

цовых уплотнений / *Е.Д. Роговой Е.Д., В.А.Левашов, Л.В.Розова* // Вісник Сумського державного університету. Серія технічні науки. – 2003. – № 3. – С. 90-94. 3. *Роговой Е.Д.* Разработка итерационного алгоритма расчета газодинамических торцовых уплотнений с меньшим количеством итерационных циклов / *Е.Д.Роговой, В.А.Левашов, М.М.Смирнов, Л.В.Розова* // Вісник НТУ «ХПІ». – 2005. – № 22. – С. 15-20. 4. *Роговой Е.Д.* Создание специализированного программного комплекса для расчета газодинамических торцовых уплотнений в среде Visual C++ / *Е.Д.Роговой, В.А.Левашов, Л.В.Розова, А.М.Киселев* // Вісник НТУ «ХПІ». – 2002. – Т. 9, № 9. – С. 23-26.

*Поступила в редколлегию 13.09.2010*

УДК 539.3

*А.МОВАГГАР*, аспирант, НТУ «ХПІ»;  
*Г.И.ЛЬВОВ*, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ»

## **ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УСТАЛОСТНОЙ ПРОЧНОСТИ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ**

У даній статті запропонована енергетична модель для прогнозування втомної міцності й оцінки накопичених пошкоджень в умовах плоского напруженого стану в композиційних матеріалах. Розроблена методика ідентифікації параметрів моделі на основі мінімального необхідного набору експериментальних даних. Виконаний аналіз теорії для різних умов вантаження і проведено порівняння теоретичних результатів із експериментальними даними.

The paper proposes an energy model for fatigue life prediction and estimation of accumulated fatigue damage under plane stress conditions in composite materials. Method for identifying the proposed model parameters is based on the minimum necessary set of experimental data. The analysis of conclusions of the theory for various loading conditions was carried out and performed comparison of theoretical results with experimental data.

**1 Введение.** Композиционные материалы получают все возрастающее применение в современной промышленности, особенно в тех отраслях, где критически важно обеспечивать прочность и жесткость элементов конструкций при минимальном весе [1].

Вследствие высокой удельной жесткости и прочности армированных волокнами композиционных материалов, они часто используются для критических по отношению к весу конструктивных применений. Однако существующие несовершенства методов оценки прочности этих материалов часто приводят к тому, что в расчетных методиках принимаются большие коэффициенты безопасности. Поэтому изделия с применением композиционных материалов часто конструируются с чрезмерным запасом прочности, что снижает эффективность их использования.

Эти соображения в полной мере относятся к методам оценки усталост-

ной прочности композиционных материалов.

Рациональный выбор модели накопления повреждений позволяет привести к более эффективному использованию этих материалов [1]. При циклических нагружениях композиционных материалов, накопление повреждаемости может проявляться в изменении интегральных свойств.

Различными методами неразрушающего контроля может быть обнаружено изменение модуля упругости, электрической проводимости, коэффициента демпфирования. Повреждаемость может сопровождаться волновыми эффектами и распознаваться методом акустической эмиссии.

Хотя технология композиционных материалов развивается быстро, их применение в реальных конструкциях затрудняется из-за отсутствия доступных данных по усталости, которые являются главными параметрами в эксплуатации. Усталость конструкций из композиционных материалов – весьма сложное явление. Анализ напряженного состояния при переменных нагрузках требует учета анизотропии осредненных упругих свойств композита.

В отличие от металлов, композиционные материалы являются существенно неоднородными и анизотропными. Накопление повреждений происходит не в локализованном виде, а разрушение не всегда происходит в результате распространения единственной макроскопической трещины. Микроструктурные механизмы накопления повреждений, включая волоконный излом и матричное разрушение, волокноно-матричное расщепление и расслоение, происходят иногда независимо.

При низких уровнях циклического нагружения или в начальной части срока долговечности большинство типов композитов накапливают рассеянные повреждения. Эти повреждения распределены повсюду по напряженной зоне, и постепенно уменьшают прочность и жесткость композита.

В поздних стадиях срока долговечности количество накопленных повреждений в некоторой области композита может быть достаточно большим. Это приводит к тому, что остаточная прочность композита той области падает до уровня максимального напряжения в циклическом нагружении. В результате происходит разрушение, которое схематично иллюстрируется [2] рис. 1.

