

**С.М. ВЕРЕЩАКА**, докт. техн. наук, доцент, Сумской государственной университет

## ОДНОСТОРОННИЙ КОНТАКТ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ РАЗНОМОДУЛЬНОГО МАТЕРИАЛА

Пропонується варіант розрахунку двох оболонок обертання у формі сфери при дії внутрішнього тиску. Розглянуті оболонки мають загальну вісь, а їх відповідні поверхні розташовані на певній відстані одна від одної. Проводиться аналіз розподілу контактної тиску, який виникає на локальних ділянках між оболонками при статичному навантаженні. Розрахунок задачі здійснюється на основі геометрично нелінійної теорії оболонок з урахуванням деформацій поперечного зсуву.

The variant of account two of shells of rotation in the form of the tor is offered at action of internal pressure. The considered shells have a general axis and their appropriate surfaces are placed on certain distance one from another. The analysis of distribution of contact pressure will be carried out which arises on a local sites between shells at action of static loading. The account of a task is carried out on a basis of the vectorially nonlinear theory of shells in view of deformations of cross shift.

Предлагается вариант расчета двух оболочек вращения в форме сферы при действии внутреннего давления. Рассмотренные оболочки имеют общую ось, а их соответствующие поверхности расположены на определенном расстоянии одна от другой. Проводится анализ распределения контактного давления, возникающего на локальных участках между оболочками при статической нагрузке. Расчет задачи осуществляется на основе геометрически нелинейной теории оболочек с учетом деформаций поперечного сдвига.

Постановка контактної задачі механіки многослойных пластинок и оболонок даны в [1-5], где на основе дискретного подхода построены функционалы и системы уравнений решения задачи при условии неидеального контакта слоев. Новый метод решения нелинейных задач о контакте между двумя оболочками разной формы и эквидистантными слоями, а также обзор по этой проблеме, изложены в книге [6].

В данной работе предлагается вариант расчета двух соосных оболочек вращения в форме сферы из разномодульного материала, соответствующие поверхности которых расположены друг от друга на заданном расстоянии. При действии внутреннего давления на локальных участках между оболочками возникает односторонний контакт. Распределение контактного давления по длине участков контакта находится с учетом трансверсального обжатия рассматриваемых оболочек по толщине.

**Постановка задачі.** Приймаючи позначення [7,8], для случая одностороннего контакта по области  $S_2^{(k,k+1)}$ , когда между слоями отсутствуют кинематические связи, можно получить уравнения равновесия в скалярной форме относительно осей, отнесенных к недеформированному состоянию:

$$\nabla_i T_{(k)}^{ij} - b_i^{j(k)} Q_{(k)}^i + q_{(k)}^i + X_{(k)}^i = 0, \quad (i = 1, 2);$$

$$\nabla_i Q_{(k)}^i + b_{ij}^{(k)} T_{(k)}^{ij} + q_{(k)}^3 + X_{(k)}^3 = 0;$$

$$\begin{aligned}\nabla_i M_{(k)}^{ij} - Q_{(k)}^i - T_{(k)}^{ij} \gamma_j^{(k)} + M_{(k)}^i &= 0, \quad (i=1,2); \\ \nabla_i L_{(k)}^{ij} - Q_{(k)}^{0i} &= 0, \quad (i=1,2).\end{aligned}\quad (1)$$

Кроме того, как дополнение к уравнениям равновесия следуют: статические

$$\begin{aligned}\Phi_n^{(k)s} &= T_{(k)}^{ij} n_i^{(k)} n_j^{(k)}, \quad \Phi_\tau^{(k)s} = T_{(k)}^{ij} n_i^{(k)} \tau_j^{(k)}, \quad \Phi_m^{(k)} = Q_{(k)}^i n_i^{(k)} + Q_{(k)}^{0i} n_i^{(k)} + \frac{M_{(k)}^{ij} n_i^{(k)} \tau_j^{(k)}}{\partial s}, \\ G_n^{(k)s} &= M_{(k)}^{ij} n_i^{(k)} n_j^{(k)}, \quad H_\tau^{(k)s} = -M_{(k)}^{ij} n_i^{(k)} \tau_j^{(k)}, \quad L_n^{(k)s} = L_{(k)}^{ij} n_i^{(k)} n_j^{(k)}, \\ \Lambda_\tau^{(k)s} &= L_{(k)}^{ij} n_i^{(k)} \tau_j^{(k)};\end{aligned}\quad (2)$$

