

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

СЕРИЯ «ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ
практических занятий и контрольных работ по высшей математике
по теме «РЯДЫ»**

для студентов всех специальностей
факультетов МТ, МШ, ЭМС, Э, АП, КИТ, ТОВ, ТНВ.

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета,
протокол №2 от 23 июня 2016 г.

Харьков
НТУ «ХПИ»
2016

Методические указания для проведения практических занятий и контрольных работ по теме «Ряды» для студентов всех специальностей факультетов МТ, МШ, ЭМС, Э, АП, КИТ, ТОВ, ТНВ / Сост. Т. С. Полянская, Т. А. Немченко, И. В. Тюпа. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2016. – 36 с.

Составители: Т. С. Полянская
Т. А. Немченко
И. В. Тюпа

Рецензент Н. А. Чикина, канд. техн. наук, доц., проф. НТУ «ХПИ»

Кафедра высшей математики

Вступление

В методических указаниях приведены задачи по теме «Ряды» для восьми практических занятий, предусмотренных действующей рабочей учебной программой по высшей математике для студентов всех специальностей факультетов МТ, МШ, ЭМС, Э, АП, КИТ, ТОВ, ТНВ.

Каждое практическое занятие состоит из трех частей. В первой части сформулированы теоретические вопросы, которые представляют собой необходимый минимум для успешного усвоения материала. Во второй части приведены задания, которые рекомендованы для решения на доске и для самостоятельного решения на практических занятиях. В третьей части собраны задания, которые могут быть заданы для самостоятельного решения дома.

В методических указаниях приведены варианты контрольных работ по темам «Числовые ряды», «Функциональные и степенные ряды и их приложения», а также варианты итоговой контрольной работы по теме «Ряды».

В конце дан список рекомендованной литературы [1, 2, 3, 4], в которой студенты могут найти как ответы на контрольные вопросы, так и подробное решение типовых задач.

Практическое занятие 1

Числовые ряды. Необходимый признак сходимости. Интегральный признак Коши сходимости знакоположительных рядов

Контрольные вопросы

1. Определение числового ряда.
2. n -я частичная сумма ряда.
3. Определение сходящихся и расходящихся числовых рядов. Сумма сходящегося ряда.
4. Сходимость ряда, члены которого образуют бесконечную геометрическую прогрессию.
5. Необходимый признак сходимости ряда.
6. Знакопостоянные числовые ряды.
7. Интегральный признак Коши сходимости знакоположительного ряда.

Задачи

а) Доказать сходимость ряда, пользуясь определением сходимости, и найти сумму ряда:

1. $\frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{(n+6) \cdot (n+7)} + \dots$
2. $\frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{(n+4) \cdot (n+6)} + \dots$
3. $\frac{3+5}{15} + \frac{3^2+5^2}{15^2} + \dots + \frac{3^n+5^n}{15^n} + \dots$
4. $\frac{3-2}{6} + \frac{3^2-2^2}{6^2} + \dots + \frac{3^n-2^n}{6^n} + \dots$

Задачи для самостоятельной работы

5. $\frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n+1) \cdot (3n+4)} + \dots$
6. $\frac{1}{6 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 14} + \dots + \frac{1}{(4n+2) \cdot (4n+6)} + \dots$
7. $\frac{5-4}{20} + \frac{5^2-4^2}{20^2} + \dots + \frac{5^n-4^n}{20^n} + \dots$

б) Доказать расходящиеся следующих рядов, пользуясь необходимым признаком сходимости:

8. $\sqrt{\frac{5}{4}} + \sqrt{\frac{9}{13}} + \dots + \sqrt{\frac{4n+1}{9n-5}} + \dots$
9. $\left(\frac{1}{7}\right)^1 + \left(\frac{3}{9}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2n-1}{2n+5}\right)^n + \dots$
10. $\arccos \frac{1}{3} + \arccos \frac{1}{4} + \dots + \arccos \frac{1}{n+2} + \dots$
11. $\arctg \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \arctg \frac{2}{2\sqrt{3}+1} + \dots + \arctg \frac{n}{n\sqrt{3}+1} + \dots$

$$12. 0,002 + \sqrt{0,002} + \dots + \sqrt[n]{0,002} + \dots$$

Задачи для самостоятельной работы

$$13. 1 + \left(\frac{7}{10}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3n+1}{6n-2}\right)^2 + \dots \quad 14. \frac{2}{3} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n + \dots$$

$$15. \cos 1 + \cos \frac{1}{2} + \dots + \cos \frac{1}{n} + \dots \quad 16. \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \dots + \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} + \dots$$

$$17. 1 \cdot \ln(1+1) + 2 \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots + n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \dots$$

в) Вопрос о сходимости следующих рядов решить с помощью интегрального признака Коши:

$$18. \frac{1}{1+1^2} + \frac{1}{1+2^2} + \dots + \frac{1}{1+n^2} + \dots \quad 19. \frac{1}{e^2} + \frac{2}{e^4} + \dots + \frac{n}{e^{2n}} + \dots$$

$$20. \frac{1}{4 \ln^5 4} + \frac{1}{5 \ln^5 5} + \dots + \frac{1}{(n+3) \ln^5(n+3)} + \dots$$

$$21. \frac{1}{2 \ln 2 \cdot \ln \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3 \cdot \ln \ln 3} + \dots + \frac{1}{(n+1) \ln(n+1) \cdot \ln \ln(n+1)} + \dots$$

$$22. \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \dots + \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} + \dots$$

Задачи для самостоятельной работы

$$23. \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{n+1}{2^n} + \dots \quad 24. \frac{1}{2 \ln^4 2} + \frac{1}{3 \ln^4 3} + \dots + \frac{1}{(n+1) \ln^4(n+1)} + \dots$$

$$25. \frac{\ln 2}{1^3} + \frac{\ln 4}{2^3} + \dots + \frac{\ln 2n}{n^3} + \dots \quad 26. \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \dots + \frac{\ln n}{n} + \dots$$

Ответы

$$1. S = \frac{1}{7} \quad 2. S = \frac{11}{60} \quad 3. S = \frac{3}{4} \quad 4. S = \frac{1}{2} \quad 5. S = \frac{1}{12} \quad 6. S = \frac{1}{24} \quad 7. S = \frac{1}{12}$$

В ответах к задачам 8–17 указан $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$: 8. $\frac{2}{3}$. 9. e^{-6} . 10. $\frac{\pi}{2}$. 11. $\frac{\pi}{6}$. 12. 1.

13. $\frac{1}{4}$. 14. e^{-1} . 15. 1. 16. 1. 17. 1. 18. Сходится. 19. Сходится. 20. Сходится.

21. Расходится. 22. Сходится. 23. Сходится. 24. Сходится. 25. Сходится.

26. Расходится.

Домашнее задание

а) Найти суммы рядов:

- $$1. \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n+3) \cdot (2n+5)} + \dots$$
- $$2. \frac{7}{1^3 \cdot 2^3} + \frac{19}{2^3 \cdot 3^3} + \dots + \frac{3n^2 + 3n + 1}{n^3 \cdot (n+1)^3} + \dots$$
- $$3. \frac{2+3+4}{12} + \frac{2^2+3^2+4^2}{12^2} + \dots + \frac{2^n+3^n+4^n}{12^n} + \dots$$

б) Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ и доказать расходимость рядов:

- $$4. \sqrt[3]{\frac{5}{25}} + \sqrt[3]{\frac{8}{49}} + \dots + \sqrt[3]{\frac{3n+2}{24n+1}} + \dots$$
- $$5. \left(\frac{8}{11}\right)^2 + \left(\frac{13}{16}\right)^4 + \dots + \left(\frac{5n+3}{5n+6}\right)^{2n} + \dots$$
- $$6. \arcsin \frac{2}{7} + \arcsin \frac{4}{11} + \dots + \arcsin \frac{2n}{4n+3} + \dots$$

в) Для исследования сходимости применить интегральный признак Коши:

- $$7. \frac{\sqrt{\ln 2}}{2} + \frac{\sqrt{\ln 3}}{3} + \dots + \frac{\sqrt{\ln n}}{n} + \dots$$
- $$8. \frac{1}{2 \ln 2 \sqrt{\ln \ln 2}} + \frac{1}{3 \ln 3 \sqrt{\ln \ln 3}} + \dots + \frac{1}{(n+1) \ln(n+1) \sqrt{\ln \ln(n+1)}} + \dots$$

Ответы

- $S = \frac{1}{10}$
 - $S = \frac{31}{30}$
 - $S = 1$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{2}$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = e^{-\frac{6}{5}}$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{\pi}{6}$
7. Расходится. 8. Расходится.