Вследствие разнообразия структур композиционных материалов и механизмов накопления повреждаемости при циклических нагружениях невозможно построение универсальной теории усталости композитов. Хотя усталостное поведение армированных волокном композиционных материалов существенно отличается от поведения металлов, множество моделей были разработаны на основе известных  $S - N$  кривых.

Эти модели составляют первый класс так называемых «моделей усталостной прочности». Такой подход требует больших экспериментальных исследований и не принимает во внимание реальные механизмы повреждения, такие как матричные разрушения и разрывы волокон [3].

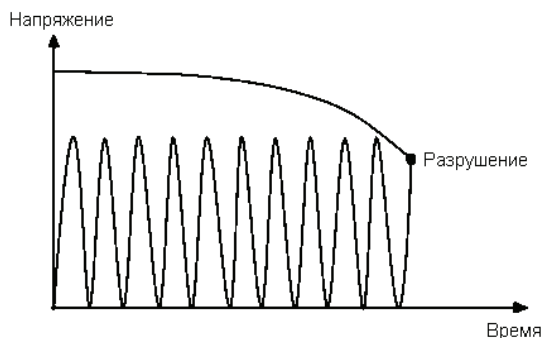


Рисунок 1 – Уменьшение прочности композита при циклических нагружениях

Второй класс включает феноменологические модели для многоциклового усталости. Эти модели предлагают эволюционный закон, который описывает постепенную деградацию прочности или жесткости композиционного образца исходя из макроскопических свойств.

В последнее время развиваются модели на основе концепций континуальной механики разрушения. В моделях этого типа повреждаемость количественно описывается некоторыми внутренними параметрами материала. Развитие повреждаемости определяется эволюционными кинетическими уравнениями, отражающими необратимый характер повреждаемости [3].

Континуальные модели повреждения вводят скалярные, векторные или тензорные параметры повреждения, которые описывают деградацию всего композиционного материала или для компонентов структуры. Эти модели основаны на физическом моделировании основных механизмов повреждения, которые приводят к макроскопически заметной деградации механических свойств [4].

Главным результатом всех усталостных моделей является предсказание усталостной долговечности, и каждая из этих трех категорий использует свой собственный критерий для того, чтобы определить условие разрушения и, как следствие, усталостную долговечность композиционного материала.

В настоящей работе рассматривается континуальная модель накопления усталостных повреждений, основанная на предположении о том, что скорость роста параметра повреждения зависит от максимального значения удельной энергии упругого деформирования композита.

**2 Концепция эффективных напряжений.** При континуальном подходе к анализу напряженного состояния и усталости изделий из композитов, материал рассматривается как гомогенная анизотропная упругая среда [5]. При построении модели предполагается, что имеют место малые упругие деформации. Функционал энергии упругой деформации является квадратичным и

существует линейная зависимость между тензором напряжений  $\sigma$  и тензором деформации  $\varepsilon$ .

В отличие от механики хрупкого разрушения, которая рассматривает процесс равновесного состояния или рост макротрещин, континуальная механика повреждений использует непрерывные внутренние переменные, которые связаны с плотностью микродефектов.

Предлагаемая модель основана на концепции эффективного напряжения и интегрально отражает различные типы повреждения на микро масштабном уровне такие, как образование и рост микротрещин матрицы, обрывы волокон, расслоения и другие микроскопические дефекты [6].

Сложность и разнообразие механизмов накопления усталостных повреждений и деградации прочностных свойств композита делают оправданным использование скалярной внутренней переменной для количественного описания повреждаемости.

Параметр поврежденности  $D$  ассоциируется с уменьшением эффективной площадью любого поперечного сечения в окрестности данной точки тела и определяется следующей формулой:

$$D = \frac{A - \bar{A}}{A}, \quad (1)$$

где  $A$  – номинальная, неповрежденная площадь поперечного сечения,  $\bar{A}$  – суммарная площадь поперечного сечения всех дефектов на данной площадке.

По определению теоретическое значение  $D$  должно быть в пределах  $0 \leq D \leq 1$ . Тензор эффективных напряжений в случае изотропного повреждения вводится следующим образом:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{1 - D}. \quad (2)$$

Для более детального отражения механизма усталостной повреждаемости композитов используются тензорные меры повреждаемости. Это позволяет учесть направленный, анизотропный характер накопления усталостных дефектов.