и геометрические

$$\begin{aligned}u_n^{(k)s} &= u_{(k)}^i n_i^{(k)}, \quad u_\tau^{(k)s} = u_{(k)}^i \tau_i^{(k)}, \quad w_{(k)}^s = w_{(k)}, \quad \gamma_n^{(k)s} = \gamma_{(k)}^i n_i^{(k)}, \quad \gamma_\tau^{(k)s} = \gamma_{(k)}^i \tau_i^{(k)}, \\ \psi_n^{(k)s} &= \psi_{(k)}^i n_i^{(k)}, \quad \psi_\tau^{(k)s} = \psi_{(k)}^i \tau_i^{(k)},\end{aligned}\quad (3)$$

граничные условия на части контуров  $\Gamma_1^{(k)}$  и  $\Gamma_2^{(k)}$  соответственно. В выражениях (1) – (3) приняты обозначения:  $X_{(k)}^i$ ,  $X_{(k)}^3$  – тензор внутренних и внешних сил, приложенных к срединной поверхности  $S_{(k)}$ ;  $T_{(k)}^{ij}$ ,  $M_{(k)}^{ij}$ ,  $M_{(k)}^i$  – тензоры внутренних усилий и моментов, а также тензор внешних моментов соответственно, приведенные к срединной поверхности  $S_{(k)}$ ;  $Q_{(k)}^i$  – тензор поперечных сил;  $Q_{(k)}^{0i}$ ,  $L_{(k)}^{ij}$  – тензоры дополнительных обобщенных внутренних удельных усилий сдвига и моментов соответственно, которые появляются при выводе уравнений равновесия с учетом деформаций поперечного сдвига;  $\nabla_i$  – символ ковариантного дифференцирования по метрике  $a_{ij}^{(k)}$ ;  $u_n^{(k)s}$ ,  $u_\tau^{(k)s}$ ,  $w_{(k)}^s$ ,  $\gamma_n^{(k)s}$ ,  $\gamma_\tau^{(k)s}$ ,  $\psi_n^{(k)s}$ ,  $\psi_\tau^{(k)s}$  – заданные ковариантные компоненты векторов обобщенных перемещений;  $\Phi_n^{(k)s}$ ,  $\Phi_\tau^{(k)s}$ ,  $\Phi_m^{(k)s}$ ,  $G_n^{(k)s}$ ,  $H_\tau^{(k)s}$ ,  $L_n^{(k)s}$ ,  $\Lambda_\tau^{(k)s}$  – ковариантные компоненты заданных векторов внешних усилий  $\vec{\Phi}_{(k)}^s$ , моментов  $\vec{G}_{(k)}^s$  и дополнительных моментов  $\vec{L}_{(k)}^s$ , приложенных к части граничного контура  $\Gamma_1^{(k)}$ ;  $n_i^{(k)}$ ,  $\tau_i^{(k)}$  – ковариантные компоненты векторов единичной нормали  $\vec{n}$  и касательной  $\vec{\tau}$  к контурной линии.

Усилия контактного взаимодействия  $\vec{q}_{(k)} = q_{(k)}^i \vec{r}_i^{(k)} + q_{(k)}^3 \vec{m}^{(k)}$  возникают при выполнении условия

$$(\vec{u}_z^{(k)} - \vec{u}_z^{(k+1)}) < 0 \quad (4)$$

в зонах сопряжения жестких слоев. В случае, когда неравенство (4) не вы-

полняется при перемещении точек области  $S_z^{(k,k+1)}$  в процессе деформации, усилие  $\vec{q}_{(k)}$  принимает значение  $\vec{q}_{(k)} = 0$ . Статические и кинематические граничные условия на контуре области  $S_z^{(k,k+1)}$  имеют вид зависимостей (2), (3).

Таким образом, имея уравнения равновесия (1) несложно с заданной точностью найти значение контактного усилия на основе итерационного метода, предложенного в [6].