Практическое занятие 2

Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов: признаки сравнения, Даламбера, радикальный признак Коши

Контрольные вопросы

- Признаки сравнения знакоположительных числовых рядов.
- Предельный признак сравнения.

3. Обобщенный гармонический ряд и его сходимость.
4. Признак Даламбера сходимости знакоположительных рядов.
5. Радикальный признак Коши сходимости знакоположительных рядов.

Задачи

а) Вопрос о сходимости следующих рядов решить с помощью признаков сравнения:

1. $\frac{2}{4} + \frac{5}{17} + \dots + \frac{n^2 + 1}{n^3 + 2n^2 + 1} + \dots$
2. $\frac{5}{6} + \frac{19}{114} + \dots + \frac{5n^2 - n + 1}{7n^4 + 3n - 4} + \dots$
3. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1}{5}} + \dots + \sqrt[3]{\frac{1}{n^2 + 1}} + \dots$
4. $\frac{\sqrt{1}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{15} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{3n^2 + 4n - 5} + \dots$
5. $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{1} + \frac{\sqrt{11} - \sqrt{7}}{2} + \dots + \frac{\sqrt{4n+3} - \sqrt{4n-1}}{n} + \dots$
6. $\frac{1}{\sqrt{1}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n^2} + \dots$
7. $\frac{\cos 1}{2} + \frac{\cos 2}{5} + \dots + \frac{\cos n!}{n^2 + 1} + \dots$
8. $\frac{1}{5} + \frac{1}{2 \cdot 5^2} + \dots + \frac{1}{n \cdot 5^n} + \dots$
9. $\frac{2}{3} + \frac{8}{15} + \dots + \frac{n(3 + \cos n\pi)}{4n^2 - 1} + \dots$

Задачи для самостоятельной работы

10. $\frac{1}{\sqrt[3]{10}} + \frac{5}{\sqrt[3]{145}} + \dots + \frac{4n-3}{\sqrt[3]{8n^4 + 5n^2 - 3}} + \dots$
11. $\sqrt{2} + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}) + \dots$
12. $(e^2 - 1) + \left(e^{\frac{\sqrt{2}+1}{16}} - 1 \right) + \dots + \left(e^{\frac{\sqrt{n+1}}{n^4}} - 1 \right) + \dots$
13. $\frac{\sin 2}{1} + \frac{\sin 4}{2\sqrt{2}} + \dots + \frac{\sin 2^n}{n\sqrt{n}} + \dots$
14. $\frac{\operatorname{arctg} 1}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 2}{2^2} + \dots + \frac{\operatorname{arctg} n}{2^n} + \dots$

б) Вопрос о сходимости каждого из следующих рядов решить с помощью признака Даламбера или радикального признака Коши:

15. $\frac{1}{5} + \frac{4}{25} + \dots + \frac{n^2}{5^n} + \dots$
16. $\frac{1!}{3!} + \frac{2!}{5!} + \dots + \frac{n!}{(2n+1)!} + \dots$
17. $\frac{2 \cdot 1!}{1} + \frac{4 \cdot 2!}{2^2} + \dots + \frac{2^n \cdot n!}{n^n} + \dots$

$$18. \frac{1}{1!} \arcsin 3 + \frac{1}{2!} \arcsin \frac{3}{2} + \dots + \frac{1}{n!} \arcsin \frac{3}{n} + \dots .$$

$$19. 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{9} + \dots + 2^n \operatorname{arctg} \frac{1}{3^n} + \dots .$$

$$20. \left(\frac{5}{9}\right)^3 + \left(\frac{8}{14}\right)^6 + \dots + \left(\frac{3n+2}{5n+4}\right)^{3n} + \dots . \quad 21. \left(\frac{2}{1}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^8 + \dots + \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n^2} + \dots .$$

$$22. \frac{5^{\frac{1}{2}}}{1} + \frac{11^1}{4} + \dots + \frac{(2n^2+3)^{\frac{n}{2}}}{n^n} + \dots .$$

Задачи для самостоятельной работы

$$23. \frac{1}{\ln 5} + \frac{16}{\ln^2 5} + \dots + \frac{n^4}{\ln^n 5} + \dots .$$

$$24. \frac{3}{1!} + \frac{9}{2!} + \dots + \frac{3^n}{n!} + \dots .$$

$$25. \frac{1}{3} + \frac{4}{3^5} + \dots + \frac{n^n}{3^{4n-3}} + \dots .$$

$$26. 1 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n + \dots .$$

$$27. \arcsin \frac{\pi}{5} + 4 \arcsin^2 \frac{\pi}{10} + \dots + n^n \arcsin^n \frac{\pi}{5n} + \dots .$$

$$28. \frac{1!2!}{3!} + \frac{2!3!}{5!} + \dots + \frac{n!(n+1)!}{(2n+1)!} + \dots .$$

Ответы

1. Расходится. 2. Сходится. 3. Расходится. 4. Сходится. 5. Сходится. 6. Сходится. 7. Сходится. 8. Сходится. 9. Расходится. 10. Расходится. 11. Расходится. 12. Сходится. 13. Сходится. 14. Сходится. 15. Сходится. 16. Сходится. 17. Сходится. 18. Сходится. 19. Сходится. 20. Сходится. 21. Расходится. 22. Расходится. 23. Сходится. 24. Сходится. 25. Расходится. 26. Расходится. 27. Сходится. 28. Сходится.

Домашнее задание

Исследовать ряды на сходимость:

$$1. \frac{4}{6} + \frac{5}{13} + \dots + \frac{n+3}{n^3+5} + \dots . \quad 2. \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} + \frac{\sqrt{10}}{\sqrt[3]{128}} + \dots + \frac{\sqrt{n^3+2}}{\sqrt[3]{n^7+1}} + \dots .$$

$$3. \arcsin 1 + \arcsin \frac{1}{2} + \dots + \arcsin \frac{1}{n} + \dots .$$

$$4. \operatorname{tg} \frac{1}{3} + \operatorname{tg} \frac{1}{9} + \dots + \operatorname{tg} \frac{1}{3^n} + \dots . \quad 5. \frac{\ln 2}{10} + \frac{\ln 3}{13} + \dots + \frac{\ln(n+1)}{3n+7} + \dots .$$

$$6. \frac{2}{3} + \frac{4}{2 \cdot 9} + \dots + \frac{2^n}{n \cdot 3^n} + \dots \quad 7. \frac{2}{1!} + \frac{9}{2!} + \dots + \frac{n^3 + 1}{n!} + \dots$$

$$8. 3^2 + \frac{3^3}{2^2} + \dots + \frac{3^{n+1}}{n^n} + \dots \quad 9. e^{-2} + 3 \cdot e^{-4} + \dots + 3^{n-1} \cdot e^{-2n} + \dots$$

Ответы

1. Сходится. 2. Расходится. 3. Расходится. 4. Сходится. 5. Расходится.
6. Сходится. 7. Сходится. 8. Сходится. 9. Сходится.

Практическое занятие 3

Числовые ряды с произвольными членами. Условная и абсолютная сходимость. Признак Лейбница

Контрольные вопросы

1. Знакопеременные ряды. Абсолютный ряд.
2. Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.
3. Абсолютная и условная сходимость.
4. Свойства абсолютно сходящихся рядов.
5. Знакопеременные ряды.
6. Признак Лейбница сходимости знакопеременного ряда.

