

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

В. В. Клітної, Ю. Д. Музикін, Д. Ю. Бородин, С. В. Бобрицький

**ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА.  
ОСНОВИ ТЕОРІЇ ТА РОЗРАХУНКІВ**

Навчальний посібник  
для здобувачів вищої освіти  
не машинобудівних спеціальностей  
денної та заочної форм навчання  
технічних ЗВО

Затверджено  
редакційно-видавничою  
радою НТУ «ХПІ»,  
протокол № 3 від 12.10.2023

Харків  
НТУ «ХПІ»  
2024

УДК 531, 539.3/.6, 621.8  
Г14

Рецензенти:

*М. А. Подригало*, д-р техн. наук, проф., Харківський національний автомобі-  
льно-дорожній університет;

*І. В. Левикін*, д-р техн. наук, доц., Харківський національний  
університет радіоелектроніки

Автори:

*В. В. Клітної*, к.т.н., доц.;  
*Ю. Д. Музикін*, к.т.н., доц.;  
*Д. Ю. Бородін*, к.т.н., доц.;  
*С. В. Бобрицький*, к.т.н., доц.

**Клітної В. В.**

Г14 Прикладна механіка. Основи теорії та розрахунків: навчальний посібник /  
В. В. Клітної, Ю. Д. Музикін, Д. Ю. Бородін, С. В. Бобрицький. - Харків:  
НТУ «ХПІ», 2024. - 232 с.

ISBN 978-617-05-0456-2

Навчальний посібник містить короткий виклад необхідних теоретичних положень  
щодо запропонованих тем навчальної програми з прикладної механіки, а також приклади  
рішень завдань. Порядок викладання матеріалу прийнятий таким чином, щоб найбільш чі-  
тко проявилася органічна єдність розділів дисципліни.

Навчальний посібник призначений для студентів денної та заочної форми навчання  
не машинобудівних напрямів підготовки бакалаврів.

Лл. 179. Табл. 21. Бібліогр.: 8 назв.

УДК 531, 539.3/.6, 621.8

ISBN 978-617-05-0456-2

© В. В. Клітної,  
© Ю. Д. Музикін,  
© Д. Ю. Бородин,  
© С. В. Бобрицький, 2024

## ЗМІСТ

<b>ПЕРЕДМОВА</b>	7
<b>ВСТУП</b>	8
<b>1. ОСНОВИ АНАЛІЗУ МЕХАНІЗМІВ</b>	10
1.1. Структурний аналіз механізму	10
1.1.1. Основні поняття аналіз механізму	10
1.1.2. Кінематичний ланцюг. Механізм	11
1.1.3. Схеми плоских механізмів	13
1.1.4. Структурний аналіз плоских механізмів	15
Приклади розрахунків	17
1.2. Кінематичний аналіз механізмів	17
1.2.1. Основні поняття кінематичного аналізу	17
1.2.2. Кінематика матеріальної точки	18
1.2.3. Кінематика абсолютно твердого тіла	23
1.2.4. Кінематичний аналіз плоских механізмів	29
Приклади розрахунків	31
1.3. Кінетостатичний аналіз плоских механізмів	36
1.3.1. Цілі та задачі динамічного аналізу. Основні поняття і закони динаміки	36
1.3.2. Диференціальне рівняння руху матеріальної точки	38
1.3.3. Аксиоми статички і їх висновки	40
1.3.4. Зв'язки. Реакції зв'язків	43
1.4. Кінетика (продовження). Силовий аналіз плоского механізму	46
1.4.1. Перетворення сил і моментів	46
1.4.2. Головний вектор і головний момент сил	52
1.4.3. Сили, що діють на механізм	55
1.4.4. Силовий аналіз плоского механізму	57
Приклади розрахунків	60
<b>2. ОСНОВИ РОЗРАХУНКІВ НА МІЦНІСТЬ</b>	65
2.1. Внутрішні чинники напружено-деформованого стану	65
2.1.1. Основні поняття про опір матеріалів	65
2.1.2. Розрахункова схема. Типові форми елементів конструкцій	66
2.1.3. Класифікація сил, які розглядаються в опорі матеріалів	68
2.1.4. Метод перерізів. Внутрішні силові чинники	69
2.1.5. Напруження. Переміщення і деформації	71
2.2. Розтяг-стиск	74
2.2.1. Внутрішні сили і напруження	74
2.2.2. Закон Гука, коефіцієнт Пуассона	75

2.2.3. Деформація при сумісній дії силового і температурного впливу	77
2.2.4. Напруження в перетинах, розташованих під кутом	78
2.2.5. Запас міцності. Допустимі напруження. Умова міцності і жорсткості	80
Приклади розрахунків	83
2.3. Геометричні характеристики плоских перерізів	84
2.3.1. Поняття про геометричні характеристики перерізів	84
2.3.2. Статичний момент перерізу. Центр тяжіння	85
2.3.3. Статичний момент перерізу при паралельному переносі осей	86
2.3.4. Центр тяжіння складної фігури	87
2.3.5. Моменти інерції плоских перерізів	88
2.3.6. Моменти інерції перерізу при паралельному переносі осей	89
2.3.7. Головні осі. Головні моменти інерції	90
2.3.8. Головні моменти інерції простих фігур	91
2.3.9. Головні моменти інерції складних фігур з віссю симетрії	92
2.3.10. Радіус інерції і момент опору	93
Приклади розрахунків	94
2.4. Згин	95
2.4.1. Поняття про деформацію згину	95
2.4.2. Внутрішні силові чинники при згині	96
2.4.3. Диференціальні залежності при згині	99
2.4.4. Напруження при чистому згині	101
2.4.5. Умова міцності при чистому згині	105
2.4.6. Напруження при поперечному згині	106
Приклади розрахунків	109
2.5. Чистий зсув. Кручення .....	111
2.5.1. Поняття про чистий зсув. Деформації при чистому зсуві	111
2.5.2. Напруження на довільному перерізі під кутом при чистому зсуві	113
2.5.3. Закон Гука при чистому зсуві	114
2.5.4. Практичні розрахунки з'єднань на зсув	115
2.5.5. Кручення бруса круглого поперечного перерізу	117
2.5.6. Умова міцності при крученні	120
Приклади розрахунків	121
2.6. Основи напружено-деформованого стану	123
2.6.1. Компоненти напружень у точці	123
2.6.2. Головні площини і головні напруження	124
2.6.3. Круг напружень Мора	125
2.6.4. Побудова круга Мора. Пряме і зворотнє завдання круга Мора	127

2.6.5. Узагальнений закон Гука	129
2.6.6. Гіпотези міцності	131
2.7. Складний опір. Міцність при змінних напруженнях	135
2.7.1. Неплощинний (косий) згин	135
2.7.2. Сумісна дія згину і кручення	137
2.7.3. Поняття про міцність матеріалу від втоми	138
2.7.4. Основні характеристики циклів	140
2.7.5. Криві втоми. Межа втомної міцності	142
2.7.6. Діаграма граничних амплітуд	144
2.7.7. Вплив концентрації напружень, чистоти обробки поверхні і розмірів деталі на межу витривалості	146
2.7.8. Практичні розрахунки на витривалість	148
<b>3. ОСНОВИ ІНЖЕНЕРНОГО ПРОЕКТУВАННЯ</b>	152
3.1. Основні поняття	152
3.1.1. Складові машин	152
3.1.2. Критерії та особливості розрахунків	153
3.1.3. Матеріали для деталей та їх змащування	154
3.1.4. Відомості про механічні передачі	155
3.1.5. Характеристики механічних передач	157
3.2. Передачі гнучкою ланкою	159
3.2.1. Загальні відомості про пасові передачі	159
3.2.2. Кінематичні та геометричні параметри	166
3.2.3. Сили та напруження в пасі	168
3.2.4. Розрахунки пасових передач	172
3.3. Зубчасті передачі	173
3.3.1. Загальні відомості	173
3.3.2. Основи теорії зубчастого зачеплення	176
3.3.3. Відомості про геометрію циліндричних передач	177
3.3.4. Особливості геометрії циліндричних передач із косими зубцями	181
3.3.5. Відомості про геометрію конічних передач	183
3.3.6. Сили в зачепленні	186
3.3.7. Види відмов та критерії розрахунку	189
3.3.8. Розрахунки зубців на міцність при змінному навантаженні	189
3.3.9. Відомості про матеріали та допустимі напруження	195
3.4. Вали та осі. Підшипники	197
3.4.1. Загальні відомості про вали та осі	197
3.4.2. Розрахунки валу	198
3.4.3. Загальні відомості про підшипники	207

3.4.4. Підшипникові вузли. Способи устанавлення валу	211
3.4.6. Практичний розрахунок (підбір) підшипників	213
3.5. Муфти та з'єднання	216
3.5.1. Загальні відомості про муфти	216
3.5.2. Види муфт	217
3.5.3. Нарізні з'єднання. Різи, нарізні деталі та їх з'єднання	220
3.5.4. Розрахунки одиничного та групи болтових з'єднань при постійному навантаженні	223
3.5.5. Шпонкові, шліцьові, профільні з'єднання	226
Список літератури	231

## ПЕРЕДМОВА

Згідно до навчальної програми дисципліни «Прикладна механіка» для студентів денників та заочників не машинобудівних спеціальностей в Національному технічному університеті «Харківський політехнічний інститут» відведено 32 лекційні години. При такій програмі доцільно мати стислий навчальний посібник, який би висвітлював основний матеріал дисципліни «Прикладна механіка».

Цей навчальний посібник має мету поповнити недолік у стислих методичних матеріалах з прикладної механіки.

Основні питання курсу проілюстровано базовими прикладами. Автори вважають, що необхідно паралельно з вивченням теоретичної частини курсу тренуватися у розв'язанні задач для успішного виконання домашніх розрахунково-графічних робіт. Більш глибоке вивчення дисципліни «Прикладна механіка» можливе на основі відомих підручників [1-3].

Навчальний посібник з дисципліни «Прикладна механіка» відповідає змісту лекцій, які автори читають в НТУ «ХПІ» і віддзеркалює багаторічний досвід кафедри деталей машин та гідропневмосистем [4-8].

Автори вдячні рецензентам рукопису – доктору технічних наук, професору Михайлу Абовичу Подригало і доктору технічних наук, доценту Ігорю Вікторовичу Левикіну.

## ВСТУП

Дисципліна «Прикладна механіка» разом з дисципліною «Теоретична механіка» утворює системну дисципліну «Технічна механіка». На базі теоретичної механіки вивчаються основи механічного руху, прикладна механіка є основою загально технічної підготовки бакалаврів не машинобудівних напрямів і використовує положення теоретичної механіки для досягнення практичних цілей: створення механізмів і розрахунків деталей машин.

Як комплексна дисципліна «Прикладна механіка» включає основні положення дисциплін «Теорія механізмів та машин», «Опор матеріалів», «Деталі машин». Останні три дисципліни викладаються як логічно обумовлені і взаємопов'язані між собою теми єдиної дисципліни. В розділі з теорії механізмів та машин на основі законів теоретичної механіки розглядаються принципи аналізу та проектування механізмів, розділ з опору матеріалів дозволяє встановити умови міцності та жорсткості конструкцій проектування на основі спрощених моделей, а розділ з деталей машин присвячений вивченню принципів розрахунку та конструювання деталей і вузлів загального призначення.

Засвоєння курсу базується на знаннях, вміннях і навичках, які отримані під час вивчення вищої математики, фізики, нарисної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки, теоретичної механіки.

Метою дисципліни «Прикладна механіка» є забезпечення бази інженерної підготовки, розвиток інженерного мислення, набуття знань для засвоєння спеціальних дисциплін.

За результатами вивчення дисципліни «Прикладна механіка» студенти повинні **знати** основні види механізмів, методи розрахунку їх кінематичних та динамічних характеристик, методи розрахунків на міцність та жорсткість типових деталей конструкцій; **вміти** застосовувати методи аналізу та синтезу виконавчих механізмів, оцінювати працездатність і конструювати деталі та вузли; **володіти** методами теоретичного та експериментального дослідження в механіці, навичками роботи із сучасною обчислювальною технікою.

Викладання дисципліни «Прикладна механіка» в навчальному посібнику подано у трьох розділах:

- основи аналізу механізмів;
- основи розрахунків на міцність;
- основи інженерного проектування.

У першому розділі викладено: структуру, кінематику та кінетику механізмів, а також методи їх дослідження.

У другому розділі розглянуто: основні поняття опору матеріалів, прості види деформації, геометричні характеристики плоских перерізів, основи напружено-деформованого стану та складного опору.

У третьому розділі подано: короткі відомості про деталі та вузи машин загального призначення, механічні передачі, вали, підшипники, муфти.

Курс «Прикладна механіка» завершує цикл загально-технічних дисциплін і дозволяє розпочати вивчення спеціальних курсів на базі засвоєних підходів до проектування деталей загальномашинобудівного призначення.

# 1. ОСНОВИ АНАЛІЗУ МЕХАНІЗМІВ

## 1.1. Структурний аналіз механізмів

### 1.1.1. Основні поняття

Будь-який механізм складається з рухомих і нерухомих елементів, які в теоретичній механіці мають назву тіло. Рухомі елементи механізму в прикладній механіці називають ланками. Ланка може бути твердою (кривошип, зубчасте колесо), гнучкою (пас, ланцюг, трос) рідкою (мастило), газоподібною (повітря).

Сполучення двох рухомих ланок називається кінематичною парою. Зона контакту ланок називається елементом кінематичної пари, яким може виступати поверхня, лінія або точка. Кінематичні пари, які сполучаються по поверхні, називаються нижчими кінематичними парами (рис. 1.1, *а, б*), а ті, що сполучаються по лінії (рис. 1.1, *в*) або точці (рис. 1.1, *г*) – вищими.

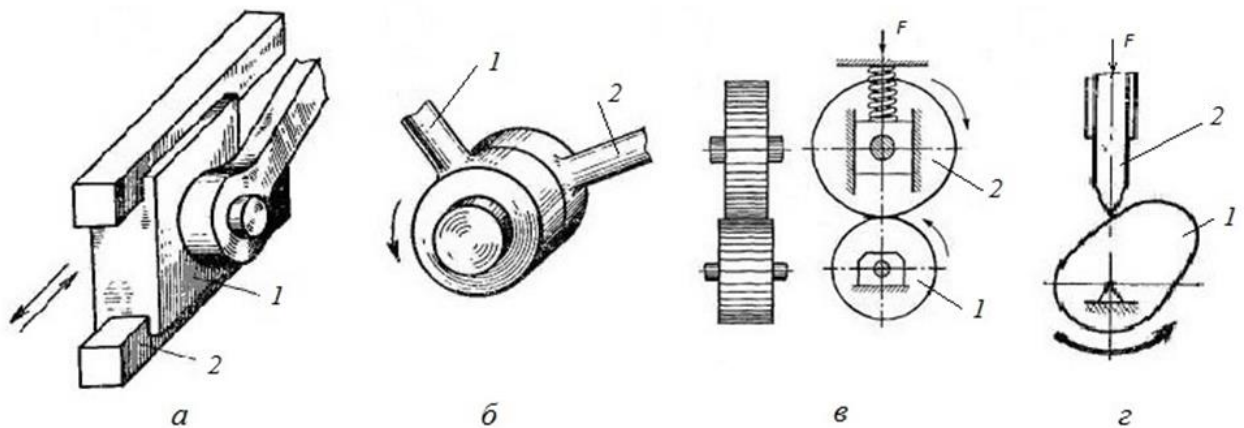


Рисунок 1.1 – Приклади нижчих (*а, б*) і вищих кінематичних пар (*в, г*):

*а* – повзун-напрямна; *б* – циліндричний шарнір;

*в* – фрикційна передача; *г* – штовхач-кулачок. Позиція 1 – вхідні (ведучі), позиція 2 – ведені ланки.

Нижчі кінематичні пари передають великі навантаження при меншому зносі. Вищі – відтворюють складні відносні рухи і забезпечують високий ККД. Замикання в кінематичних парах на рис. 1.1, *а, б* називають геометричним (обумовлене геометрією ланок), на рис. 1.1, *в, г* – силове (обумовлене силою).

### 1.1.2. Кінематичний ланцюг. Механізм

Сукупність ланок і кінематичних пар утворює кінематичний ланцюг, який, залежно від будови, може бути замкнутим чи розімкненим, простим чи складним.

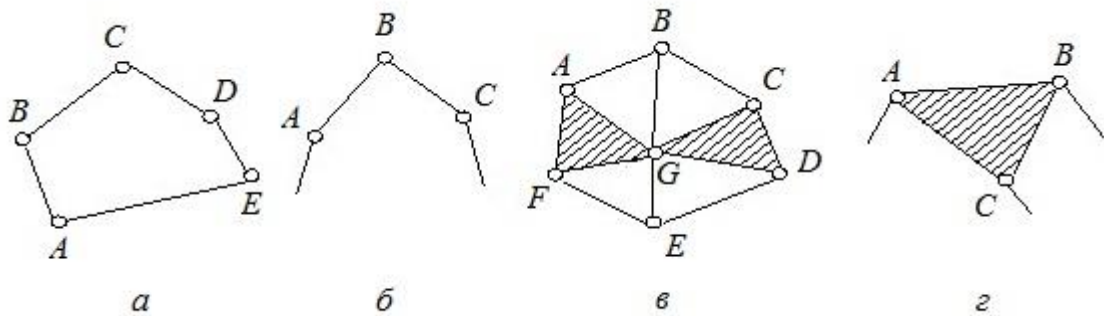


Рисунок 1.2 – Схематичне подання кінематичних ланцюгів

У замкнутому кінематичному ланцюзі (рис. 1.2, *a*, *v*) кожна ланка входить щонайменше в дві кінематичні пари, а в розімкненому – (рис. 1.2, *б*, *z*) є ланки, що входять лише в одну кінематичну пару.

Простим (рис. 1.2, *a*, *б*) називають кінематичний ланцюг, у якого кожна ланка входить у з'єднання з іншими ланками за допомогою однієї або двох кінематичних пар. Якщо кінематичних пар, утворених однією ланкою, більше двох – кінематичний ланцюг називають складним (рис. 1.2, *v*, *z*).

Кінематичні ланцюги бувають плоскими або просторовими. У плоских кінематичних ланцюгах усі ланки лежать і рухаються в одній або у паралельних площинах і мають три ступені свободи (рис. 1.3, *a*); у просторових – ланки лежать і рухаються у пересічних площинах і мають шість ступенів свободи (рис. 1.3, *б*).