Модели анизотропного повреждения существенно сложнее изотропного в теоретическом отношении при обеспечении совместимости с термодинамическими принципами механики сплошной среды.

Для идентификации параметров моделей анизотропной повреждаемости требуется проводить значительное число экспериментов при сложных программах испытаний, дающих возможность выявить направленный характер усталостных повреждений.

Линейное преобразование тензора напряжений  $\sigma$  в эффективный тензор напряжения  $\tilde{\sigma}$  может быть осуществлено с помощью тензора четвертого ранга:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = M_{ijkl} \cdot \sigma_{kl}. \quad (3)$$

При рассмотрении геометрической интерпретации анизотропной повре-

ждаемости вводится тензор повреждения второго ранга. По физическим соображениям он является симметричным. Обобщения зависимости (2) на случай тензора повреждаемости второго ранга симметричную форму эффективных напряжений  $\tilde{\sigma}_{ij}$  можно получить следующим образом [6]:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \sigma_{ik} \cdot (\delta_{kj} - D_{kj})^{-1} + (\delta_{il} - D_{il})^{-1} \cdot \sigma_{lj} \right], \quad (4)$$

где  $\delta_{ij}$  – дельта Кроникера и  $D_{ij}$  – тензор повреждения второго ранга.

С введением эффективного напряжения  $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} / (1 - D)$  при изотропной повреждаемости и принципом эквивалентности деформации [7], потенциал Гельмгольца можно написать как:

$$\psi = \frac{1}{2} a_{ijkl} \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{kl}^e (1 - D), \quad (5)$$

где  $a_{ijkl}$  – тензор упругих постоянных,  $\varepsilon_{ij}^e$  – тензор упругих деформаций.

При этом физические соотношения упругого деформирования с учетом повреждаемости для изотермического процесса имеют вид:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} = a_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e (1 - D). \quad (6)$$

Термодинамика необратимых процессов определяет сопряженную с повреждаемостью переменную  $Y$ , таким образом, что произведение  $Y \cdot \dot{D}$  определяет энергию, рассеянную в процессе повреждения. Сопряженная с повреждаемостью переменная  $Y$  определяется из условия положительности рассеянной энергии для изотермических процессов [7]:

$$Y = - \frac{\partial \psi}{\partial D} = \frac{W_e}{1 - D}, \quad (7)$$

где  $dW_e = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e$  удельная энергия упругой деформации.

$$W_e = \frac{1}{2} a_{ijkl} \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{kl}^e (1 - D). \quad (8)$$

**3 Определяющие соотношения развития повреждаемости композита.** Введение скалярной меры поврежденности определяет и выбор математической модели для описания процесса накопления повреждаемости. В условиях сложного напряженного состояния скорость накопления поврежденности должна зависеть от совместных инвариантов тензоров напряжений и тензоров, характеризующих механические свойства композита. В качестве такой характеристики принимается удельная энергия упругого деформирования  $W_e$ .

Изменение отдельных компонентов тензора напряжений в пределах цикла теоретически может происходить по различным зависимостям от времени.

Стремление отразить характеристики циклов для каждого компонента тензора напряжений приводит к чрезмерному усложнению теоретических моделей. Реалистичным подходом к таким ситуациям является введение параметра цикла для характерного инварианта напряженного состояния.

В качестве такого параметра может быть принято отношение минимальной и максимальной за цикл величины первого главного напряжения.

$$R = \frac{\sigma_1^{\min}}{\sigma_1^{\max}}. \quad (9)$$

Скалярная мера повреждаемости  $D$  рассматривается как функционал, зависящий от максимального за цикл значения энергии упругого деформирования  $W_e$ , числа циклов нагружения  $N$ , параметра цикла  $R$ , температуры  $T$ , свойства материала и других аргументов, влияющих на усталость материала:

$$D = D(W_e, N, E_{ijkl}, R, T, \dots). \quad (10)$$

Установление функциональной зависимости усталостной прочности от параметра цикла и температуры является сложной проблемой даже для однородных материалов. При построении моделей усталости металлов наибольшее распространение получил подход, при котором материальные константы определяются из экспериментов при фиксированных значениях параметра цикла и температуры, а эти характеристики не включаются в уравнения усталостной повреждаемости.