**Основная система разрешающих уравнений.** Введение допущения о том, что рассматриваемое напряженно-деформированное состояние оболочек будет симметричным относительно оси вращения, существенно упрощает алгоритм решения. Учитывая геометрическую нелинейность в квадратичном приближении, исходную задачу (1) – (3) можно свести к решению системы  $12 \times k$  обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{A_1} \frac{d\vec{Y}_{(k)}}{d\alpha_1} = f(\alpha_1, \vec{Y}_{(k)}, \vec{q}_{(k)}) \quad (5)$$

относительно вектор-функции

$$\vec{Y}_{(k)} = [T_{11}^{(k)}, Q_1^{(k)}, M_{11}^{(k)}, L_{11}^{(k)}, S^{(k)} + 2k_2^{(k)}H^{(k)}, L_{12}^{(k)}, u_1^{(k)}, w^{(k)}, \gamma_1^{(k)}, \psi_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \psi_2^{(k)}]^T \quad (6)$$

Правая часть системы (5) запишется

$$\begin{aligned} f_1 &= \rho^{(k)}(T_{22}^{(k)} - Y_1^{(k)}) - k_1^{(k)}Y_2^{(k)} - X_1^{(k)}; \\ f_2 &= k_1^{(k)}Y_1^{(k)} - \rho^{(k)}Y_2^{(k)} + k_2^{(k)}T_{22}^{(k)} \pm q_{(k)}\chi_{(k)} - X_3^{(k)}; \\ f_3 &= \rho^{(k)}(M_{22}^{(k)} - Y_3^{(k)}) + Y_2^{(k)} + Y_1^{(k)}Y_9^{(k)} + S^{(k)}\gamma_2^{(k)}; \\ f_4 &= \rho^{(k)}(L_2^{(k)} - Y_4^{(k)}) + Q_{01}^{(k)}; \quad f_5 = -2\rho^{(k)}Y_5^{(k)} + k_2^{(k)}(T_{22}^{(k)}\gamma_2^{(k)} + S^{(k)}Y_9^{(k)}); \\ f_6 &= -2\rho^{(k)}Y_6^{(k)} + Q_{02}^{(k)}; \quad f_7 = e_{11}^{(k)} - k_1^{(k)}Y_8^{(k)} - \frac{1}{2}Y_9^{(k)}Y_9^{(k)}; \quad f_8 = k_1^{(k)}Y_7^{(k)} - Y_9^{(k)}; \\ f_9 &= K_{11}^{(k)}; \quad f_{10} = R_{11}^{(k)}; \quad f_{11} = e_{12}^{(k)} + \rho^{(k)}Y_{11}^{(k)} - Y_9^{(k)}\gamma_2^{(k)}; \\ f_{12} &= R_{12}^{(k)} + \rho^{(k)}Y_{12}^{(k)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Когда между жесткими слоями отсутствуют кинематические связи, в правой части (7) –  $f_2$ , дополнительно вводится функция [6] –  $\pm q_{(k)}\chi_{(k)}$ , которая учитывает нормальную составляющую контактного давления  $q_{(k)}$ . Кроме того, считается, что на слой с индексом  $k$  контактное давление действует со знаком плюс, а на слой с индексом  $k + 1$  со знаком минус. При этом контактное давление пропорционально трансверсальному обжатю в зоне контакта жестких слоев оболочки:

$$q_{(k)} = k_{(k)} \frac{E_{(k)}^z}{h_{(k)}} (w_{(k)} - h_{[k]} - w_{(k+1)}), \quad (8)$$

где  $E_{(k)}^z$  – модуль упругости  $k$ -ого слоя оболочки в направлении нормали,  $k_{(k)}$  –

коэффициент понижения жесткости обжатия  $k$ -ого слоя оболочки. Конструктивная нелинейность, связанная с появлением зоны контакта между слоями оболочки при действии внешней нагрузки, учитывается при помощи множителя

$$\chi = \left[ 1 + \text{sign}(w_{(k)} - h_{[k]} - w_{(k+1)}) \right] / 2. \quad (9)$$

Здесь  $h_{[k]}$  – величина зазора между жесткими слоями.

Систему дифференциальных уравнений (5) следует дополнить граничными условиями - по шесть на каждом торце жесткого слоя оболочки вращения. С учетом введенных обозначений они имеют вид:

$$\begin{aligned} Y_j^{(k)}(\alpha_1^0)l_j + Y_{j+6}^{(k)}(\alpha_1^0)(1-l_j) &= 0; \\ Y_j^{(k)}(\alpha_1^r)l_{j+6} + Y_{j+6}^{(k)}(\alpha_1^r)(1-l_{j+6}) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Параметры  $l_j, l_{j+6}$  ( $j = 1, 2, \dots, 6$ ) принимают значения 0, 1 и определяют однородные как статические, так и кинематические граничные условия на торцах жестких слоев оболочки  $\alpha_1 = \alpha_1^0$ ;  $\alpha_1 = \alpha_1^r$ .