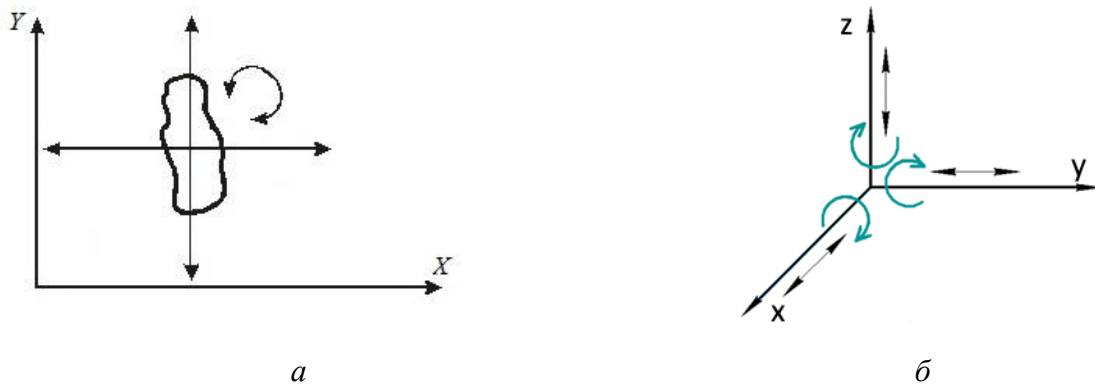


Рисунок 1.3 – Ступені свободи ланки

Залежно від розташування ланок в ланцюзі їх поділяють на вхідні, проміжні, вихідні. Вхідній ланці передається рух безпосередньо від двигуна; вихідною ланкою здійснюється рух, для виконання якого призначений механізм. Вхідну ланку ще називають ведучою (на рис. 1.1 позначені позицією 1), решта – ведені (на рис. 1.1 позначені позицією 2).

Кінематичні пари обмежують рухливість ланок. Ці обмеження називаються зв'язками. У просторі кінематична пара не може накладати більше 5-ти обмежень, оскільки інакше ланки стануть нерухомими одна відносно одної і виродяться в одну ланку. На площині кількість зв'язків не може перевищувати 2-х.

Кількість зв'язків, що накладаються кінематичною парою, визначає її клас. Кінематичні пари класифікують за класами:

- 5 клас – 1-но рухливі пари (зворотно-поступальна (див. рис. 1.1, а), обертова (див. рис. 1.1, б));
- 4 клас – 2-х рухливі (див. рис. 1.1, в, рис. 1.1, г);
- 3 клас – 3-х рухливі (площина лежить на площині);
- 2 клас – 4-х рухливі (циліндр лежить на площині);
- 1 клас – 5-ти рухливі (куля – на площині).

Кінематичний ланцюг, одна з ланок якого нерухома, називають механізмом. Нерухома ланка називається стояком. В цьому розділі розглядаються механізми тільки з твердими ланками.

Механізм, що призначений для здійснення корисної роботи або перетворення енергії та інформації для облегшення праці людини, називається машиною.

### 1.1.3. Схеми плоских механізмів

Найбільш поширеними плоскими механізмами є кривошипно-повзунний, кривошипно-балансирний, кривошипно-кулісний, кулачковий (рис. 1.5 - 1.8).

Залежно від характеру руху відносно нерухомої ланки (стояка) інші ланки мають певні назви:

- кривошип – ланка ричажного механізму, що здійснює повний оборот біля осі стояка;
- шатун – ланка ричажного механізму, що здійснює площинно-паралельний рух;
- повзун – ланка ричажного механізму, що здійснює поступальний рух;
- коромисло – ланка ричажного механізму, що здійснює не повний оборот біля осі стойки;
- куліса – рухома ланка ричажного механізму, що є направляючою для повзуна;
- кулачок – ланка зі змінною кривиною профілю, що визначає рух веденої ланки (штовхача).

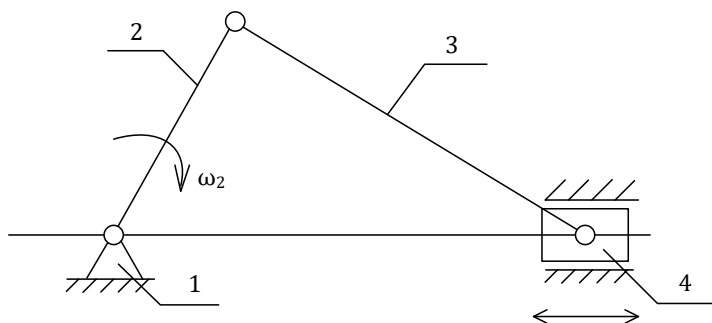


Рисунок 1.5 – Кривошипно-повзунний механізм:  
1 – стійка; 2 – кривошип; 3 – шатун; 4 – повзун.

Механізм призначений для перетворення обертального руху кривошипа 2 на зворотно-поступальний рух повзуна 4.

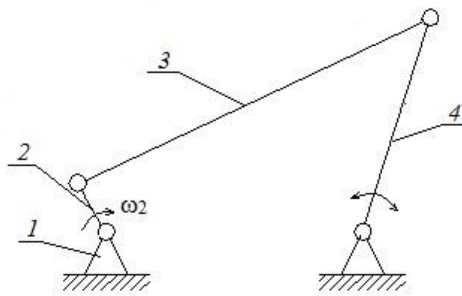


Рисунок 1.6 – Кривошипно-балансирний механізм:  
1 – стійка; 2 – кривошип; 3 – шатун; 4 – балансир.

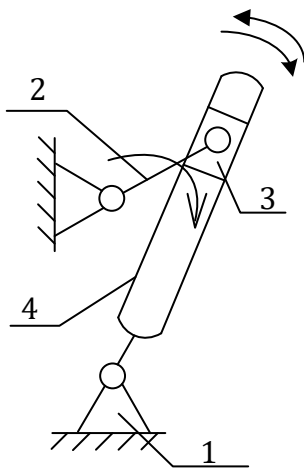


Рисунок 1.7 – Кривошипно-кулісний механізм:  
1 – стійка; 2 – кривошип; 3 – кулісний камінь;  
4 – куліса.

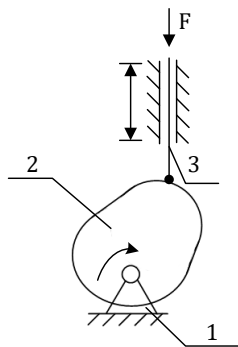


Рисунок 1.8 – Кулачковий механізм:  
1 – стійка; 2 – кулачок; 3 – штовхач.

Механізм призначений для перетворення обертального руху кривошипа 2 на рух хитного балансира 4.

Механізм призначений для перетворення обертального руху кривошипа 2 на хитний рух куліси 4 при  $AB < AC$  і на обертальний рух куліси 4 при  $AB > AC$ .

Механізм призначений для перетворення обертального руху кулачка 2 на зворотно-поступальний рух штовхача 3.

### 1.1.4. Структурний аналіз плоских механізмів

Спрощений структурний аналіз це дослідження структури механізмів, що включає:

- визначення приналежності сукупності ланок і кінематичних пар до поняття механізм, тобто визначення числа ланок та класа кінематичних пар (див. п. 1.1.2);
- визначення ступеня рухливості механізму.

Ступінь рухливості механізму – кількість незалежних координат, які мають бути задані, щоб положення механізму було визначене однозначно. Ступінь рухливості механізму визначає кількість незалежних джерел енергії (двигунів) для його функціонування.

Нехай механізм має  $n$ -ланок, тоді кількість рухливих ланок дорівнює  $n-1$ . Якщо кожна ланка на площині має 3 ступені свободи, то всі рухливі ланки мають  $3(n-1)$  ступенів свободи. Кожна кінематична пара накладає зв'язки (обмежує ступені свободи ланок). Плоский механізм може мати у своєму складі тільки кінематичні пари 5-го класу з  $P_H$  зв'язками та 4-го класу з  $P_B$  зв'язками. Перші накладають два зв'язки, другі – один зв'язок. Тоді для визначення ступеня рухливості  $W$  кінематичного ланцюга необхідно із загального числа ступенів свободи всіх її рухливих ланок відняти число зв'язків, накладених на відносний рух ланок кінематичними парами, які пов'язують ланки. Отже формула П. Л. Чебишева для плоского механізму має вид:

$$W = 3(n - 1) - 2P_H - P_B \quad (1.1)$$

Аналогічно визначають ступінь рухливості просторового механізму:

$$W = 6(n - 1) - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - 1P_1 \quad (1.2)$$

де  $P_5, P_4, P_3, P_2, P_1$  – кількість кінематичних пар відповідного класу; 5, 4, 3, 2, 1 – кількість зв'язків, що накладаються кінематичними парами.

Якщо ступінь рухливості механізму  $W = 1$ , то достатньо задати положення однієї ланки, щоб визначити положення всіх інших ланок. Якщо ступінь рухливості механізму  $W = 0$  (рис. 1.9, *a*), то такий кінематичний ланцюг називається фермою. Якщо ступінь рухливості  $W = 2$  (рис. 1.9, *б*), то необхідно задати рух двом ланкам механізму, щоб положення інших ланок механізму було визначене однозначно.

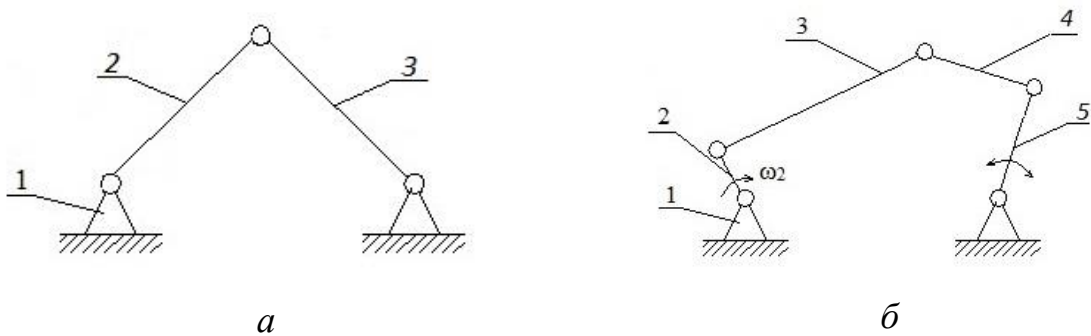


Рисунок 1.9 – Варіанти схем ступінь рухливості яких не дорівнює 1-ці ( $W \neq 1$ )

Ланка, яка може бути вилучена з механізму без порушення його роботи, називається зайвою.

### Контрольні запитання

1. Дайте визначення ланці та кінематичній парі.
2. Дайте визначення вищих і нижчих кінематичних пар. Наведіть приклади.
3. Сформулюйте переваги і недоліки вищих і нижчих кінематичних пар.
4. Наведіть приклади відкритих і замкнутих кінематичних ланцюгів.
5. Дайте визначення механізму та машини.
6. Наведіть приклад плоского механізму, покажіть на ньому рух ланок.
7. Дайте визначення рухомості механізму.

8. За якою формулою визначається рухомість плоских механізмів?
9. Структурний аналіз плоских механізмів.

## Приклади розрахунків

**Приклад 1.** Визначимо ступінь рухливості розглянутого плоского механізму, показаного на рис. 1.5. (кривошипно-повзунний механізм) Плоский механізм має чотири ланки, тобто  $n = 4$ ; чотири кінематичні пари 5-го класу, тобто  $P_H = 4$ ; не має кінематичних пар 4-го класу  $P_B = 0$ ; отже ступінь рухливості механізму  $W = 3(4 - 1) - 2 \cdot 4 = 1$ . Тобто для механізму достатньо задати тільки кут повертання кривошипа.

## 1.2. Кінематичний аналіз механізмів

### 1.2.1. Основні поняття

Кінематика – розділ механіки, в якому вивчається рух матеріальних тіл незалежно від маси і сил, що викликають цей рух.

При кінематичному дослідженні мають бути визначені:

- закони руху тіла;
- швидкість руху тіла;
- прискорення руху тіла.

Закон руху тіла встановлює функціональну залежність, що дозволяє встановити положення тіла в будь-який момент часу.

Швидкість руху тіла дозволяє встановити бистроту зміни його положення з часом.

Прискорення руху тіла дозволяє встановити бистроту зміни його швидкості з часом.

При вивченні законів механічного руху використовуються дві моделі реальних тіл: матеріальна точка і абсолютно тверде тіло:

- матеріальна точка – геометрична точка, що не має розміру, але має масу;
- абсолютно тверде тіло – тіло, яке не змінює розмірів в процесі руху (тіло, що не деформується).

### 1.2.2. Кінематика матеріальної точки

Рух матеріальної точки може бути поданий трьома способами:

- векторним;
- координатним;
- природним.

**Векторний спосіб.** Задання руху, положення матеріальної точки, визначається її радіус-вектором  $\vec{r}(t)$ , проведеним з початкової точки  $O$  (рис. 1.10). Кінці радіус-вектору описують криву, яка називається годографом радіус-вектора, і яка відповідає траєкторії руху точки.

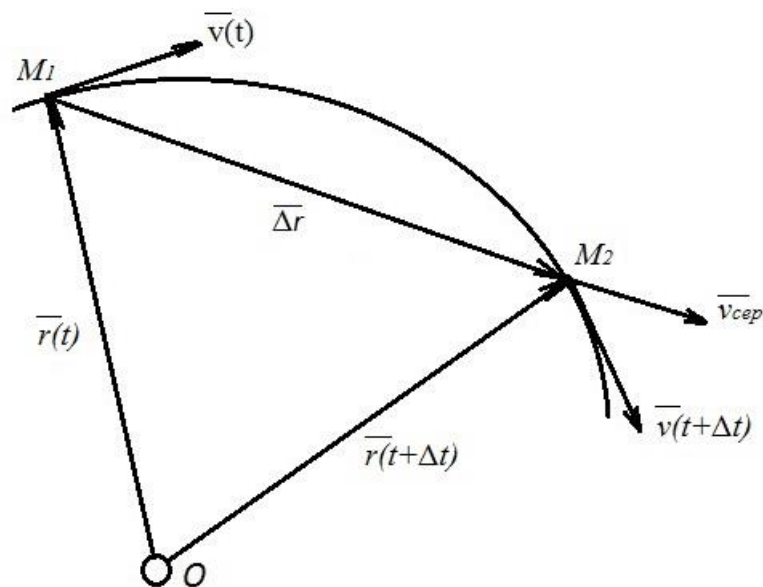


Рисунок 1.10 – Векторний спосіб задання руху

Вираз  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  – закон руху матеріальної точки у векторній формі. Функцію  $\vec{r}(t)$  вважають однозначною, безперервною і такою, що двічі диференціюється за часом.

Нехай точка знаходилася у положенні  $M_1$  у момент часу  $t$  і  $M_2$  для часу  $t + \Delta t$  (рис. 1.10), тоді  $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ . Відношення зміни радіус-вектора  $\Delta \vec{r}$  до проміжку часу  $\Delta t$  називається середньою швидкістю  $\overrightarrow{V}_{\text{сеп}}$ .

$$\overrightarrow{V}_{\text{сеп}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (1.3)$$

Миттєва швидкість матеріальної точки визначається при  $\Delta t \rightarrow 0$  виразом:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \overrightarrow{V}_{\text{сеп}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.4)$$

Таким чином, швидкість матеріальної точки може бути визначена як перша похідна радіус-вектора за часом. Вектор швидкості спрямований по дотичній до траєкторії руху матеріальної точки. Одиниця виміру швидкості – м/с.

Відношення зміни швидкості  $\Delta \vec{V} = \vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t)$  до приросту часу  $\Delta t$  називається середнім прискоренням

$$\overrightarrow{a}_{\text{сеп}} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}. \quad (1.5)$$

Спрямовуючи до нуля проміжок часу, на якому обчислюється прискорення, отримаємо значення миттєвого прискорення:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \overrightarrow{a}_{\text{сеп}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (1.6)$$

Таким чином, прискорення матеріальної точки – векторна фізична величина, що дорівнює другій похідній від радіус-вектора за часом і відповідно першій похідній від миттєвої швидкості за часом. Прискорення матеріальної точки характеризує бистроту зміни швидкості. Одиниця виміру прискорення – м/с<sup>2</sup>.

**Координатний спосіб.** Положення матеріальної точки задається її координатами. У нерухомій декартовій системі координат (рис. 1.11) рівняння руху матеріальної точки можуть бути наведені у вигляді:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ z = z(t). \end{cases} \quad (1.7)$$

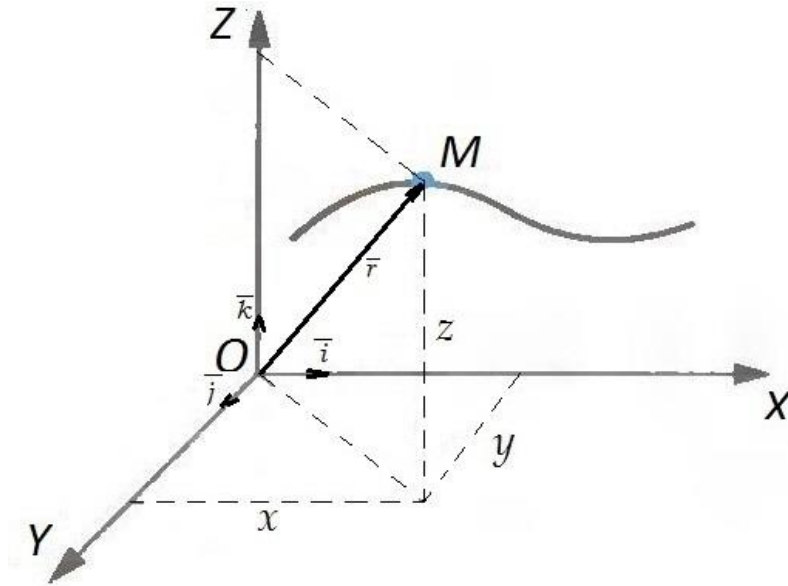


Рисунок 1.11 – Координатний спосіб задання руху

Як і функцію  $\vec{r}(t)$ , функції  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  вважають однозначними, безперервними і такими, що мають дві безперервні похідні за часом.

Зв'язок між радіус-вектором  $\vec{r}(t)$  і декартовими координатами точки має вираз

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}, \quad (1.8)$$

де  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  – орти (одичні вектори) осей координат.

За аналогією до векторного способу швидкість має вираз

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} + \dot{z} \cdot \vec{k} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}, \quad (1.9)$$

де  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  – проекції швидкості  $\vec{V}$  на осі OX, OY, OZ.

Повна швидкість визначається як

$$V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad (1.10)$$

а її напрямок задається виразами

$$\cos(x^{\wedge}\vec{V}) = \frac{v_x}{V}; \quad \cos(y^{\wedge}\vec{V}) = \frac{v_y}{V}; \quad \cos(z^{\wedge}\vec{V}) = \frac{v_z}{V}. \quad (1.11)$$

Аналогічно для прискорення отримуємо:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} + \dot{z} \cdot \vec{k}) = \ddot{x} \cdot \vec{i} + \ddot{y} \cdot \vec{j} + \ddot{z} \cdot \vec{k} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}, \quad (1.12)$$

де  $a_x, a_y, a_z$  – проєкції прискорення  $\vec{a}$  на осі OX, OY, OZ.

Повна величина і напрямок прискорення визначаються виразами:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}; \quad (1.13)$$

$$\cos(x^{\wedge}\vec{a}) = \frac{a_x}{a}; \quad \cos(y^{\wedge}\vec{a}) = \frac{a_y}{a}; \quad \cos(z^{\wedge}\vec{a}) = \frac{a_z}{a}. \quad (1.14)$$

**Природний спосіб.** Для задання руху матеріальної точки повинно бути відомо (рис. 1.12):

- траєкторію руху;
- початкове положення на траєкторії (точка O);
- напрямок руху по траєкторії (+ ; -);
- закон руху по траєкторії  $S = S(t)$ .

