

И.В.КОНОНЕНКО, доктор технических наук, **Е.В. ЕМЕЛЬЯНОВА**,
А.И.ГРИЦАЙ

МОДЕЛЬ И МЕТОД МИНИМИЗАЦИИ СРОКОВ ВЫПОЛНЕНИЯ ПРОЕКТА ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ЕГО СТОИМОСТЬ

Постановка проблемы. Основу разработки и управления проектом составляют процессы управления содержанием, сроками и стоимостью, которые в значительной степени определяют качество исполнения проекта [1]. В современных системах управления проектами на стадии планирования эти процессы недостаточно взаимосвязаны и основной упор делается на один из процессов, что негативно влияет на результат проекта.

В настоящее время все большее внимание уделяется усилению взаимосвязи процессов управления проектами, таких как: сроки, стоимость, ресурсы, качество. Известны работы В.И.Воропаева и соавторов [2], в которых предложены подходы к минимизации времени выполнения проекта при ограничениях на ресурсы и к формированию планов минимальной стоимости.

Существует широкий класс задач, в которых стоимость выполнения работ сложным образом зависит от содержания и времени их выполнения. Возможные технологии выполнения работ и их совокупностей могут быть заданы альтернативными вариантами, отображаемыми с помощью сетевых моделей. Для данного класса задач отсутствуют методы решения.

Цель работы. Создание математической модели и метода минимизации сроков выполнения работ по проекту при ограничениях на возможное финансирование на отдельных этапах при заданных альтернативных вариантах фрагментов сети.

Предлагается математическая модель и метод минимизации сроков выполнения проекта при ограничениях на его стоимость. Значение целевой функции, равное $T_{\text{проекта}} = \varphi(x_{jh})$, представляет собой длительность критического пути в сетевой модели, описывающей проект, где операции

интерпретируются как узлы сети, а дуги описывают технологические взаимосвязи между операциями. Для каждого узла будем задавать время выполнения операции, а так же необходимые финансовые ресурсы.

Модель имеет вид:

$$T_{\text{проекта}} = \varphi(x_{jh}) \rightarrow \min_{x_{jh}}, j = 0, 1, \dots, M_h, h = \overline{1, H}; \quad (1)$$

$$S_h = S_{h-1} + K_h - w_{j,h};$$

$$S_h \geq 0, h = \overline{1, H}; \quad (2)$$

$$x_{jh} \in \{0, 1\}, j = 0, 1, \dots, M_h, h = \overline{1, H}; \quad (3)$$

где $T_{\text{проекта}}$ – длительность выполнения всех операций проекта;

M_h – количество вариантов выполнения операций на этапе h , $h = \overline{1, H}$;

h – номер этапа выполнения операций;

H – максимальное количество этапов;

x_{jh} – булева переменная, равная единице, если осуществляется j -й вариант выполнения операций на h -м этапе, и равная нулю в противном случае;

Значение целевой функции $T_{\text{проекта}} = \varphi(x_{jh})$ рассчитывается как длительность критического пути в сетевой модели $G = \{A, Z, \tau, W\}$, где

G – сетевая модель операций проекта;

A – множество узлов сети,

$$A = \{a_{ih^j}\}, i = \overline{1, n_j}, h = \overline{1, H}, j = 0, 1, \dots, M_h,$$

где a_{ih^j} – i -я операция, осуществляемая на h -м этапе в j -м варианте (альтернативе) сетевой модели. Вариант $j = 0$ является сетевой моделью базового варианта осуществления проекта;

n_j – количество операций в j -м варианте сетевой модели.

Z – множество направленных дуг,

$$Z = \{z_{ih^j, kp^f}\}, i, k = \overline{1, n_j}, h, p = \overline{1, H}, j, f = 0, 1, \dots, M_h,$$

где z_{ih^j, kp^f} - дуга, которая выходит из узла i на этапе h альтернативного варианта j и входит в узел k на этапе p альтернативного варианта f ;
 $i \neq k, p \geq h$;

τ – множество сроков выполнения операций в узлах,

$$\tau = \{ \tau_{ih^j} \}, i = \overline{1, n_j}, h = \overline{1, H}, j = 0, 1, \dots, M_h;$$

W – множество стоимостей выполнения операций сети,

$$W = \{ w_{ih^j} \}, i = \overline{1, n_j}, h = \overline{1, H}, j = 0, 1, \dots, M_h,$$

где w_{ih^j} – стоимость выполнения i -й операции на h -м этапе для j -го варианта выполнения операции;

S_0 – денежные средства, выделенные на выполнение проекта перед его началом;

S_h – остаток денежных средств после выполнения работ на h -м этапе.

K_h – объем денежных средств, выделяемых на h -м этапе;

w_{jh} – стоимость выполнения операций j -го варианта сетевой модели на h -м этапе (может складываться из стоимостей нескольких операций).

Ограничение (2) предполагает, что при осуществлении проекта не должно быть финансовых задолженностей.

Предложенная модель является динамической с булевыми переменными с алгоритмической целевой функцией с аналитическими ограничениями.

Для решения задачи (1-3) предложен метод минимизации сроков выполнения проекта при ограничениях на его стоимость, относящийся к группе методов неявного перебора.

