(\pm\sqrt{8} - 3) = \pi \\ -3 - \sqrt{8} = 3 + \sqrt{8} \\ -3 + \sqrt{8} = 3 - \sqrt{8} \end{array} \right\| = \\ &= -i \left(\pm \ln(3 - \sqrt{8}) + i(\pi + 2\pi k) \right) = (2k+1)\pi \pm i \ln(3 - \sqrt{8}), \\ &k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Такий самий результат можна одержати в інший спосіб:

$$\cos w = -3, \quad \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = -6.$$

Позначивши $e^{iw} = t$, одержимо квадратне рівняння відносно t :

$$t^2 + 6t + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{1,2} = -3 \pm \sqrt{8},$$

тобто

$$\begin{aligned} e^{iw} &= -3 \pm \sqrt{2}, & iw &= \operatorname{Ln}(-3 \pm \sqrt{8}), \\ w &= -i \operatorname{Ln}(-3 \pm \sqrt{8}) = -i \left(\ln(3 \pm \sqrt{8}) + i(\pi + 2\pi k) \right) = \\ &= (2k+1)\pi \pm i \ln(3 - \sqrt{8}), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Таким чином, $\operatorname{Arccos}(-3) = (2k+1)\pi \pm i \ln(3 - \sqrt{8})$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.3.

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{3i} = e^{3i \cdot \ln \frac{1+i}{\sqrt{2}}} = e^{3i \left(\ln \frac{|1+i|}{\sqrt{2}} + \left(\arg \frac{1+i}{\sqrt{2}} + 2\pi k \right) i \right)} = e^{3i \left(\ln 1 + \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k \right) i \right)} = e^{-3 \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k \right)}.$$

Даний вираз набуває нескінченності за дійсних додатних значень. Головне значення (при $k=0$) дорівнює $e^{-\frac{3\pi}{4}}$: при $k \rightarrow +\infty$ точки згущаються до нуля, при $k \rightarrow -\infty$ наближаються до $+\infty$:

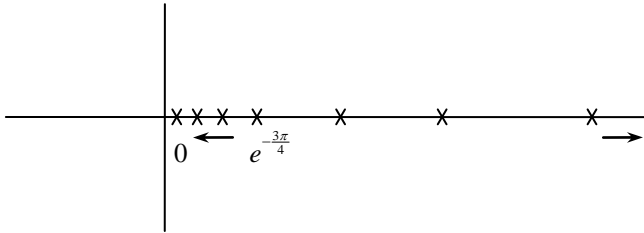


Рисунок 9

Аудиторне заняття 1.2

1. Виділити дійсну та уявну частини функцій.

1.1. $w = e^{\bar{z}^2}$.

1.2. $w = \sin z$.

1.3. $w = \operatorname{ch}(z-i)$.

1.4. $w = \operatorname{sh} z$.

2. Представити в алгебраїчній формі. Зобразити на комплексній площині.

2.1. $\operatorname{Arccos} 2$.

2.2. $(3-4i)^{1+i}$.

2.3. 2^{2i} .

3. Розв'язати рівняння. Зобразити розв'язок на комплексній площині.

3.1. $e^{ix} - e^{-ix} = -2a$, $a \in \mathbb{R}$.

3.2. $\sin^2 z + 1 = 0$.

Самостійна робота 1.2

1. Виділити дійсну та уявну частини функцій. Знайти $|f(z)|$.

1.1. $w = \operatorname{ch} z$. 1.2. $w = \sin(z-i)$. 1.3. $w = z^2 \cos z$.

2. Представити в алгебраїчній формі. Зобразити на комплексній площині.

2.1. $\operatorname{Arccos}(2i)$. 2.2. $\sin\left(\frac{\pi}{2}i\right)$. 2.3. $(-3)^{2i}$.

3. Розв'язати рівняння. Зобразити розв'язок на комплексній площині.

3.1. $\sin z + \cos z = 2$. 3.2. $\cos^2 z + 1 = 0$.

Відповіді до самостійної роботи 1.2

1.1. $\operatorname{Re} w = \cos y \cdot \operatorname{sh} x$, $\operatorname{Im} w = \sin y \cdot \operatorname{sh} x$.

1.2. $\operatorname{Re} w = \sin x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \operatorname{ch} 1 - \sin x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \operatorname{sh} 1$,

$\operatorname{Im} w = \cos x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \operatorname{ch} 1 - \cos x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \operatorname{sh} 1$.

1.3. $\operatorname{Re} w = (x^2 - y^2)^2 \cos x \cdot \operatorname{ch} y + 2xy \sin x \cdot \operatorname{sh} y$,

$\operatorname{Im} w = -(x^2 - y^2)^2 \sin x \cdot \operatorname{sh} y + 2xy \cos x \cdot \operatorname{ch} y$.

2.1. $2\pi k - i \cdot \ln|2 + \sqrt{5}|$, $\pi + 2\pi k - i \cdot \ln|\sqrt{5} - 2|$.

2.2. $-i \cdot \operatorname{sh} \frac{\pi}{2}$.

2.3. $e^{-2\pi(2k+1)} (\cos \ln 9 + i \cdot \sin \ln 9)$.

3.1. Якщо $a = 0$, $x = \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Якщо $a \neq 0$, розв'язків немає.

3.2. $2\pi k - i \cdot \ln|\sqrt{2} \pm 1|$.

1.3. Диференціювання функції комплексного змінного. Умови Коші-Рімана. Аналітичність

1°. Нехай у деякому околі точки z області G задана однозначна функція $w = f(z)$. Виберемо в цьому околі точку $z + \Delta z$ і запишемо приріст функції $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$.

Якщо існує скінченна границя відношення $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z \rightarrow 0$, то функція $f(z)$ називається *диференційовною* в точці z . Ця границя називається *похідною* функції $f(z)$ в точці z й позначається символом

$$w' = f'(z) = \frac{df}{dz}.$$

2°. Для того щоб функція $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ була диференційовною в точці $z = x + iy$, необхідно й достатньо, щоб функції дійсного змінного $u(x, y)$ й $v(x, y)$ були диференційовними в точці (x, y) і виконувалися умови Коші-Рімана

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

З урахуванням умов Коші-Рімана похідну $f'(z)$ можна обчислити за формулою

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

3°. Функція $f(z)$, диференційовна в деякому околі точки z , називається *аналітичною* в точці z . Таким чином, умова аналітичності

ті в точці є більш жорсткою, ніж умова диференційовності, тому що вона вимагає, аби функція була диференційовна не тільки в точці, але й у деякому її околі. Функція, диференційовна в кожній точці області, називається *аналітичною* в цій області.

Приклади

1. З'ясувати: чи є $f(z) = \bar{z}^2$ аналітичною функцією?
2. Знайти область аналітичності функції $f(z) = (1 - 2i)z^3$.
3. Знайти області, у яких функція $f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$ є аналітичною.

Розв'язання

1. Знайдемо дійсну й уявну частини досліджуваної функції:

$$f(z) = (x - iy)^2 = x^2 - y^2 - i2xy.$$

Функції $u(x, y) = x^2 - y^2$ й $v(x, y) = -2xy$ диференційовні. Однак, оскільки

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x,$$

то умови Коші-Рімана виконуються тільки в точці $(0, 0)$. Отже, функція $f(z) = \bar{z}^2$ диференційовна в точці $(0, 0)$, але вона не аналітична в цій точці, тому що не є диференційовною в околі даної точки.

2. $f(z) = (1 - 2i)(x + iy)^3 =$
 $= (x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3) + i(-2x^3 + 6y^2x + 3x^2y - y^3),$
 $u(x, y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3,$
 $v(x, y) = -2x^3 + 6y^2x + 3x^2y - y^3.$

Оскільки

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 + 12xy, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 6x^2 - 6y^2 - 6xy, \end{cases}$$

то умови Коші-Рімана виконуються у всій комплексній площині і, отже, функція $f(z)$ є аналітичною у всій комплексній площині. Похідна функції $f(z)$, згідно з вище наведеними формулами, буде рівною

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + 12xy + i(-6x^2 + 6y^2 + 6xy) = \\ &= 3(1-2i)(x^2 - y^2 + 2ixy) = 3(1-2i)(x+iy)^2 = 3(1-2i)z^2. \end{aligned}$$

3. Очевидно, що

$$f(z) = \begin{cases} z^2, & x^2 > y^2, \quad xy > 0; \\ -z^2, & x^2 < y^2, \quad xy < 0; \\ \bar{z}^2, & x^2 \geq y^2, \quad xy \leq 0; \\ -\bar{z}^2, & x^2 \leq y^2, \quad xy \geq 0. \end{cases}$$

У прикладі 1 показано, що функція $f(z) = \bar{z}^2$ аналітичною не є.

Таким чином, областями аналітичності є множини D_1 й D_2 , визначені нерівностями:

$$D_1: x^2 > y^2, \quad xy > 0,$$

$$D_2: x^2 < y^2, \quad xy < 0.$$

У підсумку одержуємо, що дана функція аналітична в областях:

$$0 < \arg z < \frac{\pi}{4},$$

$$\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{4},$$

$$\pi < \arg z < \frac{5\pi}{4},$$

$$\frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{7\pi}{4}.$$

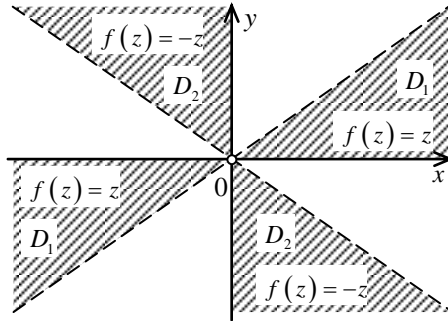


Рисунок 10

4°. Похідні аналітичних функцій $f(z)$, обчислюються за допомогою таких самих правил і таблиці похідних, що й похідні функції однієї дійсної змінної:

$$1) (z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{C});$$

$$2) (a^z)' = a^z \operatorname{Ln} a;$$

$$3) (\operatorname{Log}_a z)' = \frac{1}{z \operatorname{Ln} a}, \quad z \neq 0;$$

$$4) (\sin z)' = \cos z,$$

$$(\cos z)' = -\sin z,$$

$$(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z},$$

$$(\operatorname{ctg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z};$$

$$5) (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z,$$

$$(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z,$$

$$(\operatorname{th} z)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z},$$

$$(\operatorname{cth} z)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 z};$$

$$\begin{aligned}
6) \quad (\operatorname{Arcsin} z)' &= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \\
(\operatorname{Arccos} z)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \\
(\operatorname{Arctg} z)' &= \frac{1}{1+z^2}, \quad z \neq \pm i, \\
(\operatorname{Arcctg} z)' &= -\frac{1}{1+z^2}, \quad z \neq \pm i; \\
7) \quad (\operatorname{Arcsh} z)' &= \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}, \\
(\operatorname{Arcch} z)' &= \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}, \\
(\operatorname{Arcth} z)' &= \frac{1}{1-z^2}, \quad z \neq \pm 1, \\
(\operatorname{Arccth} z)' &= \frac{1}{1-z^2}, \quad z \neq \pm 1.
\end{aligned}$$

Гармонічні функції

5°. У силу умов Коші-Рімана дійсна й уявна частини аналітичної функції $f(z)$ задовольняють рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$$(\Delta u = 0, \Delta v = 0).$$

Функції, що задовольняють рівняння Лапласа, називаються *гармонічними*.

б°. Дві гармонічні функції, пов'язані умовами Коші-Рімана, називаються взаємно *спряженими* гармонічними функціями. Вони являють собою дійсну й уявну частини деякої аналітичної функції. Завжди можна побудувати аналітичну функцію, для якої дана гармонічна функція є дійсною або уявною частиною.

Приклади

1. Серед функцій виду $f(x^2 - y^2)$ знайти гармонічні.
2. Визначити аналітичну функцію $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, якщо її дійсна частина $u(x, y) = e^x \cos y + x^2 - y^2 + 3x$ й $f(0) = 0$.

Розв'язання

1. Нехай $u = x^2 - y^2$. Тоді

$$\frac{\partial f(u)}{\partial x} = f'_u \cdot 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4x^2 \cdot f''_{uu} + 2f'_u,$$

$$\frac{\partial f(u)}{\partial y} = -f'_u \cdot 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4y^2 \cdot f''_{uu} - 2f'_u,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4(x^2 + y^2) \cdot f''_{uu} = 0 \Rightarrow f''_{uu} = 0,$$

$$f(u) = au + b = a(x^2 - y^2) + b.$$

Таким чином, із усіх функцій виду $f(x^2 - y^2)$ гармонічними є тільки лінійні відносно $(x^2 - y^2)$, тобто функції виду $a(x^2 - y^2) + b$ $\forall a, b \in \mathbb{C}$.

2. Функція $u(x, y)$ гармонічна, тому що

$$u''_{xx} = e^x \cos y + 2, \text{ і } u''_{yy} = -e^x \cos y - 2, \text{ і}$$

$$\Delta u = 0.$$

Враховуючи, що

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y + 2x + 3, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \sin y - 2y, \end{cases}$$

знайдемо повний диференціал функції $v(x, y)$:

$$dv(x, y) = (e^x \sin y + 2y)dx + (e^x \cos y + 2x + 3)dy,$$

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (e^x \sin y + 2y)dx + (e^x \cos y + 2x + 3)dy + C.$$

Оскільки інтеграл не залежить від шляху інтегрування, то зручно інтегрувати по ламаній, ланки якої паралельні координатним осям.

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int_{x_0}^x (e^x \sin y + 2y)dx + \int_{y_0}^y (e^x \cos y + 2x + 3)dy + C = \\ &= e^x \sin y + 2xy + 3y + C_1. \\ f(z) &= e^x \cos y + x^2 - y^2 + 3x + i(e^x \sin y + 2xy + 3y + C_1) = \\ &= e^z + z^2 + 3z + iC_1. \end{aligned}$$

Постійну C_1 знайдемо з умови $f(0) = 0$:

$$f(0) = 1 + iC_1 = 0.$$

Отже $C_1 = i$. Таким чином, шуканою функцією є

$$f(z) = e^z + z^2 + 3z - 1.$$

Примітка. Функцію $v(x, y)$ можна визначити інакше. Враховуючи, що

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y + 2y,$$

одержимо

$$v(x, y) = \int_{x_0}^x (e^x \sin y + 2y) dx + C(y).$$

Диференціюючи це вираження по y , і враховуючи що

$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y + 2x + 3,$$

знайдемо

$$C'(y) = 3,$$

звідки випливає

$$C(y) = 3y + C_1.$$

Таким чином,

$$v(x, y) = e^x \sin y + 2xy + 3y + C_1$$

і, отже,

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) = \\ &= e^x \cos y + x^2 - y^2 + 3x + i(e^x \sin y + 2xy + 3y) + C_1 i = \\ &= e^z + z^2 + 3z + iC_1. \end{aligned}$$

Оскільки $f(0) = 0$, то

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 + iC_1 = 0, \\ C_1 &= i. \end{aligned}$$

У результаті, $f(z) = e^z + z^2 + 3z - 1$.

Відзначимо, що заданням дійсної або уявної частини аналітична функція визначається з точністю до довільної (комплексної) сталої.

Аудиторне заняття 1.3

1. З'ясувати, чи є дані функції аналітичними (знайти область аналітичності).

1.1. $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{z+2}$.

1.2. $f(z) = z \cdot e^{3i} \cdot e^z$.

2. Перевірити, що функції $f(z) = \cos z$, $f(z) = z^3$ – аналітичні,

й одержати формули $(\cos z)' = -\sin z$, $(z^3)' = 3z^2$.

3. Знайти область аналітичності функції

$$f(z) = -4|xy| + 2i|x^2 - y^2|.$$

4. Знайти всі гармонічні функції виду: $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

5. Відновити аналітичну функцію за її дійсною частиною:
 $\operatorname{Re} f(z) = e^{-y} \cos x + x$, $f(0) = 1$.

6. Відновити аналітичну функцію за її уявною частиною:
 $\operatorname{Im} f(z) = -2 \sin 2x \cdot \operatorname{sh} 2y + y$, $f(0) = 2$.

Самостійна робота 1.3

1. З'ясувати, чи є дані функції аналітичними.

1.1. $f(z) = (z-i) \cdot \cos z$.

1.2. $f(z) = z \cdot e^{\bar{z}}$.

2. Перевірити, що функції $f(z) = \sin z$, $f(z) = z^4$ – аналітич-

ні, й одержати формули $(\sin z)' = \cos z$, $(z^4)' = 4z^3$.

3. Знайти область аналітичності функції

$$f(z) = 4|xy| - 2i|x^2 - y^2|.$$

4. Знайти всі гармонічні функції виду: $u = f\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right)$.

5. Відновити аналітичну функцію за її дійсною частиною:

$$\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

6. Відновити аналітичну функцію за її уявною частиною:

$$\operatorname{Im} f(z) = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2 + y^2)}.$$

Відповіді до самостійної роботи 1.3

1.1. Так.

1.2. Ні.

3. Функція аналітична в I квадранті ($x \geq 0, y \geq 0$) і у III квадранті ($x \leq 0, y \leq 0$).

4. $u = \frac{C_1 x}{x^2 + y^2} + C_2$.

5. $f(z) = z^2 + (5 - i)z - \frac{i}{z} + Ci$.

6. $f(z) = \frac{1}{2z} + iz^2 + 3i + C$.

1.4. Інтегрування функції комплексного змінного. Ряди Тейлора і Лорана

Інтеграл уздовж кривої L і його обчислення

1°. Нехай однозначна функція $f(z)$ визначена й неперервна в області G , а L – кусково-гладка крива, що цілком лежить в G ; $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, де $u(x, y)$ й $v(x, y)$ – дійсні неперервні функції змінних x і y . Обчислення інтеграла від функції $f(z)$ комплексного змінного z уздовж кривої L зводиться до обчислення двох криволінійних інтегралів другого роду

$$\begin{aligned}\int_L f(z) dz &= \int_L (u(x, y) + iv(x, y)) \cdot (dx + idy) = \\ &= \int_L u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_L v(x, y) dx + u(x, y) dy.\end{aligned}\quad (1)$$

2°. Якщо $f(z)$ – функція аналітична, то інтеграл не залежить від шляху інтегрування L , а залежить тільки від положення початкової й кінцевої точок інтегрування.

У цьому випадку обчислення інтеграла проводять за формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\int_L f(z) dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = \Phi(z) \Big|_{z_1}^{z_2} = \Phi(z_2) - \Phi(z_1),$$

де $\Phi(z)$ – будь-яка первісна для функції $f(z)$.

3°. Інтеграл від аналітичної функції за кусково-гладким замкненим контуром C , що цілком лежить в області аналітичності функції $f(z)$, дорівнює нулю:

$$\oint_C f(z) dz = 0 \text{ (теорема Коші).}$$

4°. Якщо функція $f(z)$ не є аналітичною, то інтеграл залежить від шляху L .

У цьому випадку заданий інтеграл обчислюємо через криволінійні інтеграли другого роду. А проте слід урахувати, що змінні x й y зв'язані рівняннями, що описує криву L .

Іноді зручно рівняння кривої L задати в параметричному вигляді, тобто

$$L: z = z(t) \Rightarrow L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

причому $z_1 = z(t_1)$ й $z_2 = z(t_2)$ визначають положення початкової й кінцевої точок шляху інтегрування. Тоді, зробивши заміну змінних, одержимо

$$\int_L f(z) dz = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t) + iy(t)) \cdot (x'(t) + iy'(t)) dt.$$

Приклади

1. Обчислити інтеграл $J = \int_L (z^3 - \cos z) dz$, де $L: \begin{cases} |z| = 1, \\ \operatorname{Re} z \geq 0 \end{cases}$

від точки $z_1 = -i$ до точки $z_2 = i$.

2. Обчислити інтеграли.

2.1. $J = \int_L \bar{z}^2 dz$, де L – відрізок $OC: \begin{cases} y = x, \\ x \in [0, 1] \end{cases}$ від точки $(0, 0)$

до точки $(1, 1)$.

2.2. $J = \int_L \bar{z}^2 dz$, L – дволанкова ламана OBC , де $OB:$

$$\begin{cases} y = 0, \\ x \in [0, 1], \end{cases} \quad BC: \begin{cases} x = 1, \\ y \in [0, 1]. \end{cases}$$

Розв'язання

1. Підінтегральна функція – аналітична, тому що є сумою двох аналітичних функцій. Тому інтеграл не залежить від шляху інтегрування, і для його обчислення скористаємося формулою Ньютона-Лейбніца. По-

чаткова точка A контуру L задає нижню границю інтегрування $z_1 = -i$; кінцева точка B задає верхню границю інтегрування $z_2 = i$:

$$\begin{aligned} J &= \int_{-i}^i (z^3 - \cos z) dz = \left(\frac{z^4}{4} - \sin z \right) \Big|_{-i}^i = \\ &= \frac{i^4}{4} - \frac{(-i)^4}{4} - \sin i + \sin(-i) = -2 \sin i = \left\| \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right\| = \\ &= -2 \frac{e^{i^2} - e^{-i^2}}{2i} = -i^2 \cdot 2 \frac{e^{-1} - e^1}{2i} = -2i \cdot \text{sh} 1. \end{aligned}$$

2. Оскільки функція $f(z) = \bar{z}^2$ не є аналітичною, то інтеграл $J = \int_L \bar{z}^2 dz = \int_L (x - iy)^2 (dx + idy)$ може залежати від шляху інтегрування (див. рис. 11).

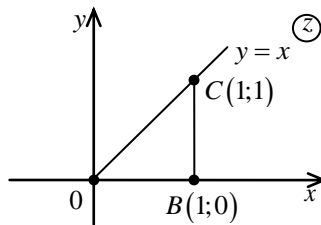


Рисунок 11

$$\begin{aligned} 2.1. \quad I_1 &= \int_{oc} \bar{z}^2 dz = \int_0^1 (x - ix)^2 (1+i) dx = (1-i)^2 (1+i) \int_0^1 x^2 dx = \\ &= -2i(1+i) \frac{1}{3} = \frac{2}{3}(1-i). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.2. \quad I_2 &= \int_{OB+BC} \bar{z}^2 dz = \int_0^1 x^2 dx + i \cdot \int_0^1 (1-iy)^2 dy = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - \frac{(1-iy)^3}{3} \Big|_0^1 = \\ &= \frac{2}{3}(2-i). \end{aligned}$$

Зауважимо, що $I_1 \neq I_2$!

Інтегральна формула Коші

5°. Якщо $f(z)$ є аналітичною функцією в області G , то для будь-якої внутрішньої точки $z_0 \in G$ й будь-якого кусково-гладкого замкнутого контуру C , що охоплює точку z_0 й цілком лежить в області G , слушною є інтегральна формула Коші:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (2)$$

6°. Аналітична функція $f(z)$ має всюди в області G похідні будь-якого порядку, які можна обчислити за інтегральною формулою Коші для похідних:

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Зауваження. Напрямок обходу контуру C вибирається таким чином, що область G залишається увесь час ліворуч.

Приклади

1. Обчислити інтеграли.

1.1. $I = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2z}.$

1.2. $I = \oint_{|z+1|=1} \frac{\sin \frac{\pi z}{2}}{(z+1)^3} dz.$

Розв'язання

1.1. Із двох нулів знаменника $z_1 = 0$ й $z_2 = -2$ тільки $z_1 = 0$ знаходиться усередині кола $|z|=1$. Тому $f(z) = \frac{1}{z+2}$ аналітична в

крузі $|z| \leq 1$, і вихідний інтеграл може бути обчислений за інтегральною формулою Коші

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i \cdot f(z_0):$$

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2z} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z(z+2)} = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{z+2}}{z} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{z+2} \right) \Big|_{z=0} = \pi i.$$

1.2. Підінтегральна функція $\frac{\sin \frac{\pi z}{2}}{(z+1)^3}$ аналітична в усіх точках

круга $|z+1| \leq 1$ за винятком точки $z_0 = -1$, де її знаменник має нуль третьої кратності. Тому потрібно застосувати формулу Коші для похідних

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \frac{2\pi i}{k!} \cdot f^{(k)}(z_0):$$

$$I = \oint_{|z+1|=1} \frac{\sin \frac{\pi z}{2}}{(z+1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \left(\sin \frac{\pi z}{2} \right)' \Big|_{z=-1} = \pi i \left(-\frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi z}{2} \right) \Big|_{z=-1} = \frac{\pi^3}{4} i.$$

7°. Якщо функція $f(z)$ аналітична в деякій області D , обмеженій контуром L , і всередину області потрапляє кілька точок (для простоти дві: a_1 і a_2), то обчислення інтеграла виду

$$\oint_L \frac{f(z)}{(z - a_1)(z - a_2)} dz$$

проводять у такий спосіб: будують два кола із центрами в точках a_1 і a_2 досить малих радіусів так, щоб вони не перетиналися й цілком лежали в області D — C_{r_1} і C_{r_2} (див. рис. 12).

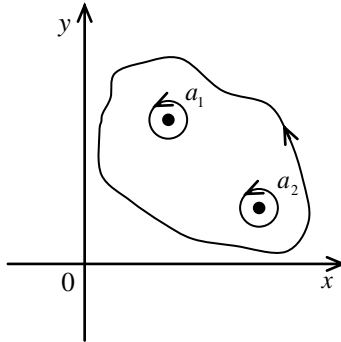


Рисунок 12

Тоді

$$\oint_L \frac{f(z)}{(z-a_1)(z-a_2)} dz = \int_{c_{r_1}} + \int_{c_{r_2}} .$$

Кожний із цих інтегралів обчислюється за допомогою формули Коші.

Приклади

1. Обчислити інтеграл $\oint_L \frac{dz}{z^2+9}$ за даних умов.

1.1. Обчислити інтеграл $\oint_L \frac{dz}{z^2+9}$ за умови, що точки $\pm 3i$ не лежать усередині контуру L .

1.2. Обчислити інтеграл $\oint_L \frac{dz}{z^2+9}$ за умови, що точка $3i$ лежить усередині контуру L , а точка $(-3i)$ – не лежить.

1.3. Обчислити інтеграл $\oint_L \frac{dz}{z^2+9}$ за умови, що обидві точки $3i$ й $(-3i)$ лежать усередині контуру L .

2. Обчислити інтеграл $\oint_{|z|=3} \frac{e^z dz}{z^2+9}$.

Розв'язання

1.1. У випадку, коли точки $\pm 3i$ не лежать усередині контуру L , функція $f(z) = \frac{1}{z^2 + 9}$ є аналітичною всередині даного контуру, тому відповідно до теореми Коші

$$\oint_L \frac{dz}{z^2 + 9} = 0.$$

1.2. У цьому випадку всередину контуру потрапляє одна точка:

$$\oint_L \frac{1}{z-3i} dz = 2\pi i \frac{1}{z+3i} \Big|_{z=3i} = \frac{2\pi i}{6i} = \frac{\pi}{3}.$$

1.3. Оскільки всередину контуру потрапляє дві точки, скористаємося тим, що

$$\oint_L \frac{dz}{z^2 + 9} = \oint_{c_{r_1}} \frac{1}{z-3i} dz + \oint_{c_{r_2}} \frac{1}{z+3i} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{6i} - 2\pi i \cdot \frac{1}{6i} = 0.$$

2. Усередину контуру потрапляють дві точки, у яких знаменник обертається на нуль: $z_1 = 0$ і $z_2 = 1$.

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=3} \frac{e^z dz}{z(1-z)^3} &= \oint_{|z|=r_1} \frac{e^z}{z-0} dz + \oint_{|z-1|=r_2} \frac{e^z}{(1-z)^3} dz = \\ &= 2\pi i \frac{e^0}{(0-1)^3} + 2\pi i \frac{1}{2!} \left(\frac{e^z}{z} \right)'' \Big|_{z=1} = -2\pi i + \pi i \left(\frac{e^z}{z} - 2 \frac{e^z}{z^2} + 2 \frac{e^z}{z^3} \right) \Big|_{z=1} = \\ &= -2\pi i + \pi i (e - 2e + 2e) = -2\pi i + \pi i = \pi i (e - 2). \end{aligned}$$

Ряд Тейлора

1°. *Степеневим* рядом називається ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n \in \mathbb{C}.$$

Степеневий ряд збігається абсолютно в крузі $|z - z_0| < R$ й розбігається поза цим кругом. Радіус збіжності R обчислюють за однією з двох формул

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \quad \text{або} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}. \quad (4)$$

Якщо $R = 0$, то степеневий ряд збігається тільки в одній точці $z = z_0$, якщо $R \rightarrow \infty$ – у всій площині.

2°. Якщо $f(z)$ аналітична в крузі $|z - z_0| < R$, то вона в цьому крузі єдиним чином розкладається у степеневий ряд, і цей ряд є рядом Тейлора функції $f(z)$ в околі точки $z = z_0$, тобто

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

де

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (5)$$

(L – контур, що лежить усередині круга $|z - z_0| < R$).

3°. Усередині круга збіжності ряди Тейлора можна почленно інтегрувати й диференціювати. Радіус збіжності при цьому не змінюється.

4°. Для того, щоб функцію $f(z)$ розкласти в ряд Тейлора в околі точки $z = z_0$ (по степенях $(z - z_0)$), потрібно обчислити за формулою (5) коефіцієнти c_n і визначити радіус збіжності R .

У багатьох випадках можна скористатися відомими розкладами елементарних функцій, наприклад:

$$1) \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1;$$

$$2) \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad |z| < \infty;$$

$$3) \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad |z| < \infty$$

й іншими, а також можливістю почленно диференціювати й інтегрувати ряди Тейлора всередині круга збіжності.

Приклади

1. Розкласти в ряд Тейлора задані функції в околі точки z_0 .

$$1.1. \quad f(z) = \frac{1}{z+1}, \quad z_0 = -2. \quad 1.2. \quad f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}, \quad z_0 = 0.$$

$$1.3. \quad f(z) = \cos z, \quad z_0 = i.$$

Розв'язання

1.1. Перетворимо функцію $f(z)$ у такий спосіб:

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)+3} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{z-2}{3}}.$$

Використовуючи тепер відомий розклад $\left(\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, |z| < 1 \right)$, одержимо

$$\frac{1}{1 + \frac{z-2}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-2}{3} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} (z-2)^n, \quad \left| \frac{z-2}{3} \right| < 1.$$

1.2. Зробивши заміну в цьому ж розкладі $z \rightarrow -z^2$, одержимо

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, \quad |z| < 1.$$

Потрібний розклад можна одержати, якщо отриманий ряд почленно продиференціювати

$$-\frac{2z}{(1+z^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2nz^{2n-1}, \quad |z| < 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(1+z^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nz^{2n-2}, \quad |z| < 1.$$

1.3. Перетворимо функцію $\cos z$:

$$\cos z = \cos(z-i+i) = \cos i \cdot \cos(z-i) - \sin i \cdot \sin(z-i) =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \cos i = \operatorname{ch} 1 \\ \sin i = i \operatorname{sh} 1 \end{array} \right\| = \operatorname{ch} 1 \cdot \cos(z-i) - i \operatorname{sh} 1 \cdot \sin(z-i)$$

і використовуємо відомі розклади $\sin z$ й $\cos z$, замінивши z на $(z-i)$. Одержимо

$$\cos z = \operatorname{ch} 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (z-i)^{2n} - i \operatorname{sh} 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z-i)^{2n+1}, \quad |z| < +\infty.$$

Ряд Лорана

5°. Ряд Лорана є узагальненням ряду Тейлора. Він містить як додатні, так і від'ємні степені $(z-z_0)$ й має вигляд:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Ряд Лорана розуміється як сума двох рядів

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ і } \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

і вважається збіжним тоді й тільки тоді, коли збігаються обидва ряди.

Перший із цих рядів збігається абсолютно й рівномірно всередині круга радіуса R , тобто в області $|z - z_0| < R$, де $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$,

і розбігається поза цим кругом. Цей ряд називається *правильною частиною* ряду Лорана.

Другий ряд збігається абсолютно й рівномірно поза кругом радіуса r , тобто в області $|z - z_0| > r$, $r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}}$. Він називається

головною частиною ряду Лорана.

6°. Якщо $r < R$, то області збіжності першого й другого рядів мають спільну частину, що представляє собою кругове кільце:

$$r < |z - z_0| < R.$$

Усередині цього кільця ряд Лорана збігається абсолютно й рівномірно й представляє в цьому кільці аналітичну функцію

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (r < |z - z_0| < R).$$

Кільце може вироджуватися в круг з виколотим центром: $0 < |z - z_0| < R$ або зовнішність круга: $r < |z - z_0| < \infty$.

7°. Коефіцієнти ряду Лорана обчислюються за формулами:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z - z_0| = \rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Тут $r < \rho < R$, а $|z - z_0| = \rho$ – будь-яке коло із центром у точці $z = z_0$, що цілком лежить у кільці.

Теорема Лорана. Будь-яка функція, що є однозначною й аналітичною в круговому кільці $r < |z - z_0| < R$, єдиним чином представляється в цьому кільці рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Зауваження. Якщо функція $f(z)$ аналітична скрізь у крузі $|z - z_0| < R$, то коефіцієнти a_n з номерами $n \leq -1$ дорівнюють нулю, оскільки в цьому випадку функція $\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}$ також є аналітичною в області, обмеженій контуром $|z - z_0| = \rho$, де $r < \rho < R$. У цьому випадку ряд Лорана містить тільки правильну частину.

Приклади

1. З'ясувати, чи можливо розкладання функції $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)(z - 3)}$ по степенях $(z - 2i)$ у зазначених нижче кільцях?

- 1.1. $0 < |z - 2i| < 2$. 1.2. $1 < |z - 2i| < 2$.
 1.3. $2 < |z - 2i| < \sqrt{13}$. 1.4. $2 < |z - 2i| < 4$.