При цьому  $S(t)$  – функція, що двічі безперервно диференціюється.

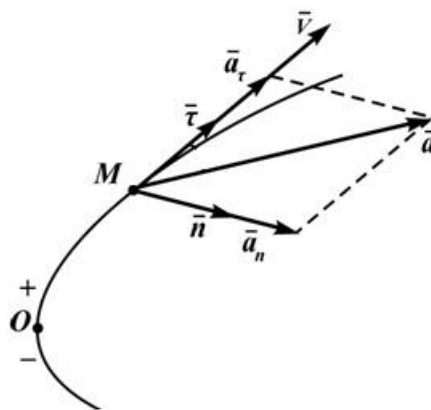


Рисунок 1.12 – Природний спосіб задання руху

Для визначення швидкості і прискорення точки M при природному способі задання руху введемо у точці M одиничний вектор  $\vec{\tau}$ , що спрямований

по дотичній до траєкторії, і одиничний вектор  $\vec{n}$ , спрямований по нормалі до траєкторії до центра кривизни. За аналогією до векторного способу

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}(S(t))}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = \vec{\tau} \cdot V_{\tau} \quad (1.15)$$

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dS} \right| = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta S} = 1; \quad \frac{d\vec{r}}{dS} = \vec{\tau}; \quad \frac{dS}{dt} = V_{\tau},$$

де  $V_{\tau}$  – проекція вектору швидкості на дотичну вісь. Величина  $V_{\tau}$  додатна, якщо точка рухається у бік збільшення дугової координати і від’ємна, якщо інакше. Згідно з (1.15) швидкість завжди спрямована по дотичній до траєкторії.

Прискорення у точці М:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\tau} \cdot V_{\tau}) = \frac{d\vec{\tau}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} \cdot V_{\tau} + \frac{dV_{\tau}}{dt} \cdot \vec{\tau},$$

де  $\frac{d\vec{\tau}}{dS} = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{n}$  – може бути отримано із геометричних співвідношень лінійних і кутових параметрів;  $\rho$  – радіус кривизни траєкторії у цій точці.

Підставляючи отримані величини у початкову рівність, отримаємо

$$\vec{a} = \frac{V_{\tau}^2}{\rho} \cdot \vec{n} + \frac{dV_{\tau}}{dt} \cdot \vec{\tau} = \vec{a}_n + \vec{a}_{\tau}, \quad (1.16)$$

де  $\vec{a}_n = \frac{V_{\tau}^2}{\rho} \cdot \vec{n}$  – нормальне прискорення, що характеризує зміну швидкості за напрямком і спрямоване до центра кривизни;  $\vec{a}_{\tau} = \frac{dV_{\tau}}{dt} \cdot \vec{\tau}$  – дотичне (тангенціальне) прискорення, що характеризує зміну швидкості за величиною і спрямоване по дотичній до траєкторії руху.

З виразу (1.16) постає, що повне прискорення у природній формі може бути подано як векторна сума нормального і тангенціального прискорень –  $a = \sqrt{a_n^2 + a_{\tau}^2}$  і завжди лежить у дотичній площині (див. рис. 1.12).

Якщо  $\vec{a}_n = 0$  – рух точки прямолінійний ( $\rho \rightarrow \infty$ );  $\vec{a}_{\tau} = 0$  – швидкість руху по траєкторії постійна;  $\vec{a}_{\tau} > 0$  – швидкість і прискорення спрямовані в

один бік (прискорений рух);  $\overline{a_\tau} < 0$  – швидкість і прискорення спрямовані у різні боки (сповільнений рух) (див. рис. 1.13).

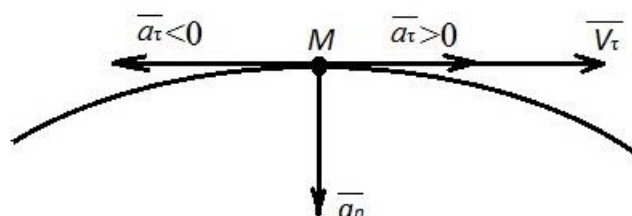


Рисунок 1.13 – Прискорений і сповільнений рух точки

### 1.2.3. Кінематика абсолютно твердого тіла

Найбільш поширеними видами руху абсолютно твердого тіла є: поступальний, обертальний, складний.

**Поступальний рух.** При цьому русі будь-яка пряма в тілі у процесі руху тіла залишається паралельною сама собі (рис. 1.14).

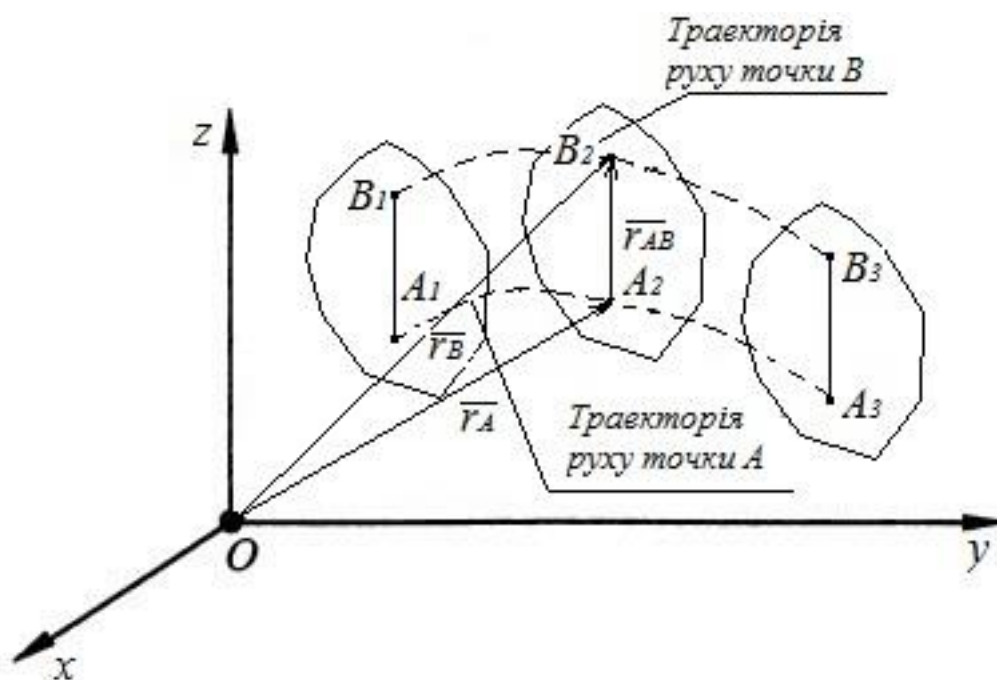


Рисунок 1.14 – Схема поступального руху твердого тіла

Відрізок  $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3$ ;  $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$ . Траєкторія руху точки  $A$  дорівнює і паралельна траєкторії руху точки  $B$ . Виходячи з визначення, закон руху твердого тіла може бути заданий у векторному вигляді:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}. \quad (1.17)$$

Для швидкості і прискорення довільної точки отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_B}{dt} &= \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + 0 & \Rightarrow \vec{V}_B = \vec{V}_A; \\ \frac{d\vec{V}_B}{dt} &= \frac{d\vec{V}_A}{dt} & \Rightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_A. \end{aligned} \quad (1.18)$$

З отриманих виразів постає, що при поступальному русі твердого тіла кінематика його руху подібна кінематиці руху будь-якої точки цього тіла.

**Обертальний рух.** При цьому русі одна пряма, яку називають віссю обертання тіла, залишається нерухомою, а всі інші точки тіла рухаються по колах, що лежать в площинах, перпендикулярних до осі обертання (рис. 1.15).

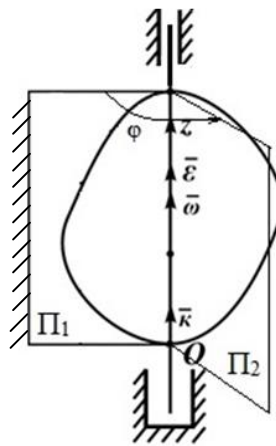


Рисунок 1.15 – Схема обертального руху твердого тіла

Двогранний кут  $\varphi$ , утворений нерухомою площиною  $\Pi_1$  і рухомою площиною  $\Pi_2$ , жорстко пов'язаною з тілом, повністю визначає положення обертання тіла. Зміна цього кута з часом і є закон обертального руху :

$$\varphi = \varphi(t). \quad (1.19)$$

Кут  $\varphi$  вважається позитивним, якщо дивлячись з вершини осі, обертання відбувається проти ходу годинникової стрілки. Кут вимірюється у радіанах.

Швидкість зміни кута  $\varphi$  – це кутова швидкість. Приймавши  $\vec{k}$  як одиничний орт додатного напрямку осі, отримуємо:

$$\vec{\omega} = \vec{k} \cdot \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.20)$$

Вектор кутової швидкості завжди спрямований уздовж осі. При позитивному значенні кутової швидкості напрямки  $\vec{\omega}$  і  $\vec{k}$  співпадають, при від'ємному – протилежні.

Зміна кутової швидкості характеризується кутовим прискоренням:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (1.21)$$

Вектор кутового прискорення  $\vec{\varepsilon}$  так само спрямований по осі обертання. При прискореному обертанні напрямки  $\vec{\varepsilon}$  і  $\vec{\omega}$  співпадають, при уповільненому – протилежні.

При обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі кожна точка тіла рухається по колу. Радіус кола  $\rho$  дорівнює відстані від точки до осі обертання (рис. 1.16).

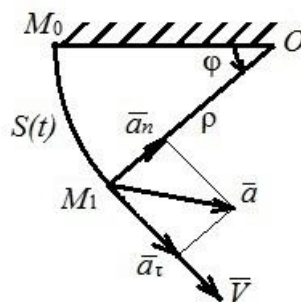


Рисунок 1.16 – Рух точки тіла, що обертається

Оскільки траєкторія руху точки відома – коло; початок відліку (точка  $M_0$ ) і додатний напрямок руху вибрані, довжина дуги (дугова координата) визначається за формулою:

$$S(t) = \cup M_0 M_1 = \varphi \cdot \rho. \quad (1.22)$$

Таким чином, закон руху точки може бути заданий природним способом. На основі природного способу задання руху визначають лінійну швидкість:

$$\vec{V} = \vec{\tau} \cdot \frac{dS}{dt} = \vec{\tau} \cdot \rho \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \vec{\tau} \cdot \rho \cdot \omega. \quad (1.23)$$

та дотичне і нормальне прискорення (рис. 1.17)

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}_n + \vec{a}_\tau; \\ \vec{a}_n &= \frac{V_\tau^2}{\rho} \cdot \vec{n} = \omega^2 \cdot \rho \cdot \vec{n}; \quad \vec{a}_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} \cdot \vec{\tau} = \rho \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot \vec{\tau} = \rho \cdot \varepsilon \cdot \vec{\tau}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

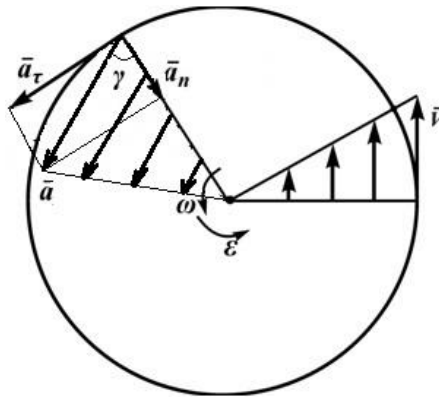


Рисунок 1.17 – Розподіл швидкостей і прискорень у перерізі тіла, що обертається

Кут вектору повного прискорення з радіусом визначається з виразу:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\rho \cdot \varepsilon}{\omega^2 \cdot \rho} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \quad (1.25)$$

Згідно до рис. 2.8 швидкості і прискорення точок тіла визначають як:

$$V = \rho \cdot \omega; \quad a = \rho \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \quad (1.26)$$

**Складний рух.** При цьому русі положення тіла визначається двома системами координат: нерухомій (XYZ) і рухливій (xyz), яка рухається разом з тілом (рис. 1.18).

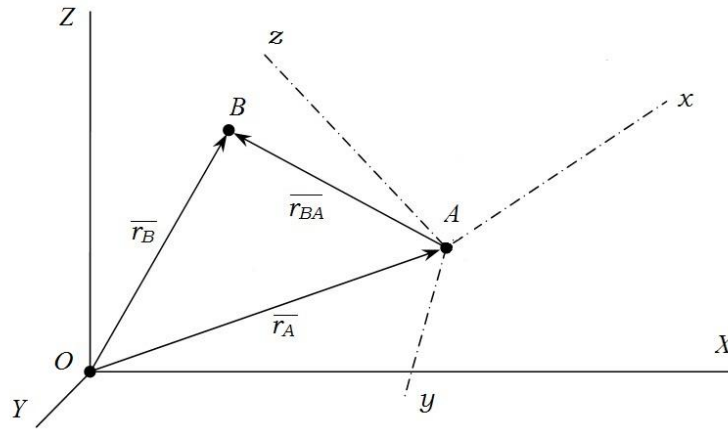


Рисунок 1.18 – Схема складного руху твердого тіла

Розглянемо точку В, що переміщується в рухливій системі  $xuz$ , яка, у свою чергу, рухається відносно нерухомої системи  $XYZ$ , яка називається основною (рис. 1.18). Введемо такі визначення.

Рух, що здійснюється точкою В по відношенню до рухливої системи  $xuz$ , називається відносним рухом. Швидкість точки В по відношенню до осей системи  $xuz$  називається відносною швидкістю  $\vec{V}_{BA}$ , а прискорення – відносним прискоренням  $\vec{a}_{BA}$ . З визначення постає, що при обчисленні  $\vec{V}_{BA}$  і  $\vec{a}_{BA}$  можна рух осей системи  $xuz$  не враховувати (розглядати їх як нерухомі).

Рух, що здійснюється рухливою системою відліку  $xuz$  (і усіма незмінно пов'язаними з нею точками простору) по відношенню до нерухомої системи  $XYZ$ , є для точки В переносним рухом. Переносною швидкістю  $\vec{V}_A$  і переносним прискоренням  $\vec{a}_A$  називаються швидкість і прискорення відносно нерухомої системи відліку тієї точки, незмінно пов'язаної з рухливою системою  $xuz$ , з якою співпадає в цей момент точка В.

Рух, що здійснюється точкою В по відношенню до нерухомої системи відліку  $XYZ$ , називається абсолютним або складним. Швидкість цієї точки називається абсолютною швидкістю  $\vec{V}_B$ , а прискорення – абсолютним прискоренням  $\vec{a}_B$ .

Основне завдання вивчення складного руху точки полягає у встановленні залежності між швидкостями і прискореннями відносного, переносного і абсолютного руху точки.

Закон руху точки В має вид:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{BA}. \quad (1.27)$$

Для швидкості і прискорення довільної точки маємо:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_B}{dt} &= \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} & \Rightarrow \vec{V}_B &= \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}; \\ \frac{d\vec{V}_B}{dt} &= \frac{d\vec{V}_A}{dt} + \frac{d\vec{V}_{BA}}{dt} & \Rightarrow \vec{a}_B &= \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Якщо переносний рух є поступальним, а відносний – обертальним, то справедливе співвідношення:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau.$$

Якщо переносний рух обертальний, то додатково виникає коріолісове прискорення  $\vec{a}_K$ , яке характеризує зміну відносної швидкості у переносному русі і переносної швидкості у відносному. Отже в цьому випадку

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_K, \quad (1.29)$$

де  $\vec{a}_K = 2 \cdot (\vec{V}_{BA} \times \vec{\omega})$ ,  $\vec{\omega}$  – вектор кутової швидкості переносного обертання.

Для визначення напрямку коріолісового прискорення необхідно вектор відносної швидкості  $\vec{V}_{BA}$  повернути на  $90^\circ$  у напрямку переносної кутової швидкості  $\vec{\omega}$ .

Таким чином, складний рух твердого тіла можна уявити як сумісний поступальний рух будь-якої точки тіла і обертальний рух навколо цієї ж точки (рис. 1.19, а). При складному плоскому русі швидкість будь-якої точки тіла складається зі швидкостей її поступального і обертального рухів. Інший спосіб уявлення складного руху існує через обертання навколо миттєвого центру швидкостей (МЦШ), де МЦШ – це точка в якій у даний момент часу швидкість відсутня (рис. 1.19, б).

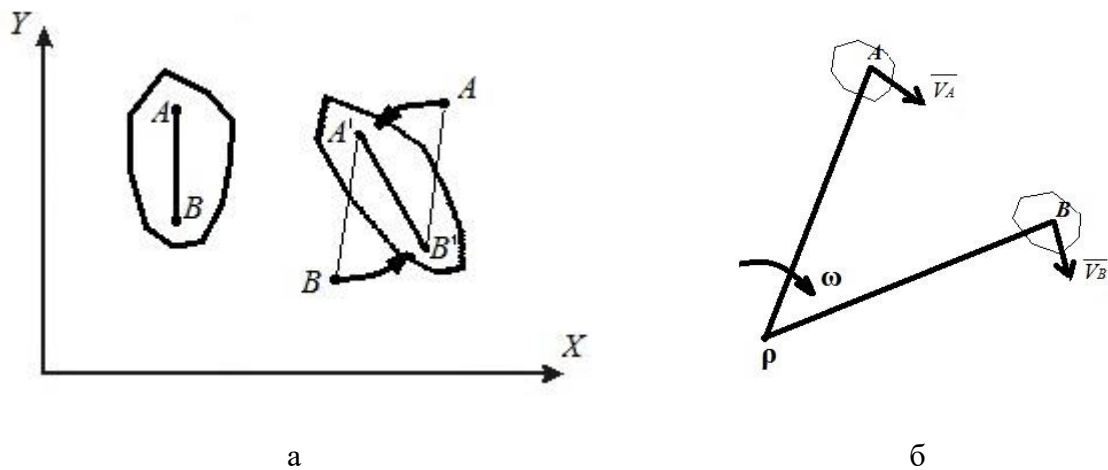


Рисунок 1.19 – Способи отримання складного руху

Положення миттєвого центру швидкостей можна отримати з кінематичних характеристик для точок А і В:

$$V_A = \omega \cdot |\rho A|; \quad V_B = \omega \cdot |\rho B|; \quad \frac{V_A}{|\rho A|} = \frac{V_B}{|\rho B|}.$$

#### 1.2.4. Кінематичний аналіз плоских механізмів

Кінематичний аналіз – це дослідження руху ланок механізму без урахування сил, що викликають цей рух. Завданнями кінематичного дослідження є:

- визначення положень усіх ланок та побудова траєкторій руху окремих точок механізму;
- визначення лінійних швидкостей точок механізму і кутових швидкостей його ланок;
- визначення лінійних прискорень точок механізму і кутових прискорень його ланок.

При кінематичному аналізі має бути задано структурну схему механізму, вхідну ланку і закон її руху.

Кінематичне дослідження плоских механізмів частіше виконується двома типами методів: аналітичними і графічними.

