

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ХАРКІВСЬКИЙ  
ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

**до виконання практичних робіт з навчальної дисципліни «Комп'ютерна  
математика. Частина 1»**

за темою «Математична постановка та розв'язання задач транспортного типу»  
для студентів денної та заочної форми навчання за спеціальністю «Інженерія  
програмного забезпечення»

Затверджено редакційно-  
видавничою радою університету,  
протокол № 2 від 15.02.2024 р.

Харків

НТУ «ХПІ»

2024

Методичні вказівки до виконання практичних робіт з навчальної дисципліни «Комп'ютерна математика. Частина 1» за темою «Математична постановка та розв'язання задач транспортного типу» : для студентів денної та заочної форми навчання за спеціальністю «Інженерія програмного забезпечення» / уклад. Чернова Н. Л. ; Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». – Харків : НТУ «ХП», 2024. – 16 с.

Укладач: Н. Л. Чернова

Рецензент проф. О. А. Сергієнко

Кафедра програмної інженерії та інтелектуальних технологій управління

## Вступ

Подано методичні рекомендації та варіанти завдань за темою «Математична постановка та розв'язання задач транспортного типу». Наведено список рекомендованої літератури.

## Методичні рекомендації

Постановка транспортної задачі полягає у визначенні оптимального плану перевезень деякого однорідного вантажу з  $m$  пунктів відправлення  $A_1, A_2, \dots, A_m$  у  $n$  пунктів призначення  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . Водночас як критерій оптимальності зазвичай береться або мінімальна вартість перевезень усього вантажу, або мінімальний час його доставки. Розглянемо транспортну задачу, за критерій оптимальності якої взята мінімальна вартість перевезень усього вантажу. Позначимо через  $c_{ij}$  тарифи перевезення одиниці вантажу з  $i$ -го пункту відправлення в  $j$ -й пункт призначення, через  $a_i$  – запаси вантажу в  $i$ -му пункті відправлення, через  $b_j$  – потреби у вантажі в  $j$ -му пункті призначення, через  $d_{ij}$  – пропускна спроможність вантажу з  $i$ -го пункту відправлення в  $j$ -й пункт призначення, а через  $x_{ij}$  – кількість одиниць вантажу, перевезеного з  $i$ -го пункту відправлення в  $j$ -й пункт призначення. Тоді математична постановка задачі набуває вигляду:

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, & i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, & j = \overline{1, n} \\ x_{ij} \leq d_{ij} \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

Оскільки змінні  $x_{ij}$  задовольняють систему лінійних рівнянь і умову невід'ємності, то забезпечуються доставка необхідної кількості вантажу в кожний із пунктів призначення, вивіз наявного вантажу з усіх пунктів відправлення, враховуються граничні кількості вантажу, а також виключаються зворотні перевезення.

Достатньою та необхідною умовою для розв'язання транспортної задачі є рівність сумарних запасів пунктів відправлення та сумарних потреб пунктів призначення, тобто:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

У цьому разі така транспортна задача називається закритою. Якщо ж вказана умова не виконується, то модель транспортної задачі називається відкритою та її необхідно привести до виду закритої.

Для відкритої моделі можливі два випадки:

1. Сумарні запаси перевищують сумарні потреби:

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j.$$

Вводиться фіктивний споживач  $B_{n+1}$  (додатковий рядок), потреби якого визначаються як:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j.$$

2. Сумарні потреби перевищують сумарні запаси:

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j.$$

Вводиться фіктивний постачальник  $A_{m+1}$  (додатковий стовбець), запаси якого дорівнюють:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i.$$

Приклад. У трьох постачальників А1, А2 та А3 є запас однорідної сировини у кількості 35, 25 та 45 одиниць відповідно, яку необхідно перевезти на чотири підприємства В1, В2, В3 и В4 у кількості 40, 40, 30 та 15 одиниць відповідно. Відома вартість перевезення одиниці сировини від кожного постачальника кожному підприємству (див. табл. 1). Необхідно скласти оптимальний план

перевезень, що забезпечує мінімальну вартість всієї операції та забезпечує вивезення усіх запасів постачальників та задоволення усіх потреб підприємств.