Розв'язання

1. Укажемо точки, у яких $f(z)$ не є аналітичною. Це $z_1 = 2i$, $z_2 = -2i$, $z_3 = 3$. Намалюємо зазначені кільця, звертаючи увагу на розташування точок z_1 , z_2 , z_3 стосовно кілець (див. рис. 13-16). Оскільки $f(z)$ аналітична в кільцях, представлених на рис. 13-16, то її може бути розкладено в цих кільцях у ряд Лорана. Кільцю, зображеному на рисунку 15, належить точка z_3 , у якій $f(z)$ не є аналітичною, тому розкладання у ряд Лорана в цьому кільці неможливе.

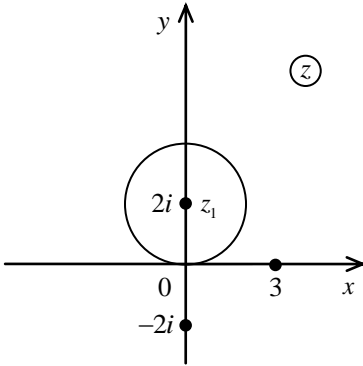


Рисунок 13

$$0 < |z - 2i| < 2$$

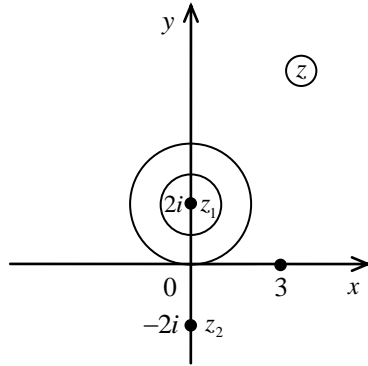


Рисунок 14

$$1 < |z - 2i| < 2$$

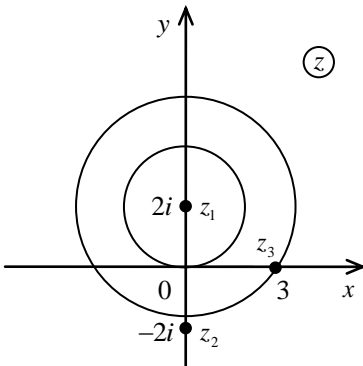


Рисунок 15

$$2 < |z - 2i| < \sqrt{13}$$

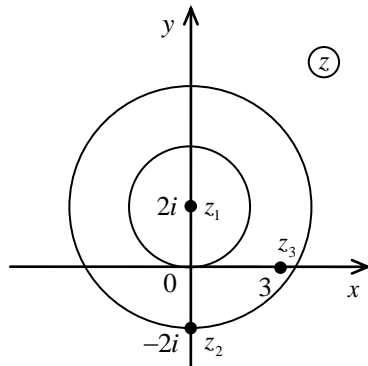


Рисунок 16

$$2 < |z - 2i| < 4$$

Способи розкладання функції в ряд Лорана

8°. Один зі способів розкладання $f(z)$ в ряд Лорана зводиться до безпосереднього обчислення коефіцієнтів ряду a_n за формулою

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz.$$

Цей спосіб застосовується рідко, тому що часто приводить до громіздких обчислень.

Приклад

Одержати розклад функції $f(z) = \frac{1}{z(z-2)}$ в ряд Лорана в кільці $0 < |z| < 2$, обчислюючи коефіцієнти ряду за зазначеною формулою.

Розв'язання

Коефіцієнти ряду Лорана для даної функції обчислюються за формулою

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho} \frac{1}{z \cdot z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho} \frac{1}{z^{n+2}} dz. \end{aligned}$$

При $n+2 \leq 0$ ($n = -2, -3, \dots$) підінтегральна функція аналітична в крузі $|z| < \rho$, і коефіцієнти a_n з номерами $n = -2, -3, \dots$ дорівнюють нулю.

При $n+2 > 0$ ($n = -1, 0, 1, 2, \dots$) коефіцієнти a_n можуть бути обчислені за допомогою формули Коші для похідних

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left. \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} \left(\frac{1}{z-2} \right) \right|_{z=0} = -\frac{1}{2^{n+2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ a_{-1} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho} \frac{1}{z} dz = \frac{2\pi i}{2\pi i} \cdot \left. \frac{1}{z-2} \right|_{z=0} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Отже, ряд Лорана для функції $f(z) = \frac{1}{z(z-2)}$ в кільці

$0 < |z| < 2$ має вигляд

$$f(z) = -\frac{1}{2z} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+2}}.$$

Саме цю функцію $f(z) = \frac{1}{z(z-2)}$ в ряд Лорана в кільці

$0 < |z| < 2$ можна розкласти, використовуючи іншу схему.

Запишемо функцію у вигляді

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)} = \frac{1}{2z} \cdot \frac{-1}{1 - \frac{z}{2}}.$$

Оскільки $0 < |z| < 2$, то $0 < \frac{|z|}{2} < 1$, і, використовуючи формулу суми нескінченної спадної прогресії, запишемо:

$$\frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{2^3} + \dots,$$

тоді

$$\frac{-1}{2z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = \frac{-1}{2z} \cdot \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{2^3} + \dots \right) = -\frac{1}{2z} - \frac{1}{2^2} - \frac{z}{2^3} - \frac{z^2}{2^4} - \dots$$

Остаточно одержимо:

$$f(z) = -\frac{1}{2z} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+2}}.$$

9°. Цю схему зручно використовувати для функцій виду

$f(z) = \frac{Q_m(z)}{P_n(z)}$. Таку функцію розкладають на прості дроби й усі доданки

розкладають у ряд Лорана. Якщо корені знаменника прості, то $f(z)$ розкладається в суму дробів виду $\frac{A}{z - z_k}$, кожний з яких можна розкласти в ряд Лорана за запропонованою схемою. Якщо серед коренів є кратні, то в розкладі повинні бути присутніми дроби виду $\frac{A}{(z - z_k)^l}$. Для розкладання в ряд Лорана дроби такого виду потрібно спочатку розкласти функцію $\frac{A}{z - z_k}$, а потім використати можливість почленного диференціювання ряду.

Приклад

Розкласти $f(z) = (z-1)e^{\frac{1}{1-z}}$ в ряд Лорана в кільці $0 < |z-1| < \infty$.

Розв'язання

Функція $f(z) = (z-1)e^{\frac{1}{1-z}}$ є аналітичною в кільці $0 < |z-1| < \infty$.

Оскільки для будь-якого w

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!},$$

то поклавши $w = \frac{1}{1-z}$ одержимо шуканий лоранівський розклад

$$\begin{aligned} (z-1)e^{\frac{1}{1-z}} &= (z-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-z)^n \cdot n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-z)^{n-1} \cdot n!} = \\ &= (z-1) - 1 + \frac{1}{2!(z-1)} - \frac{1}{3!(z-1)^2} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!(z-1)^{n-1}} + \dots \end{aligned}$$

Правильна частина розкладу містить два доданки $(z-1)$ і (-1) , головна частина – нескінченність доданків.

Особливості розкладання функції в ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки

Під ε -окілом точки $z_0 = \infty$ розуміють зовнішність круга $|z| > \frac{1}{\varepsilon}$ із центром у точці $z_0 = \infty$. Нехай $f(z)$ аналітична в околі нескінченно віддаленої точки, крім самої точки. Відображення $w = \frac{1}{z}$ переводить окіл точки $z_0 = \infty$ в окіл точки $w = 0$ розширеної площини w й тим самим зводить вивчення поведінки функції $f(z)$ в околі $z_0 = \infty$ до вивчення поведінки функції $f(z) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \varphi(w)$ в околі точки $w = 0$.

Ряд Лорана для функції $\varphi(w)$ в околі нуля має вигляд

$$\varphi(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{w^n}.$$

Поклавши $w = \frac{1}{z}$, одержимо лоранівський ряд у нескінченно віддаленій точці $z_0 = \infty$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n.$$

Відзначимо, що $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ – правильна частина, а $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$ – головна частина ряду Лорана при розкладанні функції $f(z)$ в околі точки $z_0 = \infty$.

Приклади

1. Розкласти в ряд Лорана функції в околі точки $z_0 = \infty$.

1.1. $f(z) = \frac{z}{z^3 + 1}$.

1.2. $f(z) = z^4 \cos \frac{1}{z}$.

Розв'язання

1.1. Перетворення $z = \frac{1}{w}$ переводить точку $z_0 = \infty$ у $w = 0$. Тоді

$$f(z) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w\left(\frac{1}{w^3} + 1\right)} = \frac{w^2}{w^3 + 1} = \frac{w^2}{1 - (-w^3)}.$$

Оскільки $|w| < 1$, то

$$\frac{w^2}{w^3 + 1} = w^2(1 - w^3 + w^6 - w^9 + \dots) = w^2 - w^5 + w^8 - w^{11} + \dots,$$

звідки

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^8} - \frac{1}{z^{11}} + \dots$$

1.2. Після заміни

$$z = \frac{1}{w}$$

одержимо

$$f(z) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^4} \cos w.$$

Використовуючи розклад для $\cos w$, одержимо

$$\frac{1}{w^4} \left(1 - \frac{w^2}{2!} + \frac{w^4}{4!} - \frac{w^6}{6!} + \dots\right) = \frac{1}{w^4} - \frac{1}{2!w^2} + \frac{1}{4!} - \frac{w^2}{6!} + \dots$$

У головній частині ряду Лорана два доданки: $\left(\frac{1}{w^4} - \frac{1}{2!w^2}\right)$, а в правильній – нескінченна множина. Остаточо маємо

$$f(z) = z^4 - \frac{z^2}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!z^2} + \frac{1}{8!z^4} - \frac{1}{10!z^6} + \dots$$

Аудиторне заняття 1.4

1. Обчислити інтеграли.

1.1. $\int_L e^{|z|^2} \cdot \operatorname{Im} z \, dz$, де L – відрізок прямої від точки $z_1 = 1 + i$ до

точки $z_2 = 1 - i$.

1.2. $\int_L (\cos iz + 3z^2) \, dz$, $L: |z| = 1, \operatorname{Im} z > 0$.

2. Використовуючи інтегральні формули Коші, обчислити наступні інтеграли.

2.1. $\int_{|z|=3} \frac{\cos(z + \pi i)}{z(e^z + 2)} \, dz$.

2.2. $\int_{|z-3|=6} \frac{z \, dz}{(z-2)^3(z-4)}$.

2.3. $\oint_C \frac{e^{\pi z} \, dz}{(z^2 + 1)^2}$, $C: 4x^2 + y^2 - 2y = 0$.

3. Розкласти функцію $f(z)$ в околі точки $z = z_0$.

3.1. $f(z) = \frac{1}{(z+12)(z^2-16)}$, $z_0 = 4$.

3.2. $f(z) = \sin \frac{1}{(z-1)}$, $z_0 = 1$.

3.3. $f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z}$, $z_0 = \infty$.

Самостійна робота 1.4

1. Обчислити інтеграли.

1.1. $\int_L \bar{z} \, dz$, $L: \left\{ |z| = \sqrt{2}, \frac{3\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{5\pi}{4} \right\}$ рух проти годинни-

кової стрілки.

1.5. Особливі точки. Лишки. Застосування лишків. Класифікація ізольованих особливих точок

1°. Якщо функція $f(z)$ аналітична в околі точки $z = z_0$, тобто в кільці $0 < |z - z_0| < \rho$, але не визначена в самій точці $z = z_0$, то ця точка називається *ізольованою особливою точкою* функції $f(z)$.

Приклад

Установити, які точки є ізольованими особливими точками функції $f(z) = \frac{1}{e^{\frac{1}{z^2}} + 1}$.

Розв'язання

Функція $f(z) = \frac{1}{e^{\frac{1}{z^2}} + 1}$ не визначена в точці $z = 0$ й у тих точках,

у яких знаменник обертається на нуль:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} &= \text{Ln}(-1) = \ln 1 + \pi i + 2\pi i k = \pi i(2k + 1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow z^2 = \frac{1}{\pi i(2k + 1)} \Rightarrow e^{\frac{1}{z^2}} = -1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow z_k = \frac{1}{\sqrt{(2k + 1)\pi i}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

При $k \rightarrow \infty$ послідовність $\{z_k\} \rightarrow 0$, тому точка $z = 0$, хоч і є особливою точкою функції $f(z)$, не є ізольованою. Такі точки в даній класифікації не розглядаються.

Таким чином, ізольованими особливими точками функції $f(z)$

є точки $z_k = \frac{1}{\sqrt{(2k + 1)\pi i}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2°. За поведінкою $f(z)$ поблизу $z = z_0$ розрізняють три типи ізольованих особливих точок:

1) якщо $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \text{const}$, то $z = z_0$ називається *усувною особливою точкою*;

2) якщо $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, то $z = z_0$ називається *полюсом*;

3) якщо границя $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не існує, то z_0 називається *істотно особливою точкою*.

Користуючись даним визначенням, можна встановити тип ізольованої особливої точки.

Приклади

1. Установити характер ізольованих особливих точок для заданих функцій $f(z)$.

$$1.1. f(z) = \frac{z^2 - 1}{z - 1}. \quad 1.2. f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}. \quad 1.3. f(z) = \sin \frac{\pi}{z}.$$

Розв'язання

1.1. Точка $z = 1$ – ізольована особлива точка $f(z)$. Обчислимо границю

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 - 1}{z - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} (z + 1) = 2.$$

Оскільки границя існує і скінченна, то точка $z = 1$ є усувною особливою точкою функції $f(z) = \frac{z^2 - 1}{z - 1}$.

1.2. Функція $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ має дві особливі точки $z = i$ й $z = -i$. Дослідимо поведінку функції в околі цих точок:

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z^2 + 1} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z - i} = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow -i} \frac{1}{z^2 + 1} = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{1}{z + i} = \infty.$$

Відповідно до наведеного визначення, точки $z = i$ і $z = -i$ є полюсами.

1.3. Функція $f(z) = \sin \frac{\pi}{z}$ має єдину особливу точку $z=0$. Покажемо, що границі $f(z)$ при $z \rightarrow 0$ не існує. Насправді, можна вибрати дві різні послідовності $\{z_n^{(1)}\}$ й $\{z_n^{(2)}\}$, що збігаються до нуля, такі що $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n^{(1)}) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n^{(2)})$.

Нехай

$$z_n^{(1)} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}, \quad z_n^{(2)} = \left\{ \frac{2}{4n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Тоді

$$f(z_n^{(1)}) = \sin \frac{\pi n}{1} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n^{(1)}) = 0,$$

$$f(z_n^{(2)}) = \sin \frac{\pi(4n+1)}{2} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n^{(2)}) = 1.$$

Оскільки для різних послідовностей $\{z_n\}$, що збігаються до нуля, виходить різний результат, границі функції $f(z) = \sin \frac{\pi}{z}$ при $z \rightarrow 0$ не існує, а значить, точка $z=0$ – істотно особлива для даної функції.

Класифікація особливих точок за допомогою розкладання функції в ряд Лорана

3°. Якщо $z = z_0$ – ізольована особлива точка функції $f(z)$, аналітичної в кільці $0 < |z - z_0| < \rho$, то $f(z)$ може бути розкладена в цьому кільці в ряд Лорана

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots$$

Цей розклад має різний вигляд залежно від характеру особливої точки.

4°. Для того, щоб точка $z = z_0$ була *усувною особливою точкою* функції $f(z)$, необхідно й достатньо, щоб лоранівський розклад не містив головної частини.

5°. Для того, щоб функція $f(z)$ мала *полюс* у точці $z = z_0$, необхідно й достатньо, щоб головна частина лоранівського розкладу в околі точки $z = z_0$ містила скінченне число членів.

6°. Для того, щоб точка $z = z_0$ була *істотною особливою точкою* функції $f(z)$, необхідно й достатньо, щоб головна частина лоранівського розкладу в околі точки $z = z_0$ містила нескінченне число членів.

З перерахованих тверджень випливає наступна загальна схема класифікації ізольованих особливих точок.

Приклад

Встановити характер особливих точок функції $f(z) = (z-2)^2 \cdot e^{\frac{1}{z-2}}$.

Розв'язання

Дана функція має єдину, а значить, ізольовану, особливу точку $z = 2$. Розкладемо $f(z) = (z-2)^2 \cdot e^{\frac{1}{z-2}}$ в ряд Лорана в кільці $0 < |z-2| < \rho$, користуючись відомим розкладом

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \dots + \frac{u^n}{n!} + \dots$$

і вибираючи $u = \frac{1}{z-2}$, одержимо

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-2)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2!(z-2)^2} + \frac{1}{3!(z-2)^3} + \frac{1}{4!(z-2)^4} + \dots \right) = \\ &= (z-2)^2 + (z-2) + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!(z-2)} + \frac{1}{4!(z-2)^2} + \dots \end{aligned}$$

Головна частина розкладу

$$\left(\frac{1}{3!(z-2)} + \frac{1}{4!(z-2)^2} + \dots \right)$$

містить нескінченне число доданків, значить, точка $z=2$ – істотно особлива точка.

Класифікація особливих точок із використанням теорем про зв'язок між нулями й полюсами аналітичних функцій

Для класифікації особливих точок часто буває корисною теорема, що встановлює зв'язок між полюсами функції $f(z)$ й нулями функції

$$F(z) = \frac{1}{f(z)}.$$

7°. **Теорема.** Для того, щоб функція $f(z)$ мала полюс у точці $z = z_0$, необхідно й достатньо, щоб функція $F(z) = \frac{1}{f(z)}$ мала в цій точці нуль. Порядком полюса $f(z)$ називається кратність нуля функції $F(z)$.

Зокрема, якщо $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, де $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ – функції, що є аналітичними в околі $z = z_0$ і $\psi(z_0) = 0$, а $\varphi(z_0) \neq 0$, то функція $f(z)$ має полюс такого ж порядку, якою є кратність нуля знаменника.

Якщо $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ й $\varphi(z_0) = \psi(z_0) = 0$, то точка $z = z_0$ для функції $f(z)$ може бути або усувною особливою точкою (якщо кратність нуля знаменника не більша за кратність нуля чисельника), або полюсом (якщо кратність нуля знаменника більша за кратність нуля чисельника).

Приклади

1. Установити характер особливих точок для заданих функцій $f(z)$.

$$1.1. f(z) = \frac{z+1}{2e^z - 2 - 2z - z^2}. \quad 1.2. f(z) = \frac{\sin z}{z(z-1)^2}.$$

Розв'язання

1.1. Точка $z=0$ – єдина (а отже, ізольована) особлива точка функції. Установимо її характер.

Оскільки $z=0$ є коренем знаменника, але не є коренем чисельника, то це, очевидно, полюс. Для того, щоб установити його порядок, необхідно знати кратність нуля знаменника. Кратність можна визначити, обчисливши похідні функції, що стоїть в знаменнику, у точці $z=0$:

$$\begin{aligned}\psi(z) &= 2e^z - 2 - 2z - z^2, & \psi(0) &= 0, \\ \psi'(z) &= 2e^z - 2 - 2z, & \psi'(0) &= 0, \\ \psi''(z) &= 2e^z - 2, & \psi''(0) &= 0, \\ \psi'''(z) &= 2e^z, & \psi'''(0) &= 2.\end{aligned}$$

Найменший порядок відмінної від нуля похідної в точці $z=0$ і є кратністю кореня. У цьому випадку $k=3$. Таким чином, точка $z=0$ –

полюс третього порядку функції $f(z) = \frac{z+1}{2e^z - 2 - 2z - z^2}$.

1.2. Дана функція має дві особливі точки: $z=0$ і $z=1$. Точка $z=1$ є двократним нулем знаменника, не являючись при цьому нулем чисельника. Значить, $z=1$ – полюс другого порядку.

Точка $z=0$ одночасно є простим коренем і чисельника, і знаменника й, отже – усувною особливою точкою.

Дослідження поведінки аналітичної функції на нескінченності. Класифікація нескінченно віддаленої точки

8°. Під околom нескінченно віддаленої точки розуміється множина точок, що задовольняють нерівності $|z| > R$, тобто таких, що лежать поза кругом радіуса R . Якщо поза кругом радіуса R функція $f(z)$ не має особливих точок, що лежать на скінченній відстані від точки $z = 0$, то нескінченно віддалена точка є ізольованою особливою точкою для $f(z)$.

Покладемо $z = \frac{1}{\zeta}$. Область $|z| > R$ комплексного змінного z при цьому перейде в окіл нуля на площині ζ : $|\zeta| < \frac{1}{R}$. Функція $\varphi(\zeta) = f(z) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ визначена й аналітична в околі точки $\zeta = 0$, за винятком самої точки $\zeta = 0$.

Нескінченно віддалена точка є усувною, полюсом або істотно особливою точкою залежно від того, якою є точка $\zeta = 0$ для функції $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$.

Приклад

Установити тип особливої точки $z = \infty$ для функції $f(z) = e^z$.

Розв'язання

Покладемо $z = \frac{1}{\zeta}$ і дослідимо точку $\zeta = 0$, для чого розкладемо $e^{\frac{1}{\zeta}}$ в ряд Лорана в околі точки $\zeta = 0$:

$$e^{\frac{1}{\zeta}} = 1 + \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{2! \zeta^2} + \dots + \frac{1}{n! \zeta^n} + \dots$$

Головна частина ряду Лорана містить нескінченну кількість членів.

Точка $\zeta = 0$ є істотно особливою для функції $e^{\frac{1}{\zeta}}$, а виходить, $z = \infty$ є істотно особливою для функції e^z .

Лишки

9°. *Лишком* функції $f(z)$, аналітичної в околі точки z_0 , крім (можливо) самої точки z_0 , називається комплексне число, позначене символом $\text{res } f(z_0)$, що дорівнює значенню інтеграла

$$\text{res } f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz.$$

Тут C – будь-який замкнений контур, який містить усередині себе точку z_0 і цілком лежить у розглянутому околі z_0 . У якості контуру інтегрування C зручно брати коло $|z - z_0| = \rho$ досить малого радіуса ρ .

10°. Лишок функції дорівнює коефіцієнту a_{-1} розкладу функції $f(z)$ в ряд Лорана по степенях $(z - z_0)$. Очевидно, що лишок у точці аналітичності функції $f(z)$ дорівнює нулю. В усуній особливій точці лишок також дорівнює нулю (див. теорему Коші).

11°. Якщо $z_0 = \infty$ – ізольована особлива точка функції $f(z)$, то

$$\text{res } f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\bar{R}}} f(z) dz,$$

де $C_{\bar{R}}$ – коло досить великого радіуса R , що обходять за годинниковою стрілкою, і поза яким є тільки одна особлива точка $z_0 = \infty$.

12°. Якщо точка z_0 є полюсом першого порядку функції $f(z)$, то

$$\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

Зокрема, якщо функцію $f(z)$ може бути представлено у вигляді відношення двох аналітичних функцій

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

де чисельник $\varphi(z_0) \neq 0$, а $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, то

$$\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi'(z)}.$$

Якщо точка z_0 – полюс порядку $n \geq 2$ функції $f(z)$, то

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z - z_0)^n f(z) \right).$$

Якщо точка z_0 є істотно особливою точкою функції $f(z)$, то лишок зазвичай знаходять як коефіцієнт a_{-1} лоранівського розкладу функції $f(z)$ в околі даної точки.

Приклади

1. Знайти лишки для заданих функцій $f(z)$.

$$1.1. f(z) = \frac{\sin z}{z \left(z - \frac{\pi}{3} \right)}. \quad 1.2. f(z) = \frac{z}{(1+z^2)^n}.$$

$$1.3. f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}.$$

Розв'язання

1.1. Особливими точками $f(z) = \frac{\sin z}{z \left(z - \frac{\pi}{3} \right)}$ є точки $z_1 = 0$,

$z_2 = \frac{\pi}{3}$. У точці $z_1 = 0$ маємо

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z \left(z - \frac{\pi}{3} \right)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z - \frac{\pi}{3}} = -\frac{3}{\pi}.$$

Таким чином, розглянута точка z_1 є усувною особливою точкою функції $f(z)$ й, отже,

$$\operatorname{res} f(0) = 0.$$

У точці $z_2 = \frac{\pi}{3}$ границя функції $f(z)$ дорівнює ∞ , причому

$\left(z - \frac{\pi}{3} \right)' = 1 \neq 0$, тобто точка $z_2 = \frac{\pi}{3}$ є полюсом першого порядку.

Отже,

$$\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{3}} f(z) \left(z - \frac{\pi}{3} \right) = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin z}{z} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}.$$

1.2. Особливі точки функції $f(z) = \frac{z}{(1+z^2)^n}$ $z_{1,2} = \pm i$ є полюсами n -го порядку. Тому

$$\operatorname{res} f(i) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z-i)^n \frac{1}{(1+z^2)^n} \right) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{1}{(z+i)^n} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(n-1)!} (-n)(-n-1)(-n-2) \cdots (-n-n+2) \cdot \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z+i)^{2n-1}} = \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdots (2n-2) \cdot \frac{1}{(2i)^{2n-1}} = \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{(n-1)! \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdots (2n-2)}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{2^{2n-1} \cdot i^{2n-1}} = \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{((n-1)!)^2} \cdot (2n-2)! \cdot \frac{-i}{2^{2n-1} \cdot (-1)^{n-1}} = -\frac{i}{2^{2n-1}} \cdot \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2}.
\end{aligned}$$

Аналогічно, у точці $z = -i$ одержуємо

$$\operatorname{res} f(-i) = i \cdot \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} \cdot ((n-1)!)^2}.$$

1.3. Точка $z = 0$ є істотно особливою точкою функції $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$, тому що головна частина її лоранівського розкладу в околі $z = 0$ містить нескінченне число членів:

$$f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}} = z^3 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \dots \right) = z^3 + z^2 + \frac{z}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24z} + \frac{1}{120z^2} + \dots$$

Отже,

$$\operatorname{res} f(0) = a_{-1} = \frac{1}{24}.$$

Теореми про лишки

13°. **Теорема 1 (основна теорема про лишки).** Якщо функція $f(z)$ аналітична в замкненій області \bar{D} (включаючи її межу C) за винятком скінченного числа особливих точок z_1, z_2, \dots, z_n , що лежать усередині області \bar{D} , то

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k).$$

Інакше кажучи, інтеграл за замкненим контуром C дорівнює добутку $2\pi i$ на суму лишків підінтегральної функції $f(z)$ в її особливих точках, що знаходяться усередині області \bar{D} .

14°. **Теорема 2.** Якщо функція $f(z)$ аналітична в повній комплексній площині, за винятком скінченного числа особливих точок, то сума всіх її лишків, включаючи й лишок у нескінченно віддаленій точці, дорівнює нулю

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k) + \operatorname{res} f(\infty) = 0.$$

15°. **Лема 1.** Якщо функція $f(z)$:

- 1) аналітична скрізь у верхній півплощині $\operatorname{Im} z > 0$, за винятком скінченного числа особливих точок z_1, z_2, \dots, z_k ($\operatorname{Im} z_k > 0$);
- 2) аналітична скрізь на дійсній осі ($\operatorname{Im} z = 0$);
- 3) $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$,

то $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$, де C_R – верхнє півколо $\begin{cases} |z| = R, \\ \operatorname{Im} z \geq 0. \end{cases}$

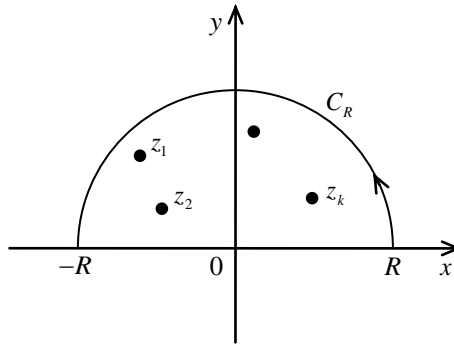


Рисунок 17

16°. **Лема 2 (лема Жордана).** Якщо функція $f(z)$:

1) аналітична скрізь у верхній півплощині, за винятком скінченного числа особливих точок z_1, z_2, \dots, z_k ; $\text{Im } z_k > 0, k = \overline{1, n}$;

2) аналітична на дійсній осі ($\text{Im } z = 0$);

3) $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0, \text{Im } z > 0$, то при $\lambda > 0$

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ (\lambda > 0) C_R}} \int f(z) e^{i\lambda z} dz = 0.$$

Застосування лишків до обчислення визначених і невластних інтегралів

Обчислення інтегралів типу $\int_0^{2\pi} R(\sin \varphi, \cos \varphi) d\varphi$

Підінтегральна функція $R(\sin \varphi, \cos \varphi)$ – раціональна функція своїх аргументів $\sin \varphi$ і $\cos \varphi$, неперервна на проміжку інтегрування.

Замінімо змінну інтегрування за формулою $z = e^{i\varphi}$:

$$z = e^{i\varphi}; dz = e^{i\varphi} i d\varphi \Rightarrow d\varphi = \frac{dz}{iz};$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right);$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

Інтервалі інтегрування $[0; 2\pi]$ за змінною φ ця заміна ставить у відповідність коло $|z| = 1$ комплексної площини з додатним обходом (проти годинникової стрілки). Таким чином,

$$J = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} R\left(z + \frac{1}{z}; z - \frac{1}{z}\right) \frac{dz}{z} = 2\pi \sum_{r=1}^n \text{res } \tilde{R}(z_k).$$

Тут $|z_k| < 1$.

Приклади

1. Обчислити дані інтеграли.

$$1.1. J = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2p \cos x + p^2}.$$

$$1.2. J = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x dx}{1 - 2p \cos x + p^2}, \quad p \in (0; 1).$$

$$1.3. J_1 = \int_0^{2\pi} \cos(nx - \sin x) e^{\cos x} dx \quad \text{та} \quad J_2 = \int_0^{2\pi} \sin(nx - \sin x) e^{\cos x} dx.$$

Розв'язання

1.1. Підінтегральна функція раціональна відносно $\cos x$. Виконуючи заміну змінної одержимо

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2p \cos x + p^2} = \left\| \begin{array}{l} z = e^{ix}, \quad dx = \frac{dz}{iz} \\ \cos x = \frac{z^2 + 1}{2z}, \\ [0; 2\pi] \Rightarrow |z| = 1 \end{array} \right\| = \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{1 - 2p \frac{z^2 + 1}{2z} + p^2} \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{1}{1 - 2p \frac{z^2 + 1}{2z} + p^2} \frac{dz}{iz} = \\ &= \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z - pz^2 - p + p^2 z} = i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{pz^2 - (p^2 + 1)z + p} = \\ &= \left\| \begin{array}{l} pz^2 - (p^2 + 1)z + p = 0 \\ z_1 = p, \quad z_2 = \frac{1}{p} \\ z_1, z_2 - \text{прості полюси} \end{array} \right\| = i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{p(z-p) \left(z - \frac{1}{p} \right)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi i \frac{i}{p} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{res} \frac{1}{(z-p)\left(z-\frac{1}{p}\right)} \Big|_{z=p}, |p| < 1; \\ \operatorname{res} \frac{1}{(z-p)\left(z-\frac{1}{p}\right)} \Big|_{z=\frac{1}{p}}, |p| > 1 \end{array} \right. = \\
&= -\frac{2\pi}{p} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{p-\frac{1}{p}}, |p| < 1; \\ \frac{1}{\frac{1}{p}-p}, |p| > 1 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2\pi}{1-p^2}, |p| > 1; \\ \frac{2\pi}{p^2-1}, |p| < 1. \end{array} \right.
\end{aligned}$$

1.2. Підінтегральна функція містить цілі степені $\cos 3x$ й $\cos 2x$, тобто раціональна відносно $\cos x$ і $\sin x$. Виконаємо заміну змінної

$$z = e^{ix}, \quad dx = \frac{dz}{iz};$$

$$\cos 3x = \frac{1}{2}(e^{i3x} + e^{-i3x}) = \frac{1}{2}(z^3 + z^{-3}) = \frac{z^6 + 1}{2z^3};$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2}(e^{i2x} + e^{-i2x}) = \frac{1}{2}(z^2 + z^{-2}) = \frac{z^4 + 1}{2z^2}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
J &= \oint_{|z|=1} \frac{(z^6 + 1)^2 z^2 dz}{4z^6 (z^2 - p)(1 - pz^2) iz} = \frac{1}{4i} \oint_{|z|=1} \frac{(z^6 + 1)^2 dz}{z^5 (z^2 - p)(1 - pz^2)} = \\
&= \left\| \begin{array}{l} z_1 = 0, \quad (k_1 = 5), \quad |z_1| = 0 \\ z_{2,3} = \pm \sqrt{p}, \quad (k_{2,3} = 1), \quad |z_{2,3}| < 1 \\ z_{4,5} = \pm \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad (k_{4,5} = 1), \quad |z_{4,5}| > 1 \end{array} \right\| =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4i} 2\pi i (\operatorname{res} f(z_1) + \operatorname{res} f(z_2) + \operatorname{res} f(z_3)).$$

Відзначимо, що полюси z_1, z_2, z_3 знаходяться усередині круга $|z|=1$.

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f(z_1) &= \operatorname{res} f(0) = \frac{1}{4!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^4}{dz^4} \left(\frac{(z^6+1)^2}{(z^2-p)(1-pz^2)} \right) = \\ &= -\frac{p^4+p^2+1}{p^3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f(z_2) &= \operatorname{res} f(+\sqrt{p}) = \lim_{z \rightarrow \sqrt{p}} \left(\frac{(z^6+1)^2(z-\sqrt{p})}{z^5(z^2-p)(1-pz^2)} \right) = \\ &= \frac{(z^6+1)^2}{z^5(1-pz^2)(z+\sqrt{p})} \Big|_{z=\sqrt{p}} = \frac{(p^3+1)^2}{2p^3(1-p^2)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f(z_3) &= \operatorname{res} f(-\sqrt{p}) = \lim_{z \rightarrow -\sqrt{p}} \left(\frac{(z^6+1)^2(z+\sqrt{p})}{z^5(z^2-p)(1-pz^2)} \right) = \\ &= \frac{(z^6+1)^2}{z^5(1-pz^2)(z-\sqrt{p})} \Big|_{z=-\sqrt{p}} = \frac{(p^3+1)^2}{2p^3(1-p^2)}. \end{aligned}$$

Остаточню маємо

$$\begin{aligned} J &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{(p^3+1)^2}{p^3(1-p^2)} - \frac{p^4+p^2+1}{p^3} \right) = \\ &= \frac{\pi(p^2-1)(p^4+p^2+1) + (p^3+1)^2}{2p^3(1-p^2)} = \pi \frac{p^2-p+1}{1-p}. \end{aligned}$$

1.3. Інтеграли

$$J_1 = \int_0^{2\pi} \cos(nx - \sin x) e^{\cos x} dx \quad \text{і} \quad J_2 = \int_0^{2\pi} \sin(nx - \sin x) e^{\cos x} dx$$

часто зустрічаються в задачах теорії поширення радіохвиль.