Серед аналітичних методів дослідження найбільш ефективним є векторний, де ланки механізму та їх кінематичні характеристики подають у вигляді векторів, на підставі яких складаються векторні рівняння. Розв'язуючи

векторні рівняння визначають переміщення досліджуваних ланок, швидкості і прискорення. Аналітичні методи трудомісткі, мають високу точність, потребують використання комп'ютерів. Використовуються в практиці проектування машин та механізмів (плоских та просторових) і в наукових дослідженнях.

Графічний метод реалізується частіше побудовою планів положення, швидкостей і прискорень. Планом швидкостей (прискорень) механізму називають креслення, на якому швидкості (прискорення) різних точок зображені у вигляді векторів, що показують напрямки і величини (у масштабі) цих швидкостей (прискорень) в даний момент часу. Отже, вказані плани – результат розв'язання графічним шляхом векторних рівнянь щодо швидкостей (прискорень) для відповідних точок ланок механізмів.

Графічний метод має похибку обчислень до 10 %, що пов'язано з необхідністю графічних побудов, але досить простий в реалізації і наочний. Використовується для попередньої оцінки кінематичних характеристик конкретного положення плоского механізму та контролю аналітичних розрахунків.

### **Контрольні запитання**

1. Як визначається положення точки в заданій системі відліку?
2. Які кінематичні величини використовують для опису руху матеріальної точки?
3. Запишіть формули для визначення закону руху, швидкості і прискорення при векторному способі задавання руху точки.
4. Запишіть формули для визначення закону руху, швидкості і прискорення при координатному способі задавання руху точки.
5. Запишіть формули для визначення закону руху, швидкості і прискорення при природному способі задавання руху точки.

6. Визначте зв'язок між радіусом-вектором точки та її декартовими координатами та між вектором швидкості та його проєкціями на декартові осі координат.
7. Знайдіть тангенціальне та нормальне прискорення точки, якщо вона здійснює: а) прямолінійний нерівномірний рух? б) криволінійний рівномірний рух.
8. Які види рухів може здійснювати тверде тіло?
9. Охарактеризуйте поступальний рух тіла. Як визначити кінематичні характеристики при поступальному русі тіла?
10. Назвіть величини які використовують для опису обертального руху.
11. В якому випадку вектори кутової швидкості та кутового прискорення є колінеарними (співнаправленими)?
12. Визначте відносне, переносне та абсолютне прискорення при складному русі.
13. Що відноситься до кінематичних характеристик механізму.
14. Які методи кінематичного аналізу механізмів ви знаєте.

### Приклади розрахунків

**Приклад 2.** Кінематичний аналіз плоских механізмів розглядається на прикладі застосування графічного методу для кривошипно-повзунного механізму (див. рис. 1.5). Довжини ланок кривошипа і шатуна відповідно  $L_{OA}$  і  $L_{AB}$ , а кутова швидкість кривошипа  $\omega_2$ , яка є постійною величиною.

Процедура кінематичного аналізу кривошипно-повзунного механізму (КПМ) включає наступні задачі: побудову плану положень; побудову діаграми переміщень повзуна; визначення швидкостей точок А, В, S і кутових швидкостей ланок; визначення прискорень точок А, В, S і кутових прискорень ланок.

1). План положень механізму дозволяє визначити положення усіх ланок при роботі. Для побудови плану положень вибирають масштабний коефіцієнт довжин  $\mu_l$  – величина, яка дорівнює відношенню довжини (м) будь-якого об'єкту (ланки, декількох ланок) до довжини (мм) відрізка, що позначає цю величину на кресленні

$$\mu_l = \frac{2 \cdot L_{OA} + L_{AB}}{l} = - \frac{M}{MM}$$

Довжини відрізків, що зображують на кресленні ланки механізму:

$$l_{OA} = \frac{L_{OA}}{\mu_l}; \quad l_{AB} = \frac{L_{AB}}{\mu_l}.$$

Побудова плану положень розпочинається з:

- викреслювання траєкторій точок А і В, що здійснюють відповідно обертальний і прямолінійний рух (рис. П2.1);

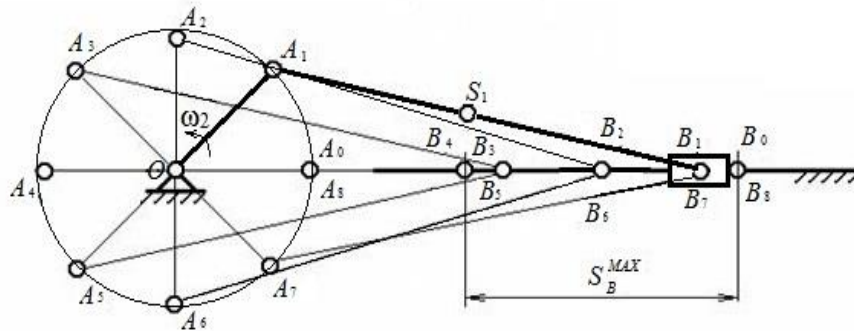


Рисунок П2.1 – План положень кривошипно-повзунного механізму. Розрахункове положення  $OA_1B_1$

- поділу траєкторії точки А на рівну кількість частин, наприклад вісім, та позначення положення точок  $A_0, A_1, \dots, A_8$  за напрямом обертання кривошипа (положення точки  $A_8$  співпадає з положенням  $A_0$ );
- з'єднання точок  $A_0 \dots A_8$  з центром обертання кривошипа точкою О;
- користуючись методом зарубок на траєкторії точки В отримують точки  $B_0 \dots B_8$ ;
- з'єднавши однойменні точки А і В у відповідних положеннях, отримують вісім положень шатуна;
- розрахункове положення механізму виділяють жирною лінією з відміткою на основному положенні механізму центрів тяжіння ланок (вважається, що центр тяжіння кривошипа співпадає з точкою О, повзуна з точкою В, шатуна з точкою S на середині АВ).

2). Діаграма переміщень повзуна (точка В): по осі абсцис (рис. П2.2) відкладають відрізок, що зображує період одного оберту кривошипа. Масштабний коефіцієнт кута повороту :

$$\mu_\varphi = \frac{\varphi}{l_\varphi} = \frac{\text{рад}}{\text{мм}}$$

(оскільки рух кривошипа рівномірний, то можна вважати, що по осі абсцис відкладений і кут повороту кривошипа і час одного повного оберту).

Отриманий відрізок ділять на рівну кількість частин, наприклад вісім, і по осі ординат відкладають переміщення

точки В у масштабі  $\mu_s = \frac{S_B^{\text{MAX}}}{l_s} = \frac{\text{М}}{\text{мм}}$ , що відповідає положенню кривошипа в даний момент.

мент.

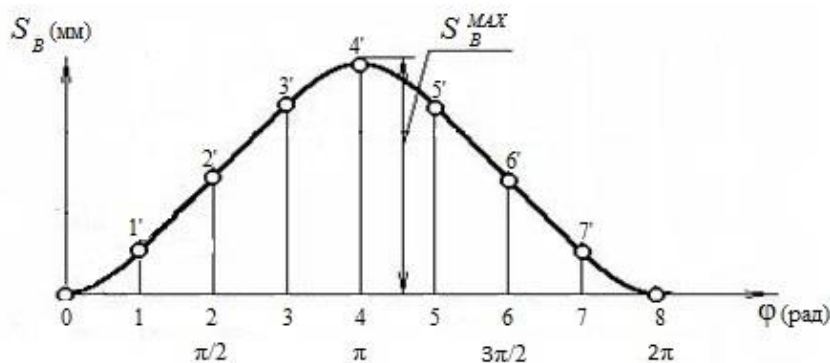


Рисунок П2.2 – Діаграма переміщень повзуна

При цьому відрізки

$$\begin{aligned} 1-1' &= \frac{B_0 B_1 \mu_l}{\mu_s}; & 5-5' &= 3-3'; \\ 2-2' &= \frac{B_0 B_2 \mu_l}{\mu_s}; & 6-6' &= 2-2'; \\ 3-3' &= \frac{B_0 B_3 \mu_l}{\mu_s}; & 7-7' &= 1-1'. \end{aligned}$$

Переміщення повзуна визначають з плану положень механізму вимірюванням відповідних відрізків (див. рис. П2.1). З'єднавши точки 0, 1', ... 8' плавною кривою, отримають діаграму переміщень повзуна.

3). Швидкості точок ланок: швидкість точки А, що здійснює обертальний рух, визначають за формулою (1.23) :

$$V_A = \omega_2 \cdot L_{OA},$$

при цьому  $\vec{V}_A \perp OA$  і спрямована у бік обертання.

Вектор швидкості точки В, що здійснює складний рух, визначають за геометричною сумою вектора швидкості точки А і вектора швидкості відносного обертового руху точки В навколо точки А:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA},$$

при цьому  $\vec{V}_B \parallel OB$ , а  $\vec{V}_{BA} \perp AB$ .

Вектор  $\vec{V}_A$  відомий за величиною і напрямком, а вектори  $\vec{V}_B$ ,  $\vec{V}_{BA}$  відомі тільки за напрямком. Отже, отримане векторне рівняння з двома невідомими, розв'язують графічним способом, використовуючи правило складання векторів (за планом швидкостей). Для цього:

- вибирають масштабний коефіцієнт швидкостей, використовуючи відому швидкість точки А:  $\mu_V = \frac{V_A}{l_{V_A}} = \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$ ;
- з полюса плану швидкостей  $P_V$  (рис. П2.3), згідно з векторним рівнянням, будують вектор швидкості  $\vec{V}_A$  у масштабі, тобто векторний відрізок  $P_V a = l_{V_A}$ ;
- через точку а проводять лінію дії вектора  $\vec{V}_{BA}$ , перпендикулярну до прямої АВ плану положень механізму, і через полюс  $P_V$  – пряму, паралельну руху повзуна, що відповідає напрямку дії вектора  $\vec{V}_B$ . На перерізі цих прямих отримують точку b. Напрями векторів  $\vec{V}_B$  і  $\vec{V}_{BA}$  указують стрілками.

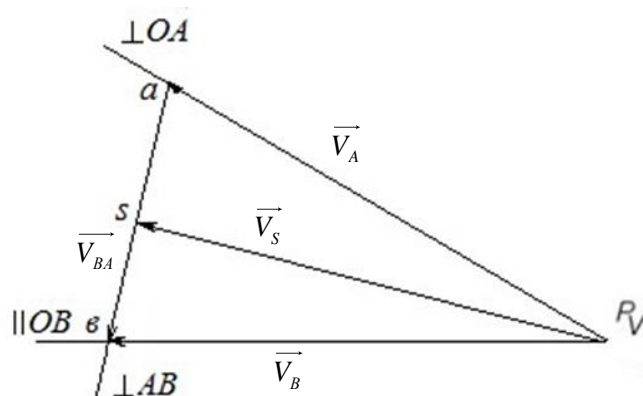


Рисунок П2.3 – План швидкостей

Для визначення швидкості точки S, що належить шатуну і розташована на середині відрізка АВ, використовують теорему подібності: на відріжку ab плану швидкостей знаходять його середину (точка s) і з'єднують з полюсом  $P_V$ ; це є вектор швидкості  $\vec{V}_S$ , що зображує абсолютну швидкість точки S.

Натуральні величини лінійних швидкостей визначають з плану швидкостей за формулами:

$$V_B = |P_V b| \cdot \mu_V; \quad V_{BA} = |ab| \cdot \mu_V; \quad V_S = |P_V s| \cdot \mu_V.$$

Кутові швидкості ланок визначають за формулами:

$$\omega_3 = \frac{V_{BA}}{L_{BA}}; \quad \omega_4 = \frac{V_B}{\infty} = 0.$$

5). Прискорення точок ланок. Для визначення лінійних прискорень точок А, В, S і кутових прискорень ланок складають векторні рівняння.

Вектор прискорення точки А є геометричною сумою вектора нормального прискорення і вектора тангенціального прискорення відносного обертального руху точки А навколо точки О:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau.$$

Оскільки кутова швидкість обертання кривошипа  $\omega_2$  постійна, а його кутове прискорення  $\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = 0$ , векторне рівняння прискорення точки А має вид:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n.$$

Вектор прискорення точки А –  $\vec{a}_A$  спрямований до центра обертання О ( $\vec{a}_A // OA$ ) і має нормальну складову, що розраховують за формулою  $a_A^n = \omega_2^2 \cdot L_{OA}$ . Вектор прискорення точки В, що здійснює складний рух, являє собою геометричну суму вектора прискорення точки А, вектора нормального прискорення і вектора тангенціального прискорення відносного обертального руху точки В навколо точки А:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau.$$

Модуль вектора нормального прискорення точки В знаходять за формулою:  $a_{BA}^n = \omega_3^2 \cdot L_{AB}$ . Спрямований цей вектор від точки В до точки А ( $a_{BA}^n // AB$ ).

Лінія дії вектора тангенціального прискорення  $\vec{a}_{BA}^\tau$  проходить через точку В перпендикулярно положенню шатуну ( $\vec{a}_{BA}^\tau \perp AB$ ). Оскільки точка В належить повзуну, який здійснює прямолінійний зворотно-поступальний рух, то лінія дії вектора прискорення  $\vec{a}_B$  знаходиться на прямій ОВ ( $\vec{a}_B // OB$ ).

Векторне рівняння з двома невідомими розв'язують графічно, побудувавши план прискорень для заданого положення. Масштабний коефіцієнт прискорень вибирають, використовуючи відому величину нормального прискорення точки А:  $\mu_a = \frac{a_A}{l_{a_A}} = \frac{m/c^2}{mm}$ .

Величину нормального прискорення  $a_{BA}^n$  переводять цим масштабом у векторний відрізок задовжки  $l_{a_{BA}^n} = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a}$ .

План прискорень для заданого положення будують наступним чином:

- з довільно вибраного полюса  $P_a$  паралельно відрізку  $OA$  плану механізму проводять вектор прискорення  $\vec{a}_A$ , довжина якого  $l_{a_A}$  була вибрана довільно при розрахунку масштабного коефіцієнта  $\mu_a$ ;
- з кінця цього вектора (точка  $a$ ) будують вектор прискорення  $\vec{a}_{BA}^n$  завдовжки  $l_{a_{BA}^n}$ , який має бути паралельним прямій  $AB$  механізму і спрямованим від точки  $B$  до  $A$ ;
- перпендикулярно вектору прискорення  $\vec{a}_{BA}^n$  через точку  $n$  проводять пряму до перерізу з прямою, проведеною через полюс  $P_a$  паралельно лінії руху повзуна  $OB$ . Отримана точка їх перерізу  $b$  визначає довжини шуканих векторів прискорень (рис. П2.4).

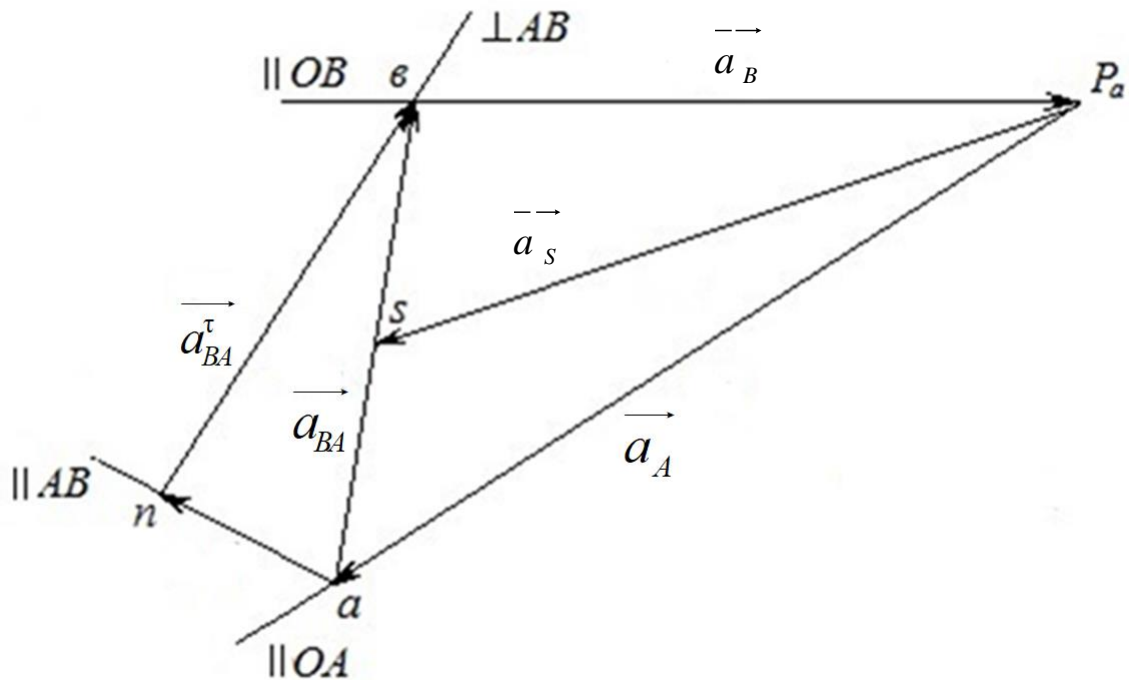


Рисунок П2.4 – План прискорень

Для знаходження величини прискорення точки  $S$ , що належить шатуну, застосовують теорему подібності. При цьому необхідно на векторі, що зображує на плані прискорень відносно прискорення  $\vec{a}_{BA}$ , знайти відповідну точку  $s$ , яка ділить відрізок  $ab$  в тій же пропорції, що і точка  $S$  ділить відрізок  $AB$  на плані механізму.

Використовуючи знайдені значення відрізків, визначають модулі відповідних лінійних прискорень точок :

$$a_B = |bP_a| \cdot \mu_a; \quad a_{BA}^{\tau} = |nb| \cdot \mu_a; \quad a_{BA} = |ab| \cdot \mu_a; \quad a_S = |P_a s| \cdot \mu_a.$$

б). Кутові прискорення ланок: кутова швидкість кривошипа  $\omega_2$  є постійною величиною і тому кутове прискорення цієї ланки дорівнює нулю, тобто  $\varepsilon_2 = 0$ . Повзун здійснює тільки поступальний рух, тому кутове прискорення цієї ланки теж дорівнює нулю  $\varepsilon_4 = 0$ . Кутове прискорення шатуну обчислюють за формулою:

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{BA}^{\tau}}{L_{AB}}.$$

Напрямок вектора кутового прискорення шатуна  $\vec{\varepsilon}_3$  визначається напрямком вектора тангенціального прискорення  $\vec{a}_{BA}^\tau$ .

### 1.3. Кінетостатичний аналіз плоских механізмів

#### 1.3.1. Цілі та задачі динамічного аналізу. Основні поняття і закони динаміки

Кінетика – розділ механіки, в якому вивчається рух і рівновага твердих тіл під дією прикладених сил. Кінетика поділяється на динаміку і статику.

Результатом взаємодії двох тіл є сила. Сила – вектор, який характеризується модулем, напрямом і точкою прикладання. Основною одиницею вимірювання сили в механіці є ньютон  $H \left( \frac{кг \cdot м}{с^2} \right)$ . Зазвичай сила задається її проекціями (рис. 3.1) на координатні осі ( $F_x = F \cdot \cos(\vec{F} \wedge X)$ ;  $F_y = F \cdot \sin(\vec{F} \wedge X)$ ).