Таблиця 1

Вартість перевезення

Постачальники	Підприємства			
	B1	B2	B3	B4
A1	1	6	8	5
A2	12	2	3	11
A3	4	7	9	10

### Рішення.

Проаналізуємо умови задачі, що стосуються сукупної кількості запасу сировини у постачальників та сукупної потреби сировини у підприємств. Здійснив відповідні розрахунки, бачимо що сукупна потреба складає 125 одиниць, а сукупний запас – лише 105 одиниць. Отже, маємо відкриту (незбалансовану) задачу. Для того, що задача була закритою (збалансованою), потрібно ввести фіктивного постачальника A4 та приписати йому запас у кількості  $125-105=20$  одиниць сировини. При цьому вважаємо, що вартість перевезення від постачальника A4 усім підприємствам дорівнює нулю.

Сформулюємо математичну постановку задачі.

Визначимо

$x_{ij}$  - кількість сировини, що направляється від і-го постачальника j-му підприємству. Тоді вартість всієї операції можна записати так:

$$Z = 1x_{11} + 6x_{12} + 8x_{13} + 5x_{14} + 12x_{21} + 2x_{22} + 3x_{23} + 11x_{24} + 4x_{31} + 7x_{32} + 9x_{33} + 10x_{34} + 0x_{41} + 0x_{42} + 0x_{43} + 0x_{44} \rightarrow \min$$

Сформулюємо обмеження для запасів сировини у постачальників, які повинні відображати той факт, що у кожного постачальника запас повинен будити вивезений повністю.

Для постачальника A1 кількість сировини, що вивозиться від нього до усіх підприємств, розраховується за формулою  $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}$ . Зважаючи на те, що запас у A1 складає величину 35, обмеження має вид:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 35$$

Аналогічні міркування дозволяють сформулювати обмеження для постачальників А2, А3 та А4:

$$\text{для А2: } x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 25$$

$$\text{для А3: } x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 45$$

$$\text{для А4: } x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 20$$

Сформулюємо обмеження по об'єму поставок, які повинні враховувати той факт, що потреба в сировині повинна бути задоволена в повному обсязі для кожного підприємства:

Для підприємства В1 кількість сировини, що везеться від усіх постачальників, розраховується за допомогою формули  $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}$ . Враховуючи, що потреба підприємства В1 складає величину 40, обмеження має вид:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 40$$

Аналогічно запишемо обмеження для інших підприємств:

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 40$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 30$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 15$$

Враховуючи, що об'єм поставок не повинен бути від'ємним, маємо ще одне обмеження:

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = [1,4], j = [1,4].$$

Знайдемо опорний план за допомогою методу північно-західного кута (див. табл. 2):

Таблиця 2

Опорний план (метод північно-західного кута)

	В1	В2	В3	В4	
А1	35				35
А2	5	20			25
А3		20	25		45
А4			5	15	20
	40	40	30	15	

Знайдемо його вартість – 500.

Знайдемо опорний план задачі за допомогою методу мінімальної вартості (див. табл. 3):

Таблиця 3

Опорний план (метод мінімальної вартості)

	B1	B2	B3	B4	запас
A1	35				35
A2		25			25
A3	5	15	25		45
A4			5	15	20
потреба	40	40	30	15	

Знайдемо його вартість – 435.

З двох отриманих опорних планів обираємо той, що має меншу вартість. Перевіримо цей план на оптимальність за допомогою методу потенціалів.