**Пример расчета.** Моделирование одностороннего контакта металлической и стеклопластиковой сферических оболочек было проведено по трем расчетным схемам, которые отличались друг от друга радиусом кривизны срединной поверхности: наружной дюралюминиевой оболочки –  $R_1^0 = 0,11$  м (первая схема),  $R_1^0 = 0,12$  м (вторая схема) и  $R_1^0 = 0,17$  м (третья схема); радиус кривизны стеклопластиковой оболочки не изменялся –  $R_2^c = 0,1$  м. Толщины дюралюминиевой и стеклопластиковой оболочек соответственно равны  $h_1^0 = 0,004$  м,  $h_2^c = 0,01$  м.

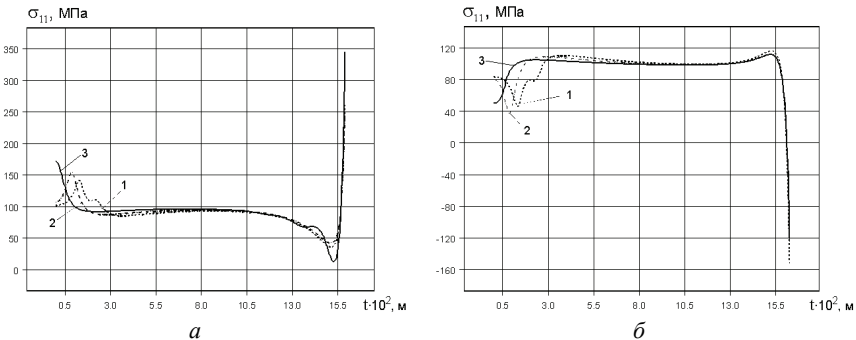


Рисунок 1 – Изменение меридиональных напряжений по длине сферы из стеклопластика:  $a$  – внутренняя поверхность;  $b$  – наружная поверхность

Задача решается в осесимметричной постановке. Введены обозначения нормальных напряжений: вдоль меридиана –  $\sigma_{11}$ , по окружности –  $\sigma_{22}$ , по нормали –  $\sigma_{33}$ . Торцы контактирующих сферических оболочек считались

шарнирно опертыми, а относительно полюса были заданы условия симметрии. Изнутри сфера нагружена гидростатическим давлением  $q = 20$  МПа.

Картина напряженно – деформированного состояния элементов баллона для трех расчетных моделей без учета влияния сил трения в области контакта представлена на рис. 1-3.

Для стеклопластика приняты следующие физико-механические характеристики:  $E_{11} = E_{22} = 25000$  МПа;  $E_{33} = 12500$  МПа;  $E_{12} = 6500$  МПа;  $E_{13} = E_{23} = 4500$  МПа;  $\nu_{12} = \nu_{21} = 0,23$ ;  $\nu_{13} = \nu_{23} = 0,32$ ;  $\nu_{31} = \nu_{32} = 0,16$ . Металлическая часть выполнена из дюралюминия В–95:  $E = 70000$  МПа;  $\nu = 0,3$ .

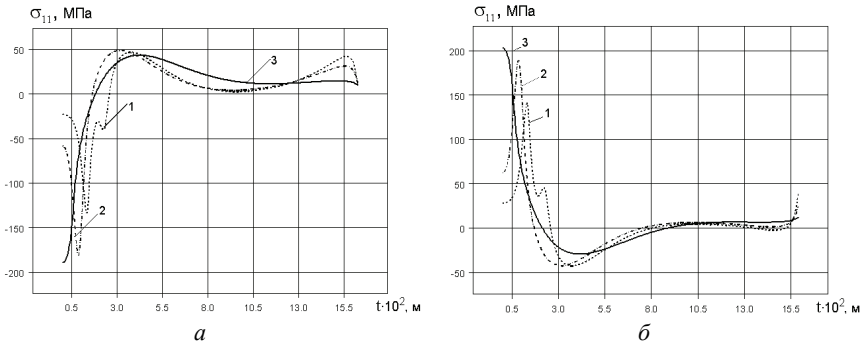


Рисунок 2 – Изменение меридиональных напряжений по длине сферы из дюралюминия: а – внутренняя поверхность; б – наружная поверхность