В предложенной модели принимается гипотеза о том, что скорость накопления повреждений зависит от энергии деформации  $W_e$ , отношения минимального напряжения к максимальному  $R$  и от текущего уровня повреждения  $D$ , тогда:

$$\frac{dD}{dN} = f(R, D, W_e). \quad (11)$$

Вид функции  $f$ , определяющей скорость накопления повреждений, должен устанавливаться по результатам экспериментов на усталостную прочность. В соответствии с концепцией континуальной механики повреждаемости параметр  $D$  теоретически можно контролировать со временем (числом циклов нагружения) по изменению модуль упругости. Для практического использования теории более предпочтительным является идентификация функциональной зависимости (11) на основе результатов усталостной прочности по  $S - N$  кривым Веллера [8].

Если предположить, что существует степенная зависимость между энергией деформации и скоростью накопления повреждаемости, то кинетическое уравнение для параметра повреждаемости можно представить в виде:

$$\frac{dD}{dN} = m \cdot k(R) \cdot (W_e)_{\max}^n, \quad (12)$$

где  $W_e$  – удельная энергия упругого деформирования и  $k(R)$  – функция кото-

рая, зависит от параметра цикла.

Согласно принципу эквивалентной деформации [8] удельная энергия упругого деформирования может быть выражена через эффективные напряжения  $\tilde{\sigma}_{ij}$  и закон развития повреждаемости представлен в форме:

$$\frac{dD}{dN} = m \cdot k(R) \cdot \left( \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} \right)_{\max}^n. \quad (13)$$

Если удельную энергию выразить через напряжения, то:

$$\frac{dD}{dN} = m \cdot k(R) \cdot \left( \frac{1}{2(1-D)} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{ij} \right)_{\max}^n, \quad (14)$$

где  $C_{ijkl}$  – тензор упругих постоянных неповрежденного композита. Можно также представить закон развития повреждаемости через деформации, тогда этот закон принимает вид:

$$\frac{dD}{dN} = m \cdot k(R) \cdot \left( \frac{1}{2} a_{ijkl} \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{kl}^e (1-D) \right)_{\max}^n, \quad (15)$$

где  $a_{ijkl}$  – тензор упругих постоянных.

Число циклов, за которое повреждаемость накапливается с величины  $D_1$  до значения  $D_2$  определяется интегрированием кинетического уравнения (11):

$$N = \int_{D_1}^{D_2} \frac{dD}{f(R, D, W_e)}. \quad (16)$$

В случае одноосного напряженного состояния при стационарном цикле изменения напряжений зависимость параметра повреждаемости от количества циклов имеет вид:

$$D = 1 - \left( - \frac{(n+1) \cdot m \cdot k(R) \cdot \sigma^{2n}}{2^n \cdot E^n} \cdot N + 1 \right)^{\frac{1}{n+1}}, \quad (17)$$

где  $E$  – модуль упругости соответствующего направления.

Геометрическая трактовка параметра повреждаемости при  $D = 1$  соответствует случаю полного заполнения микротрещинами поперечного сечения материала. Практически материал становится нестабильным и разрушается, когда повреждение достигает некоторого критического значения, меньшего единицы.

В силу значительной нелинейности зависимости параметра повреждаемости от числа циклов, на стадии предшествующей разрушению скорость роста увеличивается и устремляется к бесконечности. Поэтому интервал изменения параметра повреждаемости близкий к единице,  $0,9 < D < 1$  соответствует незначительному числу циклов. Это позволяет определять  $S - N$  зависимость интегрируя соотношение (11) в пределах от 0 до 1

$$\sigma = \left( \frac{2^n \cdot E^n}{(n+1) \cdot m \cdot k(R)} \cdot \frac{1}{N_f} \right)^{\frac{1}{2n}} \quad (18)$$

где  $N_f$  – соответствует числу циклов до разрушения и  $E$  – модуль упругости соответствующего направления.

Базовыми экспериментами для определения характеристик усталости композиционных материалов являются опыты по циклическому нагружению в условиях одноосного напряженного состояния. Из-за существенного разброса экспериментальных данных для построения  $S-N$  кривых необходимо проводить испытания большого количества образцов на различных уровнях напряжения.