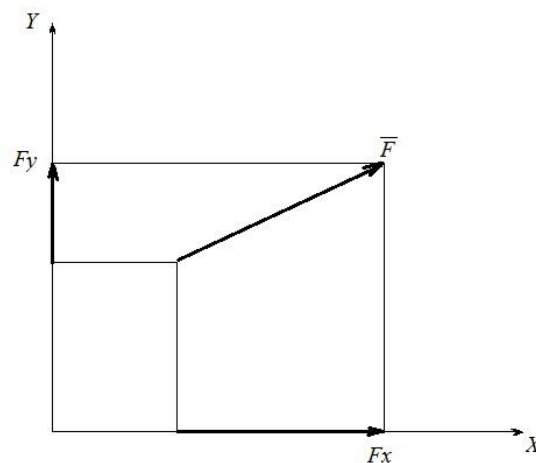


Рисунок 1.20 – Сила і її проекції

Динаміка – розділ механіки, в якому вивчають закони руху матеріальних тіл під дією сил.

В основу динаміки покладено закони, які підтверджені численними експериментами і практичною діяльністю людства. Уперше вони були систематизовані і викладені І. Ньютоном у класичній роботі «Математичні начала натуральної філософії», виданої в 1687 р.

Перший закон (закон інерції). Завжди існує така система відліку, в якій матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху, якщо на неї не діють сили. Така система відліку називається інерціальною.

Другий закон (основний закон динаміки). Якщо в інерціальній системі відліку на матеріальну точку діє сила  $\vec{F}$ , то вона набуває прискорення  $\vec{a}$  у напрямку дії сили

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}, \quad (1.30)$$

де  $m$  – маса тіла, яка є його мірою інертності.

Третій закон (закон рівності дії і протидії). Сили, з якими взаємодіють дві матеріальні точки або два матеріальні тіла, рівні за величиною, протилежні за напрямком і мають загальну лінію дії. Ці сили взаємодії не утворюють урівноваженої системи сил, оскільки вони прикладені до різних тіл.

Закон незалежності дії сил (складання сил). Матеріальна точка під дією декількох сил набуває прискорення, що дорівнює геометричній сумі прискорень, які вона отримує від кожної сили окремо.

Нехай тіло під дією системи сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  набуває прискорення:  $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n$ . Помножимо векторну рівність на скаляр  $m$  (маса тіла):

$$m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{a}_1 + m \cdot \vec{a}_2 + \dots + m \cdot \vec{a}_n,$$

згідно з другим законом Ньютона

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (1.31)$$

Вираз (1.31) називається основним рівнянням динаміки точки у разі дії системи сил.

Якщо одну систему сил можна замінити іншою і при цьому стан тіла не зміниться (рух або спокій), то такі системи називаються еквівалентними і позначаються наступним чином:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \infty (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n).$$

Якщо систему сил можна замінити однією силою (еквівалентною), то така сила називається рівнодійною

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i .$$

### 1.3.2. Диференціальне рівняння руху матеріальної точки

Введемо позначення: Охуз – інерціальна система координат з одиничними векторами  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ ; М – точка, де зосереджена рухома маса  $m$ ;  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  – одиничні вектори, які визначають природну систему координат точки М;  $\vec{R}$  – рівнодійна усіх сил, прикладених до точки;  $\vec{a}$  – прискорення точки (рис. 1.21).

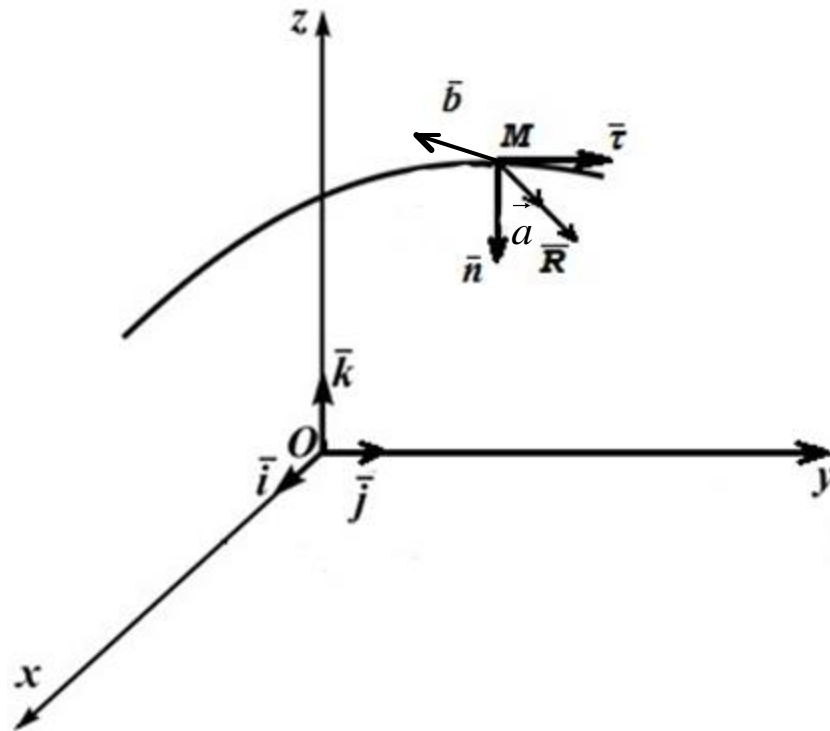


Рисунок 1.21 – Рух матеріальної точки у декартовій і природній системах

У будь-який момент часу для точки М можна записати основний закон динаміки у векторній формі  $\vec{R} = m \cdot \vec{a}$ . Спроекуємо компоненти цього векторного рівняння на координатні осі:  $R_x = m \cdot a_x$ ;  $R_y = m \cdot a_y$ ;  $R_z = m \cdot a_z$ . З кінематики відомо, що  $a_x = \ddot{x}$ ,  $a_y = \ddot{y}$ ,  $a_z = \ddot{z}$ , тоді основний закон динаміки прийме вид:

$$\begin{cases} R_x = m \cdot \ddot{x}; \\ R_y = m \cdot \ddot{y}; \\ R_z = m \cdot \ddot{z}. \end{cases} \quad (1.31)$$

Отримані рівняння (1.31) називають диференціальними рівняннями руху матеріальної точки в декартовій системі координат.

Диференціальні рівняння руху точки в проєкціях на природні осі координат з одиничними векторами  $\vec{n}$ ,  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{b}$ , відповідно до формули кінематики, мають вид:

$$\begin{cases} R_n = m \cdot a_n = m \cdot \frac{V_\tau^2}{\rho}; \\ R_\tau = m \cdot a_\tau = m \cdot \frac{dV_\tau}{dt}; \\ R_b = m \cdot a_b = 0. \end{cases} \quad (1.32)$$

Подвійне інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки (1.31) дозволяє отримати закон руху у вигляді алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x = f(t, c_1, \dots, c_6); \\ y = f(t, c_1, \dots, c_6); \\ z = f(t, c_1, \dots, c_6). \end{cases} \quad (1.33)$$

де  $t$  – час;  $c_1, \dots, c_6$  – довільні постійні величини інтегрування, які отримують з початкових умов положення і швидкості при  $t = 0$ .

Диференціальні рівняння руху в природній формі дозволяють деякі завдання динаміки точки розв'язати простіше, ніж в декартовій системі координат.

У динаміці руху твердого тіла розв'язуються два завдання:

- пряме, коли при заданому законі руху і масі тіла визначаються сили, що на нього діють;
- зворотне, коли при заданій масі тіла і відомих силах, що діють на тіло, визначається закон руху тіла.

### 1.3.3. Аксиоми статички і їх висновки

Стан, коли тверде тіло під дією сил знаходиться в рівновазі, тобто зберігається спокій або рівномірний прямолінійний рух, вивчає статика.

Аксиома 1. Дві сили, прикладені до абсолютно твердого тіла, будуть урівноважені тоді і тільки тоді, коли вони рівні за модулем, діють по одній прямій і спрямовані у протилежні сторони (рис. 1.22).

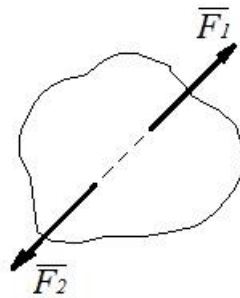


Рисунок 1.22 – Взаєморівноважені сили

Справедливо і зворотнє твердження: якщо абсолютно тверде тіло знаходиться у спокої під дією двох сил, то ці сили рівні за модулем  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$ , діють по одній прямій і спрямовані у протилежні сторони, тоді  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ .

Аксиома 2. Дія системи сил на тіло не зміниться, якщо до неї додати або від неї відняти врівноважену систему сил.

Друга аксіома є логічним наслідком першої. Якщо дві взаєморівноважені сили не чинять ніякої дії на тіло, то можна стверджувати, що будь-яка врівноважена система сил не впливає на тверде тіло незалежно від того, чи знаходилося тіло у спокої або в русі перед тим, як відкинути від нього або прикласти врівноважену систему сил.

З цієї аксіоми постає наслідок: не порушуючи стану тіла, точку прикладення сили можна переносити уздовж лінії її дії (рис. 1.23).

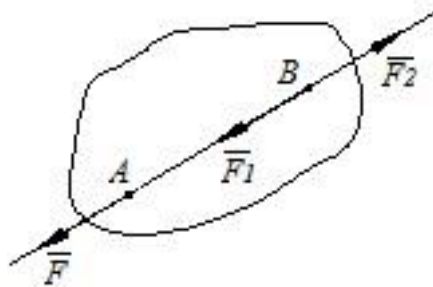


Рисунок 1.23 – Перенесення сили уздовж лінії її дії

Дійсно, нехай у точці  $A$  до тіла прикладена сила  $\vec{F}$ . Необхідно цю силу перенести у точку  $B$  по лінії її дії. Прикладемо у точці  $B$  на лінії дії сили  $\vec{F}$  дві врівноважені сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  такі, що  $|\vec{F}| = |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$ . Внаслідок цього дія сили на тіло не зміниться. Але сили  $\vec{F}$  і  $\vec{F}_2$  згідно з першою аксіомою утворюють урівноважену систему сил, яка може бути відкинута. В результаті на тіло діятиме тільки одна сила  $\vec{F}_1$ , що дорівнює  $\vec{F}$ , але прикладена в точці  $B$ .

Аксіома 3. Рівнодійна двох сил, прикладених до твердого тіла в одній точці і спрямованих під кутом один до одного, прикладена в тій же точці, зображується за величиною і напрямком діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах як на двох сторонах (рис. 1.24)  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ .

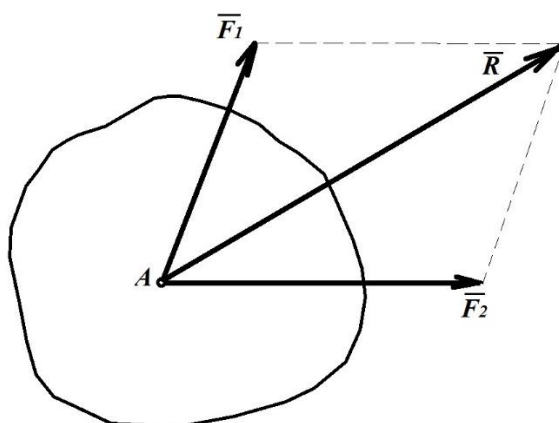


Рисунок 1.24 – Складання сил

Наслідком перших трьох аксіом є теорема про три непаралельні сили. Якщо до твердого тіла прикладені три непаралельні сили, що лежать в одній

площині, знаходяться у рівновазі, то лінії дії цих сил перетинаються в одній точці (рис. 1.25).

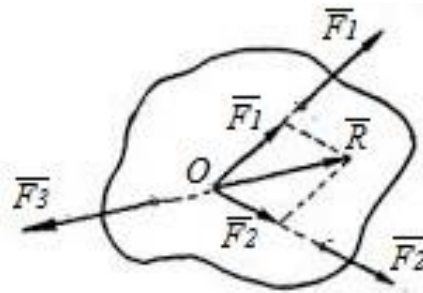


Рисунок 1.25 – Умова рівноваги тіла під дією трьох сил

Припустимо, що тіло знаходиться у рівновазі під дією трьох сил  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  і  $\vec{F}_3$ . За третьою аксіомою статички рівнодійна перших двох сил може бути знайдена за правилом паралелограма, побудованого на силах  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ , перенесених уздовж лінії їх дії в точку перерізу, тобто  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ . Згідно з першою аксіомою статички для рівноваги тіла необхідно і достатньо, щоб сила  $\vec{F}_3$  була такою, що урівноважує дві перші сили. Це можливо тільки у тому випадку, коли сили  $\vec{R}$  і  $\vec{F}_3$  лежать на одній прямій і мають протилежні напрямки. Але тоді лінії дії сил  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$  перетнуться в одній точці O.

Аксіома 4. Сили взаємодії двох тіл рівні за модулем і спрямовані по одній прямій в протилежні сторони (третій закон Ньютона або закон рівності сил дії і протидії).

Треба усвідомити, що сили взаємодії двох тіл не складають систему рівноважених сил, оскільки вони прикладені до різних тіл.

Аксіома 5. Рівновага тіла, що деформується не порушиться, якщо жорстко зв'язати його точки і вважати тіло абсолютно твердим, таким, що не деформується (принцип твердіння).

Аксіома дозволяє досліджувати рівновагу фізичних тіл, що деформуються. Вона встановлює зв'язок між умовами рівноваги твердого тіла і тіла, що

деформується. Умови рівноваги твердого тіла є необхідними, але не є достатніми для рівноваги тіла, що деформується. Якщо рівнянь рівноваги твердого тіла недостатньо, то складаються додаткові рівняння, де враховуються деформації тіла, як це робиться в опорі матеріалів і теорії пружності.

#### 1.3.4. Зв'язки. Реакції зв'язків

Обмеження, тіла, що перешкоджають вільному руху, називаються зв'язками. Дія зв'язку на тіло називається реакцією зв'язку.

Аксиома зв'язків: всяке тіло, що має зв'язки, можна розглядати як вільне, якщо відкинути зв'язки і замінити їх дії реакціями зв'язків.

Основні види механічних зв'язків.

- Гладка поверхня: реакцію зв'язку спрямовано по загальній нормалі до поверхонь дотичних тіл у точці їх дотику і прикладено до цієї точки (рис. 1.26).

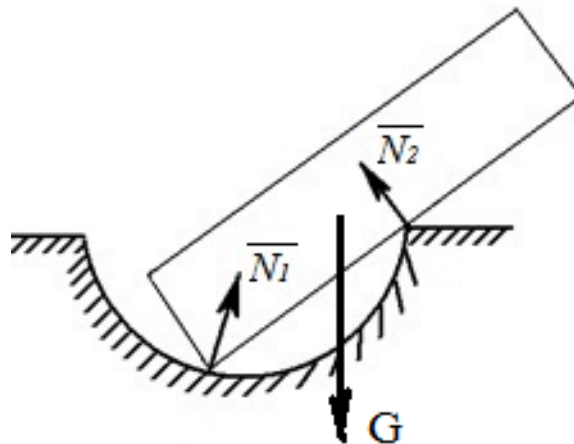


Рисунок 1.26 – Гладка поверхня

- Гнучка нерозтяжна нитка: реакцію зв'язку спрямовано уздовж нитки до точки підвішування (рис. 1.27).

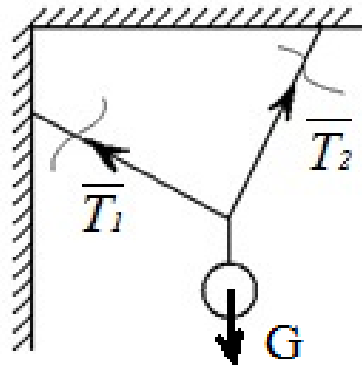


Рисунок 1.27 – Гнучка нерозтяжна нитка

- Рухливий циліндричний шарнір: реакція проходить через вісь шарніра і спрямована перпендикулярно опорній поверхні; опора на такому шарнірі може переміщуватись паралельно опорній поверхні (рис. 1.28, а).
- Нерухливий циліндричний шарнір: реакція такої опори  $\vec{N}_B$  проходить через вісь шарніра, але невідома за напрямком. Зазвичай її розкладають на дві складові  $\vec{R}_B$  і  $\vec{H}_B$  за двома взаємно перпендикулярними напрямками  $|\vec{N}_B| = \sqrt{R_B^2 + H_B^2}$ ; опора на такому шарнірі нерухома, але допускає поворот у шарнірі (рис. 1.28, б).

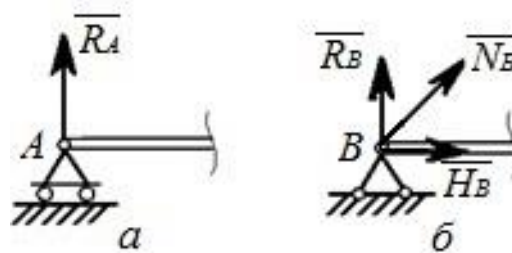


Рисунок 1.28 – Циліндричний шарнір

- Нерухомий шарнір сферичний: реакція розкладається на три складові  $\vec{X}_B$ ,  $\vec{Y}_B$ ,  $\vec{Z}_B$ , тобто не допускає лінійні переміщення з можливістю поворотів біля осей (рис. 1.29).

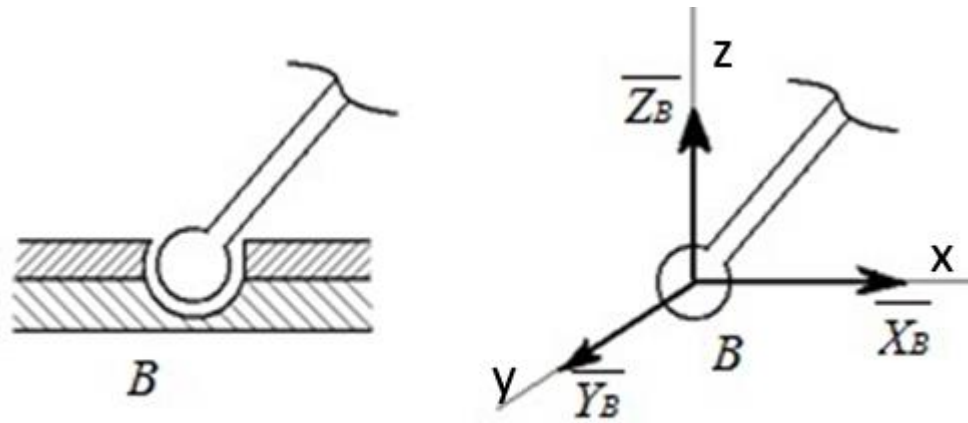


Рисунок 1.29 – Сферичний шарнір

- Жорстке закладення (затискання): жорстке закладення не припускає ніякого (лінійного чи кутового) переміщення тіла (рис. 1.30). Знаходження реакції жорсткого закладення зводиться до визначення складових  $\overline{R}_C$  і  $\overline{H}_C$ , що перешкоджають лінійному переміщенню балки у площині дії сил, і реактивного моменту  $M_C$ , що перешкоджає обертанню балки під дією прикладених до неї сил з рівнянь рівноваги.