Задачи

а) Доказать абсолютную сходимость знакопеременных рядов:

$$1. \frac{\cos 2}{2!} + \frac{\cos 4}{3!} + \dots + \frac{\cos 2n}{(n+1)!} + \dots \quad 2. \sin \frac{1}{2} + \frac{\sin 1}{2\sqrt{2}} + \dots + \frac{\sin \frac{n}{2}}{n\sqrt{n}} + \dots$$

$$3. e^{-1} \sin 1 + e^{-2} \sin 2 + \dots + e^{-n} \sin n + \dots$$

Задачи для самостоятельной работы

$$4. \frac{\sin^3 1}{1^3} + \frac{\sin^3 2}{2^3} + \dots + \frac{\sin^3 n}{n^3} + \dots \quad 5. \frac{\cos 1}{2} + \frac{\sqrt{2} \cos 2}{5} + \dots + \frac{\sqrt{n} \cos n}{n^2 + 1} + \dots$$

б) Исследовать сходимость знакопеременных рядов:

$$6. 1 - \frac{5}{6} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n^2+2} + \dots \quad 7. 1 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{4n-3}{n}\right)^n + \dots$$

$$8. \frac{1}{5} - \frac{3^2}{4 \cdot 5^2} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{3^n}{(n+2) \cdot 5^n} + \dots$$

9. $\frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 4} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\ln(n+2)} + \dots$.
10. $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3\sqrt{2}} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3\sqrt{n}} + \dots$.
11. $2^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} + \dots$.
12. $\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{6} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \cos \frac{\pi}{3n} + \dots$.
13. $\ln 3 - \ln 2 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots$.
14. $1 - \frac{1}{16} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^4} + \dots$.
15. $\frac{1}{2!} - \frac{4}{3!} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{n^2}{(n+1)!} + \dots$.

Задачи для самостоятельной работы

16. $\frac{2}{3} - \frac{5}{10} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{n^2 + 1}{n^3 + 2} + \dots$.
17. $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{4}} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n\sqrt{n+2}} + \dots$.
18. $\frac{5}{2!} - \frac{5^2}{3!} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{5^n}{(n+1)!} + \dots$.
19. $\ln \frac{4}{3} - \ln \frac{5}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right) + \dots$.
20. $\left(\frac{3}{4}\right)^3 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{3n} + \dots$.
21. $\sin \frac{2\pi}{1^2} - \sin \frac{3\pi}{2^2} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \sin \frac{(n+1)\pi}{n^2} + \dots$.
22. $\left(\frac{5}{6}\right)^1 - \left(\frac{7}{11}\right)^2 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{2n+3}{5n+1}\right)^n + \dots$.
23. $\frac{3}{1^3} - \frac{3^2}{2^3} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{3^n}{n^3} + \dots$.

Ответы

6. Сходится условно. 7. Расходится. 8. Сходится абсолютно. 9. Сходится условно. 10. Сходится условно. 11. Расходится. 12. Расходится. 13. Сходится условно. 14. Сходится абсолютно. 15. Сходится абсолютно. 16. Сходится условно. 17. Сходится абсолютно. 18. Сходится абсолютно. 19. Сходится

условно. 20. Расходится. 21. Сходится условно. 22. Сходится абсолютно.
23. Расходится.

Домашнее задание

Исследовать сходимость рядов:

$$1. \frac{1}{2} \cos \frac{1!}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{2!}{3} + \dots + \frac{1}{2^n} \cos \frac{n!}{n+1} + \dots .$$

$$2. \frac{2}{3} - \frac{3}{10} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n^3+2} + \dots .$$

$$3. \left(\frac{4}{2}\right)^3 - \left(\frac{13}{14}\right)^6 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{3n^2+1}{4n^2-2}\right)^{3n} + \dots .$$

$$4. \left(\frac{1}{3}\right)^1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n + \dots .$$

$$5. \arcsin \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\pi}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \arcsin \frac{\pi}{2^n} + \dots .$$

$$6. \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{2\pi}{7} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi n}{n^2+3} + \dots .$$

$$7. \frac{1^4}{4^1} - \frac{2^4}{4^2} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{n^4}{4^n} + \dots .$$

$$8. \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt{9}} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{\sqrt[3]{n^2+2}}{\sqrt{n^3+1}} + \dots .$$

$$9. \frac{\ln^2 2}{2} - \frac{\ln^2 3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln^2(n+1)}{n+1} + \dots .$$

$$10. \frac{3}{3!} - \frac{2 \cdot 3^2}{4!} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{n \cdot 3^n}{(n+2)!} + \dots .$$

$$11. \frac{5}{4} - \frac{5^2}{2 \cdot 4^2} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{5^n}{n \cdot 4^n} + \dots .$$

Ответы

1. Сходится абсолютно. 2. Сходится абсолютно. 3. Сходится абсолютно.
4. Расходится. 5. Сходится абсолютно. 6. Сходится условно. 7. Сходится
абсолютно. 8. Сходится условно. 9. Сходится условно. 10. Сходится абсо-
лютно. 11. Расходится.

Контрольная работа по теме «Числовые ряды»

Вариант 1

Исследовать сходимость рядов:

- $\sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{\frac{8}{7}} + \dots + \sqrt{\frac{3n+2}{4n-1}} + \dots$
- $\frac{5}{2} + \frac{8}{9} + \dots + \frac{n^2+4}{n^3+1} + \dots$
- $\frac{1!}{4!} + \frac{2!}{7!} + \dots + \frac{n!}{(3n+1)!} + \dots$
- $\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{7}{12}\right)^4 + \dots + \left(\frac{4n-1}{5n+2}\right)^{2n} + \dots$
- $\frac{1}{3\sqrt{\ln 3}} + \frac{1}{4\sqrt{\ln 4}} + \dots + \frac{1}{(n+2)\sqrt{\ln(n+2)}} + \dots$
- $\arcsin \frac{2}{3} - \arcsin \frac{3}{6} + \dots + (-1)^n \cdot \arcsin \frac{n+1}{n^2+2} + \dots$

Вариант 2

Исследовать сходимость рядов:

- $\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{6} + \dots + \arcsin \frac{n+3}{n+4} + \dots$
- $\frac{4}{6} + \frac{11}{37} + \dots + \frac{n^3+3}{n^5+5} + \dots$
- $\frac{1}{7^2} + \frac{4}{7^3} + \dots + \frac{n^2}{7^{n+1}} + \dots$
- $\ln \frac{1}{2} + \ln^2 \frac{2}{3} + \dots + \ln^n \left(\frac{n}{n+1}\right) + \dots$
- $\frac{1}{2\sqrt[3]{\ln^2 2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{\ln^2 3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{\ln^2(n+1)}} + \dots$
- $1 - \frac{1}{\sqrt[5]{2}} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{n}} + \dots$

Вариант 3

Исследовать сходимость рядов:

- $\left(\frac{5}{8}\right)^2 + \left(\frac{8}{13}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3n+2}{5n+3}\right)^2 + \dots$
- $\frac{2}{5} + \frac{3}{14} + \dots + \frac{n+1}{3n^2+2} + \dots$
- $\frac{2 \cdot 4}{1!} + \frac{3 \cdot 4^2}{2!} + \dots + \frac{(n+1) \cdot 4^n}{n!} + \dots$
- $\left(\frac{8}{18}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{17}{34}\right)^1 + \dots + \left(\frac{9n-1}{16n+2}\right)^{\frac{n}{2}} + \dots$
- $\frac{\ln \ln 2}{2 \ln 2} + \frac{\ln \ln 3}{3 \ln 3} + \dots + \frac{\ln \ln(n+1)}{(n+1) \ln(n+1)} + \dots$

$$6. \ln 2 - \ln \frac{3}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) + \dots$$