Возможности предложенной модели изучены на примере четырехслойного композита со стеклянными волокнами и матрицей из полиэстера [9]. Образцы с различными схемами армирования были тестированы при симметричном цикле растяжения-сжатия вдоль направления  $[0_2]_S$ . Упругие характеристики композитов представлены в табл. 1.

Таблица 1 – Механические свойства композиционного материала [9].

Схема армирования	$E_1$ , (ГПА)	$E_2$ , (ГПА)	$E_3$ , (ГПА)	$G_{12}$ , (ГПА)	$G_{13}$ , (ГПА)	$G_{23}$ , (ГПА)	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$
$[0]_S$	18,04	3,74	3,74	1,57	1,57	1,49	0,34	0,34	0,25
$[-45/45]_S$	5,03	5,03	6,75	4,93	1,53	1,53	0,21	0,15	0,15
$[0/90]_S$	11,04	11,04	6,75	1,57	1,53	1,53	0,12	0,32	0,32

Экспериментальные данные по усталостному разрушению образцов трех видов армирования, приведенные в работах [8, 10], были обработаны по методу наименьших квадратов для определения параметров  $m$  и  $n$  кинетического уравнения (12). Результаты обработки приведены в табл. 2.

Таблица 2 – Параметры кинетического уравнения.

Схема армирования	$m$	$n$
$[0_2]_S$	$1,32 \cdot 10^{-4}$	0,847
$[-45/45]_S$	$1,039 \cdot 10^{-4}$	0,766
$[0/90]_S$	$2,463 \cdot 10^{-3}$	2,166

Теоретические усталостные  $S-N$  диаграммы, соответствующие найденным параметрам кинетического уравнения повреждаемости, приведены на рис. 2. Там же для сравнения показаны точками экспериментальные данные из работы [11].

После определения параметров в предложенной модели, она может быть использована для предсказания усталостной прочности композитов в услови-



ях сложного напряженного состояния. Ниже приводятся результаты такого анализа для однонаправленного композита (схема армирования  $[0_2]_S$ ) в условиях плоского напряженного состояния.

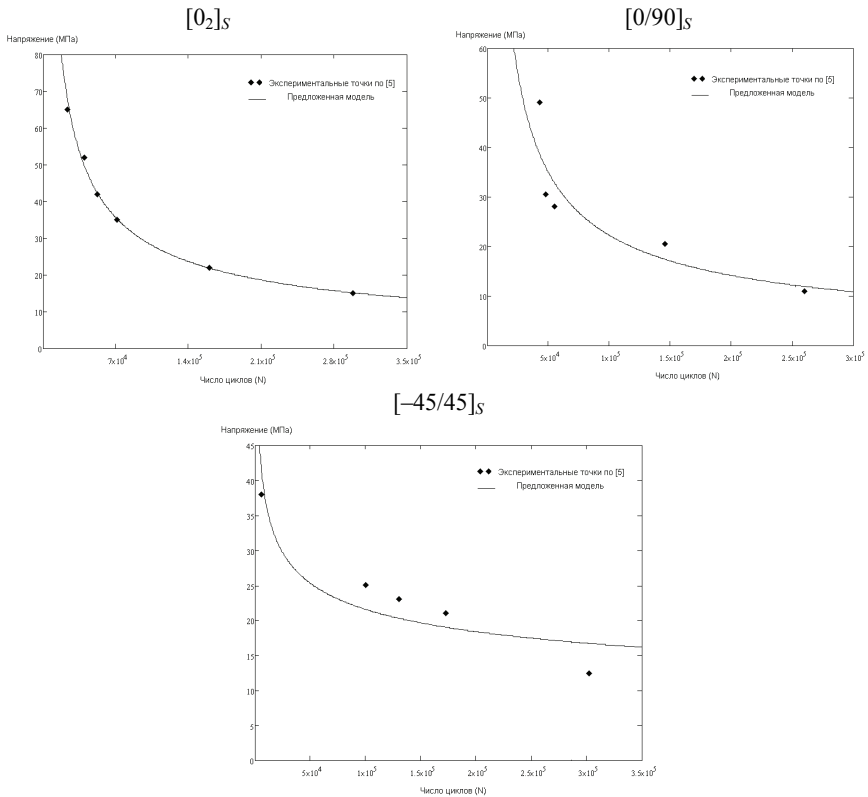


Рисунок 2 – Результаты усталостных испытаний [5] и  $S - N$  кривая предложенной модели

На рис. 3 приведены  $S - N$  диаграммы для симметричного цикла двухосного растяжения  $\sigma_1 = \sigma_2 \neq 0$ ;  $\tau_{12} = 0$  – кривая 1, для растяжения в направлении перпендикулярном волокнам  $\sigma_2 \neq 0$ ;  $\sigma_1 = \tau_{12} = 0$  – кривая 2, и в условиях чистого сдвига  $\tau_{12} \neq 0$ ;  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  – кривая 3.