Складемо суму цих інтегралів

$$\begin{aligned} J_1 + iJ_2 &= \int_0^{2\pi} e^{i(nx - \sin x)} e^{\cos x} dx = \int_0^{2\pi} e^{inx} e^{\cos x - i \sin x} dx = \\ &= \left\| e^{ix} = z, e^{inx} = z^n, dx = \frac{dz}{iz}, \cos x - i \sin x = e^{-ix} = \frac{1}{z} \right\| = \\ &= \oint_{|z|=1} z^n e^{\frac{1}{z}} \frac{dz}{iz} = 2\pi i \frac{1}{i} \cdot \text{res } f(0) = 2\pi C_{-1}. \end{aligned}$$

Точка $z=0$ – істотно особлива точка, тому лишок знайдемо з його визначення. Розкладемо $f(z)$ в ряд Лорана по степенях z :

$$\begin{aligned} f(z) &= z^{n-1} e^{\frac{1}{z}} = z^{n-1} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \dots + \frac{1}{n! z^n} + \dots \right) = \\ &= z^{n-1} + z^{n-2} + \frac{1}{2!} z^{n-3} + \dots + \frac{1}{n! z} + \frac{1}{(n+1)! z^2} + \dots, \end{aligned}$$

звідки

$$\text{res } f(0) = C_{-1} = \frac{1}{n!}.$$

Таким чином,

$$J_1 + iJ_2 = \frac{2\pi}{n!} + i0 \Rightarrow \begin{cases} J_1 = \int_0^{2\pi} \cos(nx - \sin x) e^{\cos x} dx = \frac{2\pi}{n!}; \\ J_2 = \int_0^{2\pi} \sin(nx - \sin x) e^{\cos x} dx = 0. \end{cases}$$

Обчислення невластних інтегралів типу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$$

Щоб до інтегралів виду $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$, де $P_m(x)$ й $Q_n(x)$ – многочлени степені m та n відповідно, причому $n-m \geq 2$, застосувати основну теорему про лишки, потрібно замкнути контур інтегрування.

Підінтегральна функція $f(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ розглянутого інтеграла задовольняє всім вимогам леми 1. Можна побудувати замкнений контур L , що складається з відрізка дійсної осі $[-R; +R]$ і півкола C_R , а потім обчислити інтеграл за допомогою теореми про лишки:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx &= \lim_{(n-m \geq 2) \quad R \rightarrow \infty} \left(\int_{-R}^{+R} \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} dz + \int_{C_R} \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} dz \right) = \\ &= \oint_L \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} dz = 2\pi i \sum_{l=1}^k \operatorname{res} \left(\frac{P_m(z_l)}{Q_n(z_l)} dz \right), \operatorname{Im} z_k > 0. \end{aligned}$$

Приклади

1. Обчислити інтеграли.

1.1. $J = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 1}$.

1.2. $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$, $n \geq 0$.

2. За допомогою теореми про лишки переконатися в тому, що відомий інтеграл $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ дорівнює π .

Розв'язання

1.1. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{x^2}{x^4+1}$ парна, а тому

$$J = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+1} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+1}.$$

Усі вимоги леми 1 виконані:

1) степінь многочлена в знаменнику на два порядки вище степеня в чисельнику;

2) на осі Ox підінтегральна функція неперервна;

3) із чотирьох простих полюсів функції $f(z) = \frac{z^2}{z^4+1}$, тобто

коренів рівняння $1+z^4=0$, два знаходяться у верхній півплощині.

Дійсно,

$$1+z^4=0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{\cos \pi + i \sin \pi} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k\right),$$

$k=0,1,2,3$.

$$\left. \begin{array}{l} k=0, z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \\ k=1, z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) \end{array} \right\} \text{Im } z_1 > 0, \text{Im } z_2 > 0;$$

$$\left. \begin{array}{l} k=2, z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i) \\ k=3, z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \end{array} \right\} \text{Im } z_3 < 0, \text{Im } z_4 < 0.$$

$$\text{res } f(z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} f(z)(z - z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{z^2(z - z_k)}{z^4 + 1} = z_k^2 \cdot \frac{1}{4z_k^3} = \frac{1}{4z_k}$$

($k=1,2$);

$$\text{res } f(z_1) + \text{res } f(z_2) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) = \frac{z_1 + z_2}{4z_1z_2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{2i}{-2} = -i \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

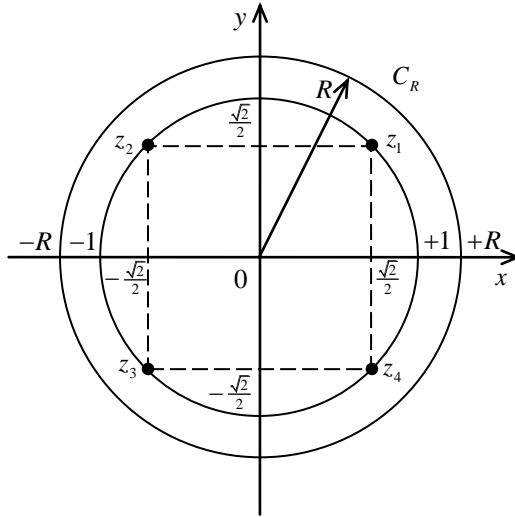


Рисунок 18

Остаточно маємо:

$$J = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{2} \oint_C \frac{z^2 dz}{z^4 + 1} = \frac{1}{2} 2\pi i (\text{res } f(z_1) + \text{res } f(z_2)) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

1.2. Підінтегральна функція $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^{n+1}}$ задовольняє всім

вимогам леми 1, а тому інтеграл за добудованим замкненим контуром обчислюється за основною теоремою про лишки:

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \oint_C \frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}} = 2\pi i \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow i} \left(\left(\frac{z-i}{z^2+1} \right)^{n+1} \right)^{(n)} = \\ &= \frac{2\pi i}{n!} \lim_{z \rightarrow i} \left((z+i)^{-n-1} \right)^{(n)} = \frac{2\pi i}{n!} (-1)^n \frac{(n+1)(n+2) \cdots (2n)}{(z+i)^{2n+1}} \Big|_{z=i} = \\ &= \frac{2\pi i}{n!} (-1)^n \frac{n!(n+1)(n+2) \cdots (2n)}{n!(2i)^{2n+1}} = (-1)^n \frac{\pi(2n)!}{2^{2n} (i)^{2n} (n!)^2} = \frac{\pi}{4^n} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2}. \end{aligned}$$

2. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ – дробово-раціональна. Степінь многочлена в знаменнику на два порядки вище степеня многочлена в чисельнику. На осі Ox підінтегральна функція неперервна. Корені знаменника підінтегральної функції $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ є її простими полюсами: $1+z^2=0 \Rightarrow z = \pm i$, причому $z = i$ належить верхній півплощині. У розглянутому випадку можна застосувати лему 1, а з нею і теорему про лишки.

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \cdot \operatorname{res} \left(\frac{1}{1+z^2} \right) \Big|_{z=i} = 2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow i} \frac{z-i}{1+z^2} = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

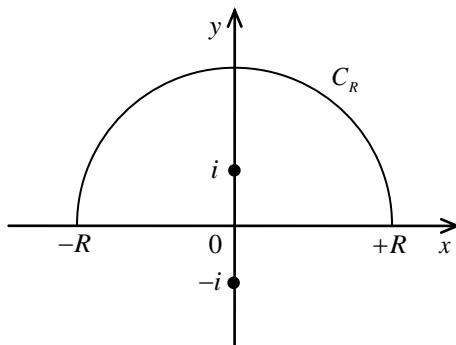


Рисунок 19

Обчислення інтегралів виду $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x} dx$, ($\lambda > 0$)

Ідея обчислення інтегралів цього виду та ж сама, що й у попередньому пункті – необхідно замкнути дійсну вісь півколом, а потім застосувати теорему про лишки. Якщо $f(z)$ задовольняє умовам леми Жордана, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{i\lambda x} dx \underset{(\lambda > 0)}{=} 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k).$$

Зауваження 1. Якщо при дійсних z функція $f(z)$ дійсна, то мають місце формули:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx \underset{(\lambda > 0)}{=} -2\pi \operatorname{Im} \sum_{k=1}^n \operatorname{res} (f(z_k) e^{i\lambda z_k}),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx \underset{(\lambda > 0)}{=} -2\pi \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \operatorname{res} (f(z_k) e^{i\lambda z_k}).$$

Зауваження 2. Лема Жордана застосовна і в тих випадках, коли число λ – чисто уявне. Якщо $\lambda = i\delta$ і $\delta > 0$, то контур слід замикати в правій півплощині комплексного змінного z , і в лівій півплощині, коли $\delta < 0$.

Приклади

1. Обчислити інтеграли.

$$1.1. J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} e^{i\lambda x} dx, \lambda > 0. \quad 1.2. J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^2 - 2x + 5} dx, n \geq 0.$$

$$1.3. J = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin bx}{x^2 + a^2} dx, a > 0, b > 0.$$

$$1.4. J = \int_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin 2x}{x^6 + 1} dx.$$

Розв'язання

1.1. Підінтегральна функція $f(z) = \frac{z}{1+z^2}$ задовольняє умови леми Жордана:

1) $f(z)$ аналітична у всіх точках дійсної осі;

2) $f(z)$ аналітична у всіх точках верхньої півплощини, крім однієї особливої точки $z = +i$ (простий полюс);

$$3) \lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{z}{1+z^2} = 0.$$

Отже,

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} e^{i\lambda x} dx = \oint_{C(\lambda>0)} \frac{ze^{i\lambda z}}{1+z^2} dz = 2\pi i \operatorname{res} f(i) = \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{ze^{i\lambda z}}{1+z^2} (z-i) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{ze^{i\lambda z} (z-i)}{(z+i)(z-i)} = \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{ze^{i\lambda z}}{1+z} = 2\pi i e^{i\lambda z} \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{2z} = i \frac{\pi}{e^\lambda}. \end{aligned}$$

Зіставивши у вихідному інтегралі та в отриманому результаті дійсну й уявну частини, одержимо

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} e^{i\lambda x} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos \lambda x}{1+x^2} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin \lambda x}{1+x^2} dx \stackrel{(\lambda>0)}{=} 0 + i \frac{\pi}{e^\lambda} \Rightarrow \\ \Rightarrow &\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos \lambda x}{1+x^2} dx \stackrel{(\lambda>0)}{=} 0; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin \lambda x}{1+x^2} dx \stackrel{(\lambda>0)}{=} \pi e^{-\lambda}. \end{cases} \end{aligned}$$

1.2. Враховуючи, що $\cos 3x = \operatorname{Re} e^{i3x}$, перепишемо заданий інтеграл у вигляді

$$J = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i3x}}{x^2 - 2x + 5} dx.$$

Зауважимо, що всі вимоги леми Жордана виконано. Насправді:

1) функція $f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z + 5}$ аналітична на всій дійсній

осі, тому що $z^2 - 2z + 5 = 0$ тільки в точках $z_1 = 1 + 2i$ і $z_2 = 1 - 2i$;

2) $f(z)$ аналітична на всій верхній півплощині за винятком однієї особливої точки (простий полюс);

$$3) \lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2 - 2z + 5} = 0, \quad \lambda = 3 > 0.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i3x}}{x^2 - 2x + 5} dx &= 2\pi i \operatorname{res}(f(z)e^{i3z}) \Big|_{z=1+2i} = \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow 1+2i} \frac{e^{i3z}(z-1-2i)}{z^2 - 2z + 5} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = 2\pi i e^{i3(1+2i)} \lim_{z \rightarrow 1+2i} \frac{1}{2z-2} = \\ &= \pi \frac{e^{3i-6}}{2} = \frac{\pi}{2e^6} (\cos 3 + i \sin 3); \\ J &= \operatorname{Re} \left(\frac{\pi}{2e^6} (\cos 3 + i \sin 3) \right) = \frac{\pi}{2e^6} \cos 3. \end{aligned}$$

1.3. Використовуючи парність підінтегральної функції, одержимо

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin bx}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ibx}}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \oint_C \frac{z e^{ibz}}{z^2 + a^2} dz = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(2\pi i \lim_{z \rightarrow ia} \frac{z e^{ibz}}{z^2 + a^2} (z - ia) \right) = -\pi a e^{-ab} \operatorname{Im} \left(\lim_{z \rightarrow ia} \frac{1}{2z} \right) = \\ &= -\pi a e^{-ab} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{2ai} \right) = \frac{\pi}{2} e^{-ab}. \end{aligned}$$

1.4. У силу парності підінтегральної функції маємо:

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin 2x}{x^6 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin 2x}{x^6 + 1} dx.$$

Умови леми Жордана виконано. Насправді,

1) функція $f(z) = \frac{z^3}{z^6 + 1}$ аналітична на всій дійсній осі та втрачає аналітичність, коли $z^6 + 1 = 0$, тобто при

$$z = \sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{\cos \pi + i \sin \pi} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{3}\right), \quad k = \overline{0, 5}.$$

Це наступні точки:

$$k = 0, \quad z_1 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2};$$

$$k = 1, \quad z_2 = i;$$

$$k = 2, \quad z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2};$$

$$k = 3, \quad z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2};$$

$$k = 4, \quad z_5 = -i;$$

$$k = 5, \quad z_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2};$$

2) функція $f(z)$ аналітична у всіх точках верхньої півплощини, за винятком точок $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}$, $z_2 = i$ і $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}$;

$$3) \quad \sin 2x = \operatorname{Im} e^{i2x}, \quad \lambda = 2 > 0.$$

Тепер запишемо вихідний інтеграл

$$J = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \oint_C \frac{z^3 e^{i2z}}{z^6 + 1} dz = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(2\pi i \sum_{k=1}^3 \operatorname{res} f(z_k) \right).$$

Оскільки для простих полюсів

$$\operatorname{res} f(z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} f(z)(z - z_k),$$

то

$$\begin{aligned}
\operatorname{res} f(z_k) &= \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{z^3 e^{i2z}}{z^6 + 1} (z - z_k) = z_k^3 e^{i2z_k} \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{1}{6z^5} = \\
&= \frac{e^{i2z_k}}{6z_k^2} = \frac{z_k e^{i2z_k}}{6z_k^3} \quad (k = 1, 2, 3); \\
\sum_{k=1}^3 \operatorname{res} f(z_k) &= \frac{1}{6} \left(\frac{z_1 e^{i2z_1}}{z_1^3} + \frac{z_2 e^{i2z_2}}{z_2^3} + \frac{z_3 e^{i2z_3}}{z_3^3} \right) = \\
&= \frac{1}{6} \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2i} e^{i(\sqrt{3}+i)} + \frac{i}{-i} e^{i2i} + \frac{-\sqrt{3} + i}{2i} e^{i(-\sqrt{3}+i)} \right) = \\
&= \frac{1}{6i} \left(\frac{1}{2} (\sqrt{3} + i) (\cos \sqrt{3} + i \sin \sqrt{3}) e^{-1} - i e^{-2} + \frac{1}{2} (-\sqrt{3} + i) (\cos \sqrt{3} - i \sin \sqrt{3}) e^{-1} \right) = \\
&= \frac{1}{6} \left(\frac{\sqrt{3} \sin \sqrt{3} + \cos \sqrt{3}}{e} - \frac{1}{e^2} \right).
\end{aligned}$$

Остаточко маємо

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin 2x}{x^6 + 1} dx = \pi \operatorname{Im} \left(i \frac{1}{6} \frac{e(\sqrt{3} \sin \sqrt{3} + \cos \sqrt{3}) - 1}{e^2} \right) = \\
&= \frac{\pi}{6} \frac{e(\sqrt{3} \sin \sqrt{3} + \cos \sqrt{3}) - 1}{e^2}.
\end{aligned}$$

Обчислення невластних інтегралів, що збігаються у розумінні головного значення:

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} f(x) dx$$

Лема 3 (узагальнена лема Жордана). Якщо функція $f(z)$

1) аналітична скрізь у верхній півплощині, за винятком скінченного числа особливих точок z_1, z_2, \dots, z_k ; $\operatorname{Im} z_k > 0$, $k = \overline{1, n}$;

2) на дійсній осі має скінченне число полюсів x_k , $k = \overline{1, m}$;

3) $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$, $\text{Im } z \geq 0$,

тоді

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \left(\sum_{k=1}^n \text{res} (f(z_k) e^{i\lambda z_k}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \text{res} (f(x_k) e^{i\lambda x_k}) \right).$$

Приклад

Обчислити інтеграл $\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{x} dx$, $(\lambda > 0)$.

Розв'язання

Підінтегральна функція $f(z) = \frac{1}{z}$ задовольняє всім вимогам

леми Жордана, тому що вона:

1) аналітична у всіх точках верхньої півплощини $\text{Im } z > 0$;

2) на дійсній осі має один простий полюс $z = 0$, а в інших точках аналітична;

3) $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0$.

Згідно з лемою Жордана, одержимо

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{x} dx = \pi i \text{res} \frac{e^{i\lambda z}}{z} \Big|_{z=0} = \pi i e^{i\lambda z} \Big|_{z=0} = \pi i.$$

Аудиторне заняття 1.5

1. Встановити характер особливої точки $z = 0$ для функції

$$f(z) = \frac{\cos 2z - 1}{\sin z - z}.$$

2. Визначити характер особливості $z = \infty$ для функції

$$f(z) = z^3 \cdot \left(1 - \frac{2}{z} \right).$$

3. Обчислити інтеграли.

$$3.1. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 7x^2 + 12}.$$

$$3.2. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(3 + \cos x)^2}.$$

$$3.3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3 - 2) \cdot \cos \frac{x}{2}}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

$$3.4. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 5x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx.$$

Самостійна робота 1.5

1. Встановити характер ізольованої особливої точки $z = 0$ для функції $f(z) = \frac{\operatorname{tg} 2z}{z - \sin z}$.

2. Визначити характер особливості $z = \infty$ для функції $f(z) = z^2 \cdot \left(1 - \cos \frac{2}{z}\right)$.

3. Обчислити інтеграли.

$$3.1. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\sqrt{2} + \cos x)^2}.$$

$$3.2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^5}.$$

$$3.3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x + 5}{x^4 + 5x + 6} dx.$$

$$3.4. \int_0^{+\infty} \frac{x \cdot \sin \frac{x}{2}}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx.$$

Відповіді до самостійної роботи 1.5

1. $z = 0$ – полюс другого порядку.

2. $z = \infty$ – усувна особлива точка.

$$3.1. \frac{\pi(4 - \sqrt{3})}{4\sqrt{3}}.$$

$$3.2. \frac{\pi}{2}.$$

$$3.3. -\frac{3\pi}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}}.$$

$$3.4. \frac{\pi}{3} \cdot \left(e^{-5} - \frac{e^{-10}}{6}\right).$$

Модуль 2. ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

Інтегральні перетворення є одним із важливих інструментів розв'язання багатьох задач теорії керування, радіотехніки, динаміки пружних систем та інших наук.

Будь-яке інтегральне перетворення ставить у відповідність функції $f(t)$ так званий образ $F(p)$, який з точністю до позначень у різних інтегральних перетвореннях визначається за формулою виду:

$$F(p) = \int_a^b K(p, t) f(t) dt.$$

Функція $K(p, t)$ називається *ядром перетворення*. Вона визначає перетворення.

Найчастіше в інженерних науках використовують перетворення Лапласа (на ньому засноване операційне числення) і перетворення Фур'є.

Ядром перетворення Лапласа є функція

$$K(p, t) = e^{-pt}, \quad a = 0, \quad b = +\infty,$$

тобто воно має вигляд:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Ядром перетворення Фур'є є функція

$$K(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ipt}, \quad a = -\infty, \quad b = +\infty,$$

таким чином, перетворення Фур'є має вигляд:

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipt} f(t) dt.$$

Основна ідея інтегральних перетворень полягає в наступному:

Нехай деякий процес описується функціями $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., які й потрібно визначити. Між цими функціями встановлені співвідношення – рівняння, які потрібно розв'язати. Часто виявляється, що рівняння, що зв'язують образи шуканих функцій, значно простіші за рівняння, що зв'язують самі функції, і легше знайти спочатку образи шуканих функцій, а потім уже повернутися до самих функцій. А проте важливо правильно підібрати інтегральне перетворення (воно визначається властивостями функцій $f(t)$), скориставшись властивостями перетворення, знайти $F(p)$. І, нарешті, потрібно мати правила й формули, які полегшили б перехід від $F(p)$ до шуканої функції $f(t)$.

2.1. Перетворення Лапласа і його властивості

Визначення

1°. *Перетворенням Лапласа функції дійсного змінного $t \in \mathbb{R}$ називається функція комплексного змінного p , що визначається рівністю*

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (6)$$

2°. Очевидно, що не для кожної функції $f(t)$ такий інтеграл збігається. Зазвичай на функцію $f(t)$ накладаються такі обмеження:

- 1) $f(t) = 0$ при $t < 0$ ($f(0) = f(+0)$);
- 2) на кожному скінченному проміжку $f(t)$ має скінченне число розривів I роду;
- 3) при $t \rightarrow +\infty$ функція $f(t)$ має скінченний порядок зростання, тобто $\exists M > 0$, $\exists S \geq 0$ такі, що $|f(t)| \leq Me^{St}$.

Інфімум значень S , за яких ця нерівність виконується, називається *показником зростання* і позначається S_0 .

Функції, що задовольняють умовам 1), 2) і 3), називають *оригіналами*.

Найпростішою функцією-оригіналом є так звана одинична функція Хевисайда

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

3°. Якщо $f(t)$ – оригінал, то інтеграл у рівності (6) збігається абсолютно й рівномірно в півплощині $\operatorname{Re} p > S_0$. Функція $F(p)$ є аналітичною в півплощині $\operatorname{Re} p > S_0$ і називається *зображенням функції* $f(t)$. Відповідність між $f(t)$ і $F(p)$ символічно записується у вигляді:

$$F(p) \xrightarrow{\cdot} f(t) \quad \text{або} \quad f(t) \xleftarrow{\cdot} F(p).$$

Приклади

1. Установити, чи є дані функції оригіналами, та знайти показники росту.

1.1. $f(t) = t^3 \cdot \eta(t)$.

1.2. $f(t) = e^{\alpha t} \eta(t)$.

1.3. $f(t) = e^{t^2} \eta(t)$.

2. Використовуючи формулу (6), знайти зображення наступних оригіналів.

2.1. $f(t) = e^{\alpha t}$.

2.2. $f(t) = t$.

2.3. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2; \\ 1, & t \geq 2. \end{cases}$

Розв'язання

1.1. Функція $f(t) = t^3 \cdot \eta(t)$ при $t < 0$ дорівнює нулю, при $t > 0$ неперервна.

При $t \rightarrow +\infty$ функція $f(t) = t^3$ зростає повільніше за e^{St}
 $\forall S > 0$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3}{e^{St}} = 0, \text{ із чого випливає, що}$$

$$\forall S > 0 \exists M(S), \text{ що } t^3 < M \cdot e^{St}, t > 0.$$

Отже, показник росту функції $f(t) = t^3$ становить

$$S_0 = \inf_{S > 0} S = 0.$$

Таким чином, функція $f(t) = t^3 \cdot \eta(t)$ є оригіналом, її показник росту $S_0 = 0$.

1.2. Очевидно, що функція $f(t) = e^{\alpha t} \eta(t)$ при $t < 0$ дорівнює нулю та неперервна при $t > 0$.

Крім того

$$e^{\alpha t} \leq e^{St}, \forall S > \alpha.$$

$S_0 = \inf_{S > \alpha} S = \alpha$, а виходить, $f(t) = e^{\alpha t} \eta(t)$ є оригіналом з показником росту $S_0 = \alpha$.

1.3. Очевидно, що функція $f(t) = e^{t^2} \eta(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ росте швидше, ніж $e^{\sigma t} \forall \sigma > 0$: $e^{t^2} > e^{\sigma t}$, а виходить, не є оригіналом.

2.1. Було показано, що функція $f(t) = e^{\alpha t}$ є оригіналом. Знайдемо її зображення, використовуючи визначення.

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-p)t} dt = \\ &= \frac{e^{(\alpha-p)t}}{\alpha-p} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{\alpha-p} = \frac{1}{p-\alpha}, \quad \operatorname{Re} p > \alpha. \end{aligned}$$

$$e^{\alpha t} \leftarrow \frac{1}{p - \alpha}, \quad \operatorname{Re} p > \alpha.$$

2.2. Функція $f(t) = t$, як і будь-який многочлен, є оригіналом,

$$t \leftarrow \int_0^{+\infty} t \cdot e^{-pt} dt = \left\| \begin{array}{l} \int u dv = uv - \int v du \\ u = t, \quad du = dt \\ dv = e^{-pt} dt, \quad v = -\frac{1}{p} e^{-pt} \end{array} \right\| =$$

$$= -\frac{t}{p} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p^2} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p^2}.$$

Отже, $t \leftarrow \frac{1}{p^2}$, $\operatorname{Re} p > 0$.

2.3. У цьому випадку функція $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2; \\ 1, & t \geq 2 \end{cases}$ має розрив (стрибок у точці $t = 2$), (див. рис. 20).

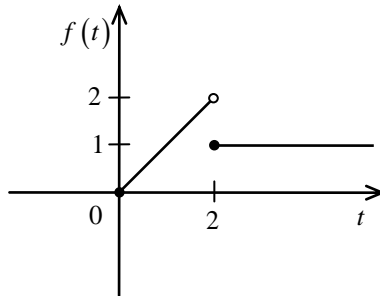


Рисунок 20

При обчисленні зображення за формулою (6) проміжок інтегрування розбивають:

$$f(t) \leftarrow \int_0^2 t \cdot e^{-pt} dt + \int_2^{+\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = -\frac{t}{p} \cdot e^{-pt} \Big|_0^2 + \frac{1}{p} \int_2^{+\infty} e^{-pt} dt - \frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_2^{+\infty} =$$

4) **теорема запізнювання.** Зсуву оригіналу на τ відповідає множення зображення на $e^{-p\tau}$:

$$f(t-\tau)\eta(t-\tau) \leftarrow \dot{-} e^{-p\tau} F(p), \operatorname{Re} p > \tau;$$

5) **теорема про диференціювання оригіналу.** Якщо $f(t)$ та її похідні до порядку n є оригіналами, то

$$f^{(k)}(t) \leftarrow \dot{-} p^k F(p) - \left(p^{k-1} f(0) + p^{k-2} f'(0) + \dots + f^{(k-1)}(0) \right) \quad \forall k \leq n,$$

зокрема,

$$f'(t) \leftarrow \dot{-} pF(p) - f(0), \operatorname{Re} p > \sigma_0;$$

6) **теорема про диференціювання зображення.** Якщо $f(t) \leftarrow \dot{-} F(p)$, то

$$(-t) f(t) \leftarrow \dot{-} F'(p),$$

тобто диференціювання зображення приводить до множення оригіналу на $(-t)$.

Застосовуючи теорему про диференціювання зображення кілька разів послідовно, одержимо

$$\begin{aligned} t^2 f(t) &\leftarrow \dot{-} F''(p), \\ &\dots\dots\dots \\ (-1)^k t^k f(t) &\leftarrow \dot{-} F^{(k)}(p); \end{aligned}$$

7) **теорема про інтегрування зображення.** Якщо

$\int_p^{+\infty} F(p) dp$ збігається й $f(t) \leftarrow \dot{-} F(p)$, то

$$\frac{f(t)}{t} \leftarrow \dot{-} \int_p^{+\infty} F(p) dp,$$

тобто інтегрування зображення від p до $+\infty$ призводить до ділення оригіналу на t ;

8) *теорема про інтегрування оригіналу.* Якщо

$$f(t) \leftarrow \dot{\leftarrow} F(p),$$

то

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \leftarrow \dot{\leftarrow} \frac{F(p)}{p},$$

тобто інтегрування оригіналу призводить до ділення зображення на p ;

9) *теорема про зображення згортки.* Згортці оригіналів відповідає добуток зображень:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \leftarrow \dot{\leftarrow} F_1(p) \cdot F_2(p).$$

Зображення багатьох функцій можна обчислити, використовуючи властивості перетворення Лапласа.

Приклади

1. Знайти зображення функцій.

1.1. $f(t) = \frac{\sin^2 t}{t}.$

1.2. $f(t) = t^2 \cos t.$

1.3. $f(t) = \int_0^t t^2 e^{-t} dt.$

1.4. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1; \\ (t^2 + 1), & t \in (1; 2); \\ 0, & t > 2. \end{cases}$

Розв'язання

1.1. Наявність t у знаменнику говорить про можливість використання теореми про інтегрування зображення. Знайти зображення $\sin^2 t$ можна, скориставшись теоремою лінійності та відомим зображенням $\cos 2t$:

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2} \leftarrow \dot{\leftarrow} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 4} \right).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 t}{t} &\leftarrow \frac{1}{2} \int_p^{+\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4} \right) dp = \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln p - \frac{1}{2} \ln(p^2+4) \right) \Big|_p^{+\infty} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{p}{\sqrt{p^2+4}} \Big|_p^{+\infty} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{p^2+4}}{p}. \end{aligned}$$

1.2. Дана функція є добутком t^2 і $\cos t$. Тут можна скористатися теоремою про диференціювання зображення:

$$t^2 f(t) \leftarrow (F(p))''.$$

$$\cos t \leftarrow \frac{p}{p^2+4},$$

$$t^2 \cos t \leftarrow \left(\frac{p}{p^2+4} \right)'' = \left(\frac{4-p^2}{(p^2+4)^2} \right)' = \frac{2p^3-24p}{(p^2+4)^3}.$$

1.3. У випадку, коли $f(t) = \int_0^t t^2 e^{-t} dt$, використовуються відразу

дві теореми: про диференціювання зображення (наявність многочлена t^2) і про інтегрування оригіналу:

$$e^{-t} \leftarrow \frac{1}{p+1},$$

$$t^2 e^{-t} \leftarrow \left(\frac{1}{p+1} \right)'' = \frac{2}{(p+1)^3},$$

$$\int_0^t t^2 e^{-t} dt = \frac{1}{p} \cdot \frac{2}{(p+1)^3}.$$

1.4. Тут функція $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1; \\ (t^2 + 1), & t \in (1; 2); \\ 0, & t > 2. \end{cases}$ має розрив (див. рис. 21).

Її зручно записувати за допомогою функції Хевісайда

$$f(t) = (t^2 + 1)\eta(t-1) - (t^2 + 1)\eta(t-2).$$

У першому доданку множник $(t^2 + 1)$ розкладемо по степенях $(t-1)$, у другому по степенях $(t-2)$:

$$t^2 + 1 = (t-1)^2 + 2(t-1) + 2,$$

$$t^2 + 1 = (t-2)^2 + 4(t-2) + 5.$$

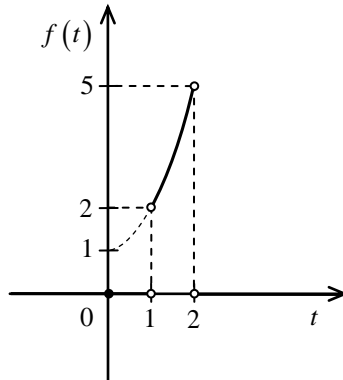


Рисунок 21

Таким чином,

$$f(t) = \left((t-1)^2 + 2(t-1) + 2 \right) \eta(t-1) - \left((t-2)^2 + 4(t-2) + 5 \right) \eta(t-2) \leftarrow \dots$$

$$\leftarrow \dots \left(\frac{1}{p^3} + \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p} \right) \cdot e^{-p} - \left(\frac{1}{p^3} + \frac{4}{p^2} + \frac{5}{p} \right) \cdot e^{-2p}$$

(за теоремою запізнювання).

Для зручності можна скласти таблицю оригіналів основних елементарних функцій та їх зображень.

$$1 \cdot \eta(t) \leftarrow \frac{1}{p},$$

$$t \cdot \eta(t) \leftarrow \frac{1}{p^2},$$

$$t^2 \cdot \eta(t) \leftarrow \frac{2}{p^3},$$

$$t^n \cdot \eta(t) \leftarrow \frac{n!}{p^{n+1}},$$

$$e^{-\alpha t} \cdot \eta(t) \leftarrow \frac{1}{p + \alpha},$$

$$\sin \alpha t \cdot \eta(t) \leftarrow \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2},$$

$$\cos \alpha t \cdot \eta(t) \leftarrow \frac{p}{p^2 + \alpha^2},$$

$$\operatorname{sh} \alpha t \cdot \eta(t) \leftarrow \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2},$$

$$\operatorname{ch} \alpha t \cdot \eta(t) \leftarrow \frac{p}{p^2 - \alpha^2},$$

$$e^{-\alpha t} \sin \beta t \cdot \eta(t) \leftarrow \frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2},$$

$$e^{-\alpha t} \cos \beta t \cdot \eta(t) \leftarrow \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \beta^2},$$

$$e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \beta t \cdot \eta(t) \leftarrow \frac{\beta}{(p + \alpha)^2 - \beta^2},$$

$$e^{-\alpha t} \operatorname{ch} \beta t \cdot \eta(t) \leftarrow \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 - \beta^2}.$$

Обернене перетворення Лапласа

9°. Якщо функцію $F(p)$ ($p = s + i\sigma$) визначено в півплощині $\operatorname{Re} p = s > s_0$ і вона задовольняє наступним умовам:

- 1) вона аналітична у півплощині $\operatorname{Re} p > s_0$;
- 2) при $|p| \rightarrow \infty$ функція $F(p) \rightarrow 0$ рівномірно відносно $\arg(p - s_0)$;

3) для всіх $s > s_0$ невластний інтеграл $\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} |F(p)| dp < M$, де M – деяке додатне число, то оригінал $f(t)$, відповідний до зображення $F(p)$, визначається за формулою

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp \quad (s > s_0, t > 0). \quad (7)$$

Оригінал $f(t)$ однозначно визначається за своїм зображенням $F(p)$ з точністю до значень у точках розриву $f(t)$.