Вариант 4

Исследовать сходимость рядов:

$$1. \frac{2}{21} + \frac{5}{27} + \dots + \frac{n^2 + 1}{2n^2 + 19} + \dots \quad 2. \sqrt[3]{\frac{3}{4}} + \sqrt[3]{\frac{6}{19}} + \dots + \frac{\sqrt[3]{n^2 + 2}}{\sqrt[3]{n^4 + 3}} + \dots$$

$$3. \frac{5}{6} + \frac{25}{72} + \dots + \frac{5^n}{n \cdot 6^n} + \dots \quad 4. \cos \frac{\pi}{5} + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{9} \right) + \dots + \cos^n \left(\frac{\pi n}{4n+1} \right) + \dots$$

$$5. \frac{1}{3\sqrt{\ln^3 3}} + \frac{1}{4\sqrt{\ln^3 4}} + \dots + \frac{1}{(n+2)\sqrt{\ln^3(n+2)}} + \dots$$

$$6. \arctg 1 - \arctg \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \arctg \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

Вариант 5

Исследовать сходимость рядов:

$$1. \arctg \frac{2}{3} + \arctg \frac{5}{6} + \dots + \arctg \frac{1+n^2}{2+n^2} + \dots \quad 2. \frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{\sqrt{4}}{8} + \dots + \frac{\sqrt{n+2}}{n^3+2} + \dots$$

$$3. 1 + \frac{9}{10} + \dots + \frac{3^n}{n^3+2} + \dots \quad 4. \frac{8}{1} + \left(\frac{15}{4} \right)^2 + \dots + \left(\frac{7n+1}{3n-2} \right)^n + \dots$$

$$5. \frac{\sqrt{\ln 2}}{2} + \frac{\sqrt{\ln 3}}{3} + \dots + \frac{\sqrt{\ln(n+1)}}{n+1} + \dots \quad 6. \frac{1}{\sqrt[5]{2}} - \frac{1}{\sqrt[5]{3}} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{n+1}} + \dots$$

Вариант 6

Исследовать сходимость рядов:

$$1. \frac{\sqrt{1}}{3\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{7}} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{n+5}} + \dots \quad 2. 1 + \frac{13}{34} + \dots + \frac{n^3 + 3n - 1}{n^5 + 2} + \dots$$

$$3. \frac{1!}{6} + \frac{2!}{6^2} + \dots + \frac{n!}{6^n} + \dots \quad 4. \arctg \frac{1}{5} + \arctg^2 \left(\frac{1}{7} \right) + \dots + \arctg^n \left(\frac{1}{2n+3} \right) + \dots$$

$$5. \frac{1}{2 \ln 2 \sqrt{(\ln \ln 2)^5}} + \frac{1}{3 \ln 3 \sqrt{(\ln \ln 3)^5}} + \dots + \frac{1}{(n+1) \ln(n+1) \sqrt{(\ln \ln(n+1))^5}} + \dots$$

$$6. \frac{3}{6} - \frac{4}{13} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{2+n^2}{5+n^3} + \dots$$

Ответы

Вариант 1. 1. Расходится. 2. Расходится. 3. Сходится. 4. Сходится. 5. Расходится. 6. Сходится условно.

Вариант 2. 1. Расходится. 2. Сходится. 3. Сходится. 4. Сходится. 5. Расходится. 6. Сходится условно.

Вариант 3. 1. Расходится. 2. Расходится. 3. Сходится. 4. Сходится. 5. Расходится. 6. Сходится условно.

Вариант 4. 1. Расходится. 2. Расходится. 3. Сходится. 4. Сходится. 5. Сходится. 6. Сходится условно.

Вариант 5. 1. Расходится. 2. Сходится. 3. Расходится. 4. Расходится. 5. Расходится. 6. Сходится условно.

Вариант 6. 1. Расходится. 2. Сходится. 3. Расходится. 4. Сходится. 5. Сходится. 6. Сходится условно.

Практическое занятие 4

Функциональные ряды. Область сходимости

Контрольные вопросы

1. Определение функционального ряда.
2. Область сходимости функционального ряда. Сумма ряда. Остаток ряда.
3. Определение мажорируемого функционального ряда.
4. Определение равномерно сходящегося функционального ряда.
5. Связь между мажорируемостью и равномерной сходимостью функционального ряда.
6. Интегрирование и дифференцирование функциональных рядов.

Задачи

Найти мажоранту и доказать, что ряд равномерно сходится на всей числовой прямой:

$$1. \frac{\arctg x}{1!} + \frac{\arctg 2x}{2!} + \dots + \frac{\arctg nx}{n!} + \dots \quad 2. \frac{\cos x}{5} + \frac{\cos 2x}{5^2} + \dots + \frac{\cos nx}{5^n} + \dots$$

$$3. 3^{-x^2} + \frac{3^{-2x^2}}{2^3} + \dots + \frac{3^{-nx^2}}{n^3} + \dots$$

Найти область сходимости функционального ряда:

$$4. \sin x + \sin^2 x + \dots + \sin^n x + \dots$$

5. $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + \dots + \frac{1}{(1+x)^n} + \dots$.
6. $\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2+x^2} + \dots + \frac{1}{2+x^n} + \dots$.
7. $\operatorname{arctg} \frac{x^4}{4} + \operatorname{arctg} \frac{x^4}{4^2} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{x^4}{4^n} + \dots$.
8. $2^{-x^2} \cdot \sin x + 2^{-2x^2} \cdot \sin 2x + \dots + 2^{-nx^2} \cdot \sin nx + \dots$.
9. $\frac{x}{5^x} + \frac{2x}{5^{2x}} + \dots + \frac{nx}{5^{nx}} + \dots$.

Задачи для самостоятельной работы

Найти мажоранту:

10. $\sin x + \frac{\sin 4x}{2^3} + \dots + \frac{\sin 2nx}{n^3} + \dots$.
11. $\frac{1}{2^{x^2}} + \frac{1}{4 \cdot 2^{2x^2}} + \dots + \frac{1}{n^2 \cdot 2^{nx^2}} + \dots$.

Найти область сходимости функционального ряда:

12. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + \dots + \operatorname{tg}^n x + \dots$.
13. $\frac{1}{2-x} + \frac{1}{(2-x)^2} + \dots + \frac{1}{(2-x)^n} + \dots$.
14. $\sin x + \sin \frac{x}{2!} + \dots + \sin \frac{x}{n!} + \dots$.
15. $2^{-x} \sin x + 2^{-2x} \sin 2x + \dots + 2^{-nx} \sin nx + \dots$.
16. $5^{-x^2} \cos x + 5^{-2x^2} \cos 2x + \dots + 5^{-nx^2} \cos nx + \dots$.
17. $x \cdot 3^x + 2x \cdot 3^{2x} + \dots + nx \cdot 3^{nx} + \dots$.

Ответы

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2n!}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.
4. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
5. $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$.
6. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
7. $(-\infty, +\infty)$.
8. $(-\infty, +\infty)$.
9. $[0, +\infty)$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
12. $(k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}), k \in \mathbb{Z}$.
13. $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.
14. $(-\infty, +\infty)$.
15. $[0, +\infty)$.
16. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
17. $(-\infty, 0]$.

Домашнее задание

Найти мажоранту:

1. $\arctg 2x + \frac{\arctg 4x}{4} + \dots + \frac{\arctg 2^n x}{n^2} + \dots$. 2. $\sin x + \frac{\sin 4x}{4} + \dots + \frac{\sin n^2 x}{n^n} + \dots$.

Найти область сходимости:

3. $\cos x + \cos^2 x + \dots + \cos^n x + \dots$. 4. $\frac{1}{2x+3} + \frac{1}{(2x+3)^2} + \dots + \frac{1}{(2x+3)^n} + \dots$.
5. $\sin \frac{x^2}{3} + \sin \frac{x^2}{3^2} + \dots + \sin \frac{x^2}{3^n} + \dots$. 6. $\frac{\cos x}{3^{x^2}} + \frac{\cos 2x}{3^{2x^2}} + \dots + \frac{\cos nx}{3^{nx^2}} + \dots$.
7. $3^{-x} + 3^{-2x} + \dots + 3^{-nx} + \dots$. 8. $x \cdot 2^x + 2x \cdot 2^{2x} + \dots + nx \cdot 2^{nx} + \dots$.