Процесс развития повреждаемости композита зависит от направления главных осей тензора напряжений в отношении к плоскостям симметрии механических свойств композита [12]. На рис. 4 приведены графики роста параметра повреждаемости в зависимости от числа циклов для различных схем нагружения. Кривые построены интегрированием кинетического уравнения (17) при одинаковом значении амплитудного напряжения  $\sigma = 20$  МПа.

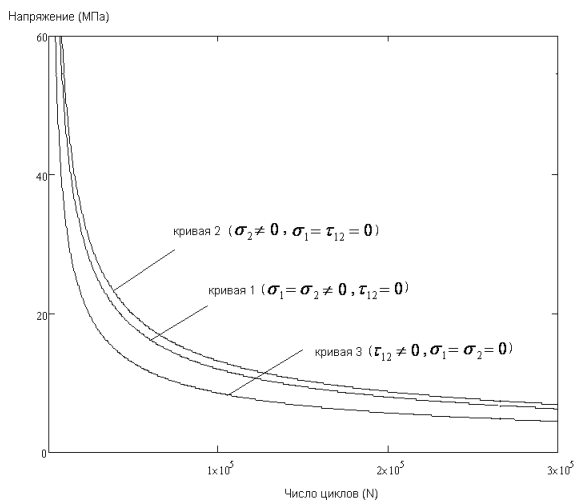


Рисунок 3 –  $S-N$  диаграммы для различных схем нагружения

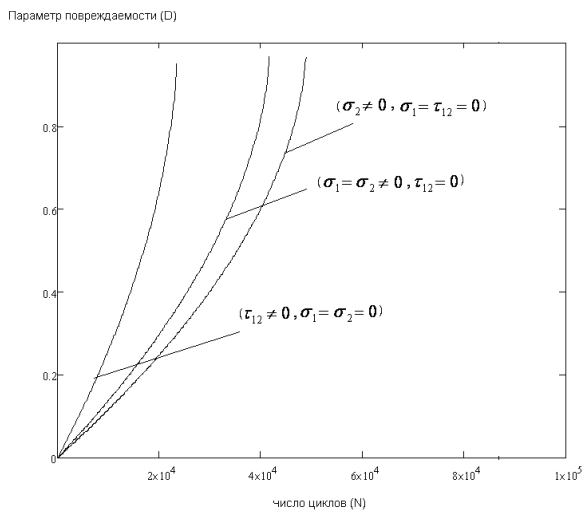


Рисунок 4 – Графики роста параметра повреждаемости для различных схем нагружения

Статистическая обработка результатов эксперимента позволяет получить распределение усталостной долговечности. При фиксированном значении параметра цикла  $k(R) = 1$  для симметричного цикла двухосного растяжения  $\sigma_1 = \sigma_2 \neq 0; \tau_{12} = 0$  качественный характер семейства  $\sigma - N$  кривых показан на рис. 5.

При сложном напряженном состоянии в пространстве напряжений при фиксированном значении параметра цикла  $k(R) = 1$  и фиксированном значении числа цикла  $N = 1,5 \cdot 10^5$  для симметричного цикла нагружения предельная поверхность принимает вид как на рис. 6.