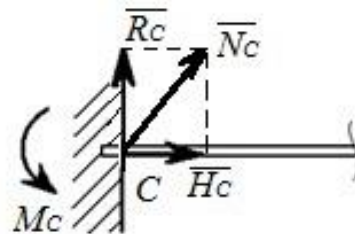


Рисунок 1.30 – Жорстке закладення

- Невагомий стрижень з шарнірами на кінцях: Реакцію зв'язку стрижня  $\overline{N}$  буде спрямовано уздовж осі стрижня, викликаючи його розтягнення або стиснення залежно від характеру зовнішніх сил (рис. 1.31).

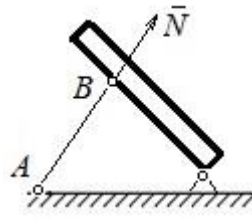


Рисунок 1.31 – Невагомий стрижень

### Контрольні запитання

1. Чим відрізняється розгляд руху тіл в кінематиці та в динаміці?
2. Який фізичний зміст та загальні властивості поняття «сила»?
3. Сформулюйте I закон Ньютона. Що таке інерція?
4. Сформулюйте і запишіть математично II закон Ньютона.
5. Запишіть рівняння динаміки руху матеріальної точки.
6. Сформулюйте аксіоми статички і наслідки з них.
7. Дайте характеристики шарнірно-рухомої, шарнірно-нерухомої опор і защемлення.

## 1.4. Кінетика (продовження). Силовий аналіз плоского механізму

### 1.4.1. Перетворення сил і моментів

Розглянемо найбільш поширені перетворення сил і моментів.

- Сили, що збігаються

Система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці, називається системою сил, що збігаються.

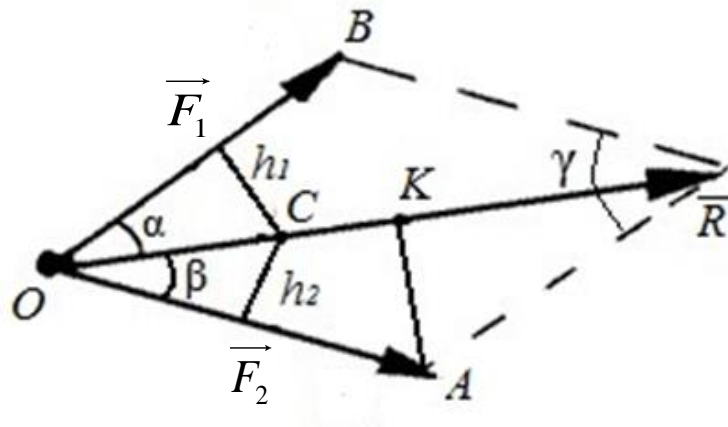


Рисунок 1.32 – Складання двох сил

Рівнодіюча сила  $\vec{R}$  (рис. 1.32), яка згідно з третьою аксіомою статички для двох збіжних сил, є діагоналлю паралелограма, що побудований на цих силах як на двох сторонах. Модуль сили  $\vec{R}$  визначається за теоремою косинусів :

$$|\vec{R}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(\gamma)}. \quad (1.34)$$

Перпендикуляри, що опущені з довільної точки  $C$  на напрямки сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  – плечі сил ( $h_1, h_2$ ) відносно точки  $C$  (рис. 1.32). При цьому  $\frac{h_1}{h_2} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ . З іншого боку, проаналізувавши довжину відрізка  $AK$ , можемо записати:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow F_1 \cdot h_1 = F_2 \cdot h_2. \quad (1.35)$$

Добуток сили на плече називається моментом сили відносно точки. Тоді з (1.35) постає, що моменти сил, які збігаються відносно будь-якої точки, рівні між собою.

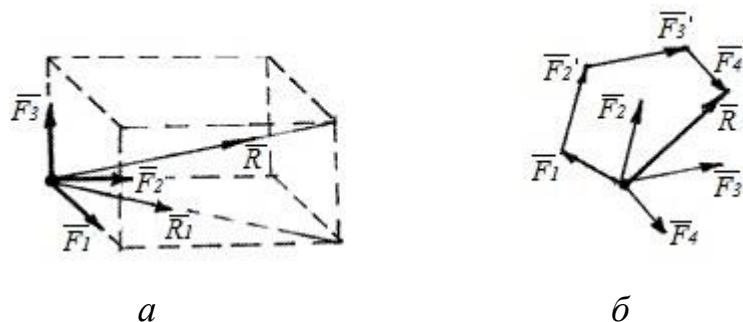


Рисунок 1.33 – Складання системи сил

Рівнодійну системи збіжних сил можна отримати як послідовним складанням сил (рис. 1.33, *a*), так і побудовою силового багатокутника (рис. 1.33, *б*).

- Складання паралельних сил

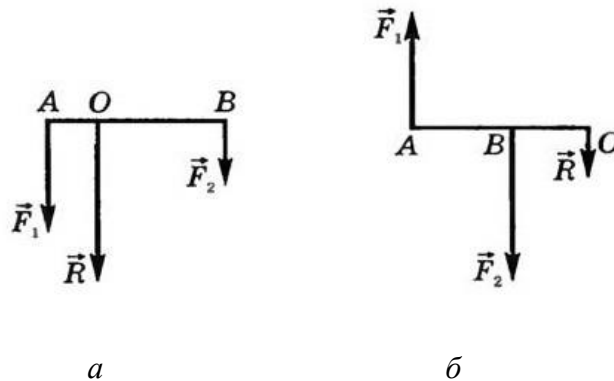


Рисунок 1.34 – Паралельні сили

Рівнодіюча двох паралельних сил, прикладених до твердого тіла і спрямованих в один бік (рис. 1.34, *a*), дорівнює за величиною сумі модулів сил  $|\vec{R}| = |\vec{F}_1| + |\vec{F}_2|$ , паралельна їм, спрямована у ту саму сторону і прикладена до точки O, яка поділяє інтервал між ними на відрізки обернено пропорційні до величин сил

$$\frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}_2|} = \frac{OB}{OA}.$$

Рівнодійна двох паралельних сил, прикладених до твердого тіла і спрямованих у протилежні сторони (рис. 1.34, *б*), дорівнює за величиною різниці їх модулів  $|\vec{R}| = |\vec{F}_2| - |\vec{F}_1|$ , паралельна їм, спрямована у бік дії більшої сили і прикладена до точки O, яка лежить зовні інтервалу між ними на відстані обернено

$$\text{пропорційній до величин сил } \frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}_2|} = \frac{OB}{OA}.$$

Якщо на тіло діє декілька паралельних сил, то їх рівнодійну можна знайти, послідовно застосовуючи правила складання двох сил.

- Пара сил

Парою сил називається система двох рівних за величиною, паралельних і протилежно спрямованих сил (рис. 1.35).

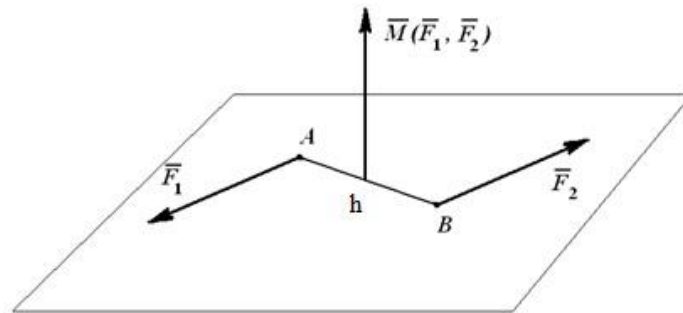


Рисунок 1.35 – Пара сил

Пара сил не має рівнодіючої. Сума проєкцій сил пари на будь-яку вісь дорівнює нулю, оскільки їх проєкції завжди рівні і протилежні за знаком. Площину, що проходить через лінії дії сил, називають площиною дії пари.

Пара сил спричинює обертальну дію, яка може бути оцінена моментом пари  $M = F_1 \cdot h = F_2 \cdot h$ , де  $h$  – плече пари сил. Напрямок моменту  $M$  перпендикулярний площині пари сил і вважається додатним, якщо поворот, що здійснюється парою сил, спрямований проти ходу стрілки годинника (рис. 1.35 –  $M > 0$ ).

Дія, яку створює пара сил на тверде тіло, не зміниться, якщо пару сил переносити у будь-яку точку площини пари сил або в площину їй паралельну. Отже, вектор моменту пари сил може бути прикладений (чи перенесений) до будь-якої точки твердого тіла.

Пари сил можна складати і віднімати.

- Паралельне перенесення сили в довільну точку

Для перенесення сили  $\vec{F}$  з точки А твердого тіла в точку В треба додати систему двох сил  $\vec{F}'$  і  $\vec{F}''$ , яка еквівалентна нулю, причому  $|\vec{F}| = |\vec{F}'| = |\vec{F}''|$  (рис. 1.36). Тоді маємо силу  $\vec{F}$  еквівалентну такій же за величиною силі  $\vec{F}'$ , що

прикладена у точці В, і пару сил  $(\vec{F}, \vec{F}'')$ , момент якої  $M = F \cdot h$  ( $h$  – довжина відрізка АВ).

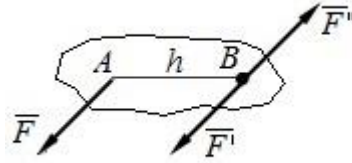


Рисунок 1.36 – Приведення сили

- Момент сили відносно точки

Момент сили відносно точки характеризує обертання твердого тіла відносно точки. Якщо відомий радіус-вектор  $\vec{r}$  точки прикладання сили  $\vec{F}$  відносно точки О (рис. 1.37), то момент цієї сили має вид:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{F} \times \vec{r}. \quad (1.36)$$

Величина моменту сили відносно точки визначається як:

$$M_O = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin(\alpha) = F \cdot h, \quad (1.37)$$

де  $h$  – плече сили  $\vec{F}$  відносно точки О.

Вектор  $\vec{M}_O$ , як результат векторного добутку, перпендикулярний векторам  $\vec{F}$  і  $\vec{r}$ , які належать площині ОАВ, і спрямований таким чином, що з його вершини площина обертається проти ходу стрілки годинника.

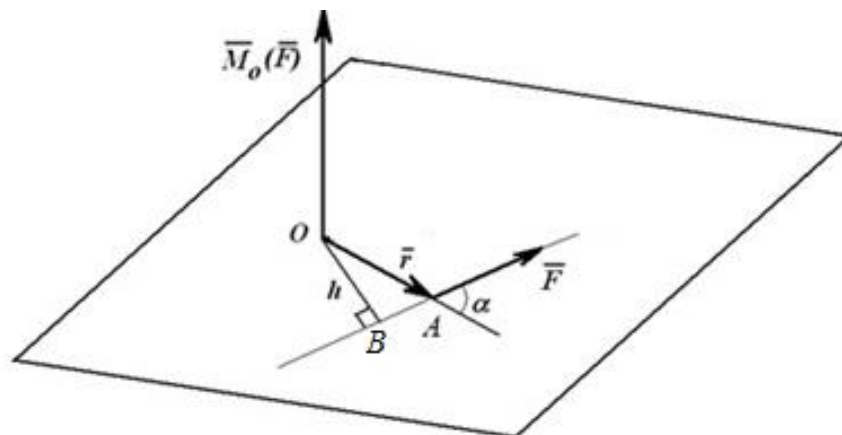


Рисунок 1.37 – Момент сили відносно точки

Величина і знак моменту  $\vec{M}_O$  не зміняться, якщо силу перенести уздовж лінії дії в іншу точку (рис. 4.6).

- Момент сили відносно осі

Момент сили відносно, наприклад осі  $Z$ , характеризує обертання тіла відносно осі і визначається як момент проекції сили  $\vec{F}_{\Pi}$  на площину  $XOY$ , перпендикулярну осі, відносно точки перерізу осі з площиною (рис. 1.38):

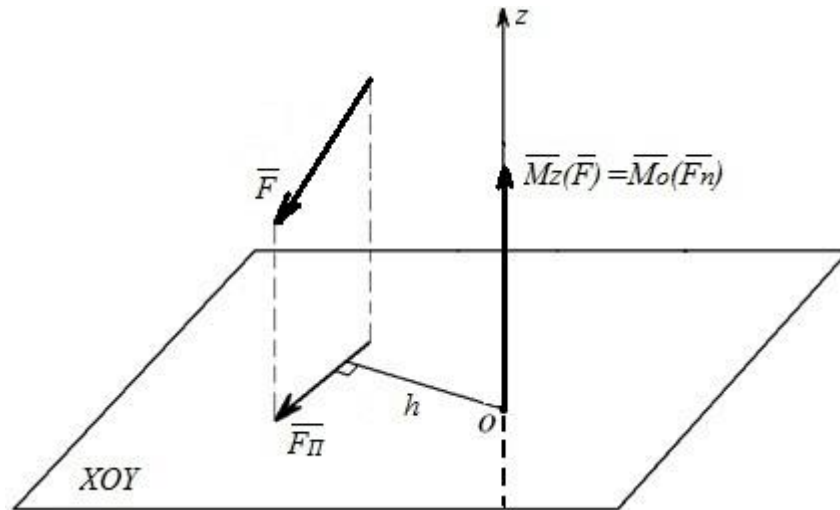


Рисунок 1.38 – Момент сили відносно осі  $Z$

Величина моменту сили відносно осі визначається як:

$$M_z(\vec{F}) = M_o(\vec{F}_{\Pi}) = F_{\Pi} \cdot h. \quad (1.38)$$

Знак моменту визначається напрямком обертання, яке прагне надати тілу сила  $\vec{F}_{\Pi}$  так саме, як для моменту сили відносно точки.

Послідовність обчислень :

- 1) проводиться площина  $XOY$ , перпендикулярна осі  $z$ ;
- 2) знаходиться положення точки  $O$ , перетину осі  $z$  і площини  $XOY$ ;
- 3) проектується сила  $\vec{F}$  на площину  $XOY$  і знаходиться  $\vec{F}_{\Pi}$ ;
- 4) з точки  $O$  опускається перпендикуляр на напрямок сили  $\vec{F}_{\Pi}$ ;
- 5) визначається величина моменту  $M_z(\vec{F}) = M_o(\vec{F}_{\Pi}) = F_{\Pi} \cdot h$ ;
- 6) визначається напрямок вектора  $M_z(\vec{F})$  уздовж осі  $z$ .

### 1.4.2. Головний вектор і головний момент сил

Розглянемо тверде тіло (рис. 1.39), на яке діє довільна просторова система сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ . Зводимо її до центра  $O$ . В цьому випадку просторова система сил зводиться до головного вектору і головного моменту.

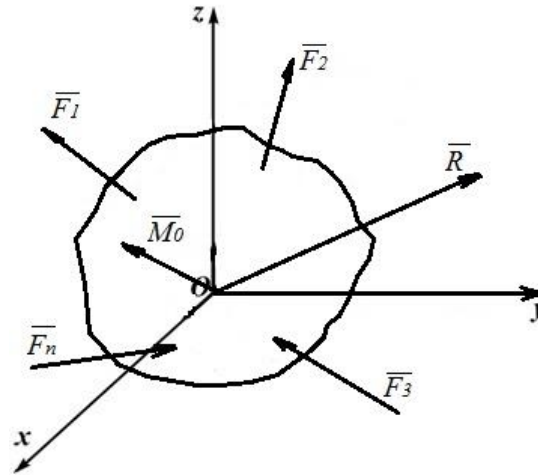


Рисунок 1.39 – Приведення просторової системи сил

Головним вектором системи сил  $\vec{R}$  називається векторна сума системи сил, тобто  $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ .

Головним моментом системи сил відносно точки  $\vec{M}_O$  називається векторна сума моментів системи сил відносно цієї точки:  $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i)$ .

В системі координат X,Y,Z головний вектор і головний момент відносно точки визначаються трьома своїми проекціями:

$$\begin{cases} R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \\ R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \\ R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}. \end{cases} \quad \begin{cases} M_{Ox} = \sum_{i=1}^n M_x(F_i); \\ M_{Oy} = \sum_{i=1}^n M_y(F_i); \\ M_{Oz} = \sum_{i=1}^n M_z(F_i). \end{cases} \quad (1.39)$$

Модулі величин головного вектора і головного моменту визначаються за формулами:

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \quad |\vec{M}_O| = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2}.$$

Для того щоб тіло знаходилося у рівновазі під дією довільної системи сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ , необхідно і достатньо рівності нулю головного вектора і головного моменту сил:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0; \quad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) = 0,$$

або у проєкціях на осі координат:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n M_x(F_i) = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_y(F_i) = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_z(F_i) = 0. \end{cases} \quad (1.40)$$

Рівняння 1.40 рівноваги просторової системи сил відповідають аналітичному зображенню рівності нулю шести незалежних можливих переміщень тіла у просторі: трьох переміщень уздовж координатних осей і трьох обертань навколо цих осей.

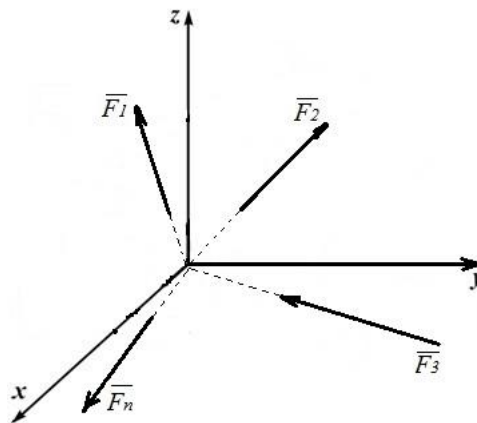


Рисунок 1.40 – Збіжна просторова система сил

Просторова система сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  називається збіжною, якщо лінії дії цих сил перетинаються в одній точці (рис. 1.40).

Якщо на тіло діє система збіжних сил, то частина рівнянь рівноваги системи рівнянь (1.40) тотожно дорівнюватиме нулю, а саме моменти обертання навколо осей відсутні:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0. \end{cases} \quad (1.41)$$

У цьому випадку для того, щоб система збіжних сил була врівноваженою, необхідно і достатньо рівності нулю сум проекцій усіх сил на координатні осі за трьома переміщеннями.

Система сил називається плоскою, якщо всі сили, що діють на тіло, лежать в одній площині (рис. 1.41).

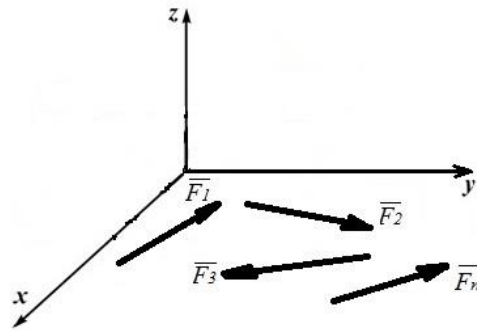


Рисунок 1.41 – Плоска система сил

При дії плоскої системи сил рівняння (1.40) спростяться і матимуть вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \\ \sum_{i=1}^n M_z(F_i) = 0. \end{cases} \quad (1.42)$$

Звідки, для дотримання умов рівноваги тіла під дією плоскої системи сил необхідно і достатньо рівності нулю сум проекцій усіх сил на координатні осі за двома переміщеннями і рівності нулю суми моментів сил відносно будь-якої точки, розташованої у площині їх дії.