Ответы

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$. 3. $x \neq \pi n, n \in Z$. 4. $(-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$. 5. $(-\infty, +\infty)$.
6. $(-\infty, +\infty)$. 7. $(0, +\infty)$. 8. $(-\infty, 0]$.

Практическое занятие 5

Степенные ряды. Радиус, интервал, область сходимости. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов

Контрольные вопросы

1. Определение степенного ряда.
2. Теорема Абеля.
3. Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда.
4. Интегрирование степенных рядов.
5. Дифференцирование степенных рядов.

Задачи

а) Найти области сходимости степенных рядов:

1. $\frac{x}{2\sqrt{3}} + \frac{x^2}{4\sqrt{4}} + \dots + \frac{x^n}{2^n \sqrt{n+2}} + \dots$. 2. $\frac{x}{4} + \frac{x^2}{10} + \dots + \frac{x^n}{n^2 + 3n} + \dots$.
3. $\frac{1!x}{7} + \frac{2!x^2}{49} + \dots + \frac{n!x^n}{7^n} + \dots$. 4. $2x + x^2 + \dots + \left(\frac{n+3}{3n-1}\right)^n x^n + \dots$.
5. $x + \frac{x^2}{4} + \dots + \frac{x^n}{n^n} + \dots$. 6. $\frac{x+3}{5} + \frac{(x+3)^2}{25} + \dots + \frac{(x+3)^n}{5^n} + \dots$.

$$7. \frac{x+1}{3\sqrt{1}} + \frac{(x+1)^2}{9\sqrt{2}} + \dots + \frac{(x+1)^n}{3^n \sqrt{n}} + \dots \quad 8. \frac{x+4}{3} + \frac{(x+4)^2}{8} + \dots + \frac{(x+4)^n}{n(n+2)} + \dots$$

$$9. 2x^2 + \frac{16x^4}{3} + \dots + \frac{4^n x^{2n}}{n+1} + \dots \quad 10. \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(x-2)^4}{2 \cdot 16^2} + \dots + \frac{(x-2)^{2n}}{n \cdot 16^n} + \dots$$

Задачи для самостоятельной работы

$$11. \frac{3x}{8} + \frac{9x^2}{34} + \dots + \frac{3^n x^n}{3^n + 5^n} + \dots \quad 12. \frac{x^2}{9} + \frac{x^4}{162} + \dots + \frac{x^{2n}}{n \cdot 9^n} + \dots$$

$$13. \frac{2x+3}{\sqrt[3]{1}} + \frac{(2x+3)^2}{\sqrt[3]{2}} + \dots + \frac{(2x+3)^n}{\sqrt[3]{n}} + \dots$$

$$14. \frac{x-2}{6} - \frac{(x-2)^2}{121} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{(x-2)^n}{(5n+1)^n} + \dots$$

$$15. \frac{x-5}{4\sqrt[3]{1}} + \frac{(x-5)^2}{16\sqrt[3]{32}} + \dots + \frac{(x-5)^n}{4^n \sqrt[3]{n^5}} + \dots$$

б) Пользуясь интегрированием или дифференцированием степенных рядов найти их суммы. Указать значения переменной x , при которых ряд сходится к найденной сумме:

$$16. 2 \cdot 3^2 \cdot x + 3 \cdot 3^3 \cdot x^2 + \dots + (n+1) \cdot 3^{n+1} \cdot x^n + \dots$$

$$17. 3x + 3x^2 + \dots + \frac{(n+2)(n+1)}{2^n} x^n + \dots$$

$$18. \frac{2}{3}(x+3) + \frac{1}{3}(x+3)^2 + \dots + \frac{(n+1)}{3^n}(x+3)^n + \dots$$

$$19. 5x + \frac{5^2 x^2}{2} + \dots + \frac{5^n x^n}{n} + \dots \quad 20. \frac{x+7}{7} + \frac{(x+7)^2}{2 \cdot 7^2} + \dots + \frac{(x+7)^n}{n \cdot 7^n} + \dots$$

Задачи для самостоятельной работы

$$21. 8x + 48x^2 + \dots + (n+1)4^n x^n + \dots$$

$$22. \frac{2(x+5)}{5^2} + \frac{3(x+5)^2}{5^3} + \dots + \frac{(n+1)(x+5)^n}{5^{n+1}} + \dots$$

23. $(x+1) + \frac{(x+1)^2}{2} + \dots + \frac{(x+1)^n}{n} + \dots$.
 24. $3(x-2) + \frac{9}{2}(x-2)^2 + \dots + \frac{3^n}{n}(x-2)^n + \dots$.

Ответы

1. Сходится абсолютно при $x \in (-2, 2)$, сходится условно при $x = -2$. 2. Сходится абсолютно при $x \in [-1, 1]$. 3. Сходится при $x = 0$. 4. Сходится абсолютно при $x \in (-3, 3)$. 5. Сходится абсолютно при $x \in (-\infty, +\infty)$.
 6. Сходится абсолютно при $x \in (-8, 2)$. 7. Сходится абсолютно при $x \in (-4, 2)$, сходится условно при $x = -4$. 8. Сходится абсолютно при $x \in [-5, -3]$. 9. Сходится абсолютно при $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. 10. Сходится абсолютно при $x \in (-2, 6)$. 11. Сходится абсолютно при $x \in \left(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$. 12. Сходится абсолютно при $x \in (-3, 3)$. 13. Сходится абсолютно при $x \in (-2, -1)$, сходится условно при $x = -2$. 14. Сходится абсолютно при $x \in (-\infty, +\infty)$.
 15. Сходится абсолютно при $x \in [1, 9]$. 16. $\frac{9x(2-3x)}{(1-3x)^2}$, $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
 17. $\frac{2x(x^2-6x+12)}{(2-x)^3}$, $x \in (-2, 2)$. 8. $\frac{9-x^2}{x^2}$, $x \in (-6, 0)$.
 19. $-\ln|1-5x|$, $x \in \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$. 20. $\ln\left|\frac{7}{x}\right|$, $x \in (-14, 0)$.
 21. $\frac{8x(1-2x)}{(1-4x)^2}$, $x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. 22. $\frac{25-x^2}{5x^2}$, $x \in (-10, 0)$. 23. $\ln\left|\frac{1}{x}\right|$, $x \in (-2, 0)$.
 24. $-\ln|7-3x|$, $x \in \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

Домашнее задание

- а) Найти области сходимости степенных рядов:

1. $\frac{16}{3}x + \frac{25}{9}x^2 + \dots + \frac{(n+3)^2}{3^n}x^n + \dots$.
2. $\frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \dots + \frac{2^n x^n}{n!} + \dots$.
3. $\frac{6x}{3} + \frac{36x^2}{10} + \dots + \frac{6^n x^n}{n^3 + 2} + \dots$.
4. $\frac{x+5}{\sqrt[3]{1}} + \frac{(x+5)^2}{\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{2n-1}} + \dots$.
5. $\frac{2x-3}{5} + \frac{(2x-3)^2}{25} + \dots + \frac{(2x-3)^n}{5^n} + \dots$.
6. $\frac{(x-1)^2}{6 \cdot 25} + \frac{(x-1)^4}{7 \cdot 625} + \dots + \frac{(x-1)^{2n}}{(n+5) \cdot 25^n} + \dots$.

б) Найти суммы рядов и указать значения переменной x , при которых ряд сходится к найденной сумме:

7. $\frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \dots + \frac{(n+1)x^n}{2^{n+1}} + \dots$.
8. $2(x-7) + 3(x-7)^2 + \dots + (n+1)(x-7)^{n+1} + \dots$.
9. $(x-5) + \frac{(x-5)^2}{2} + \dots + \frac{(x-5)^n}{n} + \dots$.
10. $\frac{x+3}{3} + \frac{(x+3)^2}{2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{(x+3)^n}{n \cdot 3^n} + \dots$.