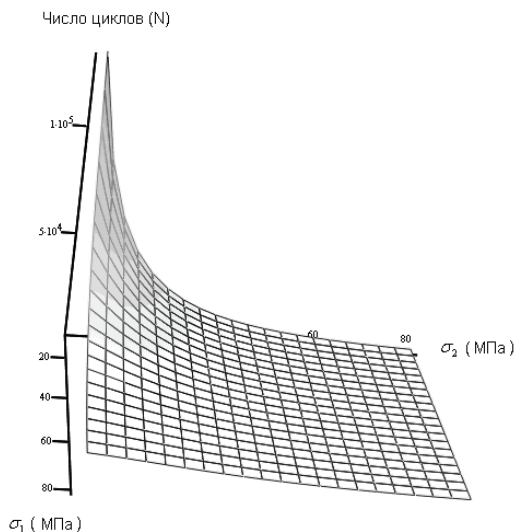


Рисунок 5 – Качественный характер семейства  $\sigma - N$  кривых

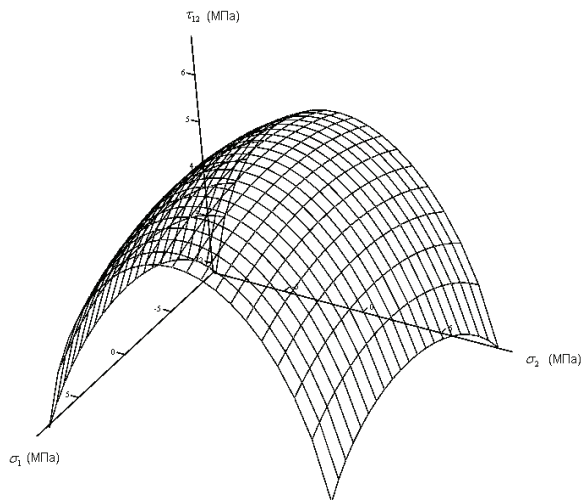


Рисунок 6 – Предельная поверхность при сложном напряженном состоянии

**4. Заключение.** Предложена энергетическая модель для количественной оценки повреждаемости композиционных материалов в условиях плоского напряженного состояния.

Разработанная модель позволяет прогнозировать усталостную прочность с учетом влияния ориентации главных направлений тензора напряжений относительно плоскостей упругой симметрии материала.

В модели используются подходы, основанные на современной континуальной механике повреждаемости, и разработана методика идентификации параметров этой модели на основе минимально необходимого набора экспериментальных данных.

Установлены критериальные характеристики разрушения в композите и их зависимость от параметра вида напряженного состояния. Выполнен проверочный анализ для разных композитов при различных условиях нагружения и проведено сравнение результатов с экспериментальными данными.

**Список литературы:** 1. *Van Paeppegem W., Degrieck J.* Fatigue Damage Modelling of Fiber-reinforced Composite Materials // Review, 2000, Applied Mechanics Reviews. – 54(4). – PP. 279-300. 2. *Harris B.* Fatigue in Composites // CRC Press, Boca Raton. – 2003. – PP. 10-68. 3. *Hashin Z., Rotem A.* A fatigue criterion for fibre reinforced composite materials // *J composite mat.* – 1973. – № 7. – PP. 448-464. 4. *Hashin Z.* Culmulative damage theory for composite materials: residual life and residual strength methods // *Composite Sci Tech.* – 1985. – № 23. – PP. 1-19. 5. *Lemaitre J., ed.,* Handbook of Materials Behavior Models. – San Diego: Academic Press, 2001. 6. *Lemaitre J.* A Course on Damage Mechanics. – Berlin: Springer, 1996. 7. *Kattan P. I., Voyiadjis G. Z.* Damage Mechanics With Finite Elements. – Springer 2001. 8. *Hayder Al-Shukri, Muhannad Khelifa* Fatigue study of E-glass fiber reinforced polyester composite under fully reversed loading and spectrum loading // *Eng. & Technology.* – Vol. 26, № 10. – 2008. 9. *Hader Al-Shukri* Experimental and theoretical investigation into some mechanical properties of E-glass polyester composite under static and dynamic loads // MSc thesis, Engineering electromechanics department, University of technology, 2007. 10. *Rita R., Bose N. R.* Behaviour of E-glass fiber reinforced vinylester resin composites under fatigue condition // *Bull. Mater. Sci.* – April 2001. – Vol. 24, № 2. – PP. 137-142. 11. *Philippidis T. P., Vassilopoulos A. P.* Fatigue design allowables of GRP laminates based on stiffness degradation measurements // *Compos Sci and Tech.* – 2000. – 60(15). – PP. 2819–2828. 12. *Philippidis T. P., Vassilopoulos A. P.* Complex stress state effect on fatigue life of GRP laminates. Part I, experimental // *Int J Fatigue.* – 2002. – № 24. – PP. 813–823.

*Поступила в редколлегию 13.05.2010.*