10°. Інтеграл у формулі (7) можна обчислити за допомогою леми Жордана

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}(e^{pt} F(p), p_k) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}(e^{pt} F(p), p_k).$$

11°. Якщо $F(p)$ являє собою правильний раціональний дріб

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)},$$

де $Q(p)$ має прості корені p_1, p_2, \dots, p_n і ступінь $Q(p)$ більший за ступінь $P(p)$, формула виходить особливо простою:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}\left(\frac{P(p)}{Q(p)} e^{pt}, p_k\right) = \sum_{k=1}^n \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (8)$$

12°. Якщо корені знаменника кратні:

p_1 кратності n_1 ,

p_2 кратності n_2 ,

.....

p_l кратності n_l ,

то формула має вигляд:

$$f(t) = \sum_{k=1}^l \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{n \rightarrow p_k} \frac{d^{n_k - 1}}{dp^{n_k - 1}} \left(F(p) e^{pt} (p - p_k)^{n_k} \right).$$

Приклади

1. Знайти оригінали даних зображень.

1.1. $F(p) = \frac{1}{p^2 + 1} (e^{-2p} + 2e^{-3p} + 3e^{-4p})$.

1.2. $F(p) = \frac{2p^3 + p^2 + 2p + 2}{p^5 + 2p^4 + 2p^3}$.

1.3. $F(p) = \frac{n!}{p(p+1)\dots(p+n)}$.

Розв'язання

1.1. Розкриємо дужки та скористаємося властивістю лінійності перетворення Лапласа:

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 1} \cdot e^{-2p} + 2 \cdot \frac{1}{p^2 + 1} \cdot e^{-3p} + 3 \cdot \frac{1}{p^2 + 1} \cdot e^{-4p}.$$

Наявність множників e^{-2p} , e^{-3p} , e^{-4p} указує на необхідність застосування теореми запізнювання:

$$\frac{1}{p^2+1} \xrightarrow{\cdot} \sin t,$$

$$e^{-2p} \cdot \frac{1}{p^2+1} \xrightarrow{\cdot} \sin(t-2)\eta(t-2),$$

$$e^{-3p} \cdot \frac{1}{p^2+1} \xrightarrow{\cdot} \sin(t-3)\eta(t-3),$$

$$e^{-4p} \cdot \frac{1}{p^2+1} \xrightarrow{\cdot} \sin(t-4)\eta(t-4).$$

Отже,

$$f(t) = \sin(t-2)\eta(t-2) + 2\sin(t-3)\eta(t-3) + 3\sin(t-4)\eta(t-4) =$$

$$= \begin{cases} 0, & t < 2; \\ \sin(t-2), & t \in (2, 3); \\ \sin(t-2) + 2\sin(t-3), & t \in (3, 4); \\ \sin(t-2) + 2\sin(t-3) + 3\sin(t-4), & t > 4. \end{cases}$$

1.2. У цьому випадку $F(p) = \frac{2p^3 + p^2 + 2p + 2}{p^5 + 2p^4 + 2p^3}$ – правильний раціональний дріб.

Розкладемо знаменник на найпростіші множники

$$p^5 + 2p^4 + 2p^3 = p^3(p^2 + 2p + 2) = p^3((p+1)^2 + 1)$$

і представимо $F(p)$ у вигляді суми двох дробів:

$$F(p) = \frac{2p^3 + p^2 + 2p + 2}{p^5 + 2p^4 + 2p^3} = \frac{2}{(p+1)^2 + 1} + \frac{1}{p^3}.$$

Використовуючи тепер відомі формули, одержимо:

$$f(t) = 2e^{-t} \cdot \sin t + \frac{t^2}{2}.$$

1.3. У цьому випадку $F(p) = \frac{n!}{p(p+1)\dots(p+n)}$ має простий

полос у точках $0, -1, \dots, -n$.

Лишки в кожній із цих точок обчислюються легко:

$$\operatorname{res}(F(p) \cdot e^{pt}, -k) = \frac{n! e^{-kt}}{(-k) \cdot (-k+1) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-k)} = \frac{n! e^{-kt}}{k!(n-k)!}.$$

Використовуючи формулу (7), одержимо

$$f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{n! e^{-kt}}{k!(n-k)!}.$$

13°. **Перша теорема розкладання.** Якщо $F(p)$ аналітична в нескінченно віддаленій точці, дорівнює в ній нулю, і якщо її розклад у ряд Лорана в околі нескінченності має вигляд

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{n+1}}{p^{n+1}},$$

то функція

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{n+1}}{n!} t^n, \quad t > 0.$$

Приклад

Знайти оригінал, що відповідає зображенню

$$F(p) = \frac{1}{p} \cdot \cos \frac{1}{p}.$$

Розв'язання

В околі точки $p = \infty$ $\cos \frac{1}{p}$ розкладається в ряд по степенях $\frac{1}{p}$:

$$\cos \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{2!p^2} + \frac{1}{4!p^4} - \frac{1}{6!p^6} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!p^{2n-2}} + \dots$$

Тоді

$$\frac{1}{p} \cdot \cos \frac{1}{p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2!p^3} + \frac{1}{4!p^5} - \frac{1}{6!p^7} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!p^{2n-1}} + \dots$$

Відповідно до першої теореми розкладання

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot t^{2n-2}}{(2n-2)!(2n-2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot t^{2n-2}}{((2n-2)!)^2}, \quad t > 0.$$

Аудиторне заняття 2.1

1. Установити, які з функцій є оригіналами.

1.1. $f(t) = \frac{1}{t^2 + 4} \eta(t)$. 1.2. $f(t) = t \cdot \sin \frac{1}{t} \eta(t)$.

1.3. $f(t) = e^{-t^2} \eta(t)$. 1.4. $f(t) = \frac{1}{t-4} \eta(t)$.

2. Знайти зображення $F(p)$ для заданих функцій $f(t)$.

2.1. $f(t) = \frac{\cos^2 t}{t}$. 2.2. $f(t) = \cos^2(t-b) \eta(t-b)$.

2.3. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1; \\ t^3, & t \in (1, 2); \\ 0, & t > 2. \end{cases}$ 2.4. $\int_0^t \frac{\text{sh } \tau}{\tau} d\tau$.

2.5. $\int_0^t \frac{\text{ch } \tau - 1}{\tau} d\tau$.

3. Знайти оригінали за даними зображеннями.

3.1. $F(p) = \frac{P}{(p+1)^2}$.

3.2. $F(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

$$3.3. F(p) = \frac{6}{p(p+1)(p+2)(p+3)}.$$

$$3.4. F(p) = \frac{p}{p^2+4} - \frac{2p \cdot e^{-p}}{p^2-4}.$$

$$3.5. F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2-1} - \frac{p \cdot e^{-2p}}{p^2-4}.$$

Самостійна робота 2.1

1. Установити, чи є дані функції оригіналами. Якщо так, то знайти показники росту.

$$1.1. f(t) = t^2 \eta(t). \quad 1.2. f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1; \\ \frac{1}{\sqrt{t}}, & t > 1. \end{cases}$$

$$1.3. f(t) = \ln(t+1) \eta(t). \quad 1.4. f(t) = e^{2t^2} \eta(t).$$

2. Знайти зображення наступних функцій.

$$2.1. f(t) = e^{-t} + 2e^{-2t} + t^3. \quad 2.2. f(t) = t^2 \cdot \text{ch } 2t.$$

$$2.3. f(t) = e^{-t} \cdot \sin^2 t. \quad 2.4. f(t) = \eta(t-1) e^{t-1}.$$

$$2.5. \int_0^t \frac{1-e^\tau}{\tau} d\tau.$$

3. Знайти оригінали за даними зображеннями.

$$3.1. F(p) = \frac{p}{p^2+4p+5}.$$

$$3.2. F(p) = \frac{1}{(p^4-1)^2}.$$

$$3.3. F(p) = \frac{p}{p^4-5p^2+4}.$$

$$3.4. F(p) = \frac{e^{-2p}}{(p+1)^3}.$$

Відповіді до самостійної роботи 2.1

1.1. Так.

1.2. Так.

1.3. Так.

1.4. Ні.

$$2.1. F(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{2}{p+2} + \frac{6}{p^4}.$$

$$2.2. F(p) = \frac{2p^3 + 24p}{(p^2 - 4)^3}.$$

$$2.3. F(p) = \frac{2}{(p+1) \cdot (p^2 + 2p + 5)}.$$

$$2.4. F(p) = \frac{e^{-p}}{p-1}.$$

$$2.5. F(p) = \frac{1}{p} \cdot \ln \left| \frac{p-1}{p} \right|.$$

$$3.1. f(t) = e^{-2t} \cdot \cos t - 2e^{-2t} \cdot \sin t.$$

$$3.2. f(t) = \frac{1}{8}t \cdot \operatorname{ch} t - \frac{3}{8} \operatorname{sh} t + \frac{3}{8} \sin t - \frac{1}{8}t \cdot \cos t.$$

$$3.3. f(t) = -\frac{1}{3} \operatorname{ch} t + \frac{1}{3} \operatorname{ch} 2t.$$

$$3.4. f(t) = \frac{1}{2}(t-2)^2 \cdot e^{2-t} \cdot \eta(t-2).$$

2.2. Застосування перетворення Лапласа

Розв'язання звичайних диференціальних рівнянь

Одним з найважливіших застосувань операційного числення, заснованого на перетворенні Лапласа, є розв'язання лінійних диференціальних рівнянь із постійними коефіцієнтами.

1°. Нехай потрібно знайти частинний розв'язок рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

$$x''(t) + a_1 \cdot x'(t) + a_2 \cdot x(t) = f(t)$$

за початкових умов

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0.$$

Операційний метод розв'язання такої задачі полягає в тому, що шукану функцію $x(t)$ й праву частину $f(t)$ вважають оригіналами, і від рівняння, що зв'язує оригінали, переходять до рівняння, що зв'язує їхні зображення, використовуючи при цьому теорему про диференціювання оригіналу:

$$p^2 X(p) - px_0 - x'_0 + a_1(pX(p) - x_0) + a_2 X(p) = F(p),$$
$$(X(p) \xrightarrow{\cdot} x(t); F(p) \xrightarrow{\cdot} f(t)).$$

Звідки

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2} + \frac{px_0 + x'_0 + a_1 x_0}{p^2 + a_1 p + a_2}.$$

Вертаючись тепер до оригіналу $x(t)$, одержимо шукану функцію.

Приклад

Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$x'' + 4x' + 4x = t^3 e^{-2t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$$

Розв'язання

Нехай

$$\begin{aligned}x(t) &\stackrel{\cdot}{\leftarrow} X(p), \\x'(t) &\stackrel{\cdot}{\leftarrow} pX(t) - 1, \\x''(t) &\stackrel{\cdot}{\leftarrow} p^2X(p) - p - 2.\end{aligned}$$

Складемо операторне рівняння

$$p^2X(p) - p - 2 + 4pX(p) - 4 + 4X(p) = \frac{3!}{(p+2)^4},$$

$$t^3 e^{-2t} \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{6}{(p+2)^4};$$

$$(p+2)^2 X(p) = \frac{6}{(p+2)^4} + p + 6,$$

$$X(p) = \frac{6}{(p+2)^6} + \frac{p+6}{(p+2)^2} = \frac{6}{(p+2)^6} + \frac{1}{p+2} + \frac{4}{(p+2)^2};$$

$$X(p) \stackrel{\cdot}{\rightarrow} x(t) = \frac{6}{5!} t^5 e^{-2t} + e^{-2t} + 4te^{-2t} = e^{-2t} \left(1 + 4t + \frac{t^5}{20} \right).$$

2°. Якщо початкові умови задано в точці $x = a$ ($a \neq 0$), то схема розв'язання задачі залишається тією ж, але попередньо потрібно зробити заміну змінної $t = a + \tau$.

Приклад

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $x'' + x = e^t$ за початкових умов: $x(1) = 1$, $x'(1) = 0$.

Розв'язання

Покладемо $t = \tau + 1$ і позначимо $x(\tau + 1) = x_1(\tau)$. Тоді

$$x_1'' + x_1 = e^{\tau+1}, \quad x_1(0) = 1, \quad x_1'(0) = 0.$$

Нехай

$$X(p) \xrightarrow{\cdot} x_1(\tau),$$

тоді

$$x_1'' \xleftarrow{\cdot} p^2 X(p) - p,$$

$$e^{\tau+1} \xleftarrow{\cdot} \frac{e}{p-1}$$

і операторне рівняння набуває вигляду:

$$p^2 X(p) - p + X(p) = \frac{e}{p-1}.$$

Звідки

$$X(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{e}{(p-1)(p^2+1)} = \frac{p}{p^2+1} + \frac{e}{2} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+1} \right).$$

Повертаючись до оригіналу, одержимо

$$x_1(\tau) = \frac{e}{2} e^\tau + \left(1 - \frac{e}{2} \right) \cos \tau - \frac{e}{2} \sin \tau.$$

Тепер залишилося тільки повернутися до змінної t :

$$x(t) = \left(1 - \frac{e}{2} \right) \cos(t-1) - \frac{e}{2} \sin(t-1) + \frac{e^t}{2}.$$

Розв'язання лінійних диференціальних рівнянь із постійними коефіцієнтами й розривною правою частиною

3°. На практиці доводиться зустрічатися з диференціальними рівняннями, права частина яких задана різними законами на різних проміжках зміни аргументу і має скінченне число розривів першого роду.

Якщо права частина є оригіналом, то операційний метод можна застосовувати і до таких рівнянь, але розв'язки таких рівнянь мають деякі особливості. Зокрема, сам розв'язок $x(t)$ і всі похідні, крім старшої похідної, є неперервними. Старша похідна повинна мати розриви першого роду в тих самих точках, що й права частина $f(t)$.

Приклад

Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$x''(t) + x(t) = f(t),$$

що задовольняє початковим умовам $x(0) = x'(0) = 0$, якщо $f(t)$ має вигляд (див. рис. 22):

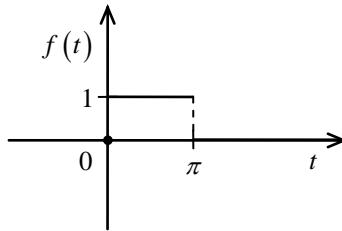


Рисунок 22

Розв'язання

Функцію $f(t)$ слід виразити через функцію Хевісайда:

$$f(t) = \eta(t) - \eta(t - \pi).$$

Тоді

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{e^{-p\pi}}{p} = \frac{1 - e^{-p\pi}}{p}$$

і операторне рівняння набуває вигляду:

$$p^2 X(p) + X(p) = \frac{1 - e^{-p\pi}}{p}.$$

Звідки

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{1 - e^{-p\pi}}{p(p^2 + 1)} = \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1} \right) (1 - e^{-p\pi}), \\ &\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1} \right) \xrightarrow{\cdot} (1 - \cos t) \eta(t), \\ &\frac{e^{-p\pi}}{p(p^2 + 1)} \xrightarrow{\cdot} (1 - \cos(t - \pi)) \eta(t - \pi). \end{aligned}$$

Остаточно одержимо

$$x(t) = (1 - \cos t) \eta(t) - (1 - \cos(t - \pi)) \eta(t - \pi) = \begin{cases} 1 - \cos t, & t \in (0, \pi); \\ \cos(t - \pi) - \cos t, & t > \pi. \end{cases}$$

У точці $t = \pi$ $x(t)$ і $x'(t)$ неперервні, $x''(t)$ у точці $x = \pi$ має розрив першого роду.

Таким чином, отриманий розв'язок задовольняє рівнянню у всіх точках, крім точки $x = \pi$.

Розв'язання лінійних систем диференціальних рівнянь із постійними коефіцієнтами

4°. Операційний метод розв'язання одного лінійного диференціального рівняння майже без змін переноситься на розв'язання систем таких рівнянь.

Приклад

Знайти розв'язок лінійної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} 2x' + y' + x = 1; \\ x' + 3y' + 2y = 0 \end{cases}$$

за початкових умов $x(0) = y(0) = 0$.

Розв'язання

Нехай $X(p)$ і $Y(p)$ – зображення $x(t)$ і $y(t)$ відповідно. Тоді для зображень одержимо систему:

$$\begin{cases} 2p \cdot X(p) + p \cdot Y(p) + X(p) = \frac{1}{p}, \\ p \cdot X(p) + 3p \cdot Y(p) + 2Y(p) = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо

$$X(p) = \frac{3p+2}{p(5p^2+7p+2)}, \quad Y(p) = \frac{-1}{5p^2+7p+2}.$$

$$\begin{aligned} y(t) &\leftarrow \mathcal{L}^{-1} Y(p) = \frac{-1}{5 \left(\left(p + \frac{7}{10} \right)^2 + \frac{2}{5} - \frac{49}{100} \right)} = \\ &= -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(p+0,7)^2 - 0,09} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{0,3}{(p+0,7)^2 - (0,3)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow y(t) = -\frac{2}{3} \cdot e^{-0,7t} \cdot \text{sh}(0,3 \cdot t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{3}{5 \left((p+0,7)^2 - (0,3)^2 \right)} + \frac{1}{p} - \frac{5p+7}{5p^2+7p+2} = \\ &= 2 \cdot \frac{0,3}{(p+0,7)^2 - (0,3)^2} + \frac{1}{p} - \frac{p+0,7}{(p+0,7)^2 - (0,3)^2} - \frac{0,7}{(p+0,7)^2 - (0,3)^2}, \end{aligned}$$

а значить

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 \cdot e^{-0,7t} \cdot \text{sh}(0,3 \cdot t) + 1 - e^{-0,7t} \cdot \text{ch}(0,3 \cdot t) - \frac{7}{3} e^{-0,7t} \cdot \text{sh}(0,3 \cdot t) = \\ &= 1 - \frac{1}{3} e^{-0,7t} \cdot \text{sh}(0,3 \cdot t) - e^{-0,7t} \cdot \text{ch}(0,3 \cdot t). \end{aligned}$$

5°. Якщо праві частини системи рівнянь розривні, то отримані розв'язки будуть неперервні, а їх похідні будуть мати розриви в точках розриву правих частин.

Приклад

Знайти розв'язок лінійної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' + y = f_1(t); \\ y' + x = f_2(t), \end{cases} \quad f_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0,1); \\ 0, & t > 1, \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0,2); \\ 0, & t > 2, \end{cases}$$

за нульових початкових умов $x(0) = y(0) = 0$.

Розв'язання

Система операторних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} p \cdot X(p) + Y(p) = \frac{1 - e^{-p}}{p}; \\ X(p) + p \cdot Y(p) = \frac{1 - e^{-2p}}{p}. \end{cases}$$

Звідки

$$X(p) = \frac{1}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p^2-1} + \frac{e^{-2p}}{p(p^2-1)},$$

$$Y(p) = \frac{1}{p(p+1)} + \frac{e^{-p}}{p(p^2-1)} - \frac{e^{-2p}}{p^2-1}.$$

Повертаючись до оригіналів і застосовуючи теорему запізнювання, одержимо

$$x(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t}, & t \in (0,1); \\ 1 - e^{-t} - \text{sh}(t-1), & t \in (1,2); \\ -e^{-t} - \text{sh}(t-1) + \text{ch}(t-2), & t > 2, \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t}, & t \in (0,1); \\ -e^{-t} + \text{ch}(t-1), & t \in (1,2); \\ -e^{-t} + \text{ch}(t-1) - \text{sh}(t-2), & t > 2. \end{cases}$$

У точках $t=1$ і $t=2$ функції $x(t)$ й $y(t)$ неперервні, похідні $x'(t)$ та $y'(t)$ у точках $t=1$, $t=2$ мають розриви першого роду, зокрема

$$x'(1-0) = \frac{1}{e}, \quad x'(1+0) = \frac{1}{e} - 1.$$

Обчислення невласних інтегралів

6°. У деяких випадках досить складні невласні інтеграли, що залежать від параметра

$$I(t) = \int_0^{+\infty} f(t, x) dx$$

можна обчислити за допомогою операційного методу, використовуючи той факт, що зображення $I(t) - F(I(t))$ – може виявитися більш простою функцією, ніж $I(t)$.

Приклад

$$\text{Обчислити } I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos xt}{x^2} dx.$$

Розв'язання

Обчислимо зображення $I(t)$:

$$\begin{aligned} F(I(t)) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos xt}{x^2} dx \right) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-pt} (1 - \cos xt) \cdot \frac{dx}{x^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \int_0^{+\infty} e^{-pt} (1 - \cos xt) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} F(1 - \cos xt) \cdot \frac{1}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + x^2} \right) \cdot \frac{1}{x^2} dx = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{p(x^2 + p^2)} dx = \frac{1}{p^2} \arctg \frac{x}{p} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2p^2}. \end{aligned}$$

Повертаючись тепер до оригіналу $I(t)$, одержимо:

$$I(t) = \frac{\pi}{2} t.$$

7°. Деякі невласні інтеграли можна обчислити, використовуючи теорему про інтегрування зображень.

Нехай $f(t) \stackrel{\cdot}{\leftarrow} F(p)$ і нехай збігається невласний інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt . \text{ Тоді}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} F(p) dp \quad (5)$$

(інтеграл праворуч обчислюють вздовж додатної півосі).

Приклад

Обчислити $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} \cdot \sin bt}{t} dt \quad (a > 0, b > 0)$.

Розв'язання

Оскільки

$$\sin bt \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{b}{p^2 + b^2}, \text{ то}$$

$$e^{-at} \cdot \sin bt \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{b}{(p+a)^2 + b^2}.$$

За формулою (5) маємо

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} \cdot \sin bt}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{b}{(p+a)^2 + b^2} dp = b \cdot \frac{1}{b} \arctg \frac{p+a}{b} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{a}{b}.$$

Аудиторне заняття 2.2

1. Обчислити інтеграли.

1.1. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin at \cdot \sin bt}{t} dt, a, b > 0.$ 1.2. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \sin 3t dt.$

2. Розв'язати диференціальні рівняння за даних початкових умов.

2.1. $x'' + x = 2 \sin t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$.

2.2. $x''(t) - x'(t) = -2t$, $x(2) = 8$, $x'(2) = 6$.

2.3. $x'' + x = f(t)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, де $f(t)$ (див. рис. 23).

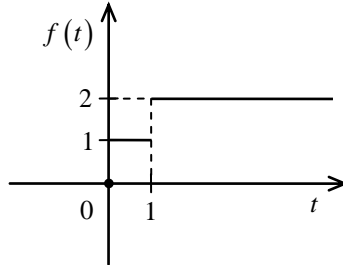


Рисунок 23

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь за даних початкових умов

$$\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t; \\ x'' + 2y' + x = 0, \end{cases}$$

$$x(0) = y(0) = x'(0) = 0.$$

Самостійна робота 2.2

1. Обчислити інтеграли.

1.1. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t} \cdot \sin 3t}{t} dt$.

1.2. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2t - \cos 3t}{t} dt$.

2. Розв'язати диференціальні рівняння за даних початкових умов.

2.1. $x''' + x' = \cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -2$, $x''(0) = 0$.

2.2. $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 2e^{1-t}$, $x(1) = 1$, $x'(1) = -1$.

2.3. $x'' + 9x = f(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, де $f(t)$ (див. рис. 24).

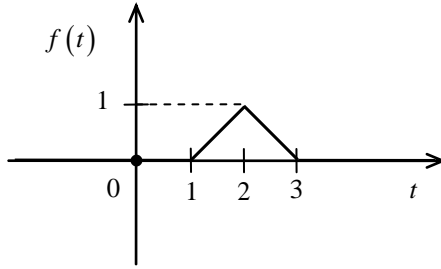


Рисунок 24

3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь за даних початкових умов

$$\begin{cases} x' = 3y - x; \\ y' = y + x + e^t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1.$$

Відповіді до самостійної роботи 2.2

1.1. $\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{2}{3}$.

1.2. $2 \cdot \ln \frac{3}{2}$.

2.1. $x(t) = -\frac{5}{2} \sin t + \frac{1}{2} t \cdot \cos t$.

2.2. $x(t) = \frac{1}{2} (t^2 - 2t + 3) \cdot e^{1-t}$.

2.3. $x(t) = \frac{1}{3} \sin 3t + \left(\frac{1}{9} (t-1) - \frac{1}{27} \sin 3(t-1) \right) \cdot \eta(t-1) -$
 $-\left(\frac{2}{9} (t-2) - \frac{2}{27} \sin 3(t-2) \right) \cdot \eta(t-2) +$
 $+\left(\frac{1}{9} (t-3) - \frac{1}{9} \sin 3(t-3) \right) \cdot \eta(t-3).$

3.
$$\begin{cases} x(t) = 2 \operatorname{ch} 2t - e^t, \\ y(t) = -\frac{2}{3} e^t + e^{2t} - \frac{1}{3} e^{-2t}. \end{cases}$$

2.3. Інтегральне перетворення Фур'є. Застосування інтегрального перетворення Фур'є

1°. Якщо функція $f(x)$ задана на всій дійсній осі та абсолютно інтегрована на $(-\infty; +\infty)$, тобто $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$, то можна визначити її Фур'є перетворення, яке позначають $f(p)$:

$$f(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ipx} dx, \quad p \in (-\infty; +\infty).$$

Відносно Фур'є-перетворення функція $f(x)$ називається Фур'є-образом. Співвідношення між $f(x)$ і $f(p)$ позначають наступним чином

$$f(x) \leftrightarrow f(p).$$

2°. Якщо $f(p)$ – Фур'є-перетворення функції $f(x)$ і виконується умова

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty,$$

то за допомогою оберненого перетворення Фур'є можна відновити Фур'є-образ $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(p) e^{ipx} dp, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

3°. Якщо функція $f(x)$ парна, то пряме перетворення Фур'є має вигляд:

$$f(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} f(x) \cdot \cos px dx,$$

а обернене перетворення Фур'є:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} f(p) \cdot \cos px \, dp.$$

У цьому випадку пряме перетворення Фур'є має назву косинус-перетворенням і позначається $f_c(p)$. Таким чином,

$$f_c(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} f(x) \cdot \cos px \, dx,$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} f_c(p) \cdot \cos px \, dp.$$

4°. Якщо функція $f(x)$ непарна, то пряме перетворення Фур'є називають синус-перетворенням і позначають $f_s(p)$:

$$f_s(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} f(x) \cdot \sin px \, dx,$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} f_s(p) \cdot \sin px \, dp.$$

5°. Для парних функцій

$$f(p) = f_c(p),$$

а для непарних:

$$f(p) = i \cdot f_s(p).$$

Приклади

1. Знайти Фур'є перетворення наступних функцій.

$$1.1. f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ 1, & 1 \leq x \leq 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases} \quad 1.2. f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

2. Знайти синус-перетворення Фур'є функції $f(x)$, заданої на $[0; +\infty)$ $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0; \pi]; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$

3. Знайти косинус-перетворення Фур'є для наступних функцій.

1.1. $f(x) = e^{-|x|}$.

1.2. $f(x) = e^{-x^2}$.

Розв'язання

1.1. Функція $f(x)$ абсолютно інтегрована:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \int_1^2 1 \cdot dx = 1.$$

Обчислимо її Фур'є-образ за формулою:

$$\begin{aligned} f(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ipx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^2 e^{-ipx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-ipx}}{-ip} \right|_1^2 = \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-2ip} - e^{-ip}}{-i^2 \cdot p} = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-2ip} - e^{-ip}}{p}. \end{aligned}$$

1.2. У цьому випадку функція також є абсолютно інтегрованою.

Обчислимо її Фур'є-образ за формулою:

$$\begin{aligned} f(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ipx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x e^{-x} e^{-ipx} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x(1+ip)} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x \cdot \frac{e^{-x(1+ip)}}{-(1+ip)} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{(1+ip)} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-x(1+ip)} dx \right) = \\ &= - \frac{1}{(1+ip)^2 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x(1+ip)} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{(1+ip)^2 \cdot \sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

2. У цьому випадку функція $f(x)$ задана тільки на додатній півосі. Продовжуючи її непарним чином, отримуємо абсолютно інтегровну непарну функцію. Її синус-перетворення обчислюють за формулою:

$$\begin{aligned}
 f_s(p) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} f(x) \cdot \sin px \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} \sin x \cdot \sin px \, dx = \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi} (\cos(1-p)x - \cos(1+p)x) \, dx = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{\sin(1-p)x}{1-p} - \frac{\sin(1+p)x}{1+p} \right) \Bigg|_0^{\pi} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{\sin(\pi - \pi p)}{1-p} - \frac{\sin(\pi - \pi p)}{1+p} \right) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{\sin(\pi p)}{1-p} + \frac{\sin(\pi p)}{1+p} \right) = \frac{\sin(\pi p)}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{1}{1-p} + \frac{1}{1+p} \right) = \\
 &= \frac{\sin(\pi p)}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{1-p^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin(\pi p)}{1-p^2}.
 \end{aligned}$$

3.1. Очевидно, що $f(x)$ – парна, абсолютно інтегрована функція. Її косинус-перетворення $f_c(p)$ обчислюється за формулою:

$$\begin{aligned}
 f_c(p) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-|x|} \cdot \cos px \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-|x|} \cdot \frac{e^{ipx} + e^{-ipx}}{2} \, dx = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} (e^{-x(1-ip)} + e^{-x(1+ip)}) \, dx = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{e^{-x(1-ip)}}{-(1-ip)} + \frac{e^{-x(1+ip)}}{-(1+ip)} \right) \Bigg|_0^{+\infty} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{1}{1-ip} + \frac{1}{1+ip} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1+p^2}.
 \end{aligned}$$

3.2. У цьому випадку функція $f(x)$ також є парною і абсолютно інтегрованою:

$$f_c(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot \cos px \, dx.$$

Знайдений інтеграл можна обчислити за допомогою диференціювання за параметром. Хай

$$I(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos px \, dx.$$

Тоді

$$\begin{aligned} I'(p) &= - \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot x \cdot \sin px \, dx = \left\| \begin{array}{l} u = \sin px, \, du = p \cdot \cos px \, dx \\ dv = x \cdot e^{-x^2} \, dx, \, v = -\frac{e^{-x^2}}{2} \end{array} \right\| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sin px \cdot e^{-x^2} \Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{2} p \cdot \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos px \, dx = -\frac{1}{2} p \cdot I(p). \end{aligned}$$

Таким чином, отримано диференціальне рівняння

$$I'(p) = -\frac{1}{2} p \cdot I(p).$$

Інтегруючи це рівняння і враховуючи, що

$$I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

отримаємо остаточно

$$f_c(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{-\frac{p^2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{p^2}{4}}.$$

6°. Перетворення Фур'є має ряд властивостей, які аналогічні властивостям перетворення Лапласа. Ці властивості часто дозволяють облегшити обчислення перетворення Фур'є.

Властивості перетворення Фур'є:

- 1) перетворення Фур'є є лінійним. Якщо

$$f(x) \leftrightarrow f(p), \quad g(x) \leftrightarrow g(p),$$

то

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \leftrightarrow \alpha f(p) + \beta g(p);$$

- 2) справедливою є **теорема подібності**: для будь-якого $\lambda > 0$

$$f(\lambda x) \leftrightarrow \frac{1}{\lambda} f\left(\frac{p}{\lambda}\right),$$

- 3) **теорема зміщення**. Для будь-якого дійсного або комплексного числа a

$$e^{ax} f(x) \leftrightarrow f(p - ia),$$

тобто, множенню оригіналу на e^{ax} відповідає зміщення зображення на a ;

- 4) **теорема запізнювання**. Зсуву оригіналу на τ відповідає множення зображення на $e^{-ip\tau}$:

$$f(x - \tau) \leftrightarrow e^{-ip\tau} f(p), \quad \text{Re } p > \tau;$$

- 5) **теорема про диференціювання оригіналу**. Якщо $f(x)$ та її похідні до порядку n є оригіналами, то

$$f'(x) \leftrightarrow ip f(p), \quad \text{Re } p > \sigma_0;$$

- 6) **теорема про диференціювання зображення**. Якщо $f(x) \leftrightarrow f(p)$, то

$$(-ix) f(x) \leftrightarrow f'(p),$$

тобто диференціювання зображення приводить до множення оригіналу на $(-ix)$.

Застосовуючи теорему про диференціювання зображення кілька разів послідовно, одержимо

$$\begin{aligned}
 -x^2 f(x) &\leftrightarrow f''(p), \\
 &\dots\dots\dots \\
 (-i)^k x^k f(x) &\leftrightarrow f^{(k)}(p);
 \end{aligned}$$

7) **теорема про інтегрування зображення.** Якщо

$\int_p^{+\infty} f(p) dp$ збігається й $f(x) \leftrightarrow f(p)$, то

$$\frac{f(x)}{ix} \leftrightarrow \int_p^{+\infty} f(p) dp,$$

тобто інтегрування зображення від p до $+\infty$ призводить до ділення оригіналу на ix ;

8) **теорема про інтегрування оригіналу.** Якщо

$$f(x) \leftrightarrow f(p),$$

то

$$\int_0^i f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{f(p)}{p},$$

тобто інтегрування оригіналу призводить до ділення зображення на p ;

9) також є вірною **теорема про згортку**

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot g(x-t) dt \leftrightarrow f(p) \cdot g(p);$$

$$f(x) * g(x) \leftrightarrow f(p) * g(p);$$

10) для перетворення Фур'є є справедливою рівність Парсеваля-Ляпунова (аналог відповідної рівності для рядів Фур'є):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(p)|^2 dp.$$

Використання перелічених властивостей часто полегшує обчислення перетворень Фур'є.