Для розрахунку значень потенціалів сформуємо відповідну систему рівнянь:

$$U_1 + V_1 = 1$$

$$U_2 + V_2 = 2$$

$$U_3 + V_1 = 4$$

$$U_3 + V_2 = 7$$

$$U_3 + V_3 = 9$$

$$U_4 + V_3 = 0$$

$$U_4 + V_4 = 0$$

Нехай  $U_3 = 0$ . Виходячи з цього, розрахуємо значення інших потенціалів:

$$V_1 = 4, V_2 = 7, V_3 = 9, U_4 = -9, V_4 = 9, U_2 = -5, U_1 = -3.$$

Занесемо значення потенціалів в табл. 31. Окрім потенціалів, запишемо в верхній лівий кут кожної комірки значення вартості перевезень одиниці сировини по відповідному маршруту.

У верхній правий кут кожної комірки запишемо значення псевдовартості перевезень по відповідному маршруту.

Перевіряємо отриманий план на оптимальність та бачимо, що  $c_{14} < \tilde{c}_{14}$  и  $c_{23} < \tilde{c}_{23}$ . Оскільки  $\tilde{c}_{14} - c_{14} = 1$  и  $\tilde{c}_{23} - c_{23} = 1$ , для подальших розрахунків можна обирати любую з зазначених комірок. Обираємо комірку (1;4).

Для обраної комірки формуємо цикл (див. рис. 1)

		$V_1=4$	$V_2=7$	$V_3=9$	$V_4=9$
$U_1=-3$	1 1	6 4	8 6	5 6	
$U_2=-5$	12 -1	2 2	3 4	11 4	
$U_3=0$	4 4	7 7	9 9	10 9	
$U_4=-9$	0 -5	0 -2	0 0	0 0	

Цикл: (1;4) → (1;1) → (2;1) → (2;2) → (3;2) → (3;3) → (4;3) → (4;4) → (1;4)

Рис. 1. Реалізація методу потенціалів для опорного плану 1

В табл.4 представлена інформація щодо перерозподілу поставок по циклу.

Таблиця 4

Цикл для опорного плану 1

цикл	(1;4)	(4;4)	(4;3)	(3;3)	(3;1)	(1;1)
знак	+	-	+	-	+	-
поставка		15	5	25	5	35
нова поставка	15		20	10	20	20

На рис.2 представлено вигляд нового опорного плану. Перевіряємо його за допомогою методу потенціалів:

$$U_1 + V_1 = 1$$

$$U_1 + V_4 = 5$$

$$U_2 + V_2 = 2$$

$$U_3 + V_1 = 4$$

$$U_3 + V_2 = 7$$

$$U_3 + V_3 = 9$$

$$U_4 + V_3 = 0$$

Нехай  $U_3=0$ . Виходячи з цього, розрахуємо значення інших потенціалів:

$$V_1=4, V_2=7, V_3=9, U_4=-9, V_4=8, U_2=-5, U_1=-3.$$



Бачимо, що  $c_{23} < \tilde{c}_{23}$ . Тому формуємо цикл, що представлено на рис. 2

	V1=4	V2=7	V3=9	V4=8
U1=-3	1 1 <b>20</b>	6 4	8 6	5 5 <b>15</b>
U2=-5	12 -1	2 2 <b>25</b>	3 4	11 3
U3=0	4 4 <b>20</b>	7 7 <b>15</b>	9 9 <b>10</b>	10 8
U4=-9	0 -5	0 -2	0 0 <b>20</b>	0 -1

Рис. 2. Реалізація методу потенціалів для опорного плану 2

В табл. 5 представлено інформацію щодо перерозподілу поставок по циклу.

Таблиця 5

Цикл для опорного плану 2

цикл	(2;3)	(3;3)	(3;2)	(2;2)
знак	+	-	+	-
поставка		10	15	25
нова поставка	10		25	15

Новий опорний план представлено на рис. 3. Перевіряємо його на оптимальність:

$$U1+V1=1$$

$$U1+V4=5$$

$$U2+V2=2$$

$$U2+V3=3$$

$$U3+V1=4$$

$$U3+V2=7$$

$$U4+V3=0$$

Нехай  $U3=0$ . Виходячи з цього, розрахуємо значення інших потенціалів:

$V_1=4, V_2=7, V_3=8, U_4=-8, V_4=8, U_2=-5, U_1=-3.$

	$V_1=4$	$V_2=7$	$V_3=8$	$V_4=8$
$U_1=-3$	1 1 <b>20</b>	6 4	8 5	5 5 <b>15</b>
$U_2=-5$	12 -1	2 2 <b>15</b>	3 3 <b>10</b>	11 3
$U_3=0$	4 4 <b>20</b>	7 7 <b>25</b>	9 8	10 8
$U_4=-8$	0 -4	0 -1	0 0 <b>20</b>	0 0

Рис. 3. Реалізація методу потенціалів для опорного плану 3

Бачимо, що план є оптимальним. Таким чином, згідно оптимальному плану, постачальник А1 повинен перевезти 20 одиниць сировини підприємству В1 та 15 одиниць сировини підприємству В4; постачальник А2 повинен перевезти 15 одиниць до В2 та 10 одиниць до В3; постачальник А3 перевозить 20 одиниць сировини підприємству А1 та 25 одиниць – підприємству В2. При цьому сукупна вартість перевезень складає:  $20*1+15*5+15*2+10*3+20*4+25*7=410.$

Фіктивний постачальник А4 перевозить 20 одиниць сировини підприємству А3. Це означає, що саме потребу підприємства А3 не буде задоволено повністю.

Розглянемо рішення цієї ж задачі за допомогою надбудови «Поиск решения» (див. рис. 4).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		підприємства								вартість перевезень			
2	постачальники	B1	B2	B3	B4	вивезено	запас			B1	B2	B3	B4
3	A1					СУММ(B3:E3)	35		A1	1	6	8	5
4	A2					СУММ(B4:E4)	25		A2	12	2	3	11
5	A3					СУММ(B5:E5)	45		A3	4	7	9	10
6	A4					СУММ(B6:E6)	20		A4	100	100	100	100
7	завезено	СУММ(B3:B6)	СУММ(C3:C6)	СУММ(D3:D6)	СУММ(E3:E6)								
8	потреба	40	40	30	15								
9													
10	ціль	СУММПРОИЗВ(B3:E6;J3:M6)											
11													

Рис. 4. Оформлення вихідних даних задачі

Діапазон комірок B1:E6 відведено для значень змінних  $x_{ij}$  (кількість сировини, що везеться від  $i$ -го постачальника  $j$ -му). В комірки G3:G7 заносимо значення запасу сировини у постачальників, в комірки B8:E8 заносимо значення потреби в сировині кожного підприємства. В комірках F3:F7 обчислюємо об'єми сировини, що вивозяться від кожного постачальника, в комірках B7:E7 обчислюємо об'єми сировини, що завозяться до кожного підприємства. В діапазон комірок J3:M6 заносимо значення вартості перевезень по кожному маршруту, при цьому для фіктивного постачальника обираємо таку вартість перевезень, яка була би набагато більшою, ніж усі інші задані в задачі вартості (наприклад, обираємо вартість, що дорівнює 100). В комірці B10 розраховуємо загальну вартість усієї операції за допомогою формули «СУММПРОИЗВ». Для надбудови «Поиск решения» в поле «Установить целевую ячейку» встановлюємо посилання на комірку B10, у якій обчислюється загальна вартість операції, встановлюємо перемикач «Равной» на «минимальное значение». В поле «Изменяя ячейки» встановлюємо посилання на діапазон комірок B3:E6, в поле «Ограничения» встановлюємо обмеження на рівень запасу сировини, що вивозиться від кожного постачальника, та на рівень задоволення потреби кожного підприємства (див. рис. 5).