### 1.4.3. Сили, що діють на механізм

Для проведення силового розрахунку механізму необхідно визначити сили, що діють на його ланки. З точки зору розв'язання завдань динаміки сили можна класифікувати:

- Зовнішні і внутрішні.

Зовнішні сили – це сили взаємодії ланки механізму з якимось тілами, що не входять до складу механізму;

Внутрішні сили – сили взаємодії між ланками механізму (реакції зв'язків у кінематичних парах).

З умови рівності сил дії і протидії можна стверджувати, що для внутрішніх сил головний вектор  $\bar{R}$  і головний момент  $\bar{M}_O$  відсутні.

- Рушійні сили.

Рушійні сили – це сили, які прикладаються до ведучої ланки, спрямовані у бік руху ланки і розвивають позитивну потужність. Рушійні сили долають опір інших сил, прикладених до механізму.

- Сили корисного (виробничого) опору.

Сили корисного опору – це сили, що спричинені технологічними процесами для подолання яких і створений механізм (сили різання металу на верстатах, сили ваги при підйомі вантажу краном і таке інше). Сили корисного опору діють на вихідні (робочі) ланки і спрямовані у бік, протилежний переміщенням цих ланок. Долаючи ці сили, механізм створює корисну роботу.

- Сили шкідливого опору.

Сили шкідливого опору – це сили, на подолання яких витрачається потужність, і ця потужність втрачається безповоротно. Зазвичай шкідливими силами опору виступають сили тертя (сили, що чинять опір відносному переміщенню дотичних поверхонь кінематичних парах).

У силових розрахунках силами тертя нехтують.

- Сили інерції, моменти сил інерції.

Сили інерції – це сили, які виникають через наявність маси ланки і її руху з прискоренням. Для спрощення розрахунків зазвичай масу ланки зводять до центра мас (рис. 1.42), тобто геометричної точки, положення якої визначають за формулами:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_k \cdot \vec{r}_k}{\sum m_k}; \quad x_c = \frac{\sum m_k \cdot x_k}{\sum m_k}; \quad y_c = \frac{\sum m_k \cdot y_k}{\sum m_k}.$$

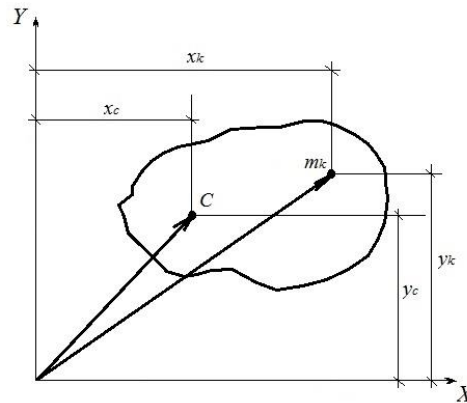


Рисунок 1.42 – Визначення центра мас

Сила інерції ланки чинить опір його прискоренню і діє на те тіло, яке викликає це прискорення. У загальному випадку при нерівномірному русі виникає сила інерції і момент сил інерції:

$$\vec{F}_i = -m \cdot \vec{a}_s; \quad \vec{M}_i = -I_s \cdot \vec{\varepsilon}, \quad (1.43)$$

де  $m$  – маса ланки (зосереджена в центрі мас);  $I_s$  – момент інерції ланки;  $\vec{a}_s$  – абсолютне прискорення центра мас ланки;  $\vec{\varepsilon}$  – кутове прискорення ланки.

Знак мінус у формулах (1.43) показує, що сила інерції спрямована протилежно прискоренню центру мас ланки, а момент сил інерції спрямований протилежно кутовому прискоренню ланки.

Якщо ланка рухається поступально, коли  $\vec{\varepsilon} = 0$ , то  $\vec{M}_i = 0$  і тоді діє тільки сила інерції  $\vec{F}_i$ , що прикладена до центру мас. Якщо ланка обертається навколо осі, яка проходить через центр мас, коли  $\vec{a}_s = 0$  і  $\vec{F}_i = 0$ , то за умови, що  $\vec{\varepsilon} \neq 0$ , на ланку діятиме тільки момент сил інерції  $\vec{M}_i$ . Якщо обертання відбувається навколо осі, яка не проходить через центр мас, то на ланку діятимуть  $\vec{F}_i$  і  $\vec{M}_i$ .

- Сили тяжіння.

Сили тяжіння – це сили взаємодії ланок механізму з гравітаційним полем Землі. Прикладаються до центра мас і спрямовуються до центра Землі

$$G = m \cdot g ,$$

де  $g$  – прискорення тяжіння Землі.

#### 1.4.4. Силовий аналіз плоского механізму

Основна мета силового аналізу полягає у встановленні функціональних залежностей між силами (моментами сил), що діють на ланки механізму, і кінематичними параметрами механізму з урахуванням мас (моментів інерції) його ланок. Функціональні залежності визначають з рівнянь руху механізму на основі принципу Даламбера згідно до якого всяку динамічну систему можна уявити як статичну, якщо до неї додати сили інерції і моменти сил інерції.

Застосувавши цей принцип, можна виконувати силовий розрахунок із використанням рівнянь статички, які у цьому випадку називаються рівняннями кінетостатички. Для того щоб такі системи рівнянь розв'язувалися, потрібне виконання умови кінетостатичної визначеності – кількість рівнянь кінетостатички повинно дорівнювати кількості невідомих реакцій.

Для плоского кінематичного ланцюга умова кінетостатичної визначеності має вид:

$$3(n-1) = 2P_H + P_B , \quad (1.44)$$

де  $3(n-1)$  – кількість незалежних рівнянь кінетостатички;  $n-1$  – кількість рухливих ланок механізму;  $P_H$  – кількість нижчих кінематичних пар;  $P_B$  – кількість вищих кінематичних пар.

Якщо припустити, що вищі кінематичні пари відсутні, тоді рівняння (1.44) набере вигляду:

$$3(n-1) = 2P_H .$$

Така рівність можлива для кінематичного ланцюга при  $(n - 1) = 2$  і  $P_H = 3$ , який називається діадою (діада включає дві рухливі ланки і три нижчі кінематичні пари).

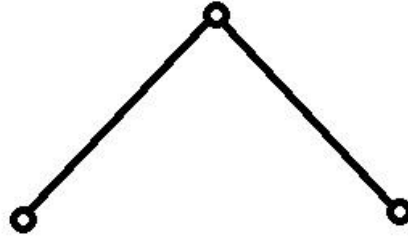


Рисунок 1.43 – Кінематичний ланцюг-діада

Формула (1.44) співпадає з формулою Чебишева для визначення кількості степенів вільності плоского кінематичного ланцюга. У результаті можна сформулювати умову кінетостатичної визначеності кінематичного ланцюга таким чином: кінематичний ланцюг кінетостатично визначений у тому випадку, коли кількість невідомих зовнішніх сил, що діють на його ланки, не перевищує кількості степенів вільності цього ланцюга.

Схема силового розрахунку будь-якого механізму полягає в тому, що:

- розбивають механізм на діади, взявши як початкову ту ланку, на яку діє невідома зовнішня сила;
- розв'язання розпочинають з останньої діади і закінчують початковою ланкою.

При такому підході на діади завжди діятимуть тільки відомі зовнішні сили, і з розгляду їх рівноваги будуть визначені реакції в кінематичних парах, а при розгляді умов рівноваги початкових ланок будуть визначені реакції, що залишилися, і невідомі зовнішні сили.

У тих випадках, коли потрібно знайти тільки рушійні сили (зрівноважувальну силу  $\vec{F}_3$ ) без визначення реакцій у кінематичних парах, зручно скористатися методом Жуковського, не вдаючись до послідовного силового розрахунку всього механізму.

Метод заснований на принципі можливих переміщень. Згідно з цим принципом для рівноваги механічної системи необхідно і достатньо, щоб сума робіт усіх прикладених до системи активних сил за будь-яким можливим переміщенням системи дорівнювала нулю

$$\sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n F_i \cdot dS_i \cdot \cos(\alpha_i) = 0, \quad (1.45)$$

де  $\cos(\alpha_i) = \cos(\vec{F}_i \wedge \vec{v}_i)$ .

Перейдемо до конкретного миттєвого положення механізму, розділивши всі члени на нескінченно малий проміжок часу ( $dt$ ), за який відбуваються вказані малі переміщення:

$$\sum_{i=1}^n F_i \cdot \frac{dS_i}{dt} \cdot \cos(\alpha_i) = \sum_{i=1}^n F_i \cdot v_i \cdot \cos(\alpha_i) = 0. \quad (1.46)$$

Таким чином, рівняння робіт трансформується у рівняння миттєвих потужностей, і принцип можливих переміщень щодо механізму можна сформулювати так: якщо механізм знаходиться у рівновазі, то сума миттєвих потужностей усіх активних зовнішніх сил, прикладених до ланок механізму, дорівнює нулю.

Для складання рівняння 1.44 використовується важіль Жуковського – план швидкостей механізму, повернений на  $90^\circ$ , у відповідні точки якого прикладаємо усі зовнішні сили, що діють на ланки механізму. Узявши суму моментів цих сил відносно полюса плану швидкостей, фактично отримуємо рівняння потужностей, що розвиваються ними.

Скориставшись отриманим рівнянням, можемо визначити невідому зрівноважувальну силу  $\vec{F}_3$ .

## Контрольні запитання

1. Чи зміниться стан тіла, якщо точку прикладання сили перенести уздовж лінії її дії, в границях тіла?
2. Знайдіть рівнодіючу двох паралельних сил, спрямованих в одну сторону, і точку її прикладання.
3. Знайдіть рівнодіючу двох паралельних сил, спрямованих у різні сторони, і точку її прикладання
4. Дайте визначення парі сил. Чи залежить момент пари сил від її розташування на площині?
5. Визначте момент сили відносно точки і проаналізуйте його властивості. Коли момент сили відносно точки дорівнює нулю?
6. Визначте момент сили відносно осі, проаналізуйте його властивості. При якому напрямі сили її момент відносно даної осі є найбільшим?
7. Дайте визначення головного вектору системи сил та головного моменту системи сил.
8. Які можливі випадки зведення просторової системи сил?
9. Розкрийте сили, що діють на механізм.
10. Запишіть алгоритм силового аналізу плоского механізму.
11. У яких випадках доцільно використовувати метод Жуковського.

## Приклади розрахунків

**Приклад 3.** Розглянемо приклад силового аналізу кривошипно-повзунного механізму (рис 1.5).

Силовий аналіз для вибраного положення досліджуваного механізму проводиться від діади шатун-повзун, до якої прикладено силу корисного опору, до початкової ланки.

Зовнішніми силами, що діють на ланки механізму є сили тяжіння, сили інерції, моменти сил інерції, сила корисного опору.

Сили тяжіння ланок розраховують за формулами:

$$G_3 = m_3 \cdot g ; \quad G_4 = m_4 \cdot g ,$$

де  $m_3$ ,  $m_4$  – маси відповідно шатуна і повзуна. Спрямовані вектори сил тяжіння завжди вертикально вниз і прикладені у центрах мас ланок.

Сили інерції ланок визначаються за результатами проведеного раніше кінематичного аналізу, а саме плану прискорень (див. рис. П2. 4). З урахуванням того, що центр мас кривошипа вважається розташованим у точці О, а кутове прискорення  $\varepsilon_2 = 0$  сили інерції і

моменти сил інерції, які впливають на кривошип, відсутні. Система сил інерції для шатуна складається з головного вектора  $\vec{F}_{i3}$  і головного моменту  $M_{i3}$ , які розраховують за формулами:

$$F_{i3} = m_3 \cdot a_S; \quad M_{i3} = I_{S3} \cdot \varepsilon_3,$$

де  $I_{S3}$  – момент інерції мас шатуна відносно точки S;  $a_S$  – прискорення центра мас шатуна і  $\varepsilon_3$  – кутове прискорення шатуна (приймаються з плану прискорень).

Напрямок вектора  $\vec{F}_{i3}$  протилежний напрямку вектора  $\vec{a}_S$ , а точка прикладення – центр мас шатуна S. Напрямок моменту  $M_{i3}$  протилежний напрямку  $\varepsilon_3$  і визначається за напрямком вектора прискорення шатуна  $\vec{a}_{BA}^r$ .

Сили інерції повзуна, який здійснює поступальну ходу, складатимуться тільки з головного вектора сил, величину якого визначають як:

$$F_{i4} = m_4 \cdot a_B,$$

де  $a_B$  – прискорення центра мас повзуна (точка B). Напрямок вектора  $\vec{F}_{i4}$  протилежний напрямку вектора  $\vec{a}_B$ , а точка прикладення – центр шарніра B.

Величини сил корисного опору задані у вигляді діаграми. Напрямок вектора сили корисного опору  $\vec{F}_{KO}$  протилежний напрямку вектора швидкості повзуна  $\vec{v}_B$ . Прикладена сила  $\vec{F}_{KO}$  у точці B.

Виділимо діаду шатун-повзун з плану положень (див. рис. П2.1). До ланок діади у точках прикладення відповідних сил прикладаються сили тяжіння  $\vec{G}_3$  і  $\vec{G}_4$ , сили інерції  $\vec{F}_{i3}$ ,  $\vec{F}_{i4}$ , момент сил інерції  $M_{i3}$  і сила корисного опору  $\vec{F}_{KO}$ . Відкинуті зв'язки замінено реакцією в шарнірі A –  $\vec{R}_{23}$ , яку для зручності розрахунків розкладено на складові: нормальну  $\vec{R}_{23}^n$ , лінія дії якої паралельна АВ, і тангенціальну  $\vec{R}_{23}^t$ , спрямовану по перпендикуляру до АВ. У парі повзун-напрявні відкинуті зв'язки замінено реакцією  $\vec{R}_{14}$  з лінією її дії, що перпендикулярна напрямним. Знак напрямку векторів реакцій указано довільно і уточнюється при подальших розрахунках. Отриману схему прикладення сил до діади шатун-повзун наведено на рис. П3.1.

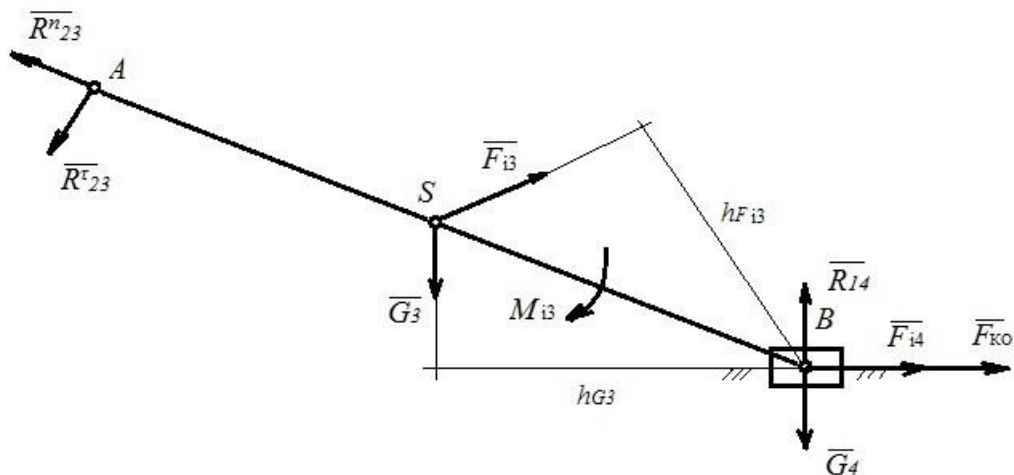


Рисунок П3.1 – Схема прикладення сил до діади шатун-повзун

Для визначення величини і напрямку реакції  $\overrightarrow{R}_{23}^{\tau}$  складено рівняння рівноваги моментів сил відносно точки В:

$$\sum M_B = 0 \quad R_{23}^{\tau} \cdot l_{AB} \cdot \mu_l - F_{i3} \cdot h_{Fi3} \cdot \mu_l + G_3 \cdot h_{G3} \cdot \mu_l - M_{i3} = 0.$$

З отриманого рівняння визначено величину реакції  $\overrightarrow{R}_{23}^{\tau}$ :

$$R_{23}^{\tau} = \frac{F_{i3} \cdot h_{Fi3} \cdot \mu_l - G_3 \cdot h_{G3} \cdot \mu_l + M_{i3}}{l_{AB} \cdot \mu_l}.$$

Реакції  $\overrightarrow{R}_{23}^n$  і  $\overrightarrow{R}_{14}$  визначається графічно з умови статичної рівноваги діади шатун-повзун. Записують векторне рівняння, групуючи усі сили, що діють на третю ланку (шатун), потім сили, що діють на четверту ланку (повзун). Сили, що діють на одну ланку, можуть розташовуватися у будь-якій послідовності, зручній для наочності креслення. Невідома реакція  $\overrightarrow{R}_{23}^n$  має бути на початку формули, а друга невідома реакція  $\overrightarrow{R}_{14}$  – у кінці:

$$\overrightarrow{R}_{23}^n + \overrightarrow{R}_{23}^{\tau} + \overrightarrow{G}_3 + \overrightarrow{F}_{i3} + \overrightarrow{G}_4 + \overrightarrow{F}_{i4} + \overrightarrow{F}_{KO} + \overrightarrow{R}_{14} = 0.$$

Отримано векторне рівняння з двома невідомими, яке може бути розв'язане за допомогою графічного способу.

План сил будується у масштабі  $\mu_F = \frac{F_{KO}}{l_{FKO}} = \frac{\text{Н}}{\text{мм}}$ . Довжини векторів сил у заданому

масштабі мають вид:

$$l_{R_{23}^{\tau}} = \frac{R_{23}^{\tau}}{\mu_F}; \quad l_{G_3} = \frac{G_3}{\mu_F}; \quad l_{G_4} = \frac{G_4}{\mu_F}; \quad l_{F_{i3}} = \frac{F_{i3}}{\mu_F}; \quad l_{F_{i4}} = \frac{F_{i4}}{\mu_F}.$$

Через довільну точку  $P_F$  проводять лінію дії вектора  $\overrightarrow{R}_{23}^n$  паралельно АВ. З цієї ж точки проводять вектор  $\overrightarrow{R}_{23}^{\tau}$  перпендикулярно положенню шатуна завдовжки  $l_{R_{23}^{\tau}}$ . До нього згідно з рівнянням послідовно додають інші відомі вектори сил. Далі через кінець вектора  $\overrightarrow{F}_{KO}$  проводять лінію дії реакції  $\overrightarrow{R}_{14}$  перпендикулярно ОВ. Відповідно до статичної рівноваги групи шатун-повзун багатокутник сил має бути замкнутим. Точка перерізу ліній дії векторів  $\overrightarrow{R}_{23}^n$  і  $\overrightarrow{R}_{14}$  (точка k) визначить їх величину і знак напрямку. Повну реакцію  $\overrightarrow{R}_{23}$  у шарнірі А визначають як суму векторів  $\overrightarrow{R}_{23}^{\tau}$  і  $\overrightarrow{R}_{23}^n$  (рис. ПЗ.2). Для визначення реакції у шарнірі В складають рівняння рівноваги сил, що діють на шатун:

$$\overrightarrow{R}_{23} + \overrightarrow{G}_3 + \overrightarrow{F}_{i3} + \overrightarrow{R}_{34} = 0.$$

Тоді з плану сил (рис. 4.14) вектор, що сполучає кінець вектора  $\overrightarrow{F}_{i3}$  і початок вектора  $\overrightarrow{R}_{23}$ , визначить реакцію  $\overrightarrow{R}_{34}$ .