Для зручності можна скласти таблицю оригіналів деяких елементарних функцій та їх зображень:

$$\frac{1}{1+x^2} \leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-|p|},$$

$$\begin{cases} \sin x, x \in [0, \pi] \\ 0, x \notin [0, \pi] \end{cases} \leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\pi p)}{1-p^2},$$

$$\begin{cases} \cos x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, x \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \leftrightarrow -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\pi p)}{1-p^2} e^{\frac{\pi}{2}p},$$

$$\frac{\cos x}{1+x^2} \leftrightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (e^{-|p+1|} + e^{-|p-1|}),$$

$$\frac{e^{-ax}}{\sqrt{|x|}} \leftrightarrow \frac{\sqrt{\sqrt{a^2+p^2}+a}}{\sqrt{a^2+p^2}},$$

$$e^{-b^2x^2} \leftrightarrow \frac{1}{b\sqrt{2}} e^{-\frac{p^2}{4b^2}},$$

$$e^{-|x|} \leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+p^2},$$

$$e^{-|ax|} \leftrightarrow |a| \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{p^2+a^2}.$$

Приклади

1. Знайти перетворення Фур'є для наступних функцій.

1.1. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. 1.2. $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+5}$.

1.3. $f(x) = \cos x \cdot e^{-x^2}$.

Розв'язання

1.1. Використаємо табличну формулу

$$\frac{1}{x^2 + 1} \leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{-|p|}$$

і властивість б), яка полягає в тому, що множення функції $f(x)$ на x призводить до ділення на $-ix$ похідної її Фур'є-перетворення.

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2 + 1} &\leftrightarrow -\frac{1}{i} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-|p|} \right)' = \\ &= \left\| \left(e^{-|p|} \right) = \begin{cases} e^{-p}, & p \geq 0; \\ e^p, & p \leq 0; \end{cases} \right\| = \\ &= \left\| \left(e^{-|p|} \right)' = \begin{cases} e^{-p}, & p \geq 0; \\ e^p, & p \leq 0; \end{cases} = \text{sign } p \cdot e^{-|p|} \right\| = \\ &= -\frac{1}{i} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \text{sign } p \cdot e^{-|p|} = i \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-|p|} \cdot \text{sign } p. \end{aligned}$$

1.2. Представимо функцію $f(x)$ у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{(x+2)^2 + 1}.$$

Використовуючи тепер ту ж саму табличну формулу і властивість 4), одержимо:

$$\frac{1}{(x+2)^2 + 1} \xrightarrow{\cdot} e^{-2ip} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-|p|} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-|p|} \cdot (\cos 2p - i \cdot \sin 2p).$$

1.3. Запишемо функцію $f(x)$ у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) e^{-x^2} = \frac{1}{2} (e^{ix} \cdot e^{-x^2} + e^{-ix} \cdot e^{-x^2}).$$

Скористаємось тепер табличною формулою

$$e^{-x^2} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{p^2}{4}},$$

властивістю лінійності 1) і властивістю 3):

$$e^{ix} \cdot e^{-x^2} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{(p+1)^2}{4}},$$

$$e^{-ix} \cdot e^{-x^2} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{(p-1)^2}{4}}.$$

Остаточно отримаємо

$$\cos x \cdot e^{-x^2} \leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(e^{-\frac{(p+1)^2}{4}} + e^{-\frac{(p-1)^2}{4}} \right).$$

Відновлення функції за її Фур'є-перетворенням

6°. Якщо функція $f(x)$ задовольняє умові

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(p)|^2 dp < \infty,$$

то можна відновити функцію, Фур'є-перетворенням якої є $f(p)$.

Це можна зробити, скориставшись формулами оберненого перетворення Фур'є.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(p) \cdot e^{ipx} dp, \quad x \in (-\infty; +\infty),$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f_s(p) \cdot \sin px dp, \quad x \in [0; +\infty),$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f_c(p) \cdot \cos px dp, \quad x \in [0; +\infty).$$

Якщо ці інтеграли обчислити безпосередньо не вдається, можна скористатися таблицями перетворень Фур'є та їх властивостями.

Приклади

1. Знайти функцію $f(x)$, якщо її перетворення Фур'є

$$f(p) = \frac{-ip \cdot e^{3ip}}{4p^2 + 8p + 5}.$$

2. Знайти функцію $f(x)$, якщо її синус-перетворення

$$f_s(p) = \frac{1}{2} \left((p+1)e^{-|p+1|} + (p-1)e^{-|p-1|} \right).$$

Розв'язання

1. Безпосереднє обчислення функції $f(x)$ призводить до дуже складного інтегралу. Більш зручно скористатися таблицею і властивостями Фур'є-перетворення.

Скористаємося табличною формулою

$$\frac{1}{p^2 + 1} \leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-|x|}.$$

Відкинемо поки чисельник у даній формулі (він відповідає, згідно властивостям 4) і 6), зсуву Фур'є-образа на $3i$ диференціюванню),

$$\frac{1}{4p^2 + 8p + 5} = \frac{1}{4} \frac{1}{(p+1)^2 + \frac{1}{4}} \leftrightarrow \frac{2}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|}{2}} \cdot e^{ix},$$

$$\frac{e^{3ip}}{4p^2 + 8p + 5} \leftrightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-\frac{|x+3|}{2}} \cdot e^{i(x+3)},$$

$$\begin{aligned} \frac{(-ip)e^{3ip}}{4p^2 + 8p + 5} &\leftrightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(e^{-\frac{|x+3|}{2}} \cdot e^{i(x+3)} \right)' = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \text{sign}(x+3) \cdot e^{-\frac{|x+3|}{2}} \cdot e^{i(x-3)} + i \cdot e^{-\frac{|x+3|}{2}} \cdot e^{i(x+3)} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(i - \frac{1}{2} \cdot \text{sign}(x+3) \right) \cdot e^{-\frac{|x+3|}{2}} \cdot e^{i(x+3)}. \end{aligned}$$

Таким чином, задана функція є Фур'є-перетворенням функції

$$f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(i - \frac{1}{2} \cdot \text{sign}(x+3) \right) \cdot e^{-\frac{|x+3|}{2}} \cdot e^{i(x+3)}, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

2. Якщо функція $f(x)$ непарна, то її синус-перетворення Фур'є $f_s(p)$ и $f(p)$ зв'язані співвідношенням

$$f(p) = i \cdot f_s(p).$$

Таким чином, перетворення Фур'є шуканої функції

$$f(p) = \frac{i}{2} \left((p-1)e^{-|p-1|} + (p+1)e^{-|p+1|} \right).$$

Скористаємося табличною формулою

$$e^{-|p|} \leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

і властивостями перетворення Фур'є

$$-(ip)e^{-p} \leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(\frac{1}{x^2+1} \right)' = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2x}{(x^2+1)^2},$$

$$i(p-1) \cdot e^{-|p-1|} \leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2x \cdot e^{-ix}}{(x^2+1)^2},$$

$$i(p+1) \cdot e^{-|p+1|} \leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2x \cdot e^{ix}}{(x^2+1)^2},$$

$$\frac{i}{2} \left((p-1) \cdot e^{-|p-1|} + (p+1) \cdot e^{-|p+1|} \right) \leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2x \cdot \cos x}{(x^2+1)^2}.$$

Таким чином,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2x \cdot \cos x}{(x^2+1)^2}.$$

Застосування перетворень Фур'є

Перетворення Фур'є часто застосовують для розв'язання крайових задач в областях, що мають вигляд нескінченної полоси, напівполоси, нескінченного циліндра або напівциліндра.

Приклад

Розв'язати рівняння теплопроводності $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ за початковою умовою $u(x, 0) = f(x)$, $(-\infty < x < +\infty)$.

Розв'язання

Тут $u(x; t)$ – шукана функція (температура у даний момент t у даній точці x).

Нехай $U(p; t)$ – перетворення Фур'є шуканої функції $u(x; t)$.

$$U(p; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x; t) \cdot e^{ipx} dx.$$

Тоді перетворенням Фур'є функції $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ є (відповідно до властивостей перетворення Фур'є) $(-ip)^2 \cdot U(p; t)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -p^2 \cdot U(p; t).$$

Переходячи у рівнянні $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ від функції $u(x; t)$ до її Фур'є-перетворення, отримаємо

$$\frac{\partial U}{\partial t}(p; t) = -p^2 \cdot U(p; t).$$

Звідки

$$U(p; t) = A(p) \cdot e^{-p^2 t}.$$

Тут $A(p)$ – будь-яка довільна функція, що визначається з початкової умови $u(x;0) = f(x)$. Перейдемо у цій умові від функцій до їх перетворень Фур'є:

$$U(p;0) = f(x).$$

Вважаючи тепер у рівності $U(p;t) = A(p) \cdot e^{-p^2 t}$ $t=0$, отримаємо:

$$A(p) = U(p;0) = f(x) = F(p).$$

Таким чином,

$$U(p;t) = F(p) \cdot e^{-\omega^2 t},$$

а

$$u(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F(p) \cdot e^{-\omega^2 t - ipx} dp.$$

Підставляючи тепер замість $F(p)$ його значення, отримаємо

$$u(x;t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2 t - ipx} dp \int_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta) \cdot e^{ipx} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta) d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2 t} \cdot e^{-ip(x-\zeta)} dp.$$

Інтеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2 t} \cdot e^{-ip(x-\zeta)} dp$$

являє собою обернене перетворення Фур'є.

Скористаємося табличною формулою

$$e^{-b^2 x^2} \leftrightarrow \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{-p^2}{4b^2}}$$

(тут $b = \frac{1}{2\sqrt{t}}$, а у ролі x виступає $(x-\zeta)$).

Остаточно отримаємо

$$u(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta) \cdot e^{\frac{(x-\zeta)^2}{4t}} d\zeta = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta) \cdot e^{\frac{(x-\zeta)^2}{4t}} d\zeta.$$

Обчислення невластних інтегралів за допомогою перетворення Фур'є

Невластні інтеграли часто обчислюють із застосуванням теореми про згортку перетворень Фур'є та рівності Парсеваля-Ляпунова.

Якщо $f(x) \leftrightarrow F(p)$, то виконується рівність

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(p)|^2 dp = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx.$$

Для парних функцій

$$\int_0^{+\infty} |F_c(p)|^2 dp = \int_0^{+\infty} |f(x)|^2 dx,$$

а для непарних функцій

$$\int_0^{+\infty} |F_s(p)|^2 dp = \int_0^{+\infty} |f(x)|^2 dx.$$

Ці формули є аналогічними формулі Парсеваля-Ляпунова з теорії рядів Фур'є.

Приклад

Обчислити $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{(1+x^2)^2} dx$.

Розв'язання

Для обчислення інтеграла скористуємося формулою Парсеваля-Ляпунова і табличною формулою

$$\frac{\cos x}{1+x^2} \leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot (e^{-|p+1|} + e^{-|p-1|}).$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-|p+1|} + e^{-|p-1|})^2 dp =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{8} \int_{-\infty}^{-1} (e^{p+1} + e^{p-1})^2 dp + \frac{\pi}{8} \int_{-1}^1 (e^{-(p+1)} + e^{p-1})^2 dp + \\
&+ \frac{\pi}{8} \int_1^{+\infty} (e^{-(p+1)} + e^{-(p-1)})^2 dp = \frac{\pi}{8} \cdot \left(\frac{e^{2(p+1)}}{2} + \frac{e^{2(p-1)}}{2} + e^{2p} \right) \Bigg|_{-\infty}^1 + \\
&+ \frac{\pi}{8} \cdot \left(\frac{e^{-2(p+1)}}{-2} + \frac{e^{2(p-1)}}{2} + 2e^{-2p} \right) \Bigg|_{-1}^1 + \\
&+ \frac{\pi}{8} \cdot \left(\frac{e^{-2(p+1)}}{-2} + \frac{e^{-2(p-1)}}{-2} - 2e^{-2p} \right) \Bigg|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{8} (2 + 6e^{-2}) = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} \cdot e^{-2}.
\end{aligned}$$

Аудиторне заняття 2.3

1. Знайти перетворення Фур'є функції $f(x)$.

$$f(x) = e^{-|x|} \cos x.$$

2. Функція $f(x)$ задана на проміжку $[0; +\infty)$. Знайти її синус-перетворення Фур'є.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in (0; \pi); \\ 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

3. Для функції $f(x)$ знайти її косинус-перетворення Фур'є.

$$f(x) = \frac{1}{(4 + x^2)^2}$$

4. Використовуючи перетворення Фур'є і його властивості, обчислити інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{(1 + x^2)^2} dx$.

5. Відновити функцію $f(x)$ за її Фур'є-перетворенням

$$f(p) = \frac{1}{2} (e^{-|p+1|} + e^{-|p-1|}).$$

Самостійна робота 2.3

1. Знайти перетворення Фур'є функції $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

2. Знайти перетворення Фур'є функції $f(x)$.

$$f(x) = 2e^{-4|x|}.$$

3. Функція $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ задана на проміжку $[0; +\infty)$.

Знайти її косинус-перетворення Фур'є.

4. Довести рівності:

$$4.1. \int_0^{+\infty} \frac{\cos px}{a^2 + p^2} dp = \frac{\pi}{2a} e^{-a|x|}.$$

$$4.2. \int_0^{+\infty} e^{-p} \cos px dp = \frac{1}{1+x^2}.$$

Відповіді до самостійної роботи 2.3

1. $\frac{1}{1+ip}$. 2. $\frac{16}{16+p^2}$. 3. $e^{-|p|}$.

3.1. Теоретичні питання з теми «Функції комплексного змінного»

1. Визначення комплексного числа. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.
2. Тригонометрична форма комплексного числа. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі.
3. Піднесення комплексного числа до цілого додатного степеня.
4. Добування кореня з комплексного числа. Багатозначність функції $f(z) = \sqrt[n]{z}$.
5. Послідовності комплексних чисел. Визначення границі послідовності.
6. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності. Визначення.
7. Комплексна площина. Стереографічна проекція комплексного числа. Окіл нескінченно віддаленої точки.
8. Області на комплексній площині. Границя області. Замкнені та відкриті області. Наведіть приклади.
9. Однозв'язні та багатозв'язні області. Наведіть приклад двозв'язної області з однією межею.
10. Основні елементарні функції. Однозначні та багатозначні функції.
11. Обернена функція. Однолисті та багатолісті функції. Наведіть приклади.
12. Визначення похідної функції комплексного змінного. Диференційовність та аналітичність.
13. Умови аналітичності. Доведіть, що функція $f(z) = z^2$ є аналітичною.
14. Гармонічні функції. Спряжені функції.
15. Відновлення аналітичних функцій за дійсною та уявною частиною.
16. Інтеграл від функції комплексної змінної. Умови незалежності від шляху інтегрування.
17. Інтегральна формула Коші для функції та її похідних.

18. Ряд Тейлора для функції комплексного змінного. Обчислення коефіцієнтів. Радіус збіжності.

19. Ряд Лорана. Правильна та головна частини ряду. Радіус збіжності. Обчислення радіусу збіжності.

20. Особливості розкладання функції в ряд Лорана в нескінченно віддаленій точці. Наведіть приклади.

21. Класифікація особливих точок функції комплексної змінної.

22. Теорема про зв'язок між нулями та полюсами функції комплексної змінної.

23. Лишки. Формула для обчислення лишків в полюсах першого та вищих порядків.

24. Обчислення лишків за допомогою розкладання функції в ряд Лорана. Випадок усувної особливої точки, полюса та істотно особливої точки.

25. Основна теорема про лишки.

26. Лема Жордана.

27. Обчислення інтегралів виду $\int_0^{2\pi} R(\sin \varphi, \cos \varphi) d\varphi$ за допомогою лишків.

28. Обчислення інтегралів виду $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$ за допомогою лишків.

29. Обчислення інтегралів виду $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx, (\lambda > 0)$ за допомогою лишків.

30. Обчислення невластних інтегралів, що збігаються у розумінні головного значення. Узагальнена лема Жордана.

3.2. Теоретичні питання з теми «Інтегральні перетворення»

1. Оригінал та зображення. Формула Лапласа.
2. Порядок зростання функції. Наведіть приклади функцій, які мають скінченний порядок зростання, і які не мають скінченного порядку зростання.
3. Умови, за якими $f(t)$ може бути оригіналом. Наведіть приклади.
4. Функція Хевісайда. Доведіть, що ця функція може бути оригіналом, знайдіть її зображення.
5. Перетворення Лапласа. Довести властивість лінійності перетворення Лапласа.
6. Сформулювати теорему подібності. Знайти зображення функції $f(t) = \sin at \eta(t)$.
7. Сформулювати теорему зміщення. Знайти зображення функції $f(t) = e^{2t} \sin t \eta(t)$.
8. Сформулювати теорему запізнювання. Знайти зображення функції $f(t) = \sin(t - \pi) \eta(t - \pi)$.
9. Сформулювати теорему про диференціювання оригіналу. Знайти зображення функції $f(t) = \cos^2 t$.
10. Сформулювати теорему про диференціювання зображення. Знайти зображення функції $f(t) = t^2 \cdot \cos t$.
11. Сформулювати теорему про інтегрування оригіналу. Знайти зображення функції $f(t) = \int_0^t \tau^2 \cdot e^{-\tau} d\tau$.
12. Сформулювати теорему про інтегрування зображення. Знайти зображення функції $f(t) = \frac{\sin t}{t}$.
13. Згортка двох функцій. Теорема про зображення згортки.
14. Теорема про зображення згортки у випадку, коли функція $F(p)$ має вигляд правильного раціонального дробу (випадок коренів першої кратності знаменника).

15. Теорема про зображення згортки у випадку, коли функція $F(p)$ має вигляд правильного раціонального дробу (випадок кратних коренів знаменника).
16. Перша теорема розкладання.
17. Схема застосування перетворення Лапласа для розв'язання лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.
18. Схема застосування перетворення Лапласа для розв'язання лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами і розривною правою частиною.
19. Схема застосування перетворення Лапласа для розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.
20. Обчислення невластних інтегралів за допомогою перетворення Лапласа.
21. Фур'є-перетворення. За яких умов для функції $f(x)$ можна визначити її Фур'є-перетворення?
22. Косинус-перетворення Фур'є. Умови, за якими існує косинус-перетворення Фур'є.
23. Синус-перетворення Фур'є. Умови, за якими існує синус-перетворення Фур'є.
24. Лінійність перетворення Фур'є.
25. Сформулювати теорему подібності для Фур'є-перетворення.
26. Сформулювати теорему згортки для Фур'є-перетворення.
27. Рівність Парсеваля-Ляпунова.
28. Зворотнє перетворення Фур'є. Відновлення функції за її зворотним Фур'є-перетворенням.
29. Застосування перетворення Фур'є до розв'язання крайових задач і задач Коші.
30. Обчислення невластних інтегралів за допомогою перетворення Фур'є.

4.1. Зразки модульної контрольної роботи з теми «Функції комплексного змінного» (відкрита версія)

Варіант № 1

1. Добування кореня з комплексного числа. Багатозначність функції $f(z) = \sqrt[n]{z}$.

2. Представити в алгебраїчній формі комплексне число

$$\left(\frac{\sqrt{3} - i}{1 + i} \right)^{20}.$$

3. Відновити аналітичну функцію за її уявною частиною:

$$\operatorname{Im} f(z) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y.$$

4. Обчислити інтеграл $I = \oint_{|z-2|=\frac{1}{2}} \frac{zdz}{(z-1)(z-2)^2}$.

5. Обчислити інтеграл $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b \cos x)^2}$, ($a > b > 0$).

Варіант № 2

1. Гармонічні функції. Спряжені функції. Відновлення функції за дійсною або уявною частиною.

2. Зобразити на комплексній площині множину точок, задану умовою $\operatorname{Im} \frac{1}{z} < -\frac{1}{2}$. Охарактеризувати.

3. Обчислити інтеграл $I = \oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$.

4. Записати розклад у ряд Тейлора по степенях $(z-1)$ функції $\frac{z}{z^2 - 2z + 5}$.

5. Обчислити інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$.

**5.1. Варіанти обов'язкових домашніх завдань за темою
«Функції комплексного змінного»**

Варіант № 1

1. Представити число в алгебраїчній формі. Знайти головне значення. Зобразити на комплексній площині.

$$z = (-2)^{\sqrt{3}}.$$

2. Знайти всі розв'язки рівняння й зобразити їх на комплексній площині.

$$2 \cos z - i = 0.$$

3. Зобразити на комплексній площині множину точок, задану певними умовами. Охарактеризувати.

$$z \cdot \bar{z} < 2, \operatorname{Re} z \leq 1, \operatorname{Im} z > -1.$$

4. Визначити вид кривої. Зобразити на комплексній площині.

$$z = \operatorname{th} 3t + 3i \frac{1}{\operatorname{ch} 3t}, t \in (-\infty, +\infty).$$

5. Перевірити, чи є функція $w = f(z)$ аналітичною (знайти область аналітичності).

$$f(z) = \bar{z} \cdot e^z.$$

6. Відновити аналітичну функцію за її дійсною або уявною частиною.

$$\operatorname{Im} f(z) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y.$$

7. Обчислити інтеграл від функції комплексного змінного уздовж даної кривої l .

7.1. $\int_l \frac{\bar{z}}{z} dz.$

7.2. $\int_l (z-3i)^2 dz$, де l – межа області: $\{1 < |z| < 2, \operatorname{Re} z > 0\}$.

8. З'ясувати, чи можливе розкладання у ряд Лорана по степенях $(z - z_0)$ у зазначених кільцях. Намалюйте ці кільця.

$$f(z) = \frac{1}{(4+z)(z^2+1)}, \quad z_0 = i.$$

8.1. $0 < |z-i| < 1$.

8.2. $0 < |z-i| < 2$.

8.3. $0 < |z-i| < 3$.

8.4. $2 < |z-i| < \sqrt{17}$.

9. Розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0 і в околі нескінченності. Знайти область збіжності.

9.1. $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)^2}, \quad z_0 = 1$.

9.2. $f(z) = z^4 \cdot \cos \frac{1}{z}, \quad z_0 = 0, \quad z_0 = \infty$.

10. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$. Установити, які з них є ізольованими.

$$f(z) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2z}.$$

11. Установити характер ізольованої особливої точки z_0 для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{z^3}{(1 - \cos 2z)^2}, \quad z_0 = 0.$$

12. Знайти всі ізольовані особливі точки функції $f(z)$ й установити їхній характер.

$$f(z) = \frac{1}{e^z + 1}.$$

13. Визначити характер особливості $z = \infty$ для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2}.$$

14. Обчислити інтеграли.

$$14.1. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(5 + 4 \cos \varphi)^2}.$$

$$14.2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx.$$

$$14.3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x^2 - 4x + 5} dx.$$

$$14.4. \text{v.p.} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + 1)} dx.$$

Варіант № 2

1. Представити число в алгебраїчній формі. Знайти головне значення. Зобразити на комплексній площині.

$$z = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^{3i}.$$

2. Знайти всі розв'язки рівняння й зобразити їх на комплексній площині.

$$2 \sin z - i = 0.$$

3. Зобразити на комплексній площині множину точок, задану певними умовами. Охарактеризувати.

$$7 \leq |z+3| + |z-3| \leq 10.$$

4. Визначити вид кривої. Зобразити на комплексній площині.

$$z = \frac{1+i}{1-t} + \frac{t}{1-t}(2-4i), \quad t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

5. Перевірити, чи є функція $w = f(z)$ аналітичною (знайти область аналітичності).

$$f(z) = (z+i)\sin z.$$

6. Відновити аналітичну функцію за її дійсною або уявною частиною.

$$\operatorname{Im} f(z) = 2xy + 3x.$$

7. Обчислити інтеграл від функції комплексного змінного уздовж даної кривої l .

$$7.1. \int_l |z| \operatorname{Re} z^2 dz.$$

7.2. $\int_l \cos^2 z dz$, де $l: \{|z|=1, \operatorname{Im} z \leq 0 \text{ від точки } z_A = -1 \text{ до точки } z_B = 1\}$.

8. З'ясувати, чи можливе розкладання у ряд Лорана по степенях $(z-z_0)$ у зазначених кільцях. Намалюйте ці кільця.

$$f(z) = \frac{1}{(4+z)(z^2+4)}, \quad z_0 = -2i.$$

$$8.1. 0 < |z+2i| < 4.$$

$$8.2. 4 < |z+2i| < 5.$$

8.3. $4 < |z + 2i| < \sqrt{20}$.

8.4. $\sqrt{20} < |z + 2i| < \infty$.

9. Розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0 і в околі нескінченності. Знайти область збіжності.

9.1. $f(z) = \frac{1}{(z+2)(z^2-1)}$, $z_0 = -1$.

9.2. $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$, $z_0 = 0$, $z_0 = \infty$.

10. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$. Установити, які з них є ізольованими.

$$f(z) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3z}.$$

11. Установити характер ізольованої особливої точки z_0 для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{z^3 - 6z^2 + 12z - 8}{(z-2)^2 \sin(z-2)}, \quad z_0 = 2.$$

12. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$ й установити їхній характер.

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}.$$

13. Визначити характер особливості $z = \infty$ для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{z^4}{1+z^4}.$$

14. Обчислити інтеграли.

$$14.1. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5+4\sin x}.$$

$$14.2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{(x^2+4)^2} dx.$$

$$14.3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cdot \cos x}{x^2-2x+10} dx.$$

$$14.4. \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Варіант № 3

1. Представити число в алгебраїчній формі. Знайти головне значення. Зобразити на комплексній площині.

$$z = \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2} \right)^{1-i}.$$

2. Знайти всі розв'язки рівняння й зобразити їх на комплексній площині.

$$\cos^2 z + 1 = 0.$$

3. Зобразити на комплексній площині множину точок, задану певними умовами. Охарактеризувати.

$$|z| > 3, \quad |\operatorname{Im} z| < 4, \quad |\operatorname{Re} z| < 4.$$

4. Визначити вид кривої. Зобразити на комплексній площині.

$$z = 3e^{it} - \frac{1}{2e^{it}}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

5. Перевірити, чи є функція $w = f(z)$ аналітичною (знайти область аналітичності).

$$f(z) = e^{i\alpha} z^2 e^z.$$

6. Відновити аналітичну функцію за її дійсною або уявною частиною.

$$\operatorname{Re} f(z) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3, \quad f(0) = 0.$$

7. Обчислити інтеграл від функції комплексного змінного уздовж даної кривої l .

$$7.1. \int_l (3z^2 + 2\bar{z}) dz.$$

7.2. $\int_l (3z^2 + 2z) dz$, де l – {дуга параболи $y = x^2$ від точки $z_A = 0$ до точки $z_B = 1 + i$ }.

8. З'ясувати, чи можливе розкладання у ряд Лорана по степенях $(z - z_0)$ у зазначених кільцях. Намалюйте ці кільця.

$$f(z) = \frac{1}{(z+3)z(z-i)}, \quad z_0 = 0.$$

$$8.1. 0 < |z| < 3.$$

$$8.2. 1 < |z| < 3.$$

$$8.3. 1 < |z| < 2.$$

$$8.4. 2 < |z| < \infty.$$

9. Розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0 і в околі нескінченності. Знайти область збіжності.

$$9.1. f(z) = \frac{1}{(z-2)(z^2-5z+6)}, \quad z_0 = 2.$$

$$9.2. f(z) = \frac{\sin^2 z}{z}, \quad z_0 = 0, \quad z_0 = \infty.$$

10. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$. Установити, які з них є ізольованими.

$$f(z) = \frac{z+1}{\frac{1}{e^z}-1}.$$

11. Установити характер ізольованої особливої точки z_0 для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{z \cdot \sin^2 z}{(e^z - 1)^3}, \quad z_0 = 0.$$

12. Знайти всі ізольовані особливі точки функції $f(z)$ й установити їхній характер.

$$f(z) = \frac{1}{2 - \cos z}.$$

13. Визначити характер особливості $z = \infty$ для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{z^5}{(1-z)^2}.$$

14. Обчислити інтеграли.

$$14.1. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{5 + 4 \cos x} dx.$$

$$14.2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^3} dx.$$

$$14.3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cdot \sin x}{x^2 - 2x + 10} dx.$$

$$14.4. \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cdot \sin x}{x^2 - a^2} dx, \quad a > 0.$$

Варіант № 4

1. Представити число в алгебраїчній формі. Знайти головне значення. Зобразити на комплексній площині.

$$z = \left(\frac{\sqrt{3} - i}{2} \right)^{1+i}.$$

2. Знайти всі розв'язки рівняння і зобразити їх на комплексній площині.

$$\sin^2 z + 1 = 0.$$

3. Зобразити на комплексній площині множину точок, задану певними умовами. Охарактеризувати.

$$|z| > 1, -1 < \operatorname{Im} z \leq 1, 0 < \operatorname{Re} z \leq 2.$$

4. Визначити вид кривої. Зобразити на комплексній площині.

$$z = 2 \operatorname{ch} 2t - 3i \cdot \operatorname{sh} 2t, t \in (-\infty, +\infty).$$

5. Перевірити, чи є функція $w = f(z)$ аналітичною (знайти область аналітичності).

$$f(z) = \bar{z} \cdot z^2.$$

6. Відновити аналітичну функцію за її дійсною або уявною частиною.

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2}, f(2) = 0.$$

7. Обчислити інтеграл від функції комплексного змінного уздовж даної кривої l .

$$7.1. \int_l (z \cdot \bar{z} + 1) dz.$$

$$7.2. \int_l (z^2 + 1) dz, \text{ де } l \text{ — ламана: } \{z_1 = 0, z_2 = -1 + i, z_3 = i\}.$$

8. З'ясувати, чи можливе розкладання у ряд Лорана по степенях $(z - z_0)$ у зазначених кільцях. Намалюйте ці кільця.

$$f(z) = \frac{1}{(z-1-i)(z^2+5)}, \quad z_0 = 5i.$$

8.1. $0 < |z - 5i| < 2$.

8.2. $0 < |z - 5i| < \sqrt{17}$.

8.3. $\sqrt{17} < |z - 5i| < \sqrt{26}$.

8.4. $\sqrt{26} < |z - 5i| < 10$.

9. Розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0 і в околі нескінченності. Знайти область збіжності.

9.1. $f(z) = \frac{1}{z(z^2+z)}, \quad z_0 = 0$.

9.2. $f(z) = \frac{1-e^{-2z}}{z^3}, \quad z_0 = 0, \quad z_0 = \infty$.

10. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$. Установити, які з них є ізольованими.

$$f(z) = \frac{z+1}{\frac{1}{e^z} + 1}.$$

11. Установити характер ізольованої особливої точки z_0 для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{z \cdot \sin z}{e^{2z} - 2e^z + 1}, \quad z_0 = 0.$$

12. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$ й установити їхній характер.

$$f(z) = \frac{1}{3 - \sin z}.$$

13. Визначити характер особливості $z = \infty$ для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{z^5}{(z^2 + 4)^2}.$$

14. Обчислити інтеграли.

$$14.1. \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{4 + 3\cos\varphi}.$$

$$14.2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2 (x^2 + 16)^2}.$$

$$14.3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\cos 2x}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

$$14.4. \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-a)\sin 2x}{x^2 - b^2} dx, \quad b > 0.$$

Варіант № 5

1. Представити число в алгебраїчній формі. Знайти головне значення. Зобразити на комплексній площині.

$$z = \operatorname{Arccos}(-3).$$

2. Знайти всі розв'язки рівняння й зобразити їх на комплексній площині.

$$e^{2z} - 4ie^z + 3 = 0.$$

3. Зобразити на комплексній площині множину точок, задану певними умовами. Охарактеризувати.

$$|z - 2 - i| \leq 2, \quad \operatorname{Re} z \geq 3, \quad \operatorname{Im} z < 1.$$

4. Визначити вид кривої. Зобразити на комплексній площині.

$$z = -4 \operatorname{sh} 3t - 5i \cdot \operatorname{ch} 3t, \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

5. Перевірити, чи є функція $w = f(z)$ аналітичною (знайти область аналітичності).

$$f(z) = \cos z + 2i \operatorname{Re} z.$$

6. Відновити аналітичну функцію за її дійсною або уявною частиною.

$$\operatorname{Im} f(z) = -\frac{y}{(x+1)^2 + y^2} + x.$$

7. Обчислити інтеграл від функції комплексного змінного уздовж даної кривої l .

$$7.1. \int_l |z| \operatorname{Re} z^2 dz.$$

$$7.2. \int_l (\cos iz + z^2) dz, \quad \text{де } l: \{|z|=1, \operatorname{Re} z \geq 0 \text{ від точки } z_A = -i$$

до точки $z_B = i\}$.

8. З'ясувати, чи можливе розкладання у ряд Лорана по степенях $(z - z_0)$ у зазначених кільцях. Намалуйте ці кільця.