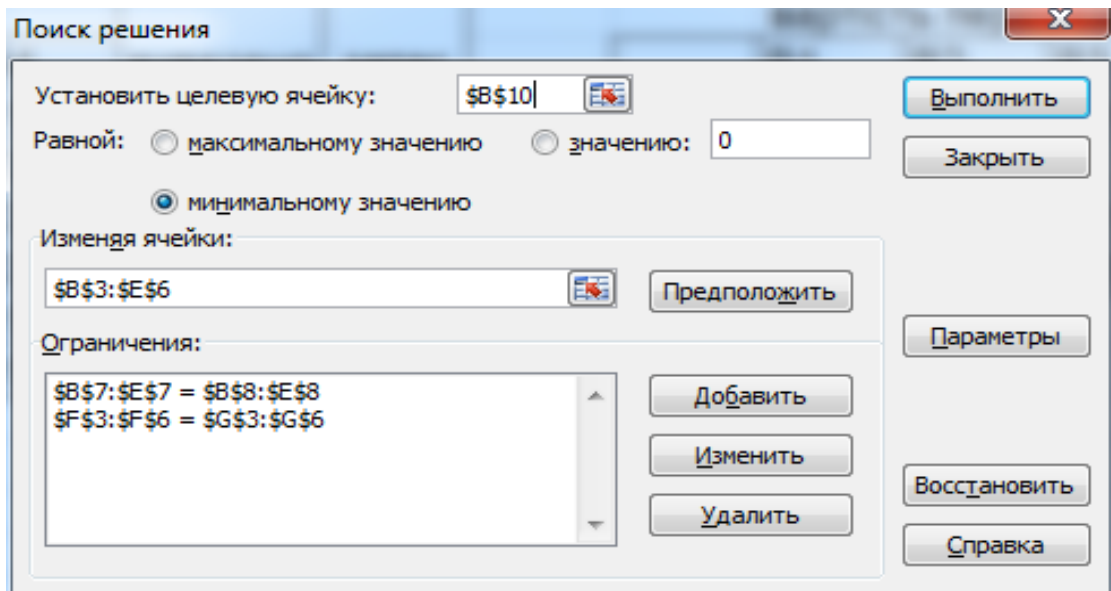


Рис. 5. Вид інструменту «Поиск решения» з урахуванням усіх умов задачі.

Нитиснув кнопку «Выполнить», отримуємо відповідь задачі (див. рис. 6). У комірці B10 обчислено загальну вартість перевезень 2410 з урахуванням фіктивного постачальника A4. Таким чином, реальна вартість становить 410.

	A	B	C	D	E	F	G
1		підприємства					
2	постачальники	B1	B2	B3	B4	вивезено	запас
3	A1	20	0	0	15	35	35
4	A2	0	15	10	0	25	25
5	A3	20	25	0	0	45	45
6	A4	0	0	20	0	20	20
7	завезено	40	40	30	15		
8	потреба	40	40	30	15		
9							
10	ціль	2410					
11							

Рис. 6. Розв'язок задачі.

Бачимо, що отримано відповідь, аналогічну той, що знайдено за допомогою методу потенціалів.

### Завдання для самостійного виконання

У трьох постачальників А1, А2 та А3 є запас однорідної сировини, яку необхідно перевезти на чотири підприємства В1, В2, В3 и В4. Відома вартість перевезення одиниці сировини від кожного постачальника кожному підприємству. Необхідно скласти оптимальний план перевезень, що забезпечує мінімальну вартість всієї операції та забезпечує вивезення усіх запасів постачальників та задоволення усіх потреб підприємств.

#### Задача 1

постачальники	підприємства				Запас
	В1	В2	В3	В4	
А1	1	6	8	5	20
А2	12	2	3	11	40
А3	4	7	9	10	70
Потреба	50	30	25	15	

#### Задача 2

постачальники	підприємства				Запас
	В1	В2	В3	В4	
А1	12	6	9	5	15
А2	1	11	3	2	45
А3	4	7	8	10	80
Потреба	50	30	25	15	

#### Задача 3

постачальники	підприємства				Запас
	В1	В2	В3	В4	
А1	1	6	8	5	20
А2	12	2	3	11	40
А3	4	7	9	10	50
Потреба	50	30	25	15	