Ответы

1. Сходится абсолютно при $x \in (-3, 3)$.
2. Сходится абсолютно при $x \in (-\infty, +\infty)$.
3. Сходится абсолютно при $x \in \left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right]$.
4. Сходится абсолютно при $x \in (-6, -4)$, сходится условно при $x = -6$.
5. Сходится абсолютно при $x \in (-1, 4)$.
6. Сходится абсолютно при $x \in (-4, 6)$.
7. $\frac{x(4-x)}{2(2-x)^2}$, $x \in (-2, 2)$.
8. $\frac{x^2 + x - 56}{(8-x)^2}$, $x \in (6, 8)$.
9. $-\ln|6-x|$, $x \in (4, 6)$.
10. $\ln\left|\frac{3}{x}\right|$, $x \in (-6, 0)$.

Практическое занятие 6

Разложение функции в ряд Тейлора, Маклорена. Применение к приближённым вычислениям интегралов, интегрированию дифференциальных уравнений

Контрольные вопросы

1. Ряд Тейлора в окрестности точки a .
2. Ряд Маклорена.
3. Разложение в ряд Маклорена функций e^x , $\sin x$, $\cos x$.
4. Биномиальный ряд. Разложение в ряд Маклорена функций $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1-x}$.
5. Разложение в ряд Маклорена функций $\ln(1+x)$ и $\arctg x$.
6. Приложение разложений функций в степенные ряды к приближённому вычислению определённых интегралов. Оценка точности вычислений.
7. Интегрирование дифференциальных уравнений.

Задачи

а) Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и указать область сходимости полученного ряда:

1. $y = \frac{1}{x}$, $x_0 = 5$.
2. $y = \ln(x+1)$, $x_0 = 4$.
3. $y = \sin \frac{\pi x}{2}$, $x_0 = 4$.
4. $y = e^x$, $x_0 = 2$.

Задачи для самостоятельной работы

5. $y = \frac{1}{x-3}$, $x_0 = -3$.
6. $y = \ln x$, $x_0 = 3$.
7. $y = \cos \pi x$, $x_0 = 2$.
8. $y = e^{-3x}$, $x_0 = -1$.

б) Разложить функцию в ряд Маклорена и указать область сходимости полученного ряда:

9. $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$.
10. $y = \ln(3+x)$.

$$11. y = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

$$12. y = \frac{1}{1 - 2x^2}.$$

$$13. y = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 3 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельной работы

$$14. y = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

$$15. y = x \ln(1 + x^2).$$

$$16. y = \sin \frac{x}{3}.$$

$$17. y = \sqrt{2 + x^2}.$$

в) Вычислить приближённо, взяв указанное число членов разложения подынтегральной функции в ряд. Оценить точность вычислений Δ .

$$18. \int_{0,1}^{0,5} \frac{e^{-x^2} - 1}{x^2} dx, 3 \text{ члена.}$$

$$19. \int_{0,1}^{0,3} \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2} dx, 4 \text{ члена.}$$

Задачи для самостоятельной работы

$$20. \int_{0,2}^{0,5} \frac{\sin 2x}{x} dx, 3 \text{ члена.}$$

$$21. \int_{0,5}^1 \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x} dx, 3 \text{ члена.}$$

г) Вычислить интегралы с указанной точностью:

$$22. \int_0^1 \sqrt{1 + x^4} dx, \Delta < 0,01.$$

$$23. \int_{0,5}^1 \frac{1 - \cos x^{\frac{3}{2}}}{x^3} dx, \Delta < 0,0001.$$

Задачи для самостоятельной работы

$$24. \int_{0,1}^{0,5} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2} dx, \Delta < 0,001.$$

$$25. \int_{0,2}^{0,4} \frac{1 - x - e^{-x}}{x^2} dx, \Delta < 0,0001.$$

д) Найти три первых ненулевых члена разложения в степенной ряд решения задачи Коши:

$$26. y' + 2 \sin(x + y) - 3 = 0, y(0) = 0. \quad 27. y'' - e^{x+y} - e = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

$$28. \frac{y'}{x} + x + y - 3 = 0, \quad y(1) = 2.$$

Задачи для самостоятельной работы

$$29. y' + 3 \cos(xy) - 1 = 0, \quad y(0) = 1.$$

$$30. y'' + \sin(x + y') + y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Ответы

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(x-5)^n}{5^{n+1}}, \quad x \in (0, 10). \quad 2. \ln 5 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(x-4)^n}{n \cdot 5^n}, \quad x \in (-1, 9).$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1} \cdot \frac{(x-4)^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad 4. e^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$5. -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{6^{n+1}}, \quad x \in (-9, 3). \quad 6. \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(x-3)^n}{n \cdot 3^n}, \quad x \in (0, 6).$$

$$7. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\pi^{2n}}{(2n)!} (x-2)^{2n}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$8. e^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{3^n}{n!} (x+1)^n, \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad 9. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{2^n \cdot n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$10. \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{3^n \cdot n}, \quad x \in (-3, 3). \quad 11. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$12. \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{2n}, \quad x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \quad 13. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{3^{2n+1}}{2n+1} x^{2n}, \quad x \in (-3, 3).$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n!}, \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad 15. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n+1}}{n}, \quad x \in (-1, 1).$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{3^{2n-1} (2n-1)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$17. \sqrt{2} \left(1 + \frac{x^2}{2^2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(2n-3)!!}{2^{2n} \cdot n!} \cdot x^{2n} \right), \quad x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Замечание: $(2n-3)!!$ – это произведение всех нечётных чисел от 1 до $2n-3$. Например, $5!! = 1 \cdot 3 \cdot 5$.

18. $-0,380$; $\Delta < 0,001$. 19. $0,195820$; $\Delta < 0,000001$. 20. $0,549$; $\Delta < 0,001$. 21. $0,2347$; $\Delta < 0,0001$. 22. $1,04$. 23. $0,2492$. 24. $0,037$. 25. $0,0907$. 26. $3x - 4x^2 + \frac{8}{3}x^3$. 27. $1 + 2x + \frac{e}{2}x^3$. 28. $2 - \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3$. 29. $1 - 2x + \frac{1}{2}x^3$.
 30. $2 - \frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4$.

Домашнее задание

а) Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и указать область сходимости полученного ряда:

1. $y = \frac{1}{x+2}$, $x_0 = 5$. 2. $y = \cos 2\pi x$, $x_0 = 1$.
 3. $y = \ln(3-x)$, $x_0 = 2$. 4. $y = e^{5x}$, $x_0 = -2$.

б) Разложить функцию в ряд Маклорена и указать область сходимости полученного ряда:

5. $y = e^{3x}$. 6. $y = \ln(2-x)$.
 7. $y = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 2 & \text{при } x = 0. \end{cases}$ 8. $y = \frac{1}{3+x^3}$.

в) Вычислить приближённо, взяв 3 члена разложения подынтегральной функции в ряд. Оценить точность вычислений Δ .

$$9. \int_{\frac{1}{9}}^{\frac{1}{3}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$$

г) Вычислить интеграл с точностью $\Delta < 0,001$:

$$10. \int_{0,3}^{0,6} \frac{\ln(1+x^3)}{x} dx.$$

д) Найти три первых ненулевых члена разложения в степенной ряд решения задачи Коши:

$$11. y'' + y' + 2e^{xy} - 3 = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$$

12. $y'' + \frac{y'}{x^2 + y^2} - 3 = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$.

Ответы

1. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(x-5)^n}{7^{n+1}}$, $x \in (-2, 12)$. 2. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^{2n} \pi^{2n}}{(2n)!} (x-1)^{2n}$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

3. $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$, $x \in (1, 3)$. 4. $e^{-10} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!} (x+2)^n$, $x \in (-\infty, +\infty)$. 5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$,

$x \in (-\infty, +\infty)$. 6. $\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \cdot n}$, $x \in (-2, 2)$. 7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-2}$,

$x \in (-\infty, +\infty)$. 8. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{3n}}{3^{n+1}}$, $x \in (-\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3})$. 9. 0,218; $\Delta < 0,001$. 10. 0,059.

11. $2 + x - \frac{2}{3}x^3$. 12. $2(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}(x-1)^3$.