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1-i)(z-3+i)}, \quad z_0 = 3-i.$$

$$8.1. 0 < |z-3+i| < \sqrt{10}.$$

$$8.2. 0 < |z-3+i| < \sqrt{8}.$$

$$8.3. \sqrt{8} < |z-3+i| < \sqrt{10}.$$

$$8.4. \sqrt{10} < |z-3+i| < \infty.$$

9. Розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0 і в околі нескінченності. Знайти область збіжності.

$$9.1. f(z) = \frac{1}{(z+5)(z-4)^2}, z_0 = 5.$$

$$9.2. f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}, z_0 = i, z_0 = \infty.$$

10. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$. Установити, які з них є ізольованими.

$$f(z) = \frac{z+2}{e^{\frac{1}{z-1}} + 1}.$$

11. Установити характер ізольованої особливої точки z_0 для функції $f(z)$.

$$f(z) = \cos \frac{1}{1-z}, z_0 = 1.$$

12. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$ й установити їхній характер.

$$f(z) = \frac{e^z + 1}{z \cdot \sin z}.$$

13. Визначити характер особливості $z = \infty$ для функції $f(z)$.

$$f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}.$$

14. Обчислити інтеграли.

$$14.1. \int_0^{2\pi} \cos^8 x dx.$$

$$14.2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

$$14.3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cdot \sin ax}{x^2 + a^2} dx.$$

$$14.4. \text{ в.п. } \int_0^{+\infty} \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \cdot \frac{\sin x}{x} dx, \quad b > 0.$$

Варіант № 6

1. Представити число в алгебраїчній формі. Знайти головне значення. Зобразити на комплексній площині.

$$z = \operatorname{Arccos} 2.$$

2. Знайти всі розв'язки рівняння й зобразити їх на комплексній площині.

$$e^{2z} - 3ie^z + 2 = 0.$$

3. Зобразити на комплексній площині множину точок, задану певними умовами. Охарактеризувати.

$$z \cdot \bar{z} \leq 2, \quad \operatorname{Re} z < 1, \quad \operatorname{Im} z > -1.$$

4. Визначити вид кривої. Зобразити на комплексній площині.

$$z = \frac{4}{\operatorname{ch} 3t} + 2i \cdot \operatorname{th} 3t, \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

5. Перевірити, чи є функція $w = f(z)$ аналітичною (знайти область аналітичності).

$$f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{z}.$$

6. Відновити аналітичну функцію за її дійсною або уявною частиною.

$$\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \quad (x > 0, y > 0).$$

7. Обчислити інтеграл від функції комплексного змінного уздовж даної кривої l .

$$7.1. \int_l z \bar{z} dz.$$

$$7.2. \int_l (z^2 + 5) dz, \text{ де } l - \text{крива } AB: \{|z|=1, \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 0\} \text{ і}$$

відрізок прямої $BC: \{z_A = 1, z_B = 0\}$.

8. З'ясувати, чи можливе розкладання у ряд Лорана по степенях $(z - z_0)$ у зазначених кільцях. Намалюйте ці кільця.

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)(z^2+1)}, \quad z_0 = i.$$

$$8.1. 0 < |z-i| < 2.$$

$$8.2. 1 < |z-i| < 2.$$

$$8.3. 1 < |z-i| < \sqrt{10}.$$

$$8.4. \sqrt{10} < |z-i| < \infty.$$

9. Розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0 і в околі нескінченності. Знайти область збіжності.

$$9.1. f(z) = \frac{1}{(z+3)(z^2-9)}, \quad z_0 = -3.$$

$$9.2. f(z) = z^2 \cdot \sin \frac{\pi(z+1)}{z}, \quad z_0 = 1, \quad z_0 = \infty.$$

10. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$. Установити, які з них є ізольованими.

$$f(z) = \frac{z+2}{e^{\frac{1}{z+1}} + 1}.$$

11. Установити характер ізольованої особливої точки z_0 для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{1}{z(e^z + 1)}, \quad z_0 = \pi i.$$

12. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$ й установити їхній характер.

$$f(z) = \frac{1}{\cos z - 1}.$$

13. Визначити характер особливості $z = \infty$ для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{e^z}{(z^2 + 16)^2}.$$

14. Обчислити інтеграли.

$$14.1. \int_0^{2\pi} \frac{2 + \cos x}{2 - \sin x} dx.$$

$$14.2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)^2 (x^2 + 4)}.$$

$$14.3. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \cos 2x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

$$14.4. \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\cos 3x}{x^2 - 5x + 6} dx.$$

Варіант № 7

1. Представити число в алгебраїчній формі. Знайти головне значення. Зобразити на комплексній площині.

$$z = \operatorname{Arcsin} 2.$$

2. Знайти всі розв'язки рівняння й зобразити їх на комплексній площині.

$$e^{2z} + 4 = 0.$$

3. Зобразити на комплексній площині множину точок, задану певними умовами. Охарактеризувати.

$$|z - 1 - i| < 1, \quad |\operatorname{arctg} z| < \frac{\pi}{4}.$$

4. Визначити вид кривої. Зобразити на комплексній площині.

$$z = 3e^{it} - 2e^{-it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

5. Перевірити, чи є функція $w = f(z)$ аналітичною (знайти область аналітичності).

$$f(z) = \sin z - i \operatorname{Re} z.$$

6. Відновити аналітичну функцію за її дійсною або уявною частиною.

$$\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 - \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

7. Обчислити інтеграл від функції комплексного змінного уздовж даної кривої l .

$$7.1. \int_l z \operatorname{Im} z^2 dz.$$

$$7.2. \int_l z^3 dz, \text{ де } l \text{ – відрізок прямої: } \{z_1 = 0, z_2 = 1 + i\}.$$

8. З'ясувати, чи можливе розкладання у ряд Лорана по степенях $(z - z_0)$ у зазначених кільцях. Намалюйте ці кільця.

$$f(z) = \frac{1}{(z+5)(z^2+9)}, \quad z_0 = -5.$$

8.1. $0 < |z+5| < \sqrt{34}$.

8.2. $\sqrt{34} < |z+5| < \infty$.

8.3. $0 < |z+5| < 7$.

8.4. $1 < |z+5| < 6$.

9. Розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0 і в околі нескінченності. Знайти область збіжності.

9.1. $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z^2-2z-3)}$, $z_0 = 3$.

9.2. $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$, $z_0 = 1$.

10. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$. Установити, які з них є ізольованими.

$$f(z) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2(z-1)}.$$

11. Установити характер ізольованої особливої точки z_0 для функції $f(z)$.

$$f(z) = \sin \frac{\pi}{z^2}, \quad z_0 = 0.$$

12. Знайти всі ізольовані особливі точки функції $f(z)$ й установити їхній характер.

$$f(z) = \frac{1}{z(e^z+1)}.$$

13. Визначити характер особливості $z = \infty$ для функції $f(z)$.

$$f(z) = \sin(z+1).$$

14. Обчислити інтеграли.

$$14.1. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2 + \cos x)^2}.$$

$$14.2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 10x^2 + 9}.$$

$$14.3. \int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx.$$

$$14.4. \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+4)\sin x}{x^2 - 3x + 2} dx.$$

Варіант № 8

1. Представити число в алгебраїчній формі. Знайти головне значення. Зобразити на комплексній площині.

$$z = (3 - 4i)^{1+i}.$$

2. Знайти всі розв'язки рівняння й зобразити їх на комплексній площині.

$$\operatorname{ctg} z + \frac{3i}{5} = 0, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

3. Зобразити на комплексній площині множину точок, задану певними умовами. Охарактеризувати.

$$5 \leq |z + 2i| + |z - 2i| \leq 10.$$

4. Визначити вид кривої. Зобразити на комплексній площині.

$$z = 4 \operatorname{tg} t - 3i \cdot \frac{1}{\cos t}.$$

5. Перевірити, чи є функція $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{z + 2}$ аналітичною (знайти область аналітичності).

6. Відновити аналітичну функцію за її дійсною або уявною частиною.

$$\operatorname{Re} f(z) = 2e^x \sin y.$$

7. Обчислити інтеграл від функції комплексного змінного уздовж даної кривої l .

$$7.1. \int_l \bar{z} dz.$$

$$7.2. \int_l (z^3 + \sin z) dz, \text{ де } l: \{|z|=1, \text{ від точки } z_A = -i \text{ до точки } z_B = i\}.$$

8. З'ясувати, чи можливе розкладання у ряд Лорана по степенях $(z - z_0)$ у зазначених кільцях. Намалуйте ці кільця.

$$f(z) = \frac{1}{z(z+5)(z-i)}, \quad z_0 = 0.$$

$$8.1. 0 < |z| < 1.$$

$$8.2. 0 < |z| < 2.$$

$$8.3. 1 < |z| < 6.$$

$$8.4. 5 < |z| < \infty.$$

9. Розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0 і в околі нескінченності. Знайти область збіжності.

$$9.1. f(z) = \frac{1}{(z+12)(z^2-16)}, \quad z_0 = 4.$$

$$9.2. f(z) = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{z}}{z}, \quad z_0 = \infty.$$

$$9.3. f(z) = \frac{e^z}{z(1-z)}, \quad z_0 = 0.$$

10. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$. Установити, які з них є ізольованими.

$$f(z) = \frac{1}{e^{\frac{1}{z^2}} + 1}.$$

11. Установити характер ізольованої особливої точки z_0 для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}, \quad z_0 = 0.$$

12. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$ й установити їхній характер.

$$f(z) = \frac{1 - \sin z}{\cos z}.$$

13. Визначити характер особливості $z = \infty$ для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z + 1}.$$

14. Обчислити інтеграли.

$$14.1. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\sqrt{3} + \cos x)^2}.$$

$$14.2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2 (x^2 + 1)^2}.$$

$$14.3. \int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^4 + 1} dx.$$

$$14.4. \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cdot \cos x}{x^2 - 6x + 5} dx.$$

Варіант № 9

1. Представити число в алгебраїчній формі. Знайти головне значення. Зобразити на комплексній площині.

$$z = (-3 + 4i)^{1+i}.$$

2. Знайти всі розв'язки рівняння й зобразити їх на комплексній площині.

$$\cos z - \sqrt{2} = 0.$$

3. Зобразити на комплексній площині множину точок, задану певними умовами. Охарактеризувати.

$$z \cdot \bar{z} > 4, \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z > -1.$$

4. Визначити вид кривої. Зобразити на комплексній площині.

$$z = \frac{1}{\operatorname{sh} t} - i \cdot \operatorname{cth} t, t \in (-\infty, +\infty).$$

5. Перевірити, чи є функція $w = f(z)$ аналітичною (знайти область аналітичності).

$$f(z) = \ln z + z, (x > 0, y > 0).$$

6. Відновити аналітичну функцію за її дійсною або уявною частиною.

$$\operatorname{Im} f(z) = \cos x \cdot \operatorname{sh} y, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

7. Обчислити інтеграл від функції комплексного змінного уздовж даної кривої l .

$$7.1. \int_l \bar{z}^2 dz.$$

$$7.2. \int_l (\cos z - z^2) dz, \text{ де } l - \text{відрізок прямої: } \{z_1 = 0, z_2 = -1 - i\}.$$

8. З'ясувати, чи можливе розкладання у ряд Лорана по степенях $(z - z_0)$ у зазначених кільцях. Намалюйте ці кільця.

$$f(z) = \frac{1}{(z-1-i)(z^2+9)}, \quad z_0 = 1+i.$$

8.1. $0 < |z-1-i| < \sqrt{5}$.

8.2. $\sqrt{5} < |z-1-i| < \sqrt{17}$.

8.3. $1 < |z-1-i| < \sqrt{5}$.

8.4. $\sqrt{17} < |z-1-i| < \infty$.

9. Розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0 і в околі нескінченності. Знайти область збіжності.

9.1. $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)^2}, \quad z_0 = -1$.

9.2. $f(z) = \frac{e^{2(1-z)}}{z-1}, \quad z_0 = 1$.

9.3. $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}, \quad z_0 = \infty$.

10. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$. Установити, які з них є ізольованими.

$$f(z) = \frac{1}{e^{\frac{1}{z^2}} - 1}.$$

11. Установити характер ізольованої особливої точки z_0 для функції $f(z)$.

$$f(z) = \sin \frac{\pi}{z^2+1}, \quad z_0 = -i.$$

12. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$ й установити їхній характер.

$$f(z) = \frac{\pi - z}{\sin^2 z}.$$

13. Визначити характер особливості $z = \infty$ для функції $f(z)$.

$$f(z) = e^{-z^2}.$$

14. Обчислити інтеграли.

$$14.1. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{3} \sin x + 8}.$$

$$14.2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 3)^2}.$$

$$14.3. \int_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin 2x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

$$14.4. \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2 - 4x} dx.$$

Варіант № 10

1. Представити число в алгебраїчній формі. Знайти головне значення. Зобразити на комплексній площині.

$$z = \operatorname{Arcsin} i.$$

2. Знайти всі розв'язки рівняння й зобразити їх на комплексній площині.

$$\operatorname{ch} z - i = 0.$$

3. Зобразити на комплексній площині множину точок, задану певними умовами. Охарактеризувати.

$$|z+i| < 1, \quad -\frac{3\pi}{4} < \arg z < -\frac{\pi}{4}.$$

4. Визначити вид кривої. Зобразити на комплексній площині.

$$z = t + \frac{i}{t}, \quad t \in (-\infty, 0).$$

5. Перевірити, чи є функція $w = f(z)$ аналітичною (знайти область аналітичності).

$$f(z) = \frac{\sin z}{z+2}.$$

6. Відновити аналітичну функцію за її дійсною або уявною частиною.

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} - 2y, \quad f(1) = i.$$

7. Обчислити інтеграл від функції комплексного змінного уздовж даної кривої l .

$$7.1. \int_l \bar{z}^3 dz.$$

$$7.2. \int_l z^3 e^{z^4} dz, \text{ де } l \text{ — ламана: } \{z_1 = i, z_2 = 1, z_3 = 0\}.$$

8. З'ясувати, чи можливе розкладання у ряд Лорана по степенях $(z - z_0)$ у зазначених кільцях. Намалюйте ці кільця.

$$f(z) = \frac{1}{(z-1-i)(z^2+9)}, \quad z_0 = 3i.$$

$$8.1. \sqrt{5} < |z-3i| < 3.$$

$$8.2. 0 < |z-3i| < \sqrt{5}.$$

$$8.3. 0 < |z-3i| < 4.$$

8.4. $4 < |z - 3i| < 6$.

9. Розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0 і в околі нескінченності. Знайти область збіжності.

9.1. $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z^2 - 4z - 5)}$, $z_0 = 5$.

9.2. $f(z) = e^{\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{2}\right)}$, $z_0 = 0$, $z_0 = \infty$.

10. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$. Установити, які з них є ізольованими.

$$f(z) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2(z-1)}.$$

11. Установити характер ізольованої особливої точки z_0 для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{\sin z}, \quad z_0 = 0.$$

12. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$ й установити їхній характер.

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{\sin^2 z}.$$

13. Визначити характер особливості $z = \infty$ для функції $f(z)$.

$$f(z) = e^z.$$

14. Обчислити інтеграли.

14.1. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\sqrt{5} + \cos x)^2}$.

$$14.2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2)^2 (x^2 + 3)^2}.$$

$$14.3. \int_0^{+\infty} \frac{x \cdot \sin 3x}{(x^2 + 4)^2} dx.$$

$$14.4. \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x(x^2 + 9)} dx.$$

Варіант № 11

1. Представити число в алгебраїчній формі. Знайти головне значення. Зобразити на комплексній площині.

$$z = 2^{2i}.$$

2. Знайти всі розв'язки рівняння й зобразити їх на комплексній площині.

$$\operatorname{tg}^2 z + 3 = 0.$$

3. Зобразити на комплексній площині множину точок, задану певними умовами. Охарактеризувати.

$$10 < |z - 4i| + |z + 4i| < 12.$$

4. Визначити вид кривої. Зобразити на комплексній площині.

$$z = t^2 - 2t + 3 + i(t^2 - 2t + 1), \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

5. Перевірити, чи є функція $w = f(z)$ аналітичною (знайти область аналітичності).

$$f(z) = z \cdot e^{\bar{z}}.$$

6. Відновити аналітичну функцію за її дійсною або уявною частиною.

$$\operatorname{Re} f(z) = \ln(x^2 + y^2) + x - y.$$

7. Обчислити інтеграл від функції комплексного змінного уздовж даної кривої l .

$$7.1. \int_l e^{|z|} dz.$$

$$7.2. \int_l z e^{z^2} dz, \text{ де } l - \text{відрізок прямої: } \{z_1 = 1+i, z_2 = -1-i\}.$$

8. З'ясувати, чи можливе розкладання у ряд Лорана по степенях $(z - z_0)$ у зазначених кільцях. Намалуйте ці кільця.

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2+2z+2)}, \quad z_0 = -1+i.$$

$$8.1. 0 < |z - (-1+i)| < \sqrt{2}.$$

$$8.2. 0 < |z - (-1+i)| < \sqrt{5}.$$

$$8.3. \sqrt{5} < |z - (-1+i)| < \infty.$$

$$8.4. 0 < |z - (-1+i)| < \sqrt{5}.$$

9. Розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0 і в околі нескінченності. Знайти область збіжності.

$$9.1. f(z) = \frac{1}{z(z+3)^2}, \quad z_0 = 0.$$

$$9.2. f(z) = z^3 \cdot \cos \frac{1}{z}, \quad z_0 = 0, \quad z_\infty = \infty.$$

10. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$. Установити, які з них є ізольованими.

$$f(z) = \frac{z+2}{\sin \frac{z}{2}}.$$

11. Установити характер ізольованої особливої точки z_0 для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{1 - \cos 2z}{z \cdot \sin z}, \quad z_0 = 0.$$

12. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$ й установити їхній характер.

$$f(z) = \frac{z}{e^z + 1}.$$

13. Визначити характер особливості $z = \infty$ для функції $f(z)$.

$$f(z) = z(e^z - 1).$$

14. Обчислити інтеграли.

$$14.1. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 4 \sin x}.$$

$$14.2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)^2 (x^2 + 1)^2}.$$

$$14.3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cdot \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx.$$

$$14.4. \text{v.p.} \int_0^{+\infty} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} dx.$$

Варіант № 12

1. Представити число в алгебраїчній формі. Знайти головне значення. Зобразити на комплексній площині.

$$z = \operatorname{Arcsin} 4.$$

2. Знайти всі розв'язки рівняння й зобразити їх на комплексній площині.

$$e^{2z} + ie^z + 6 = 0.$$

3. Зобразити на комплексній площині множину точок, задану певними умовами. Охарактеризувати.

$$|z| \leq 1, \quad \frac{\pi}{4} < \arg(z+i) < \frac{\pi}{2}.$$

4. Визначити вид кривої. Зобразити на комплексній площині.

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z} = C.$$

5. Перевірити, чи є функція $w = f(z)$ аналітичною (знайти область аналітичності).

$$f(z) = (z-i)\cos z.$$

6. Відновити аналітичну функцію за її дійсною або уявною частиною.

$$\operatorname{Re} f(z) = 2^x \cos(y \ln 2).$$

7. Обчислити інтеграл від функції комплексного змінного уздовж даної кривої l .

$$7.1. \int_l \operatorname{Re} \frac{\bar{z}}{z} dz.$$

$$7.2. \int_l (2z^2 - 1) dz, \text{ де } l - \text{крива } AB: \{|z|=1, \operatorname{Re} z \geq 0\} \text{ і відрізок}$$

прямої $BC: \{z_B = 1, z_C = 2\}$.

8. З'ясувати, чи можливе розкладання у ряд Лорана по степенях $(z - z_0)$ у зазначених кільцях. Намалюйте ці кільця.

$$f(z) = \frac{1}{(z+4)z(z-i)}, \quad z_0 = 0.$$

8.1. $0 < |z| < 2$.

8.2. $4 < |z| < \infty$.

8.3. $0 < |z| < 1$.

8.4. $1 < |z| < 4$.

9. Розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0 і в околі нескінченності. Знайти область збіжності.

9.1. $f(z) = \frac{1}{(z+4)(z-2)^2}$, $z_0 = 2$.

9.2. $f(z) = z^2 \cdot e^{\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$, $z_0 = \infty$.

10. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$. Установити, які з них є ізольованими.

$$f(z) = \frac{z+1}{\sin \frac{\pi}{z}}$$

11. Установити характер ізольованої особливої точки z_0 для функції $f(z)$.

$$f(z) = z^2 \cdot \cos \frac{\pi}{z}, \quad z_0 = 0.$$

12. Знайти всі ізольовані особливі точки функції $f(z)$ й установити їхній характер.

$$f(z) = \frac{1}{z(3 - \sin z)}$$

13. Визначити характер особливості $z = \infty$ для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2}.$$

14. Обчислити інтеграли.

$$14.1. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5 + 3\cos x)^2}.$$

$$14.2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx.$$

$$14.3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1) \cdot \sin 2x}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

$$14.4. \text{v.p.} \int_0^{+\infty} \frac{x \cdot \sin x}{x^2 - 4} dx.$$

Варіант № 13

1. Представити число в алгебраїчній формі. Знайти головне значення. Зобразити на комплексній площині.

$$z = 2^{3i}.$$

2. Знайти всі розв'язки рівняння й зобразити їх на комплексній площині.

$$\operatorname{tg} z + \frac{i}{2} = 0.$$

3. Зобразити на комплексній площині множину точок, задану певними умовами. Охарактеризувати.

$$|z - 2| - |z + 2| > 3.$$

4. Визначити вид кривої. Зобразити на комплексній площині.

$$|z| = \operatorname{Re} z + 1.$$

5. Перевірити, чи є функція $w = f(z)$ аналітичною (знайти область аналітичності).

$$f(z) = ze^{3i} e^z.$$

6. Відновити аналітичну функцію за її дійсною або уявною частиною.

$$\operatorname{Im} f(z) = \frac{y}{x^2 + y^2} - 2x + y.$$

7. Обчислити інтеграл від функції комплексного змінного уздовж даної кривої l .

$$7.1. \int_l |z| \operatorname{Re} z^2 dz.$$

7.2. $\int_l (\cos iz + 3z^2) dz$, де $l: \{|z|=1, \operatorname{Im} z > 0\}$ від точки $z_A = 1$ до точки $z_B = -1$.

8. З'ясувати, чи можливе розкладання у ряд Лорана по степенях $(z - z_0)$ у зазначених кільцях. Намалуйте ці кільця.

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z^2+z)}, \quad z_0 = -1.$$

$$8.1. 0 < |z+1| < 3.$$

$$8.2. 0 < |z+1| < 1.$$

$$8.3. 0 < |z+1| < \infty.$$

$$8.4. 1 < |z+1| < 3.$$

9. Розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0 і в околі нескінченності. Знайти область збіжності.

9.1. $f(z) = \frac{z}{(z+3)(z-1)}$, $z_0 = 1$.

9.2. $f(z) = (1-z) \cdot \sin \frac{1}{z-1}$, $z_0 = 1$.

10. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$. Установити, які з них є ізольованими.

$$f(z) = \frac{z+1}{e^{\frac{z}{2}} - 1}.$$

11. Установити характер ізольованої особливої точки z_0 для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2}, \quad z_0 = -i.$$

12. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$ й установити їхній характер.

$$f(z) = \frac{z}{\sin z}.$$

13. Визначити характер особливості $z = \infty$ для функції $f(z)$.

$$f(z) = z \cdot e^{-z}.$$

14. Обчислити інтеграли.

14.1. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\sqrt{6} + \cos x)^2}$.

14.2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+4x+13)^2} dx$.

$$14.3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x dx}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

$$14.4. \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-4)\sin 3x}{x^2 - 9} dx.$$

Варіант № 14

1. Представити число в алгебраїчній формі. Знайти головне значення. Зобразити на комплексній площині.

$$z = (1-i)^i.$$

2. Знайти всі розв'язки рівняння й зобразити їх на комплексній площині.

$$z^3 - (-2)^{\sqrt{3}} = 0.$$

3. Зобразити на комплексній площині множину точок, задану певними умовами. Охарактеризувати.

$$|2z| > |1 + z^2|.$$

4. Визначити вид кривої. Зобразити на комплексній площині.

$$z = \frac{1+i}{1-i} + \frac{t}{1-t}(2-4i), \quad t \in (1, +\infty).$$

5. Перевірити, чи є функція $w = f(z)$ аналітичною (знайти область аналітичності).

$$f(z) = \bar{z}^3 \cdot z.$$

6. Відновити аналітичну функцію за її дійсною або уявною частиною.

$$\operatorname{Im} f(z) = 2xy + e^x \sin y, \quad f(0) = 1.$$

7. Обчислити інтеграл від функції комплексного змінного уздовж даної кривої l .

$$7.1. \int_l |z| \operatorname{Im} z^2 dz.$$

7.2. $\int_l (\cos 2z + z) dz$, де $l: \{|z|=1, \operatorname{Im} z < 0 \text{ від точки } z_A = -1 \text{ до точки } z_B = 1\}$.

8. З'ясувати, чи можливе розкладання у ряд Лорана по степенях $(z - z_0)$ у зазначених кільцях. Намалюйте ці кільця.

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z^2+z)}, \quad z_0 = 0.$$

$$8.1. 1 < |z| < 3.$$

$$8.2. 0 < |z| < 2.$$

$$8.3. 0 < |z| < 1.$$

$$8.4. 2 < |z| < \infty.$$

9. Розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0 і в околі нескінченності. Знайти область збіжності.

$$9.1. f(z) = \frac{z+2}{z(z^2+z)}, \quad z_0 = 0.$$

$$9.2. f(z) = z^2 \cdot \sin \frac{\pi(z+1)}{z}.$$

10. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$. Установити, які з них є ізольованими.

$$f(z) = \frac{z+2}{\sin \frac{2}{z}}.$$

11. Установити характер ізольованої особливої точки z_0 для функції $f(z)$.

$$f(z) = \cos \frac{1}{z+i}, \quad z_0 = -i.$$

12. Знайти всі ізольовані особливі точки функції $f(z)$ й установити їхній характер.

$$f(z) = \frac{1+e^z}{2+e^z}.$$

13. Визначити характер особливості $z = \infty$ для функції $f(z)$.

$$f(z) = z \left(e^{\frac{1}{z}} - 1 \right).$$

14. Обчислити інтеграли.

$$14.1. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\sqrt{7} + 2 \cos x)^2}.$$

$$14.2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 5)^2} dx.$$

$$14.3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{4x^2 + 1} dx.$$

$$14.4. \text{v.p.} \int_0^{+\infty} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 9} \cdot \frac{\sin x}{x} dx.$$

Варіант № 15

1. Представити число в алгебраїчній формі. Знайти головне значення. Зобразити на комплексній площині.

$$z = (-2)^{\sqrt{2}}.$$

2. Знайти всі розв'язки рівняння й зобразити їх на комплексній площині.

$$\sin z - i = 0 .$$

3. Зобразити на комплексній площині множину точок, задану певними умовами. Охарактеризувати.

$$|z| < \arg z , 0 \leq \arg z < 2\pi .$$

4. Визначити вид кривої. Зобразити на комплексній площині.

$$\operatorname{Im} z^2 = C .$$

5. Перевірити, чи є функція $w = f(z)$ аналітичною (знайти область аналітичності).

$$f(z) = \sin z + 4i \operatorname{Im} z .$$

6. Відновити аналітичну функцію за її дійсною або уявною частиною.

$$\operatorname{Im} f(z) = 3 + (x^2 - y^2) - \frac{y}{x^2 + y^2} .$$

7. Обчислити інтеграл від функції комплексного змінного уздовж даної кривої l .

$$7.1. \int_l \bar{z} dz .$$

$$7.2. \int_l (5z^2 - 1) dz , \text{ де } l : \{ |z| = \sqrt{2} , \frac{3\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{5\pi}{4} , \text{ проти годинникової стрілки.}$$

8. З'ясувати, чи можливе розкладання у ряд Лорана по степенях $(z - z_0)$ у зазначених кільцях. Намалюйте ці кільця.

$$f(z) = \frac{1}{(z-4)(z^2+1)} , z_0 = -i .$$

8.1. $\sqrt{17} < |z+i| < \infty$.

8.2. $0 < |z+i| < 2$.

8.3. $0 < |z+i| < 1$.

8.4. $1 < |z+i| < \sqrt{17}$.

9. Розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0 і в околі нескінченності. Знайти область збіжності.

9.1. $f(z) = \frac{1}{(z^2 - 25)(z+5)}$, $z_0 = -5$.

9.2. $f(z) = z^2 \cdot e^{\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$, $z_\infty = \infty$.

10. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$. Установити, які з них є ізольованими.

$$f(z) = \frac{z+2}{\sin \frac{2}{z}}$$

11. Установити характер ізольованої особливої точки z_0 для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}{(z-1) \cdot \sin(z-1)}, \quad z_0 = 1.$$

12. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$ й установити їхній характер.

$$f(z) = \frac{1}{z^2(e^z + 3)}.$$

13. Визначити характер особливості $z = \infty$ для функції $f(z)$.

$$f(z) = z^2 \left(e^{\frac{1}{2z}} - 1 \right).$$

14. Обчислити інтеграли.

$$14.1. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(4 + \sqrt{7} \cos x)^2}.$$

$$14.2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 4)^2}.$$

$$14.3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

$$14.4. \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+3)\sin 2x}{x^2 - 4} dx.$$

Варіант № 16

1. Представити число в алгебраїчній формі. Знайти головне значення. Зобразити на комплексній площині.

$$z = (-1)^{3i}.$$

2. Знайти всі розв'язки рівняння й зобразити їх на комплексній площині.

$$4 \cos z + 5 = 0.$$

3. Зобразити на комплексній площині множину точок, задану певними умовами. Охарактеризувати.

$$z \cdot \bar{z} \leq 4, \operatorname{Re} z > -1, \operatorname{Im} z < -1.$$

4. Визначити вид кривої. Зобразити на комплексній площині.

$$z = 3e^{it} - \frac{1}{2}e^{-it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

5. Перевірити, чи є функція $w = f(z)$ аналітичною (знайти область аналітичності).

$$f(z) = \bar{z} \cdot \sin z.$$

6. Відновити аналітичну функцію за її дійсною або уявною частиною.

$$\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad (x > 0, y > 0).$$

7. Обчислити інтеграл від функції комплексного змінного уздовж даної кривої l .

$$7.1. \int_l (\bar{z} - 4)^3 dz.$$

$$7.2. \int_l (\sin iz + z) dz, \text{ де } l \text{ - відрізок прямої: } \{z_1 = 1, z_2 = i\}.$$

8. З'ясувати, чи можливе розкладання у ряд Лорана по степенях $(z - z_0)$ у зазначених кільцях. Намалюйте ці кільця.

$$f(z) = \frac{1}{z(z+2i)(z-3)}, \quad z_0 = -2i.$$

$$8.1. 0 < |z+2i| < 2.$$

$$8.2. 2 < |z+2i| < \sqrt{13}.$$

$$8.3. 0 < |z+2i| < \sqrt{8}.$$

$$8.4. \sqrt{8} < |z+2i| < \sqrt{13}.$$

9. Розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0 і в околі нескінченності. Знайти область збіжності.

$$9.1. f(z) = \frac{z-2}{2z^3 + z^2 - z}, \quad z_0 = -1.$$

$$9.2. f(z) = z^3 \cdot e^{-\frac{2}{z}}, \quad z_0 = 0.$$

10. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$. Установити, які з них є ізольованими.

$$f(z) = \frac{z+1}{\cos \frac{\pi}{z}}.$$

11. Установити характер ізольованої особливої точки z_0 для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{\cos 2z - 1}{\sin z - z}, \quad z_0 = 0.$$

12. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$ й установити їхній характер.

$$f(z) = \frac{1}{3 + \cos z}.$$

13. Визначити характер особливості $z = \infty$ для функції $f(z)$.

$$f(z) = z^3 \left(1 - e^{\frac{2}{z}} \right).$$

14. Обчислити інтеграли.

$$14.1. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(3 + 2 \cos x)^2}.$$

$$14.2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 5}{x^4 + 6x^2 + 5} dx.$$

$$14.3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

$$14.4. \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 4}{x^2 + 16} \frac{\sin 3x}{x} dx.$$

Варіант № 17

1. Представити число в алгебраїчній формі. Знайти головне значення. Зобразити на комплексній площині.

$$z = 2^{2i}.$$

2. Знайти всі розв'язки рівняння й зобразити їх на комплексній площині.

$$\sin z + 2 = 0.$$

3. Зобразити на комплексній площині множину точок, задану певними умовами. Охарактеризувати.

$$1 < z \cdot \bar{z} < 2, \operatorname{Re} z > 0, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1.$$

4. Визначити вид кривої. Зобразити на комплексній площині.

$$z = 2 \operatorname{ch} 2t - 2i \cdot \operatorname{sh} 2t, t \in (-\infty, +\infty).$$

5. Перевірити, чи є функція $w = f(z)$ аналітичною (знайти область аналітичності).

$$f(z) = \cos 3z + i \operatorname{Im} z.$$

6. Відновити аналітичну функцію за її дійсною або уявною частиною.

$$\operatorname{Im} f(z) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

7. Обчислити інтеграл від функції комплексного змінного уздовж даної кривої l .

$$7.1. \int_l (|z|^2 - 4) dz.$$

$$7.2. \int_l \frac{(1 + \operatorname{tg} z)}{\cos^2 z} dz, \text{ де } l - \text{ відрізок прямої: } \{z_1 = 1, z_2 = i\}.$$

8. З'ясувати, чи можливе розкладання у ряд Лорана по степенях $(z - z_0)$ у зазначених кільцях. Намалюйте ці кільця.

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)(z-2)}, \quad z_0 = -i.$$

8.1. $0 < |z+i| < 2$.

8.2. $\frac{3}{2} < |z+i| < 2$.

8.3. $2 < |z+i| < \sqrt{5}$.

8.4. $\sqrt{5} < |z+i| < \infty$.

9. Розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0 і в околі нескінченності. Знайти область збіжності.

9.1. $f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}$, $z_0 = 2$, $z_0 = \infty$.

9.2. $f(z) = z \cdot e^{\frac{z}{z-5}}$, $z_0 = 5$.

10. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$. Установити, які з них є ізольованими.

$$f(z) = \frac{z+2}{\cos \frac{2}{z+1}}.$$

11. Установити характер ізольованої особливої точки z_0 для функції $f(z)$.

$$f(z) = \cos \frac{1}{z+2i}, \quad z_0 = -2i.$$

12. Знайти всі ізольовані особливі точки функції $f(z)$ й установити їхній характер.

$$f(z) = \frac{1}{z^3(e^z + 1)}.$$

13. Визначити характер особливості $z = \infty$ для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{\sin 3z}{z^2}.$$

14. Обчислити інтеграли.

$$14.1. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{3} \sin x - 2}.$$

$$14.2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}.$$

$$14.3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cdot \sin \frac{x}{2} dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}.$$

$$14.4. \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x^2 + 7x + 12} dx.$$

Варіант № 18

1. Представити число в алгебраїчній формі. Знайти головне значення. Зобразити на комплексній площині.

$$z = \operatorname{Arcsin} 2.$$

2. Знайти всі розв'язки рівняння й зобразити їх на комплексній площині.

$$\operatorname{tg} z + \frac{i}{2} = 0.$$

3. Зобразити на комплексній площині множину точок, задану певними умовами. Охарактеризувати.

$$|z-i| \leq 1, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg(z-i) < \frac{\pi}{4}.$$

4. Визначити вид кривої. Зобразити на комплексній площині.

$$z = \frac{4}{\sin t} - 2i \cdot \operatorname{ctg} t, \quad t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

5. Перевірити, чи є функція $w = f(z)$ аналітичною (знайти область аналітичності).

$$f(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{z-i}.$$

6. Відновити аналітичну функцію за її дійсною або уявною частиною.

$$\operatorname{Im} f(z) = e^x \sin y + 2xy + 5y.$$

7. Обчислити інтеграл від функції комплексного змінного уздовж даної кривої l .

$$7.1. \int_l \sin 2\bar{z} dz.$$

$$7.2. \int_l (\sin 2z + \sin iz) dz, \text{ де } l - \text{ламана: } \{z_1 = 0, z_2 = -1, z_3 = i\}.$$

8. З'ясувати, чи можливе розкладання у ряд Лорана по степенях $(z - z_0)$ у зазначених кільцях. Намалуйте ці кільця.

$$f(z) = \frac{1}{(3+z)(z^2+25)}, \quad z_0 = 5i.$$

$$8.1. 0 < |z-5i| < \sqrt{34}.$$

$$8.2. \sqrt{34} < |z-5i| < 10.$$

$$8.3. 0 < |z-5i| < 7.$$

$$8.4. 0 < |z+i| < 10.$$

9. Розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0 і в околі нескінченності. Знайти область збіжності.

$$9.1. f(z) = \frac{1}{z(z^2 + 4)}, \quad z_0 = \infty. \quad 9.2. f(z) = \cos \frac{3z}{z-1}, \quad z_0 = 1.$$

10. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$. Установити, які з них є ізольованими.

$$f(z) = \frac{z+2}{\sin \frac{z}{z+1}}.$$

11. Установити характер ізольованої особливої точки z_0 для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{\operatorname{tg} 2z}{z - \sin z}, \quad z_0 = 0.$$

12. Знайти всі ізольовані особливі точки функції $f(z)$ й установити їхній характер.

$$f(z) = \frac{z+1}{2^z + 3}.$$

13. Визначити характер особливості $z = \infty$ для функції $f(z)$.

$$f(z) = z^2 \left(1 - \cos \frac{2}{z} \right).$$

14. Обчислити інтеграли.

$$14.1. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\sqrt{2} + \cos x)^2}.$$

$$14.2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 3}{(x^2 - 10x + 29)^2} dx.$$

$$14.3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3 - 2) \cos \frac{x}{2}}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

$$14.4. \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cdot \cos \frac{x}{2}}{x^2 - 7x + 12} dx.$$

Варіант № 19

1. Представити число в алгебраїчній формі. Знайти головне значення. Зобразити на комплексній площині.

$$z = (1 - i)^{2i}.$$

2. Знайти всі розв'язки рівняння й зобразити їх на комплексній площині.

$$e^{2z} - 5ie^z + 6 = 0.$$

3. Зобразити на комплексній площині множину точок, задану певними умовами. Охарактеризувати.

$$2 < z \cdot \bar{z} < 3, \operatorname{Re} z < 0, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1.$$

4. Визначити вид кривої. Зобразити на комплексній площині.

$$z = \frac{1+t}{1-t} + i \frac{t+2}{2-t}, \quad t \in (1, 2).$$

5. Перевірити, чи є функція $w = f(z)$ аналітичною (знайти область аналітичності).

$$f(z) = \ln(z+1) + \bar{z}, \quad (x > 0, y > 0).$$

6. Відновити аналітичну функцію за її дійсною або уявною частиною.

$$\operatorname{Re} f(z) = \sin x \cdot \operatorname{ch} y.$$

7. Обчислити інтеграл від функції комплексного змінного уздовж даної кривої l .

$$7.1. \int_l z \operatorname{Re} z^2 dz.$$

$$7.2. \int_l z^3 dz, \text{ де } l: \{|z| = R, \operatorname{Im} z > 0\}.$$

8. З'ясувати, чи можливе розкладання у ряд Лорана по степенях $(z - z_0)$ у зазначених кільцях. Намалуйте ці кільця.

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z - 1 - i)z}, \quad z_0 = 1 + i.$$

$$8.1. 0 < |z - 1 - i| < 1.$$

$$8.2. \sqrt{2} < |z - 1 - i| < \sqrt{5}.$$

$$8.3. \sqrt{5} < |z - 1 - i| < \infty.$$

$$8.4. 0 < |z - 1 - i| < \sqrt{5}.$$

9. Розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0 і в околі нескінченності. Знайти область збіжності.

$$9.1. f(z) = \frac{1}{(z^2 + 3z)z}, \quad z_0 = -3, \quad z_0 = \infty.$$

$$9.2. f(z) = \frac{1}{z-1} \cdot \sin \pi z, \quad z_0 = 1.$$

10. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$. Установити, які з них є ізольованими.

$$f(z) = \frac{z+1}{e^{\frac{z}{2}} + 1}.$$

11. Установити характер ізольованої особливої точки z_0 для функції $f(z)$.

$$f(z) = \cos \frac{1}{2z+i}, \quad z_0 = -\frac{i}{2}.$$

12. Знайти всі ізольовані особливі точки функції $f(z)$ й установити їхній характер.

$$f(z) = \frac{\sin(z-1)}{(z^2-1)(z+i)}.$$

13. Визначити характер особливості $z = \infty$ для функції $f(z)$.

$$f(z) = z^3 \left(\sin \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \right).$$

14. Обчислити інтеграли.

$$14.1. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(3 + \cos x)^2}.$$

$$14.2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+5)^2}.$$

$$14.3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 5x dx}{(x^2+1)(x^2+9)} dx.$$

$$14.4. \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x^3+2x} dx.$$

Варіант № 20

1. Представити число в алгебраїчній формі. Знайти головне значення. Зобразити на комплексній площині.

$$z = \operatorname{Arctg}(1+2i).$$

2. Знайти всі розв'язки рівняння й зобразити їх на комплексній площині.

$$\operatorname{tg} z + i\sqrt{3} = 0.$$

3. Зобразити на комплексній площині множину точок, задану певними умовами. Охарактеризувати.

$$|z+i| \leq 1, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg(z+i) < \frac{\pi}{4}.$$

4. Визначити вид кривої. Зобразити на комплексній площині.

$$z = 4 \operatorname{tg} t + 3i \frac{1}{\cos t}, \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right).$$

5. Перевірити, чи є функція $w = f(z)$ аналітичною (знайти область аналітичності).

$$f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{z-4}.$$

6. Відновити аналітичну функцію за її дійсною або уявною частиною.

$$\operatorname{Im} f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} - 5x + y.$$

7. Обчислити інтеграл від функції комплексного змінного уздовж даної кривої l .

$$7.1. \int_l \operatorname{Re} \frac{\bar{z}}{z} dz.$$

$$7.2. \int_l (\cos 3z + \sin iz) dz, \text{ де } l - \text{крива } AB: \{|z|=1, \operatorname{Im} z \geq 0\} \text{ і}$$

відрізок прямої $BC: \{z_1=1, z_2=2\}$.

8. З'ясувати, чи можливе розкладання у ряд Лорана по степенях $(z-z_0)$ у зазначених кільцях. Намалюйте ці кільця.

$$f(z) = \frac{1}{(z-2-3i)(z^2+9)}, \quad z_0 = 2+3i.$$

8.1. $0 < |z-2-3i| < 2$.

8.2. $1 < |z-2-3i| < 3$.

8.3. $\sqrt{13} < |z-2-3i| < \sqrt{40}$.

8.4. $\sqrt{40} < |z-2-3i| < \infty$.

9. Розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0 і в околі нескінченності. Знайти область збіжності.

9.1. $f(z) = \frac{1}{(z+i)(z^2-4)}, \quad z_0 = -i, \quad z_0 = \infty$.

9.2. $f(z) = \frac{1-e^{3z}}{z^3}, \quad z_0 = 0$.

10. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$. Установити, які з них є ізольованими.

$$f(z) = \frac{z+2}{\cos \frac{2}{z}}.$$

11. Установити характер ізольованої особливої точки z_0 для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+4)^3}, \quad z_0 = 2i.$$

12. Знайти всі ізольовані особливі точки функції $f(z)$ й установити їхній характер.

$$f(z) = \frac{1+z}{z(e^{2z}-1)}.$$

13. Визначити характер особливості $z = \infty$ для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{\cos 2z}{z^3}.$$

14. Обчислити інтеграл.

$$14.1. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(4 + 3\cos x)^2}.$$

$$14.2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 7x^2 + 12}.$$

$$14.3. \int_0^{+\infty} \frac{x \cdot \sin \frac{x}{2}}{(x^2 + 4)^2} dx.$$

$$14.4. \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x^2 + 2x} dx.$$

Варіант № 21

1. Представити число в алгебраїчній формі. Знайти головне значення. Зобразити на комплексній площині.

$$z = \operatorname{Arccos}(-3).$$

2. Знайти всі розв'язки рівняння й зобразити їх на комплексній площині.

$$2 \cos z - i + \sqrt{2} = 0.$$

3. Зобразити на комплексній площині множину точок, задану певними умовами. Охарактеризувати.

$$3 \leq |z-1| + |z+1| \leq 5.$$

4. Визначити вид кривої. Зобразити на комплексній площині.

$$z = 2e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it}, \quad t \in (-\infty; +\infty).$$

5. Перевірити, чи є функція $w = f(z)$ аналітичною (знайти область аналітичності).

$$f(z) = \frac{z \cos z}{1 + z^2}.$$

6. Відновити аналітичну функцію за її дійсною або уявною частиною.

$$\operatorname{Re} f(z) = e^x (x \cos y - y \sin y).$$

7. Обчислити інтеграл від функції комплексного змінного уздовж даної кривої l .

$$7.1. \int_l (z^2 - \operatorname{Im} z) dz.$$

$$7.2. \int_l (z^2 - 4z) dz, \text{ де } l \text{ - відрізок прямої } BC:$$

$$\{z_B = -1 + i, z_C = 2\}.$$

8. З'ясувати, чи можливе розкладання у ряд Лорана по степенях $(z - z_0)$ у зазначених кільцях. Намалуйте ці кільця.

$$f(z) = \frac{1}{(z - 1 - i)(z^2 + 25)}, \quad z_0 = 5i.$$

$$8.1. 0 < |z - 5i| < 2.$$

$$8.2. 0 < |z - 5i| < \sqrt{26}.$$

$$8.3. \sqrt{17} < |z - 5i| < \sqrt{30}.$$

$$8.4. \sqrt{26} < |z - 5i| < 10.$$

9. Розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0 і в околі нескінченності. Знайти область збіжності.

$$9.1. f(z) = \frac{1}{(z+1)(z^2+4)}, z_0 = -1.$$

$$9.2. f(z) = \frac{1-e^{-3z}}{z^3}, z_0 = 0, z_0 = \infty.$$

10. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$. Установити, які з них є ізольованими.

$$f(z) = \frac{z-1}{\sin \frac{\pi}{z}}.$$

11. Установити характер ізольованої особливої точки z_0 для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{\cos 3z - 1}{\sin 2z - 2z}, z_0 = 0.$$

12. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$ й установити їхній характер.

$$f(z) = \frac{1}{3 + \sin z}.$$

13. Визначити характер особливості $z = \infty$ для функції $f(z)$.

$$f(z) = z^4 \left(1 - e^{\frac{2}{z^2}} \right).$$

14. Обчислити інтеграл.

$$14.1. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{15} \cdot \sin x - 4}.$$

$$14.2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 4}{(x^2 + 9)^2} dx.$$

$$14.3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 3x^2 + 2} dx.$$

$$14.4. \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-4)\sin 3x}{x^2 - 4} dx.$$

Варіант № 22

1. Представити число в алгебраїчній формі. Знайти головне значення. Зобразити на комплексній площині.

$$z = (3 - 4i)^{1+i}.$$

2. Знайти всі розв'язки рівняння й зобразити їх на комплексній площині.

$$e^{2z} + 4 = 0.$$

3. Зобразити на комплексній площині множину точок, задану певними умовами. Охарактеризувати.

$$|z + 1 + i| > 2.$$

4. Визначити вид кривої. Зобразити на комплексній площині.

$$z = \frac{1}{(1 + e^{it})^2}, \quad t \in (-\infty; +\infty).$$

5. Перевірити, чи є функція $w = f(z)$ аналітичною (знайти область аналітичності).

$$f(z) = z \cdot e^{-z}.$$

6. Відновити аналітичну функцію за її дійсною або уявною частиною.

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2}.$$

7. Обчислити інтеграл від функції комплексного змінного уздовж даної кривої l .

$$7.1. \int_l \sin 2\bar{z} dz.$$

$$7.2. \int_l (\sin 2z + \sin iz) dz, \text{ де } l - \text{ ламана: } \{z_1 = 0, z_2 = -1, z_3 = 1\}.$$

8. З'ясувати, чи можливе розкладання у ряд Лорана по степенях $(z - z_0)$ у зазначених кільцях. Намалуйте ці кільця.

$$f(z) = \frac{1}{(z - 2 - 3i)(z^2 + 9)}, \quad z_0 = 2 + 3i.$$

$$8.1. 0 < |z - 2 - 3i| < 2.$$

$$8.2. 0 < |z - 2 - 3i| < \sqrt{13}.$$

$$8.3. \sqrt{13} < |z - 2 - 3i| < \sqrt{40}.$$

$$8.4. \sqrt{40} < |z - 2 - 3i| < \infty.$$

9. Розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0 і в околі нескінченності. Знайти область збіжності.

$$9.1. f(z) = \frac{1}{(z + 2i)(z^2 - 9)}, \quad z_0 = 2i.$$

$$9.2. f(z) = z^2 \cos \frac{1}{z-2}, \quad z_0 = 1, \quad z_0 = \infty.$$

10. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$. Установити, які з них є ізольованими.

$$f(z) = \frac{z-1}{\sin \frac{2\pi}{z}}.$$

11. Установити характер ізольованої особливої точки z_0 для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{1 - \cos 3z}{z - \sin z}, \quad z_0 = 0.$$

12. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$ й установити їхній характер.

$$f(z) = \frac{e^z + 1}{e^z - 1}.$$

13. Визначити характер особливості $z = \infty$ для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{z^3 + 1}{z + 2}.$$

14. Обчислити інтеграл.

$$14.1. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\sqrt{6} \sin x - 5}.$$

$$14.2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2)^2 (x^2 + 10)^2}.$$

$$14.3. \int_0^{+\infty} \frac{x^3 \cdot \sin 3x}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx.$$

$$14.4. \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2 - 4x} dx.$$

Варіант № 23

1. Представити число в алгебраїчній формі. Знайти головне значення. Зобразити на комплексній площині.

$$z = (-3 + 4i)^{1+i}.$$

2. Знайти всі розв'язки рівняння й зобразити їх на комплексній площині.

$$\operatorname{ctg} z + 1 + 2i = 0.$$

3. Зобразити на комплексній площині множину точок, задану певними умовами. Охарактеризувати.

$$\operatorname{Im} \frac{1}{z} \leq \frac{1}{2}.$$

4. Визначити вид кривої. Зобразити на комплексній площині.

$$\left| \frac{2z+1}{z+2} \right| = 1.$$

5. Перевірити, чи є функція $w = f(z)$ аналітичною (знайти область аналітичності).

$$f(z) = |z| \cdot \operatorname{Im} z.$$

6. Відновити аналітичну функцію за її дійсною або уявною частиною.

$$\operatorname{Re} f(z) = e^{-y} \cos x + x.$$

7. Обчислити інтеграл від функції комплексного змінного уздовж даної кривої l .

$$7.1. \int_l (z^2 - z \cdot \bar{z}) dz.$$

$$7.2. \int_l (\operatorname{Im} 2z - 4z) dz, \text{ де } l - \text{ відрізок прямої } AB:$$

$$\{z_A = -2, z_B = i + 2\}.$$

8. З'ясувати, чи можливе розкладання у ряд Лорана по степенях $(z - z_0)$ у зазначених кільцях. Намалюйте ці кільця.

$$f(z) = \frac{1}{(z-3+2i)(z-1)(z+i)}, \quad z_0 = 3+2i.$$

8.1. $0 < |z - 3 + 2i| < \sqrt{5}$.

8.2. $0 < |z - 3 + 2i| < \sqrt{13}$.

8.3. $\sqrt{5} < |z - 3 + 2i| < 3$.

8.4. $\sqrt{13} < |z - 3 + 2i| < \infty$.

9. Розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0 і в околі нескінченності. Знайти область збіжності.

9.1. $f(z) = \frac{z+1}{z^3 - 2z^2}$, $z_0 = 2$.

9.2. $f(z) = (z-1)e^{\frac{1}{2-z}}$, $z_0 = 2$, $z_0 = \infty$.

10. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$. Установити, які з них є ізольованими.

$$f(z) = e^{\frac{1}{z^2}} + 2.$$

11. Установити характер ізольованої особливої точки z_0 для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{1}{1 - \cos z} - \frac{2}{z}, \quad z_0 = 2i.$$

12. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$ й установити їхній характер.

$$f(z) = \frac{\pi - z}{\sin^3 z}.$$

13. Визначити характер особливості $z = \infty$ для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{z^2 + 4}{z + 2}.$$

14. Обчислити інтеграл.

$$14.1. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{35 \sin x - 6}}.$$

$$14.2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2)^2 (x^2 + 10)^2}.$$

$$14.3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cdot \sin 2x}{(x^2 + 9)^2} dx.$$

$$14.4. \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1) \cos x}{x^2 - 8x + 7} dx.$$

Варіант № 24

1. Представити число в алгебраїчній формі. Знайти головне значення. Зобразити на комплексній площині.

$$z = 2^{2i}.$$

2. Знайти всі розв'язки рівняння й зобразити їх на комплексній площині.

$$\operatorname{tg}^2 z + 3 = 0.$$

3. Зобразити на комплексній площині множину точок, задану певними умовами. Охарактеризувати.

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z} > -\frac{1}{2}.$$

4. Визначити вид кривої. Зобразити на комплексній площині.

$$z = 3e^{it} - \frac{1}{2e^{it}}, \quad t \in [0; 2\pi].$$

5. Перевірити, чи є функція $w = f(z)$ аналітичною (знайти область аналітичності).

$$f(z) = \frac{e^z}{z}.$$

6. Відновити аналітичну функцію за її дійсною або уявною частиною.

$$\operatorname{Im} f(z) = 3x^2y - y^3 - y.$$

7. Обчислити інтеграл від функції комплексного змінного уздовж даної кривої l .

$$7.1. \int_l (2\bar{z} - 1)^2 dz.$$

$$7.2. \int_l (3z^4 + 2z)^3 dz, \text{ де } l \text{ – відрізок прямої } AB:$$

$$\{z_A = 2 - i, z_B = i\}.$$

8. З'ясувати, чи можливе розкладання у ряд Лорана по степенях $(z - z_0)$ у зазначених кільцях. Намалюйте ці кільця.

$$f(z) = \frac{1}{(z + 2i)(z - 1 + i)(z - 3i)}, z_0 = 1 - i.$$

$$8.1. 0 < |z - 1 + i| < \sqrt{17}.$$

$$8.2. 0 < |z - 1 + i| < \sqrt{2}.$$

$$8.3. \sqrt{2} < |z - 1 + i| < 3.$$

$$8.4. |z - 1 + i| < \sqrt{2}.$$

9. Розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0 і в околі нескінченності. Знайти область збіжності.

$$9.1. f(z) = \frac{1}{z(z^2 + 1)}, z_0 = i.$$

$$9.2. f(z) = \frac{z+1}{z} \sin \frac{\pi z}{2}, z_0 = 0, z_0 = \infty.$$

10. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$. Установити, які з них є ізольованими.

$$f(z) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2z}.$$

11. Установити характер ізольованої особливої точки z_0 для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{z \cdot \sin 2z}{(e^{2z} - 1)^3}, \quad z_0 = 0.$$

12. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$ й установити їхній характер.

$$f(z) = \frac{1}{2 + \cos z}.$$

13. Визначити характер особливості $z = \infty$ для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{z^4}{(1+z)^2}.$$

14. Обчислити інтеграл.

$$14.1. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{4\sqrt{3} \sin x - 7}.$$

$$14.2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 8x + 17)^2} dx.$$

$$14.3. \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{9x^2 + 4} dx.$$

$$14.4. \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cdot \sin x}{x^2 - a^2} dx, \quad a > 0.$$

Варіант № 25

1. Представити число в алгебраїчній формі. Знайти головне значення. Зобразити на комплексній площині.

$$z = \sin(\pi + i \ln 3).$$

2. Знайти всі розв'язки рівняння й зобразити їх на комплексній площині.

$$\operatorname{ctg} z - 1 - i = 0.$$

3. Зобразити на комплексній площині множину точок, задану певними умовами. Охарактеризувати.

$$1 \leq |z+2| + |z-4| \leq 3.$$

4. Визначити вид кривої. Зобразити на комплексній площині.

$$\left| \frac{z+2}{z-1} \right| = 2.$$

5. Перевірити, чи є функція $w = f(z)$ аналітичною (знайти область аналітичності).

$$f(z) = \sin 3z - i.$$

6. Відновити аналітичну функцію за її дійсною або уявною частиною.

$$\operatorname{Im} f(z) = -2 \sin 2x \cdot \operatorname{sh} 2y + y.$$

7. Обчислити інтеграл від функції комплексного змінного уздовж даної кривої l .

$$7.1. \int_l z \operatorname{Re} z^2 dz.$$

$$7.2. \int_l z^3 dz, \text{ де } l - \text{крива } AB: \{|z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

8. З'ясувати, чи можливе розкладання у ряд Лорана по степенях $(z - z_0)$ у зазначених кільцях. Намалюйте ці кільця.

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z^2+z-2)}, \quad z_0 = i.$$

8.1. $|z-i| < 2$.

8.2. $0 < |z-i| < \sqrt{2}$.

8.3. $\sqrt{2} < |z-i| < \sqrt{5}$.

8.4. $\sqrt{5} < |z-i| < \infty$.

9. Розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0 і в околі нескінченності. Знайти область збіжності.

9.1. $f(z) = \frac{z}{(z+2)(z-1)}, \quad z_0 = 1$.

9.2. $f(z) = (z+1) \cdot \cos \frac{1}{z-4}, \quad z_0 = 0, \quad z_0 = \infty$.

10. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$. Установити, які з них є ізольованими.

$$f(z) = \frac{z+2}{e^{\frac{1}{z+2}} + 1}.$$

11. Установити характер ізольованої особливої точки z_0 для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{1}{z(e^z + 1)}, \quad z_0 = 3\pi i.$$

12. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$ й установити їхній характер.

$$f(z) = \frac{3 + e^{2z}}{3 - e^{2z}}.$$

13. Визначити характер особливості $z = \infty$ для функції $f(z)$.

$$f(z) = \frac{1}{e^{2z} - 1} - \frac{1}{2z}.$$

14. Обчислити інтеграл.

$$14.1. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 \sin x + 5}.$$

$$14.2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 10}{(x^2 + 4)^2} dx.$$

$$14.3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cdot \cos 2x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

$$14.4. \text{v.p.} \int_0^{+\infty} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{x^2} dx.$$

5.2. Варіанти обов'язкових домашніх завдань за темою «Інтегральні перетворення»

Варіант № 1

1. Використовуючи таблицю і властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних оригіналів.

$$1.1. f(t) = t \cdot e^{-2t} \cdot \sin 3t. \quad 1.2. f(t) = \int_0^t (t-\tau)^2 \cos 2\tau d\tau.$$

$$1.3. f(t) = \frac{\sin 3t \cdot \sin 7t}{t}.$$

2. Користуючись першою теоремою розкладання, знайти оригінал даного зображення у вигляді степеневого ряду.

$$F(p) = \frac{1}{4} \ln \frac{p^2 + 4}{p^2}.$$

3. Використовуючи другу теорему розкладання, знайти оригінал даного розкладання.

$$F(p) = \frac{p^3}{(p^2 + 1)^3}.$$

4. Знайти рішення диференціальних рівнянь за даних початкових умов.

$$4.1. x'' - 3x' + 2x = te^t; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

$$4.2. x'' + x = f(t), \quad \text{де } f(t) = \begin{cases} \cos t, & t \in [0, \pi); \\ 0, & t \geq \pi; \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

5. Користуючись теоремою Парсеваля, обчислити

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2} - e^{-2x^2}}{x^2} dx.$$

6. Знайти перетворення Фур'є функції $f(x) = e^{-|x-3|}$.

7. Знайти синус-перетворення або косинус-перетворення Фур'є функції $f(x)$, заданої на $[0, +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \pi; \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

Варіант № 2

1. Використовуючи таблицю і властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних оригіналів.

$$1.1. f(t) = t \cdot e^{-t} \cdot \cos 2t. \quad 1.3. f(t) = \frac{1 - e^{-4t}}{t \cdot e^t}.$$

$$1.2. f(t) = \int_0^t \tau (t - \tau)^2 \cos 2(t - \tau) d\tau.$$

2. Користуючись першою теоремою розкладання, знайти оригінал даного зображення у вигляді степеневого ряду.

$$F(p) = \frac{1}{p} e^{\frac{1}{p^3}}.$$

3. Використовуючи другу теорему розкладання, знайти оригінал даного розкладання.

$$F(p) = \frac{1}{p^3(p^2 + 4)}.$$

4. Знайти рішення диференціальних рівнянь за даних початкових умов.

$$4.1. x'' + 2x' + x = te^{-t}; x(0) = 1, x'(0) = 2.$$

$$4.2. x'' + 4x = (1 - \eta(t - \pi)) \sin t; x(0) = 0, x'(0) = 1.$$

5. Користуючись теоремою Парсевала, обчислити

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x \cdot \cos 5x}{x^2} dx.$$

6. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x) = \begin{cases} -e^x, & x \in [-1, 0); \\ e^{-x}, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

7. Знайти синус-перетворення Фур'є функції $f(x)$, заданої на $[0, +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & |x| \leq 2; \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

Варіант № 3

1. Використовуючи таблицю і властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних оригіналів.

$$1.1. f(t) = t \cdot e^{-t} \cdot \text{sh } t. \quad 1.3. f(t) = \frac{1 - \cos t}{t} \cdot e^{-t}.$$

$$1.2. f(t) = \int_0^t \tau(t-\tau) \sin^2(t-\tau) d\tau.$$

2. Користуючись першою теоремою розкладання, знайти оригінал даного зображення у вигляді степеневого ряду.

$$F(p) = \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p^2}}.$$

3. Використовуючи другу теорему розкладання, знайти оригінал даного розкладання.

$$F(p) = \frac{1}{p(p^3 + 8)}.$$

4. Знайти рішення диференціальних рівнянь за даних початкових умов.

$$4.1. 2x'' + 8x = 2 \cos^2 t; \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 2.$$

$$4.2. x'' + 4x' + 20x = \eta \left(t - \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(t - \frac{\pi}{6} \right); \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

5. Користуючись теоремою Парсеваля, обчислити

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(x+4)^5} dx.$$

6. Знайти перетворення Фур'є функції $f(x) = e^{-|x-4|}$.

7. Знайти косинус-перетворення Фур'є функції $f(x)$, заданої на $[0, +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \pi; \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

Варіант № 4

1. Використовуючи таблицю і властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних оригіналів.

1.1. $f(t) = t \cdot \cos^2 \frac{t}{2}$.

1.3. $f(t) = \frac{\sin 9t \cdot \sin t}{t}$.

1.2. $f(t) = \int_0^t \tau^2 \cdot e^{2(t-\tau)} \cdot \sin(t-\tau) d\tau$.

2. Користуючись першою теоремою розкладання, знайти оригінал даного зображення у вигляді степеневого ряду.

$$F(p) = \frac{1}{2p} \ln \frac{p+1}{p-1}, \operatorname{Re} p > 1.$$

3. Використовуючи другу теорему розкладання, знайти оригінал даного розкладання.

$$F(p) = \frac{P}{p^3 + 1}.$$

4. Знайти рішення диференціальних рівнянь за даних початкових умов.

4.1. $x'' - 4x' + 3x = e^t (t^2 - 3t + 1); x(0) = 0, x'(0) = 1$.

4.2. $x'' + 4x = \eta(t) - \eta(t - \pi); x(0) = x'(0) = 0$.

5. Користуючись теоремою Парсеваля, обчислити

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x^2} dx.$$

6. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x) = \begin{cases} \cos 3x, & |x| \leq \frac{\pi}{6}; \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

7. Знайти косинус-перетворення Фур'є функції $f(x)$, заданої на $(0, +\infty)$.

$$f(x) = \frac{1 - e^{-5x}}{x}.$$

Варіант № 5

1. Використовуючи таблицю і властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних оригіналів.

1.1. $f(t) = t^2 \cdot e^{-2t} \cdot \cos t$. 1.2. $f(t) = \int_0^t \tau^2 \cdot \sin 2\tau \cdot e^{2(t-\tau)} d\tau$.

1.3. $f(t) = \frac{1 - e^{-3t}}{t \cdot e^{2t}}$.

2. Користуючись першою теоремою розкладання, знайти оригінал даного зображення у вигляді степеневого ряду.

$$F(p) = \frac{1}{4} \ln \frac{p^2 + 4}{p^2}, \operatorname{Re} p > 0.$$

3. Використовуючи другу теорему розкладання, знайти оригінал даного розкладання.

$$F(p) = \frac{1}{(p^2 + 4p + 8)^2}.$$

4. Знайти рішення диференціальних рівнянь за даних початкових умов.

4.1. $x'' - 2x' + x = 1 - e^t$; $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

4.2. $x''(t) + 3x'(t) = 4\eta(t) - (t+2) \cdot \eta(t-3)$.

5. Користуючись теоремою Парсеваля, обчислити

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 3x - \cos 5x}{x} dx.$$

6. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}.$$

7. Знайти косинус-перетворення Фур'є функції $f(x)$, заданої на $[0, +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin 3x, & |x| \leq 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Варіант № 6

1. Використовуючи таблицю і властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних оригіналів.

$$1.1. f(t) = t \cdot e^t \cdot \cos^2 t. \quad 1.3. f(t) = \frac{\operatorname{sh}^2 t}{t}.$$

$$1.2. f(t) = \int_0^t e^{2\tau} (t-\tau)^2 \sin(t-\tau) d\tau.$$

2. Користуючись першою теоремою розкладання, знайти оригінал даного зображення у вигляді степеневого ряду.

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt[3]{p^3 - 1}}, \operatorname{Re} p > 1.$$

3. Використовуючи другу теорему розкладання, знайти оригінал даного розкладання.

$$F(p) = \frac{1}{p^5 - p^3}, \operatorname{Re} p > 1.$$

4. Знайти рішення диференціальних рівнянь за даних початкових умов.

$$4.1. x'' - 6x' + 5x = 3e^{2t}; x(0) = 0, x'(0) = 0.$$

$$4.2. x'' + 7x' + 6x = e^{-2t} \operatorname{sh} t + \eta(t-1); x(0) = 1, x'(0) = 0.$$

5. Користуючись теоремою Парсеваля, обчислити

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} \right)^2 dx.$$

6. Знайти перетворення Фур'є функції $f(x) = (1-x) \cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$.

7. Знайти косинус-перетворення Фур'є функції $f(x)$, заданої на $[0, +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} \sin 3x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right); \\ 0, & x > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Варіант № 7

1. Використовуючи таблицю і властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних оригіналів.

$$1.1. f(t) = t^2 \cdot e^{-t} \cdot \operatorname{sh} t. \quad 1.3. f(t) = \frac{1 - e^{-3t}}{t \cdot e^{3t}}.$$

$$1.2. f(t) = \int_0^t \tau(t-\tau) \cdot \cos 3(t-\tau) d\tau.$$

2. Користуючись першою теоремою розкладання, знайти оригінал даного зображення у вигляді степеневого ряду.

$$F(p) = \frac{1}{p} \cdot \operatorname{sh} \frac{1}{p^2}.$$

3. Використовуючи другу теорему розкладання, знайти оригінал даного розкладання.

$$F(p) = \frac{2p}{(p^2 + 4p + 8)^2}.$$

4. Знайти рішення диференціальних рівнянь за даних початкових умов.

$$4.1. x'' + 6x' + 5x = 12e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

$$4.2. x'' + x = f(t), \quad \text{де } f(t) = \begin{cases} \sin t, & t \in [0, \pi]; \\ 0, & t \geq \pi; \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

5. Користуючись теоремою Парсеваля, обчислити

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-x} - e^{-3x}}{x} \right)^2 dx.$$

6. Знайти перетворення Фур'є функції $f(x) = (2-x) \cdot e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}$.

7. Знайти синус-перетворення Фур'є функції $f(x)$, заданої на $[0, +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} (6x-1), & x \in \left[0, \frac{1}{6}\right]; \\ 0, & x > \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Варіант № 8

1. Використовуючи таблицю і властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних оригіналів.

1.1. $f(t) = t \cdot e^{-2t} \cdot \cos^2 t$. 1.3. $f(t) = \frac{\sin 7t \cdot \sin 2t}{t}$.

1.2. $f(t) = \int_0^t \tau(t-\tau) \sin^2(t-\tau) d\tau$.

2. Користуючись першою теоремою розкладання, знайти оригінал даного зображення у вигляді степеневого ряду.

$$F(p) = \frac{1}{2p} \ln \frac{p^2 + 4}{p^2 - 4}, \quad \operatorname{Re} p > 2.$$

3. Використовуючи другу теорему розкладання, знайти оригінал даного розкладання.

$$F(p) = \frac{P}{p^4 + 1}.$$

4. Знайти рішення диференціальних рівнянь за даних початкових умов.

4.1. $x'' - 6x' + 5x = 3 \cos t$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

4.2. $x'' + 9x = \eta(t) - \eta(t - \pi)$; $x(0) = x'(0) = 0$.