Предположим, что альтернативные варианты сетевой модели могут относиться как к одному этапу выполнения работ, так и к нескольким этапам. Опишем подготовку информации для разработанного метода.

1. Описать и представить в виде сетевой модели базовый вариант осуществления проекта. Задать длительности и стоимости операций базовой сети.

2. Выявить и описать альтернативы, их взаимосвязи с базовым вариантом. Определить длительности и стоимости работ для каждой из альтернатив.

3. Провести анализа, цель которого заключается в выявлении альтернатив, которые охватывают несколько этапов. Если некоторая альтернатива охватывает более одного этапа, то эти этапы объединить в один.

4. Вычислить нижние границы длительностей выполнения операций на каждом h -м этапе.

Значение нижней границы для целевой функции – время выполнения проекта, определяется временем выполнения работ критического пути, при условии, что до этапа h включительно, варианты выполнения работ считаются выбранными, а для этапов $h+1, h+2, \dots, H$ выбираются минимально возможные сроки выполнения работ. Для расчета минимальных длительностей работ на этапах $h+1, h+2, \dots, H$ необходимо применение техники введения логических вершин.

Вычисление значений нижней границы предполагает выполнение ряда следующих действий:

4.1 Для каждого из последующих этапов $h+1, h+2, \dots, H$ ввести логические вершины начала и окончания $S(start)$ и $T(target)$.

4.2. Для каждого из этапов $h+1, h+2, \dots, H$ рассчитать по методу критического пути сроки выполнения отдельного этапа, как для базового варианта, так и для всех альтернатив данного этапа.

4.3 Для каждого из этапов $h+1, h+2, \dots, H$ выбрать минимальное время выполнения.

Множество выбранных минимальных времен будет составлять

$$t_{min} = \{ \min G(h) \}_{h=1}^H.$$

5 Вычисление \mathcal{W}_{jh} , $j = 0, 1, \dots, M_h$, $h = \overline{1, H}$.

Входные данные, необходимые для осуществления метода:

G – сетевая модель;

H – максимальное количество этапов;

$\{K_h\}_{h=1}^H$ – множество объемов выделенных средств для каждого из этапов;

$\{M_h\}_{h=1}^H$ – множество максимально возможных вариантов на каждом этапе;

$t_{min} = \{\min G(h)\}_{h=1}^H$ – множество минимальных сроков выполнения этапов проекта, рассчитанных до начала итеративной части метода.

Переменные:

f^* – значение рекорда;

f – текущее значение целевой функции;

h – номер этапа;

S_h – затраты этапа h ;

j_h – номер варианта на этапе h . Значение $j_h=0$ говорит о выборе базового варианта;

T_{np_h} – время выполнения j -го варианта на этапе h ;

T'_{np_h} – нижняя граница для времени выполнения всех последующих этапов после h , которое представляет собой сумму вида:

$$T'_{np_h} = t_{\min_{h+1}} + \dots + t_{\min_H},$$

где времена $t_{\min_{h+1}}, \dots, t_{\min_H}$ рассчитываются способом, описанным ранее.

Результат решения:

W_H – искомое решение, множество вариантов j ;

Рассмотрим предложенный метод минимизации сроков выполнения проекта при ограничениях на его стоимость:

1. Полагаем $f^* := +\infty, f := 0, h := 1; S^* := 0, t_{min} := \{\min G(h)\}_{h=1}^H$.

2. Принимаем $j_h := 0$.

3. Проверяем выполнение ограничений задачи на этапе h :

$$S_h = S_{h-1} + K_h - w_{j,h};$$

$$S_h \geq 0,$$

если ограничение не выполняется, переходим к шагу 7.

4. Вычисляем T_{np_h} . Полагаем $f := T_{np_h}$. Вычисляем

$T'_{np_h} = t_{\min_{h+1}} + \dots + t_{\min_H}$. Если $f + T'_{np_h} \geq f^*$ переходим к шагу 7.

5. При $h < H$ анализируем следующий этап проекта, т.е. $h := h + 1$ и возвращаемся к шагу 2.

6. Величине f^* присваиваем новое значения $f^* := f$ и фиксируем множество $W_H := \{j_h\}_{h=1}^H$. Редуцируем f следующим образом $f := T_{np_{H-1}}$.

7. При $j_h < M_h$ рассматриваем следующий вариант, т.е. $j_h := j_h + 1$ и переходим к шагу 3.

8. При $h > 1$ переходим на предыдущий этап, т.е. $h := h - 1$ и изменяем значение $f := T_{np_{h-1}}$. Вычисляем $j_h := j_h(h)$, и переходим к шагу 7. При $h=1$ и $W_H = \{\emptyset\}$ задача не имеет решения, в противном случае оптимальное решение получено.

Вывод. В работе предложены математическая модель и метод минимизации сроков выполнения работ по проекту при ограничениях на возможное финансирование на отдельных этапах при заданных альтернативных вариантах фрагментов сети.

Список литературы: 1. Guide to the Project Management Body of Knowledge, by Project Management Institute, 2004. 2. <http://sovnet.ru> - 14.12.06 г.