Контрольная работа по теме «Функциональные и степенные ряды и их приложения»

Вариант 1

1. Найти мажоранту ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)x]}{(2n+1)!}$.

2. Найти область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

3. Разложить функцию $y = \frac{1}{x-7}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 5$ и указать область сходимости полученного ряда.

4. Вычислить $\int_{0,2}^{0,4} \frac{\ln(1+x^3)}{x} dx$ с точностью $\Delta < 0,001$.

5. Найти три первых ненулевых члена разложения в степенной ряд решения задачи Коши: $y' + x^2 + y^2 - 3 = 0$, $y(0) = 1$.

Вариант 2

1. Найти мажоранту ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^n}{n!}$.

2. Найти область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n \cdot x^n}{n^2 + 1}$.
3. Разложить функцию $y = \ln(x+2)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 3$ и указать область сходимости полученного ряда.
4. Вычислить $\int_{0,5}^1 \frac{1 - \cos x^2}{x^4} dx$ с точностью $\Delta < 0,01$.
5. Найти три первых ненулевых члена разложения в степенной ряд решения задачи Коши: $y'' + y' + \sin(x+y) - 1 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

Вариант 3

1. Найти мажоранту ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^n x}{n^3}$.
2. Найти область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.
3. Разложить функцию $y = \sin 2x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = \frac{\pi}{2}$ и указать область сходимости полученного ряда.
4. Вычислить приближённо $\int_{0,1}^{0,5} \frac{1 - e^{-3x^2}}{x^2} dx$, взяв 3 члена разложения подынтегральной функции в ряд. Оценить точность вычислений Δ .
5. Найти три первых ненулевых члена разложения в степенной ряд решения задачи Коши: $y' - e^{x^2 - y^2} + 2 = 0$, $y(1) = 1$.

Вариант 4

1. Найти мажоранту ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{e^n}$.
2. Найти область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{2^n}$.
3. Разложить функцию $y = \cos \frac{\pi x}{2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 2$ и указать область сходимости полученного ряда.

4. Вычислить приближённо $\int_0^{0,5} \frac{x^2}{1+x^4} dx$, взяв 2 члена разложения подынтегральной функции в ряд. Оценить точность вычислений Δ .
5. Найти три первых ненулевых члена разложения в степенной ряд решения задачи Коши: $y'' + \frac{y'}{x} + 2y - 3 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$.

Вариант 5

1. Найти мажоранту ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{-nx^2}}{n^3}$.
2. Найти область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 7^n}$.
3. Разложить функцию $y = e^{2x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = -1$ и указать область сходимости полученного ряда.
4. Вычислить $\int_{0,5}^1 \frac{\sin x^2}{x} dx$ с точностью $\Delta < 0,01$.
5. Найти три первых ненулевых члена разложения в степенной ряд решения задачи Коши: $y' + \cos \frac{y}{x} - 1 = 0$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

Вариант 6

1. Найти мажоранту ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2^x}{2^n}$.
2. Найти область сходимости ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n x^n$.
3. Разложить функцию $y = (x-2)\ln(x-1)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 2$ и указать область сходимости полученного ряда.
4. Вычислить приближённо $\int_{0,3}^{0,6} \frac{\arctg x^2}{x} dx$, взяв 2 члена разложения подынтегральной функции в ряд. Оценить точность вычислений Δ .
5. Найти три первых ненулевых члена разложения в степенной ряд решения задачи Коши: $y'' + 4e^{x+y} - 5 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Ответы

Вариант 1. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ при $x \in (-\infty, +\infty)$. 2. При $x \in [-1, 1]$ сходится абсолютно. 3. $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{2^{n+1}}$, $x \in (3, 7)$. 4. 0,0183. 5. $1+2x-2x^2$.

Вариант 2. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2n!}$ при $x \in (-\infty, +\infty)$. 2. При $x \in (-1, 1)$ сходится абсолютно, при $x=1$ сходится условно. 3. $\ln 5 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(x-3)^n}{5^n \cdot n}$, $x \in (-2, 8)$. 4. 0,24. 5. $2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$.

Вариант 3. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ при $x \in (-\infty, +\infty)$. 2. При $x \in (-1, 1)$ сходится абсолютно, при $x=1$ сходится условно. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n-1}$, $x \in (-\infty, +\infty)$. 4. 1,13; $\Delta < 0,01$. 5. $1 - (x-1) + 2(x-1)^2$.

Вариант 4. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ при $x \in (-\infty, +\infty)$. 2. При $x \in (-2, 2)$ сходится абсолютно. 3. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi^{2n}}{2^{2n}(2n)!} (x-2)^{2n}$, $x \in (-\infty, +\infty)$. 4. 0,0405; $\Delta < 0,0001$. 5. $1 + (x-1) - \frac{1}{6}(x-1)^3$.

Вариант 5. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ при $x \in (-\infty, +\infty)$. 2. При $x \in (-7, 7)$ сходится абсолютно, при $x = -7$ сходится условно. 3. $e^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x+1)^n}{n!}$, $x \in (-\infty, +\infty)$. 4. 0,34. 5. $\frac{\pi}{2} + (x-1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)(x-1)^2$.

Вариант 6. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ при $x \in (-\infty, +\infty)$. 2. При $x \in \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$ сходится абсолютно. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(x-2)^{n+1}}{n}$, $x \in (1, 3)$. 4. 0,132; $\Delta < 0,001$.

$$5. x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3.$$

Практическое занятие 7

Разложение периодических функций в ряд Фурье

Контрольные вопросы

1. Ряд Фурье для 2π – периодической функции.
2. Формулы для вычисления коэффициентов ряда Фурье на $(-\pi, \pi)$, на $(0, 2\pi)$, на любом отрезке длины 2π .
3. Теорема Дирихле.

Задачи

Разложить в ряд Фурье функцию, заданную на указанном интервале:

1. $f(x) = \begin{cases} 2, & x \in (-\pi, 0), \\ 1, & x \in (0, \pi). \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (0, \pi), \\ 2, & x \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} \pi, & x \in (-\pi, 0), \\ x + \pi, & x \in (0, \pi). \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \pi), \\ 2 - \frac{x}{\pi}, & x \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$

Задачи для самостоятельной работы

5. $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \in (-\pi, 0), \\ x, & x \in (0, \pi). \end{cases}$
6. $f(x) = x^2 + 1, x \in (0, 2\pi).$

Ответы

1. $\frac{3}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} ((-1)^n - 1) \sin nx.$
2. $\frac{1}{2} + \frac{3}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} ((-1)^n - 1) \sin nx.$
3. $\frac{5\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$
4. $\frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2} (1 - (-1)^n) \cos nx + \frac{1}{\pi n} ((-1)^n - 3) \sin nx.$
5. $\frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) \cos nx + \frac{1}{n} (-1)^n \sin nx.$
6. $\frac{4\pi^2}{3} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx.$

Домашнее задание

Разложить в ряд Фурье функцию, заданную на указанном интервале:

$$7. f(x) = \begin{cases} \pi, & x \in (0, \pi), \\ \pi - x, & x \in (\pi, 2\pi). \end{cases} \quad 8. f(x) = x^2 + x, x \in (-\pi, \pi).$$

Ответы

$$7. \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n^2} \left((-1)^n - 1 \right) \cos nx + \frac{1}{n} \left(2 - (-1)^n \right) \sin nx.$$
$$8. \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos nx + \frac{2}{n} (-1)^n \sin nx.$$

Практическое занятие 8

Неполные ряды Фурье. Разложение неперiodических функций в ряд Фурье на конечном промежутке

Контрольные вопросы

1. Ряды Фурье для четных и нечетных функций на $(-\pi, \pi)$.
2. Ряд Фурье для функции с периодом $2l$. Формулы для вычисления коэффициентов.