5. Користуючись теоремою Парсеваля, обчислити

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cdot \cos 2x}{x} dx.$$

6. Знайти перетворення Фур'є функції $f(x) = e^{-|x|} \cdot \sin x$.

7. Знайти косинус-перетворення Фур'є функції $f(x)$, заданої на $(0, +\infty)$.

$$f(x) = \frac{1 - e^{-3x}}{x}.$$

Варіант № 9

1. Використовуючи таблицю і властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних оригіналів.

1.1. $f(t) = t \cdot e^{-3t} \cdot \operatorname{ch} t$. 1.2. $f(t) = \int_0^t (t-\tau)^2 \sin 2\tau \, d\tau$.

1.3. $f(t) = \frac{\cos 2t - \cos 4t}{t}$.

2. Користуючись першою теоремою розкладання, знайти оригінал даного зображення у вигляді степеневого ряду.

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt[3]{p^3 - 2}}, \operatorname{Re} p > \sqrt[3]{2}.$$

3. Використовуючи другу теорему розкладання, знайти оригінал даного розкладання.

$$F(p) = \frac{1}{p^5 + p^3}.$$

4. Знайти рішення диференціальних рівнянь за даних початкових умов.

4.1. $x'' - x' = te^t$; $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.

4.2. $x'' + 6x' + 8x = \sin t - \eta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \cos t$; $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$.

5. Користуючись теоремою Парсеваля, обчислити

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cdot \cos \frac{x}{2}}{x} \, dx.$$

6. Знайти перетворення Фур'є функції $f(x) = (2x+1) \cdot e^{-|x|}$.

7. Знайти косинус-перетворення Фур'є функції $f(x)$, заданої на $(0, +\infty)$.

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}$$

Варіант № 10

1. Використовуючи таблицю і властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних оригіналів.

1.1. $f(t) = t^2 \cdot \text{cht}$. 1.2. $f(t) = \int_0^t \tau^2 \cdot \sin 2(t - \tau) d\tau$.

1.3. $f(t) = \frac{e^{-2t} \cdot \sin^2 t}{t}$.

2. Користуючись першою теоремою розкладання, знайти оригінал даного зображення у вигляді степеневого ряду.

$$F(p) = \frac{1}{9} \ln \frac{p^2 + 9}{p^2}.$$

3. Використовуючи другу теорему розкладання, знайти оригінал даного розкладання.

$$F(p) = \frac{1}{p^4 + 4}.$$

4. Знайти рішення диференціальних рівнянь за даних початкових умов.

4.1. $x'' + 4x = 2 \cos t \cos 2t$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

4.2. $x'' + 9x = f(t)$, $f(t) = \begin{cases} 0, & t \in (0, 3); \\ 5e^{-(t-3)}, & t > 3; \end{cases}$ $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

5. Користуючись теоремою Парсеваля, обчислити

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin 5x - 5 \sin x}{x} dx.$$

6. Знайти перетворення Фур'є функції $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1, 1]; \\ 0, & x \notin [-1, 1]. \end{cases}$

7. Знайти синус-перетворення Фур'є функції $f(x)$, заданої на $[0, +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} (4x-1), & x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]; \\ 0, & x > \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Варіант № 11

1. Використовуючи таблицю і властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних оригіналів.

1.1. $f(t) = t \cdot e^{-2t} \cdot \text{sh } t$.

1.3. $f(t) = \frac{e^{-3t} \cdot \sin t}{t}$.

1.2. $f(t) = \int_0^t \tau^2 e^{(t-\tau)} \sin(t-\tau) d\tau$.

2. Користуючись першою теоремою розкладання, знайти оригінал даного зображення у вигляді степеневого ряду.

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 - 4}}, \quad \text{Re } p > 2.$$

3. Використовуючи другу теорему розкладання, знайти оригінал даного розкладання.

$$F(p) = \frac{1}{p^3(p^2 - 4)}.$$

4. Знайти рішення диференціальних рівнянь за даних початкових умов.

4.1. $x'' - x = te^t$; $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.

4.2. $x'' + 6x' + 8x = \cos t - \eta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin t$; $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$.

5. Користуючись теоремою Парсеваля, обчислити

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{x^2} dx.$$

6. Знайти перетворення Фур'є функції $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

7. Знайти косинус-перетворення Фур'є функції $f(x)$, заданої на $[0, +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right); \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Варіант № 12

1. Використовуючи таблицю і властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних оригіналів.

$$1.1. f(t) = t^2 \cdot \operatorname{ch} 2t. \quad 1.2. f(t) = \int_0^t (t-\tau)^2 \sin 2\tau \, d\tau.$$

$$1.3. f(t) = \frac{1-e^{2t}}{t \cdot e^t}.$$

2. Користуючись першою теоремою розкладання, знайти оригінал даного зображення у вигляді степеневого ряду.

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 - 3}}, \operatorname{Re} p > \sqrt{3}.$$

3. Використовуючи другу теорему розкладання, знайти оригінал даного розкладання.

$$F(p) = \frac{P}{(p^2 + 4)^2}.$$

4. Знайти рішення диференціальних рівнянь за даних початкових умов.

$$4.1. x'' - 3x' + 2x = 2e^t \cos \frac{t}{2}; \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

$$4.2. x'' + 16x = f(t), \quad f(t) = \begin{cases} 0, & t \in (0, 1]; \\ 3e^{-(t-1)}, & t > 1; \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

5. Користуючись теоремою Парсеваля, обчислити

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-2x} - e^{-3x}}{x} \right)^2 dx.$$

6. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{x}{2}, & |x| \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

7. Знайти косинус-перетворення Фур'є функції

$$f(x) = \frac{1 - e^{-4x}}{x}, \text{ заданої на } (0, +\infty).$$

Варіант № 13

1. Використовуючи таблицю і властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних оригіналів.

1.1. $f(t) = t^2 \cdot e^{-t} \cdot \sin t$. 1.3. $f(t) = \frac{\sin^2 t}{t}$.

1.2. $f(t) = \int_0^t e^{2t} (t-\tau)^2 \cdot \cos(t-\tau) d\tau$.

2. Користуючись першою теоремою розкладання, знайти оригінал даного зображення у вигляді степеневого ряду.

$$F(p) = \ln \left| \frac{p^3 + 4}{p^3} \right|, \operatorname{Re} p > 0.$$

3. Використовуючи другу теорему розкладання, знайти оригінал даного розкладання.

$$F(p) = \frac{2p + 3}{p^3 + 4p^2 + 5p}.$$

4. Знайти рішення диференціальних рівнянь за даних початкових умов.

4.1. $x'' + x' - 6x = 6$; $x(0) = -1$, $x'(0) = 5$.

4.2. $x'' + 4x = f(t)$, $f(t) = \begin{cases} 0, & t \in (0, 2]; \\ 5e^{-(t-2)}, & t > 2; \end{cases}$ $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

5. Користуючись теоремою Парсеваля, обчислити

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x \cdot \cos 3x}{x^2} dx.$$

6. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

7. Знайти синус-перетворення Фур'є функції $f(x) = \frac{4 - e^{-2x}}{x}$, заданої на $[2, +\infty)$.

Варіант № 14

1. Використовуючи таблицю і властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних оригіналів.

1.1. $f(t) = t^2 \cdot \sin 2t$. 1.2. $f(t) = \int_0^t (t-\tau)^3 \cos 3\tau d\tau$.

1.3. $f(t) = \frac{e^{-t} \cdot \operatorname{sh} 2t}{t}$.

2. Користуючись першою теоремою розкладання, знайти оригінал даного зображення у вигляді степеневого ряду.

$$F(p) = \frac{1}{p^2} \cos \frac{2}{p}, \operatorname{Re} p > 0.$$

3. Використовуючи другу теорему розкладання, знайти оригінал даного розкладання.

$$F(p) = \frac{1}{(p+3)^3 (p+1)}.$$

4. Знайти рішення диференціальних рівнянь за даних початкових умов.

4.1. $x'' + 9x = 18e^{3t}$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

4.2. $x'' - x = f(t)$, де $f(t) = \begin{cases} (1-t), & t \in [0, 1]; \\ 0, & t > 1; \end{cases}$ $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

5. Користуючись теоремою Парсеваля, обчислити

$$\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3} dx.$$

6. Знайти перетворення Фур'є функції $f(x) = e^{-|x-1|}$.

7. Знайти синус-перетворення Фур'є функції $f(x)$, заданої на $[0, +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1); \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

Варіант № 15

1. Використовуючи таблицю і властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних оригіналів.

$$1.1. f(t) = t \cdot e^{-2t} \cdot \operatorname{ch} t. \quad 1.3. f(t) = \frac{\cos 2t - \cos 4t}{t}.$$

$$1.2. f(t) = \int_0^t \tau e^{(t-\tau)} \cdot \sin(t-\tau) d\tau.$$

2. Користуючись першою теоремою розкладання, знайти оригінал даного зображення у вигляді степеневого ряду.

$$F(p) = \frac{1}{2p} \ln \left| \frac{p+2}{p-2} \right|, \operatorname{Re} p > 2.$$

3. Використовуючи другу теорему розкладання, знайти оригінал даного розкладання.

$$F(p) = \frac{1}{(p+2)^3 (p-1)^2}.$$

4. Знайти рішення диференціальних рівнянь за даних початкових умов.

$$4.1. x'' + 6x' + 8x = 2e^{-t} (\cos 3t + 1); x(0) = 2, x'(0) = 1.$$

$$4.2. x'' + 4x = f(t), f(t) = \begin{cases} 0, & t \in (0, 5); \\ 5e^{-(t-5)}, & t > 5; \end{cases} x(0) = 1, x'(0) = 3.$$

5. Користуючись теоремою Парсеваля, обчислити

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cdot \cos 5x}{x} dx.$$

6. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{x}{2}, & |x| \leq \pi; \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

7. Знайти косинус-перетворення Фур'є функції $f(x) = \frac{1}{x^2 + 9}$, заданої на $[0, +\infty)$.

Варіант № 16

1. Використовуючи таблицю і властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних оригіналів.

1.1. $f(t) = t \cdot \operatorname{sh}^2 \frac{t}{2}$. 1.2. $f(t) = \int_0^t \tau e^{(t-\tau)} \cos(t-\tau) d\tau$.

1.3. $f(t) = \frac{e^{-t} \cdot \sin 3t}{t}$.

2. Користуючись першою теоремою розкладання, знайти оригінал даного зображення у вигляді степеневого ряду.

$$F(p) = \frac{1}{p} \cdot \ln \frac{p^2 + 6}{p^2}.$$

3. Використовуючи другу теорему розкладання, знайти оригінал даного розкладання.

$$F(p) = \frac{5p}{(p-1)(p^2 + 2p + 5)}.$$

4. Знайти рішення диференціальних рівнянь за даних початкових умов.

4.1. $x'' - 9x = \operatorname{ch} 3t$; $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

4.2. $x'' + x = f(t)$, де $f(t) = \begin{cases} t, & t \in (0, 1); \\ (2-t), & t \in (1, 2); \\ 0, & t > 2; \end{cases}$ $x(0) = x'(0) = 0$.

5. Користуючись теоремою Парсевала, обчислити

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(x+2)^5} dx.$$

6. Знайти перетворення Фур'є функції $f(x) = e^{-2|x|}$.

7. Знайти косинус-перетворення Фур'є функції $f(x)$, заданої на $[0, +\infty)$.

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}.$$

Варіант № 17

1. Використовуючи таблицю і властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних оригіналів.

$$1.1. f(t) = t \cdot e^{-2t} \cdot \sin t. \quad 1.2. f(t) = \int_0^t \tau^2 \cos 2\tau \cdot e^{2(t-\tau)} d\tau.$$

$$1.3. f(t) = \frac{\operatorname{ch} 2t - \operatorname{ch} 4t}{t}.$$

2. Користуючись першою теоремою розкладання, знайти оригінал даного зображення у вигляді степеневого ряду.

$$F(p) = \frac{1}{p^3} \cos \frac{1}{p^2}.$$

3. Використовуючи другу теорему розкладання, знайти оригінал даного розкладання.

$$F(p) = \frac{16}{p(p^2 + 4)^2}.$$

4. Знайти рішення диференціальних рівнянь за даних початкових умов.

$$4.1. x'' + 4x' + 3x = \operatorname{sh} t \cdot \sin t; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

$$4.2. x'' + x = f(t), \text{ де } f(t) = \begin{cases} 2, & t \in (0, 1); \\ 4, & t > 1; \\ 0, & t < 0; \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

5. Користуючись теоремою Парсеваля, обчислити

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx.$$

6. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos x, & |x| \leq 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

7. Знайти синус-перетворення Фур'є функції $f(x) = e^{-4x}$, заданої на $[0, +\infty)$.

Варіант № 18

1. Використовуючи таблицю і властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних оригіналів.

$$1.1. f(t) = t \cdot e^{-t} \cdot \cos 2t. \quad 1.2. f(t) = \int_0^t (t-\tau)^3 e^{3\tau} d\tau.$$

$$1.3. f(t) = \frac{\sin 2t \cdot \sin 5t}{t}.$$

2. Користуючись першою теоремою розкладання, знайти оригінал даного зображення у вигляді степеневого ряду.

$$F(p) = \frac{1}{2p} \cdot \ln \frac{p+3}{p-3}, \operatorname{Re} p > 3.$$

3. Використовуючи другу теорему розкладання, знайти оригінал даного розкладання.

$$F(p) = \frac{1}{p^3 (p+2)^3}.$$

4. Знайти рішення диференціальних рівнянь за даних початкових умов.

$$4.1. x'' + 2x' + x = e^{-t} (\cos t + t); x(0) = 1, x'(0) = -1.$$

$$4.2. x'' - 2x' + 2x = 1 + \eta(t-1); x(0) = x'(0) = 0.$$

5. Користуючись теоремою Парсеваля, обчислити

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-2x^2}}{x \cdot e^{x^2}} dx.$$

6. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2x}, & x \in [-1, 0); \\ -e^{2x}, & x \in [0, 1]; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

7. Знайти косинус-перетворення Фур'є функції $f(x)$, заданої на $[0, +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} (1-2x), & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right); \\ 0, & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Варіант № 19

1. Використовуючи таблицю і властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних оригіналів.

$$1.1. f(t) = t \cdot e^{2t} \cdot \cos^2 t. \quad 1.3. f(t) = \frac{\operatorname{sh} 7t \cdot \operatorname{sh} 3t}{t}.$$

$$1.2. f(t) = \int_0^t \tau(t-\tau) \cdot \cos^2(t-\tau) d\tau.$$

2. Користуючись першою теоремою розкладання, знайти оригінал даного зображення у вигляді степеневого ряду.

$$F(p) = \frac{1}{p} \sin \frac{1}{p}.$$

3. Використовуючи другу теорему розкладання, знайти оригінал даного розкладання.

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)^2 (p-2)^2}.$$

4. Знайти рішення диференціальних рівнянь за даних початкових умов.

$$4.1. x'' + 2x' + 2x = 2e^{-t} \cdot \sin t; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

$$4.2. x'' + 4x = f(t), \quad f(t) = \begin{cases} 0, & t \in (0, 3); \\ 5e^{-(t-3)}, & t > 3; \end{cases} \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 1.$$

5. Користуючись теоремою Парсеваля, обчислити

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 5x - \cos 7x}{x} dx.$$

$$6. \text{ Знайти перетворення Фур'є функції } f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1; \\ e^{-|x|}, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

7. Знайти синус-перетворення Фур'є функції $f(x)$, заданої на $[0, +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{x}{2}, & x \in [0, 2\pi]; \\ 0, & x > 2\pi. \end{cases}$$

Варіант № 20

1. Використовуючи таблицю і властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних оригіналів.

1.1. $f(t) = t \cdot \sin^2 \frac{t}{2}$.

1.3. $f(t) = \frac{1 - e^{-4t}}{t \cdot e^{2t}}$.

1.2. $f(t) = \int_0^t \tau^2 e^{2(t-\tau)} \cdot \cos(t-\tau) d\tau$.

2. Користуючись першою теоремою розкладання, знайти оригінал даного зображення у вигляді степеневого ряду.

$$F(p) = \frac{1}{p} \cos \frac{2}{p^3}.$$

3. Використовуючи другу теорему розкладання, знайти оригінал даного розкладання.

$$F(p) = \frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)}.$$

4. Знайти рішення диференціальних рівнянь за даних початкових умов.

4.1. $4x'' + 12x' + 9x = 144 \cdot e^{-\frac{3}{2}t}$; $x(0) = 1$, $x'(0) = 0,5$.

4.2. $x'' + 4x = f(t)$, $f(t) = \begin{cases} 2t, & t \in (0,1); \\ (-2t+2), & t \in (1,2); \\ 0, & t < 0, t > 2; \end{cases}$ $x(0) = x'(0) = 0$.

5. Користуючись теоремою Парсеваля, обчислити

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(x+3)^5} dx.$$

6. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin x, & |x| \leq 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

7. Знайти синус-перетворення Фур'є функції $f(x) = \frac{x}{4+x^2}$, заданої на $[0, +\infty)$.

Варіант № 21

1. Використовуючи таблицю і властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних оригіналів.

1.1. $f(t) = 3e^{5t} - 2\sin 3t + 4$. 1.3. $f(t) = \frac{\operatorname{sh} t - 1 + e^t}{t}$.

1.2. $f(t) = \int_0^t \tau^2 e^{-4\tau} d\tau$.

2. Користуючись першою теоремою розкладання, знайти оригінал даного зображення у вигляді степеневого ряду.

$$F(p) = \frac{1}{p^2} \cos \frac{1}{p}.$$

3. Використовуючи другу теорему розкладання, знайти оригінал даного розкладання.

$$F(p) = \frac{3p + 14}{p^2 + 8p + 15}.$$

4. Знайти рішення диференціальних рівнянь за даних початкових умов.

4.1. $x'' + 4x' + 4x = e^{2t}$; $x(0) = 1$, $x'(0) = -3$.

4.2. $x'' + 7x' + 6x = e^{-3t} \cdot \operatorname{sh} t + \eta(t-2)$; $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

5. Користуючись теоремою Парсеваля, обчислити

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx.$$

6. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x) = (3x - 1) \cdot e^{-|x|}.$$

7. Знайти синус-перетворення Фур'є функції $f(x)$, заданої на $[0, +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & |x| \leq 3; \\ 0, & |x| > 3. \end{cases}$$

Варіант № 22

1. Використовуючи таблицю і властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних оригіналів.

$$1.1. f(t) = \operatorname{ch} 2t \cdot \cos 3t. \quad 1.3. f(t) = \frac{\sin 6t - \sin 2t}{t}.$$

$$1.2. f(t) = \int_0^t \tau^3 e^{4\tau} d\tau.$$

2. Користуючись першою теоремою розкладання, знайти оригінал даного зображення у вигляді степеневого ряду.

$$F(p) = \frac{1}{p} \cdot e^{\frac{1}{p^2}}.$$

3. Використовуючи другу теорему розкладання, знайти оригінал даного розкладання.

$$F(p) = \frac{4p + 17}{p^2 + 8p + 7}.$$

4. Знайти рішення диференціальних рівнянь за даних початкових умов.

$$4.1. x'' - 4x' + 5x = -t + 2; x(0) = -1, x'(0) = 0.$$

$$4.2. x'' - 5x = \eta(t) - \eta(t - \pi), x(0) = x'(0) = 0.$$

5. Користуючись теоремою Парсеваля, обчислити

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-3x}}{\sqrt{x}} dx.$$

6. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x) = e^{-|2x-5|}.$$

7. Знайти косинус-перетворення Фур'є функції $f(x)$, заданої на $[0, +\infty)$.

$$f(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{x}.$$

Варіант № 23

1. Використовуючи таблицю і властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних оригіналів.

1.1. $f(t) = t^4 - e^{-t} \cos 3t + 5 \sin t$. 1.3. $f(t) = \frac{1 + e^{-4t} - 2 \cos t}{t}$.

1.2. $f(t) = \int_0^t e^{-\tau} \cos 2\tau d\tau$.

2. Користуючись першою теоремою розкладання, знайти оригінал даного зображення у вигляді степеневого ряду.

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

3. Використовуючи другу теорему розкладання, знайти оригінал даного розкладання.

$$F(p) = \frac{5p + 13}{p^2 - 8p + 20}.$$

4. Знайти рішення диференціальних рівнянь за даних початкових умов.

4.1. $x'' + 6x' + 5x = t$; $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$.

4.2. $x'' + 3x' = 5\eta(t) - (t+1)\eta(t-3)$, $x(0) = x'(0) = 0$.

5. Користуючись теоремою Парсеваля, обчислити

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4} dx.$$

6. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & |x| \leq \frac{\pi}{4}; \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

7. Знайти косинус-перетворення Фур'є функції

$$f(x) = \frac{1 - e^{-4x}}{x}, \text{ заданої на } [0, +\infty).$$

Варіант № 24

1. Використовуючи таблицю і властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних оригіналів.

1.1. $f(t) = e^{5t} \cdot \sin \pi t$. 1.3. $f(t) = \frac{\cos 6t - \cos 2t}{t}$.

1.2. $f(t) = \int_0^t \tau \cdot \operatorname{sh} 3\tau \, d\tau$.

2. Користуючись першою теоремою розкладання, знайти оригінал даного зображення у вигляді степеневого ряду.

$$F(p) = \frac{1}{p} \cdot \operatorname{sh} \frac{1}{p^2} .$$

3. Використовуючи другу теорему розкладання, знайти оригінал даного розкладання.

$$F(p) = \frac{5p + 21}{p^2 + 10p + 9} .$$

4. Знайти рішення диференціальних рівнянь за даних початкових умов.

4.1. $x'' + 4x' = e^{3t}$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

4.2. $x'' + 5x' + 6x = e^{-t} \operatorname{sh} t + \eta(t-2)$; $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

5. Користуючись теоремою Парсеваля, обчислити

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin 5x - \sin 2x}{x\sqrt{x}} \, dx .$$

6. Знайти перетворення Фур'є функції $f(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$.

7. Знайти синус-перетворення Фур'є функції $f(x)$, заданої на $[0, +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} \sin 4x, & x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right); \\ 0, & x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Варіант № 25

1. Використовуючи таблицю і властивості перетворення Лапласа, знайти зображення наступних оригіналів.

1.1. $f(t) = \sin 5t \cdot \cos 2t$.

1.3. $f(t) = \frac{1 + e^{-4t} - 2 \cos t}{t}$.

1.2. $f(t) = \int_0^t \sin^2 \tau d\tau$.

2. Користуючись першою теоремою розкладання, знайти оригінал даного зображення у вигляді степеневого ряду.

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 - 1}}, \operatorname{Re} p > 1.$$

3. Використовуючи другу теорему розкладання, знайти оригінал даного розкладання.

$$F(p) = \frac{6p + 13}{p^2 + 2p + 17}.$$

4. Знайти рішення диференціальних рівнянь за даних початкових умов.

4.1. $x'' + 7x' + 10x = \sin t$; $x(0) = x'(0) = 0$.

4.2. $x'' + x = f(t)$, $f(t) = \begin{cases} \cos t, & t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]; \\ 0, & t > \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ $x(0) = x'(0) = 0$.

5. Користуючись теоремою Парсеваля, обчислити $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$.

6. Знайти перетворення Фур'є функції $f(x) = (2-x) \cdot e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}$.

7. Знайти синус-перетворення Фур'є функції $f(x)$, заданої на $[0, +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 1, & x \in \left[0; \frac{1}{5}\right]; \\ 0, & x > \frac{1}{5}. \end{cases}$$

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

1. Основні формули диференціального числення

Основні правила диференціювання

1. $C' = 0$.
2. $(Cu)' = Cu'$.
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$.
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$, $v \neq 0$.
6. $(f(u))'_x = f'_u \cdot u'_x$.
7. $x'_y = \frac{1}{y'_x}$, де $x = x(y)$ – обернена функція до функції

$$y = y(x).$$

Тут C – стала, $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Основні формули диференціювання

1. $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$.
3. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$.

4. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$.
5. $(e^u)' = e^u \cdot u'$.
6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.
7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.
8. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.
9. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$.
10. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.
11. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.
12. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.
13. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.
14. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$.
15. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$.
16. $(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$.
17. $(\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$.

Тут $u = u(x)$. Якщо $u(x) = x$, то $u'(x) = x' = 1$.

2. Основні формули елементарної математики

2.1. Алгебраїчні функції

Властивості степенів

Для будь-яких x , y і додатних a і b є вірними рівності:

$$a^0 = 1;$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y};$$

$$a^x : a^y = a^{x-y};$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y};$$

$$(ab)^x = a^x \cdot b^x;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x};$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

Многочлени

Для будь-яких a , b і c є вірними рівності:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$\text{або } (a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b);$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2);$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

де x_1 і x_2 – корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Властивості арифметичних коренів

Для будь-яких натуральних n і k , більших за 1, і будь-яких невід'ємних a і b є вірними рівності:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; & \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0); \\ (\sqrt[n]{a})^k &= \sqrt[n]{a^k}; & \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} &= \sqrt[nk]{a}; \\ \sqrt[n]{a} &= \sqrt[nk]{a^k}; & \sqrt[n]{a^n} &= a \quad (a \geq 0); \\ \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}, & \text{ якщо } 0 \leq a < b; & \sqrt{a^2} &= |a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0; \end{cases} \\ \sqrt[2n]{a^{2n}} &= |a|; & \sqrt[2n+1]{-a} &= -\sqrt[2n+1]{a} \quad (a \geq 0).\end{aligned}$$

2.2. Тригонометричні функції

Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1; \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}; \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \\ \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha &= 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}; \\ 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}; \\ 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Формули додавання

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta ;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta ;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta ;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta ;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}, \quad \alpha, \beta, (\alpha + \beta) \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}, \quad \alpha, \beta, (\alpha - \beta) \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Формули подвійного аргументу

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha ;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha ;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Формули половинного аргументу (формули зниження степеня)

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} ;$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} ;$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Формули перетворення суми в добуток

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Формули перетворення добутку в суму

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)].$$

Співвідношення між $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, і $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Формули зведення

Назва функції не змінюється				Назва функції змінюється			
u	$-\alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$
$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
	$\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in \mathbb{Z}$			$\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in \mathbb{Z}$			
$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
	$\alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$			$\alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$			

Властивості обернених тригонометричних функцій

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a, |a| \leq 1; \quad \arccos(-a) = \pi - \arccos a, |a| \leq 1;$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a, a \in \mathbb{R}; \quad \operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a, a \in \mathbb{R};$$

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}, |a| \leq 1; \quad \operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}, a \in \mathbb{R}.$$

Найпростіші тригонометричні рівняння

$$\sin x = a \quad |a| \leq 1; \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = a \quad |a| \leq 1; \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x = a \quad a \in \mathbb{R}; \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} x = a \quad a \in \mathbb{R}; \quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Окремі випадки:

$$\sin x = 0; \quad x = \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 1; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \cos x = 1, \quad x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1; \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Властивості логарифмів

1. Якщо $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$x = a^{\log_a x}.$$

(основна логарифмічна тотожність)

2. Логарифм одиниці дорівнює нулю:

$$\log_a 1 = 0.$$

3. Логарифм основи дорівнює одиниці:

$$\log_a a = 1.$$

4. Якщо $x_1 > 0$ і $x_2 > 0$, то

$$\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2;$$

(формула для логарифма добутку)

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2.$$

(формула для логарифма частки)

5. Якщо $x > 0$, то

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x,$$

(формула для логарифма степеня)

де p – будь-яке дійсне число.

6. Якщо $x > 0$, то

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},$$

(формула переходу до нової основи логарифма)

для будь-якого дійсного числа $b > 0$.

Зокрема

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad \text{або} \quad \log_a b \cdot \log_b a = 1;$$

$$\log_a b = \log_{a^p} b^p, \quad (p \in \mathbb{R}, p \neq 0).$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Математичний аналіз : навч. посіб. : у 9-ти мод. – Мод. 2 : Границя та неперервність функції однієї змінної / Н. М. Ясницька, О. Б. Ахієзер, А. А. Боєва, О. А. Геляровська. – 2-е вид., переробл. і доповн. – Харків : НТУ «ХП», 2014. – 115 с.
2. Математичний аналіз : навч. посіб. : у 9-ти мод. – Мод. 3 : Диференціальне числення функцій однієї змінної / Н. М. Ясницька, О. Б. Ахієзер, А. А. Боєва, О. А. Геляровська. – 2-е вид., переробл. і доповн. – Харків : НТУ «ХП», 2014. – 173 с.
3. Математичний аналіз : навч. посіб. : у 9-ти мод. – Мод. 4 : Невизначений інтеграл / Н. М. Ясницька, О. Б. Ахієзер, А. А. Боєва, О. А. Геляровська. – 2-е вид., переробл. і доповн. – Харків : НТУ «ХП», 2014. – 103 с.
4. Математичний аналіз : навч. посіб. : у 9-ти мод. – Мод. 9 : Ряди / Н. М. Ясницька, О. Б. Ахієзер, А. А. Боєва, О. А. Геляровська. – 2-е вид., переробл. і доповн. – Харків : НТУ «ХП», 2014. – 161 с.
5. Ахієзер О. Б. Вища математика. Практичний курс для студентів технічних спеціальностей заочної та дистанційної форм навчання. Теорія функції комплексної змінної. Операційне числення : навч. посіб. / О. Б. Ахієзер, О. А. Геляровська, О. І. Дунаєвська, О. А. Галуза, І. В. Сердюк; за ред. проф. Л. М. Любчик. – Х. : НТУ "ХП", 2016. – 148 с.
6. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз : підручник : у 2 ч. / А. Я. Дороговцев. – Київ : Либідь, 1994. – Ч. 2. – 304 с.
7. Давидов Н. О. Елементи теорії функцій комплексної змінної : навч. посіб. / Н. О. Давидов. – К. : Рад. шк., 1968. – 212 с.
8. Павлова Л. В. Теорія аналітичних функцій. Збірник вправ : навч. посіб. / Л. В. Павлова, О. І. Редькіна. – К. : Вища школа, 1980. – 216 с.
9. Гольдберг А. А. Комплексний аналіз : підручник / А. А. Гольдберг, М. М. Шеремета, М. В. Заболоцький, О. Б. Спаськів. – Львів : Афіша, 2002. – 204 с.

10. Ляшко С. И. Теорія функцій комплексної змінної : підручник / С. И. Ляшко, О. Ю. Грищенко. – К. : Вид.-полігр. центр "Київський університет", 2009. – 495 с.

11. Самойленко В. Г. Комплексний аналіз. Приклади і задачі : навч. посіб. / В. Г. Самойленко, В. А. Бородін, В. Г. Верьовкіна, А. В. Ловейкін, І. Б. Романенко. – К. : Вид.- полігр. центр "Київський університет", 2010. – 224 с.

12. Журавська Г. В. Теорія функції комплексної змінної : навч. посіб. для інженерних спеціальностей / Г. В. Журавська. – К. : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 92 с.

13. Єжов С. М. Теорія функцій комплексної змінної : навч. посіб. для студентів фізичних спеціальностей університетів / С. М. Єжов, М. А. Разумова. – К. : Вид.- полігр. центр "Київський університет", 2012. – 191 с.

14. Мартиненко М. А. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення : навч. посіб. 3-тє вид., доп. і переробл. / М. А. Мартиненко, І. І. Юрик. – К. : Видавничий Дім "Слово", 2013. – 296 с.

15. Грищенко О. Ю. Теорія функцій комплексної змінної. Розв'язування задач : навч. посіб. / О. Ю. Грищенко, М. І. Нагнибіда, П. П. Настасієвич. – К. : Вища школа, 1994. – 375 с.

16. Бернацька Ю. М. Елементи теорії функцій комплексної змінної : навч. посіб. / Ю. М. Бернацька. – К. : Видавничий дім "Києво-Могилянська академія", 2008. – 144 с.

17. Рудавський Ю. К. Теорія функцій комплексної змінної. Інтегральні перетворення Фур'є і Лапласа : навч. посіб. / Ю. К. Рудавський, П. П. Костробій, Д. В. Уханська та ін. – Львів : Вид-во НУ "Львівська політехніка", 2007. – 230 с.

18. Рудавський Ю. К. Теорія функцій комплексної змінної. Інтегральні перетворення Фур'є і Лапласа. Збірник задач і вправ : підручник / Ю. К. Рудавський, П. П. Костробій, Д. В. Уханська та ін. – Львів : Вид-во НУ "Львівська політехніка", 2011. – 200 с.

Навчальне видання

ЯСНИЦЬКА Нелля Миколаївна
АХІСЗЕР Олена Борисівна
ГЕЛЯРОВСЬКА Оксана Анатоліївна
БОЄВА Анна Анатоліївна
ГЛІН Сергій Петрович
РЕШЕТНЯК Юрій Борисович
ТЕВЯШЕВА Ольга Андріївна

**ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ ТА
ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ**

Навчально-методичний посібник
для студентів спеціальностей
113 – Прикладна математика та
122 – Комп'ютерні науки

Відповідальна за випуск проф. Олена АХІСЗЕР
Роботу до видання рекомендував проф. Микола БЕЗМЕНОВ
Редактор М. П. Єфремова
Тех. редактор Гобельовська Л. П.

План 2023 р., поз. 99

Підп. до друку 22.12.22. Формат 60×84 1/16 . Папір офсетний.

Цифровий друк. Гарнітура шкільна. Ум. друк. арк. 14,76.

Наклад 50 прим. Зам. № 0028. Ціна договірна.

Файл підготовлено:

Видавничий центр НТУ «ХПІ»

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від

21.08.2017 р. 61002, Харків, вул. Кирпичова 2

61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.

Видавець і виготовлювач ТОВ «Друкарня Мадрид»

61024, м. Харків, вул. Гуданова, 18. Тел.: 0800-33-67-62

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

Серія ДК № 4399 від 27.08.2012 р.

www.madrid.in.ua

info@madrid.in.ua