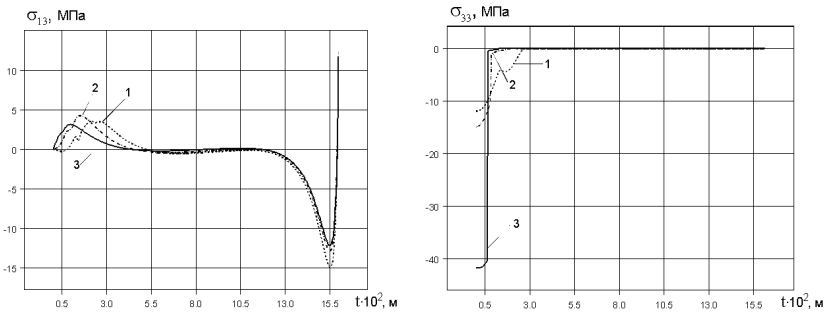


Рисунок 3 – Изменение напряжений поперечного сдвига и обжатия на границе контакта сопряженных слоев

**Анализ результатов расчета** рис. 1-3 показывает существенное влияние площади контактирующих поверхностей на величину меридиональных и трансверсальных напряжений. С увеличением площади контакта заметно уменьшается их величина. Учет контактного взаимодействия оболочек из разномодульного материала, позволяет сделать вывод, что внутренняя стеклопластиковая оболочка (модуль упругости стеклопластика в три раза ниже модуля упругости дюралюминия) практически передает большую часть на-

грузки в зоне контакта на более жесткую внешнюю металлическую оболочку.

**Список литературы:** 1. *Лазько В.А.* Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев. 1. Вариационный принцип теории упругих слоистых анизотропных систем при наличии зон неидеального контакта // *Механика композитных материалов.* – 1981. – № 5. – С. 832-836. 2. *Лазько В.А.* Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев. 11. Обобщенные уравнения ортотропных слоистых оболочек при разрывных перемещениях на границе раздела // *Механика композитных материалов.* – 1982. – № 1. – С. 77-84. 3. *Пелех Б.Л., Лазько В.А.* Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. – К.: Наукова думка, 1982. – 296 с. 4. *Паймушин В.И.* Обобщенный вариационный принцип Рейсснера в нелинейной механике пространственных составных тел с приложениями к теории многослойных оболочек // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* – 1987. – № 2. – С. 171-180. 5. *Паймушин В.И.* Нелинейная теория среднего изгиба трехслойных оболочек с дефектами в виде участков непрочности // *Прикладная механика.* – 1987. – Т. 23. № 11. – С. 32-38. 6. *Кантор Б. Я.* Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения / *Отв. ред. Подгорный А.Н.* – АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения. – К.: Наукова думка, 1990. – 136 с. 7. *Верещака С.М., Львов Г.И.* Напряженное состояние анизотропных оболочек с учетом влияния участков локального непрочности // *Проблемы машиностроения.* – 2004. – Т. 7, № 1. – С. 61-70. 8. *Верещака С.М.* Краевые эффекты в многослойных трансверсально-изотропных пластинах с дефектами структуры // *Вестник НТУ «ХПИ».* Тематический выпуск: Динамика и прочность машин. – Х.: НТУ «ХПИ», 2004. – № 19. – С. 61-68.

*Поступила в редколлегию 21.03.2011*

УДК 539.3.534:621.22.011

*А.А.ВОДКА*, аспирант, НТУ «ХПИ»;

*А.С.СТЕПЧЕНКО*, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»;

*А.И.ТРУБАЕВ*, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»

## **ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ БОЛТОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ РАБОЧЕГО КОЛЕСА ГИДРОТУРБИНЫ**

На основі скінченно-елементного підходу побудована осесиметрична модель болтового з'єднання, з урахуванням контактної взаємодії. Визначені коефіцієнти концентрації напружень на галтелях під головками болтів кріплення робочих коліс гідротурбін. Проведено порівняльний аналіз отриманих результатів з даними із довідкової літератури.

Axisymmetric model of bolt connection based on the finite-element approach has been designed, taking into account the contact interaction. The coefficients of stress concentration at the fillets under the heads of bolts holding the impeller of turbines have been determined. A comparative analysis of the results with those given in the references has been conducted.

На основе конечно-элементного подхода построена осесимметричная модель болтового соединения, с учетом контактного взаимодействия. Определены коэффициенты концентрации напря-