Задачи

1. Разложить функцию $f(x) = \pi - |x|$ в ряд Фурье на интервале $(-\pi, \pi)$.
2. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} -2 - x, & x < 0, \\ 2 - x, & x > 0 \end{cases}$ в ряд Фурье на интервале $(-\pi, \pi)$.
3. Разложить функцию $f(x) = x + 1$ на интервале $(0, \pi)$ в ряд косинусов.
4. Разложить функцию $f(x) = 1 - x$ на интервале $(0, \pi)$ в ряд синусов.
5. Разложить функцию $f(x) = x + 3$ на интервале $(-3, 3)$ в ряд Фурье.

Задачи для самостоятельной работы

6. Разложить функцию $f(x) = 2x$ на интервале $(0, \pi)$ в ряд косинусов.

7. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} (x+\pi)^2 - \pi^2, & x < 0, \\ \pi^2 - (x-\pi)^2, & x > 0 \end{cases}$ в ряд Фурье на интервале $(-\pi, \pi)$.

Ответы

1. $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (1 - (-1)^n) \cos nx$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi n} ((-1)^n - 1) + \frac{2}{n} (-1)^n \right) \sin nx$.
3. $\frac{\pi}{2} + 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} ((-1)^n - 1) \cos nx$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) + \frac{2}{n} (-1)^n \right) \sin nx$.
5. $3 + \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{\pi nx}{3}$.
6. $\pi + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} ((-1)^n - 1) \cos nx$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{n} (-1)^n + \frac{4}{n^2 \pi^2} (1 - (-1)^n) \right) \sin nx$.

Домашнее задание

8. Разложить функцию $f(x) = 3 - 2x$ на интервале $(0, \pi)$ в ряд синусов.
9. Разложить функцию $f(x) = 4x - 3$ на интервале $(0, \pi)$ в ряд косинусов.

Ответы

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6}{\pi n} (1 - (-1)^n) + \frac{4}{n} (-1)^n \right) \sin nx$.
9. $2\pi - 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) \cos nx$.

Контрольная работа по теме «Ряды»

Вариант 1

1. Исследовать сходимость числового ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{2n+1}{3n+2}}$.
2. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 5^n}$.
3. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{x+3}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 4$.

4. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} x+5, & x < 0, \\ x-5, & x > 0 \end{cases}$ в ряд Фурье на интервале $(-\pi, \pi)$.

Вариант 2

1. Исследовать сходимость числового ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{5n^4+2}$.
2. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{2n+1} (x-3)^n$.
3. Разложить функцию $f(x) = \ln(x+4)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 5$.
4. Разложить функцию $f(x) = 1-x$ в ряд Фурье на интервале $(0, 2\pi)$.

Вариант 3

1. Исследовать сходимость числового ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+3) \cdot 5^n}$.
2. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n^2+1} (x-4)^n$.
3. Разложить функцию $f(x) = \sin \frac{3\pi x}{2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$.
4. Разложить функцию $f(x) = 3x+1$ на интервале $(0, \pi)$ в ряд синусов.

Вариант 4

1. Исследовать сходимость числового ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{n}}{n+2}$.
2. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^n}$.
3. Разложить функцию $f(x) = \cos 2x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = \pi$.

4. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2}, & x < 0, \\ 1 + \frac{x}{2}, & x > 0 \end{cases}$ в ряд Фурье на интервале $(-\pi, \pi)$.

Вариант 5

1. Исследовать сходимость числового ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 1} \right)^{2n}$.
2. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3n^2 + 2}$.
3. Разложить функцию $f(x) = e^{-2x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 2$.
4. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$ в ряд Фурье на интервале $(-\pi, \pi)$.

Вариант 6

1. Исследовать сходимость числового ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 + 1}{3^n}$.
2. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{\sqrt[3]{n^5 + 1}}$.
3. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{2-x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = -1$.
4. Разложить функцию $f(x) = 2x - 1$ на интервале $(0, \pi)$ в ряд косинусов.

Ответы

Вариант 1. 1. Расходится. 2. При $x \in (-4, 6)$ сходится абсолютно, при

$x = -4$ сходится условно. 3. $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{2^{n+1}}$, $x \in (-3, 1)$.

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{10}{\pi n} \left((-1)^n - 1 \right) - \frac{2}{n} (-1)^n \right) \sin nx.$$

Вариант 2. 1. Сходится абсолютно. 2. При $x \in (2, 4)$ сходится абсолютно.

$$3. \ln 9 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{9^n \cdot n} (x-5)^n, x \in (-4, 14). 4. 1 - \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin nx.$$

Вариант 3. 1. Расходится. 2. При $x \in (3, 5)$ сходится абсолютно, при $x = 3$

сходится условно. 3. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(3\pi)^{2n}}{2^{2n} (2n)!} (x-1)^{2n}, x \in (-\infty, +\infty).$

$$4. \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} (1 - (-1)^n) - \frac{3\pi}{n} (-1)^n \right) \sin nx.$$

Вариант 4. 1. Сходится условно. 2. При $x \in (-5, 1)$ сходится абсолютно.

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^{2n} (x - \pi)^{2n}}{(2n)!}, x \in (-\infty, +\infty). 4. 1 + \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n^2} \left((-1)^n - 1 \right) \cos nx.$$

Вариант 5. 1. Расходится. 2. При $x \in [-2, 0]$ сходится абсолютно.

$$3. e^{-4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n!} (x-2)^n, x \in (-\infty, +\infty).$$

$$4. 1 + \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n^2} \left((-1)^n - 1 \right) \cos nx + \frac{1}{n} (-1)^n \sin nx.$$

Вариант 6. 1. Сходится. 2. При $x \in (-4, -2)$ сходится абсолютно, при

$x = -4$ сходится условно. 3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}, x \in (-4, 2).$

$$4. \pi - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2} \left((-1)^n - 1 \right) \cos nx.$$

Список литературы

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – Т. 2 – М. : Наука, 1985.
2. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – Ч. II. – М. : Высшая школа, 1986.
3. Высшая математика в примерах и задачах: учеб. пособие / под ред. Ю. Л. Геворкяна. – Т. 2. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2005.
4. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики: у 2ч. – ч. 2./ Н. О. Чікіна, А. М. Гайдаш, В. Д. Крупка та ін.; за ред. Н. О. Чікіної. – Харків : Вид-во «Підручник НТУ «ХПІ»», 2013.

Содержание

Вступление.....	3
Практическое занятие 1. Числовые ряды. Необходимый признак сходимости. Интегральный признак Коши сходимости знакоположительных рядов.....	4
Практическое занятие 2. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов: признаки сравнения, Даламбера, радикальный признак Коши.....	6
Практическое занятие 3. Числовые ряды с произвольными членами. Условная и абсолютная сходимость. Признак Лейбница.....	9
Контрольная работа по теме «Числовые ряды».....	12
Практическое занятие 4. Функциональные ряды. Область сходимости.....	14
Практическое занятие 5. Степенные ряды. Радиус, интервал, область сходимости. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов.....	16
Практическое занятие 6. Разложение функции в ряд Тейлора, Маклорена. Применение к приближенным вычислениям интегралов, интегрированию дифференциальных уравнений.....	20
Контрольная работа по теме «Функциональные и степенные ряды и их приложения».....	24
Практическое занятие 7. Разложение периодических функций в ряд Фурье.....	28
Практическое занятие 8. Неполные ряды Фурье. Разложение непериодических функций в ряд Фурье на конечном промежутке.....	29
Контрольная работа по теме «Ряды».....	30
Список литературы.....	34

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до проведення практичних занять та контрольних робіт з вищої математики
за темою «Ряди»
для студентів усіх спеціальностей
факультетів МТ, МБ, ЕМБ, Е, АП, КІТ, ТОР, ТНР.

Укладачі: ПОЛЯНСЬКА Тетяна Семенівна
НЕМЧЕНКО Тетяна Адальбертівна
ТЮПА Ірина Василівна

Відповідальний за випуск проф. Геворкян Ю. Л.

Роботу до видання рекомендувала проф. Курпа Л. В.

В авторській редакції

План 2016 р., поз. 44

Підп. до друку 11.07.2016 р. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.
Друк – ризографія. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 2,0.
Наклад 20 прим. Зам. № _____. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ». 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.

Друкарня НТУ «ХПІ». 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.