#### Задача 4

постачальники	підприємства				Запас
	B1	B2	B3	B4	
A1	1	6	8	5	35
A2	12	2	3	11	25
A3	4	7	9	10	45
Потреба	40	40	30	15	

#### Задача 5

постачальники	підприємства				Запас
	B1	B2	B3	B4	
A1	2	7	9	6	40
A2	13	3	4	12	30
A3	5	8	10	11	50
Потреба	50	50	40	25	

## Рекомендована література

1. Дослідження операцій : конспект лекцій / О. В. Шибаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. – Миколаїв : МНАУ, 2021. – 150 с.
2. Дослідження операцій. Конспект лекцій / Уклад.: О.І. Лисенко, І.В. Алексеєва, – К: НТУУ «КПІ», 2016. – 196 с.
3. Зайченко О.Ю. Дослідження операцій. Збірник задач / О.Ю. Зайченко, Ю. П. Зайченко – К.: Видавничий Дім “Слово”, 2007.- 472 с.
4. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій : підручник / Зайченко Ю. П. – [7-е вид.]. – К. : ВД «Слово», 2006. – 816 с
5. Івченко І. Ю. Математичне програмування : навч. посіб. Київ : Центр учбової літератури, 2007. 232 с.
6. Карагодова О. О., Кігель В. Р., Рожок В. Д. Дослідження операцій : навч. посіб. Київ : Центр учбової літератури, 2007. 256 с.
7. Катренко А. В. Дослідження операцій : підруч. Львів : Магнолія Плюс, 2015. 352 с.
8. Колодінська О. В., Медведєв М. Г. Дослідження операцій : навч. посіб. Київ : Видавництво Європейського університету, 2006. 158 с.
9. Корольов М. Є., Павленко В. І., Савіна О. В., Тимошенко А. Г. Дослідження операцій і методи оптимізації : навч. посіб. Київ : Університет «Україна», 2007. 177 с.
10. Кузьмичов А. І. Оптимізаційні методи і моделі. Моделювання засобами MS Excel : навч. посіб. Київ : Ліра-К, 2015. 215 с.
11. Математичні методи дослідження операцій : підручник / Є. А. Лавров, Л. П. Перхун, В. В. Шендрик та ін. – Суми : Сумський державний університет, 2017. – 212 с.
12. Математичні методи дослідження операцій. Лінійне програмування. Частина 1: навчальний посібник / А. А. Яровий, Л. М. Ваховська, Л. В. Крилик. – Вінниця : ВНТУ, 2020. – 86 с
13. Методи оптимізації та дослідження операцій: навчальний посібник / Укладачі: Я. Б. Сікора, А.Й. Щехорський, Б.Л. Якимчук. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. Івана Франка, 2019. – 148 с.
14. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування : навч. посіб. Київ : КНЕУ, 2016. 452 с
15. Черняк О.І. Дослідження операцій: Навчальний посібник. – Київ: Вид-во ТОВ “Видавничий дім “Професіонал”, 2010.– 350с

Навчальне видання

Методичні вказівки до виконання  
практичних робіт з навчальної дисципліни «Комп'ютерна математика. Частина  
1» за темою «Математична постановка та розв'язання задач транспортного  
типу» для студентів денної та заочної форми навчання за спеціальністю  
«Інженерія програмного забезпечення»

Укладач:  
ЧЕРНОВА Наталя Леонідівна

Відповідальний за випуск доц. Копп А.М.  
Роботу до видання рекомендував проф. Гамаюн І.П.

В авторській редакції

План 2024 р., поз. 159

Підп. до друку Формат 60x84 1/16.  
Папір офсет. Друк ризографічний. Ум. друк. арк. 1,0.  
Обл.вид. арк. Наклад 50 прим. Замовлення №

---

Видавничий центр НТУ «ХП», вул. Кирпичова, 2, м. Харків, 61002 Свідоцтво  
суб'єкта видавничої справи ДК № 5478 від 21.08.2017 р.

---

Електронна версія