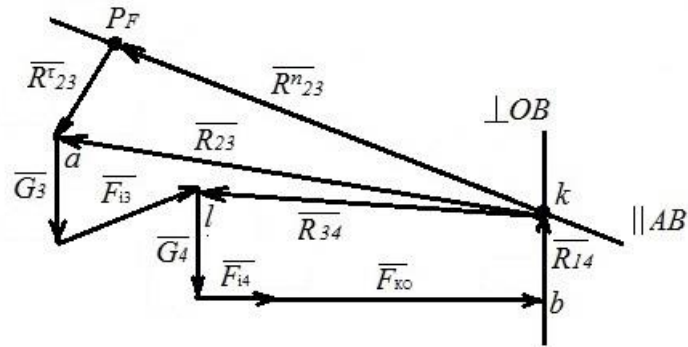


Рисунок П3.2 – План сил

Помноживши відповідні довжини на масштабний коефіцієнт, отримують:

$$R_{23}^n = |kP_F| \cdot \mu_F; \quad R_{23} = |ka| \cdot \mu_F; \quad R_{14} = |bk| \cdot \mu_F \quad R_{34} = |kl| \cdot \mu_F.$$

Після визначення реакцій у діаді шатун-повзун проводять силовий аналіз початкової ланки – кривошипа.

Прикладають до виділеного з плану положень механізму (див. рис. П2.1) кривошипа реакцію  $\overline{R}_{32}$  зв'язку в шарнірі А, рівну за величиною, але протилежно спрямовану реакції  $\overline{R}_{23}$ , і зрівноважувальну силу  $\overline{F}_3$ , вектор якої прикладають в точці А перпендикулярно положенню кривошипа за напрямком обертання (рис. П3.3).

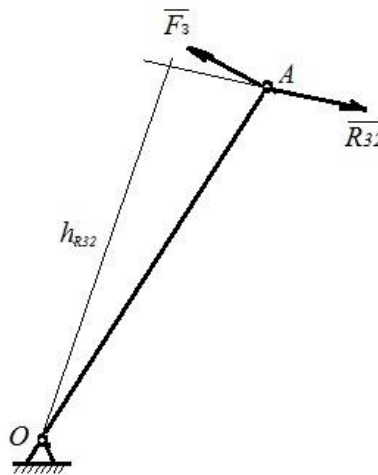


Рисунок П3.3 – Схема прикладення сил до кривошипа

Для визначення зрівноважувальної сили  $\overline{F}_3$  складають рівняння рівноваги моментів сил, що діють на кривошип відносно точки О:

$$F_3 \cdot l_{OA} \cdot \mu_l - R_{32} \cdot h_{R32} \cdot \mu_l = 0.$$

З отриманого рівняння визначають  $F_3$ :

$$F_3 = \frac{R_{32} \cdot h_{R32}}{l_{OA}}.$$

Виконаємо неповний кінетостатичний аналіз на прикладі кривошипно-повзунного механізму, який розглядався раніше.

Згідно з методом Жуковського план швидкостей (див. рис. П2. 3) повертаємо на  $90^\circ$  у будь-яку сторону. У відповідні точки на плані переносимо усі задані зовнішні сили, прикладені до механізму. Для цього спочатку у відповідні точки розрахункової схеми

механізму наносимо зовнішні сили, а момент сил інерції  $M_{i3}$  замінюємо парою сил  $\vec{F}_i'$  і  $\vec{F}_i''$ , прикладених у точках А і В перпендикулярно до ланки АВ у ту сторону, щоб створюваний ними момент дорівнював  $M_{i3}$ :

$$\left| \vec{F}_i' \right| = \left| \vec{F}_i'' \right| = \frac{M_{i3}}{l_{AB} \cdot \mu_l}.$$

Здійснивши паралельне перенесення усіх сил зі схеми механізму на важіль Жуковського, отримаємо розрахункову схему (рис. ПЗ.4).

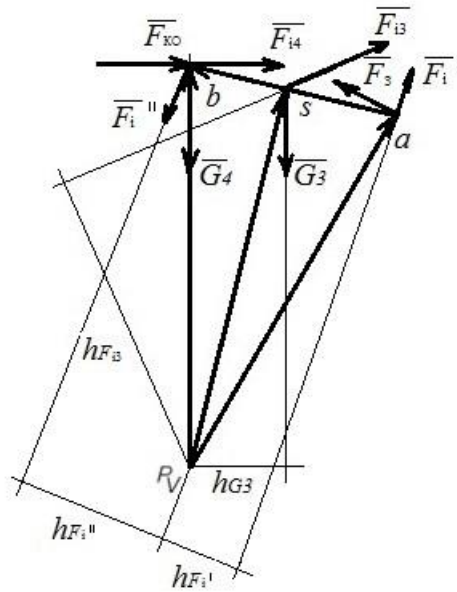


Рисунок ПЗ.4 – Важіль Жуковського

Складемо рівняння рівноваги моментів усіх сил відносно полюса плану швидкостей точки  $P_v$ :

$$F_3 \cdot |P_v a| \cdot \mu_v - F_{i3} \cdot h_{F_{i3}} \cdot \mu_v - G_3 \cdot h_{G_3} \cdot \mu_v - F_{KO} \cdot |P_v b| \cdot \mu_v - F_{i4} \cdot |P_v b| \cdot \mu_v + \\ + F_i' \cdot h_{F_i'} \cdot \mu_v + F_i'' \cdot h_{F_i''} \cdot \mu_v = 0.$$

З цього рівняння визначаємо величину зрівноважувальної сили  $F_3$ :

$$F_3 = \frac{\sum F_i \cdot h_{F_i}}{h_{F_3}}.$$

## **2. ОСНОВИ РОЗРАХУНКІВ НА МІЦНІСТЬ**

### **2.1. Внутрішні чинники напружено-деформованого стану**

#### **2.1.1. Основні поняття про опір матеріалів**

Опором матеріалів називають дисципліну про інженерні методи розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин і споруд. Отож, розрахунки на міцність складають першу задачу опору матеріалів, розрахунки на жорсткість – другу задачу і розрахунки на стійкість – третю задачу.

Міцність – здатність конструкції чинити опір руйнуванню.

Жорсткість – здатність конструкції чинити опір деформаціям.

Стійкість – здатність конструкції чинити опір зміні своєї первинної геометричної форми.

Щоб конструкція в цілому відповідала вимогам міцності, жорсткості і стійкості в експлуатації, необхідно задати її елементам найбільш раціональну форму і, знаючи властивості матеріалів, з яких вони виготовлятимуться, визначити відповідні геометричні розміри залежно від величини і характеру діючих сил.

В опорі матеріалів розглядаються конструкції, які змінюють свої розміри і геометричну форму, тобто деформуються на відміну від теоретичної механіки, де всі тіла абсолютно тверді.

Деформація яка повністю зникає після зняття навантажень – пружна деформація. Деформація, яка повністю або частково залишається після зняття зовнішнього навантаження – залишкова або пластична деформація.

В дисципліні з опору матеріалів розглядаються тільки пружні деформації.

Для спрощення розрахунків без втрати їх точності в опорі матеріалів приймаються наступні гіпотези:

#### **1. Гіпотеза плоских перерізів.**

Будь який плоский перетин узятий до деформації залишається плоским і після деформації. Гіпотеза підтверджується експериментально для перерізів віддалених від місця прикладення сили.

## 2. Гіпотеза малих деформацій.

Пружні деформації, які отримує тіло, малі в порівнянні з лінійними розмірами самого тіла (точки прикладення сил до і після деформації не змінюються).

## 3. Гіпотеза однорідності і нерозривності.

Весь об'єм тіла заповнений даним матеріалом і властивості цього матеріалу однакові в усіх точках і по всіх напрямках; такі матеріали називаються ізотропними (сталі, мідь). Якщо властивості матеріалу змінюються залежно від напрямку, або точки розгляду, то матеріал – анізотропний (деревина, полімер, чавун).

## 4. Гіпотеза незалежності дії сил.

Якщо на тіло діють декілька сил, то повна деформація тіла може бути представлена як сума деформацій одержаних тілом окремо від кожної сили (принцип суперпозиції).

Перераховані вище гіпотези дозволяють вирішувати широкий круг задач на міцність, жорсткість і стійкість. Результати розрахунків добре узгоджуються з даними експериментів.

Опір матеріалів вирішує вказані вище задачі, базуючись на теоретичних та експериментальних даних, що мають однаково важливе значення. Теоретичною базою опору матеріалів є теоретична механіка і математика, а експериментальною – фізика і матеріалознавство.

### **2.1.2. Розрахункова схема. Типові форми елементів конструкцій**

Розрахункова схема є спрощеним представленням реальної деталі, в якій свідомо не враховується ряд неістотних з погляду розрахунку, що проводиться, чинників.

Необхідність схематизації пояснюється тим, що розрахунки навіть простих тіл з урахуванням всіх конструктивних чинників стає громіздким і надто складним.

У розрахункових схемах геометрія будь-яких тіл уявляється у вигляді 4-х форм: брус, пластина, оболонка, об'ємне тіло.

Брус – тіло, у якого один розмір (довжина), значно перевищує два інші (поперечних) розміри (рис. 2.1). Брус з прямою віссю називається стрижнем.

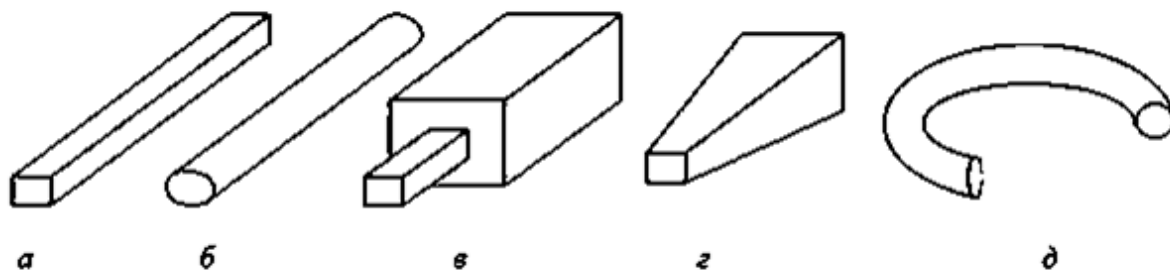
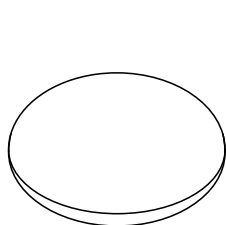


Рисунок 2.1 – Бруси: а – прямокутного постійного перерізу; б – кругового постійного перерізу; в – прямокутного ступінчастозмінного перерізу; г – прямокутного безперервнозмінного перерізу; д – криволінійний постійного перерізу.

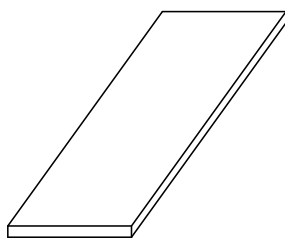
У машинах і спорудах зустрічаються стрижні як прямолінійні (рис. 2.1, а–г), так і криволінійні (рис. 2.1, д), як призматичні (рис. 2.1, а, б) так і змінного перерізу (рис. 2.1, в, г). Стрижні, у яких товщина стінки значно менше габаритних розмірів поперечного перерізу називаються тонкостінними.

Пластина і оболонка – тіла, товщина яких істотно менше за решту його розмірів (рис. 2.2-2.3).

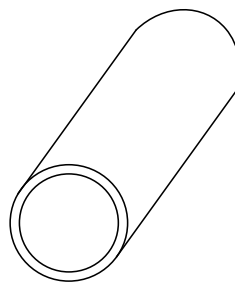


а

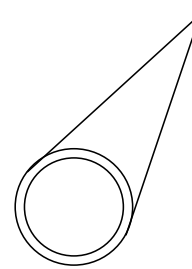
Рисунок 2.2 – Пластини:  
а – кругла; б – прямокутна



б



а



б

Рисунок 2.3 – Оболонки:  
а – циліндрова; б – конічна

Поверхня, яка ділить товщину пластини і оболонки на рівні частини, називається серединною. У пластин серединна поверхня є площиною. За формою серединної поверхні розрізняють оболонки: циліндрові, конічні, сферичні та ін.

Об'єкти, у яких всі три розміри спільномірні, називають об'ємними масивними тілами. До них належать фундаменти споруд, підпірні стінки і т. ін.

### 2.1.3. Класифікація сил, які розглядаються в опорі матеріалів

#### 1. Зовнішні і внутрішні.

Зовнішні – сили взаємодії тіл між собою. Внутрішні – сили, що виникають в тілі під дією зовнішніх сил, і які прагнуть повернути тіло у вихідний (недеформований) стан (вимірюються у Н, кН).

#### 2. Зосереджені і розподілені.

Зосереджені – сили, які діють на тіло по малій частині поверхні, що умовно приймається у вигляді геометричної точки (сили які абстрактно вводяться для спрощення розрахунків, вимірюються в Н, кН). Аналогічно вводиться поняття зосередженої пари або моменту (рис. 2.4), які вимірюються у Нм, кНм.

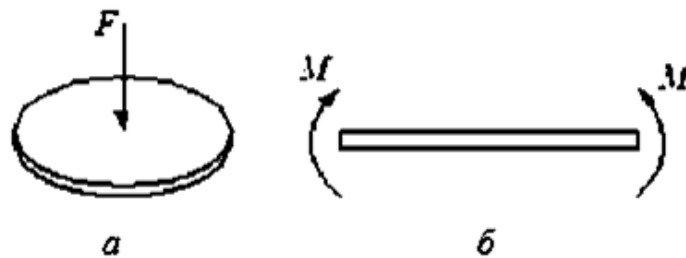


Рисунок 2.4 – Зосереджена сила (а) і момент (б)

Розподілені – сили, які діють по лінії (Н/м), поверхні (Н/м<sup>2</sup>), або у об'ємі (Н/м<sup>3</sup>). Приклади об'ємних сил – сили ваги, сили інерції). Розподілені сили можуть бути рівномірно і нерівномірно.

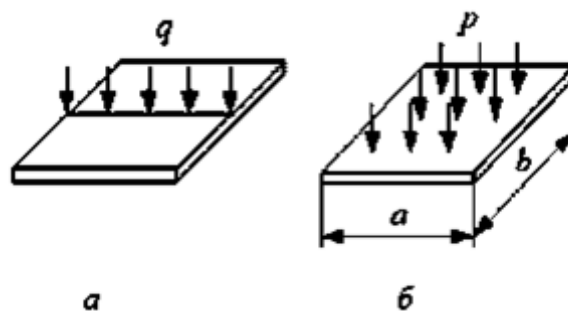


Рисунок 2.5 – Рівномірно розподілені сили: а – по лінії; б – по площині

### 3. Активні і реактивні.

Активні – зовнішні сили взаємодії тіл. Реактивні – сили виникають як реакції зв’язків.

### 4. Статичні і динамічні.

Статичні – сили, які протягом кінцевого часу зростають від нуля до свого номінального значення, і зберігають свою величину і напрям на тривалий термін (рис. 2.6, *a*).

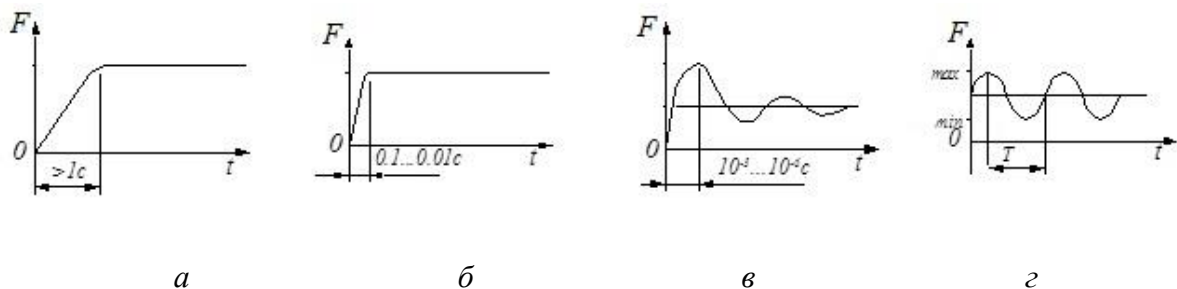


Рисунок 2.6 – Динамічні сили

Динамічні – сили, які супроводжуються значними прискореннями деформованого тіла і взаємодіючих з ним тіл, коли виникають сили інерції, якими не можна нехтувати. Динамічні сили поділяють на миттєво прикладені (рис. 2.6, *б*), ударні (рис. 2.6, *в*) і повторно-змінні (рис. 2.6, *з*).

#### 2.1.4. Метод перерізів. Внутрішні силові чинники

Нехай на тіло діє система зовнішніх сил ( $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ ); необхідно визначити внутрішні сили, що виникають в заданому перерізі I (рис. 2.7, *a*). Для визначення внутрішніх сил в елементі конструкції подумки одна розрізана частина тіла відкидається, а частина тіла, що залишилася, розглядається в стані рівноваги під дією решти внутрішніх і зовнішніх сил (рис. 2.7, *б*).

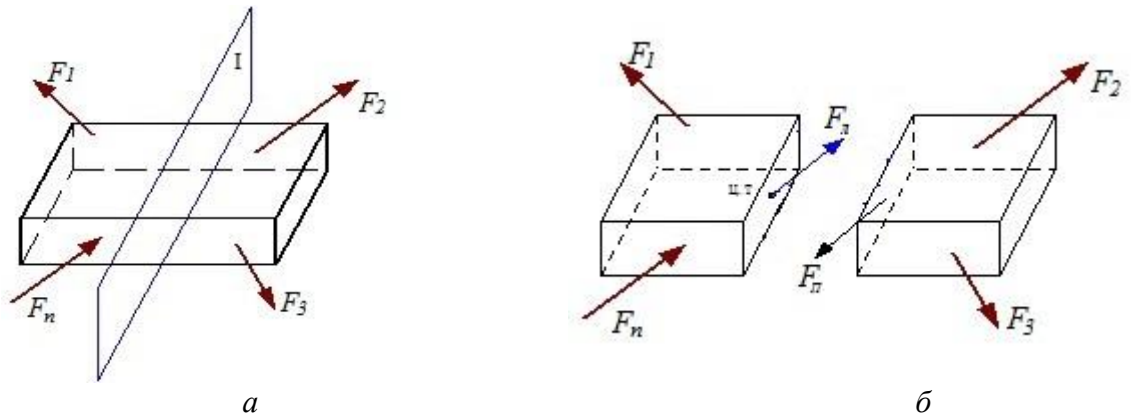


Рисунок 2.7 – Метод перерізів: а – вихідне положення; б – дві частини тіла після перерізу

Внутрішні сили, які діють на ліву частину тіла  $F_{II}$ , рівні за величиною, але протилежні за напрямом внутрішнім силам, які діють на праву частину тіла  $F_{II'}$ . Таке положення називають умовою безперервності деформацій.

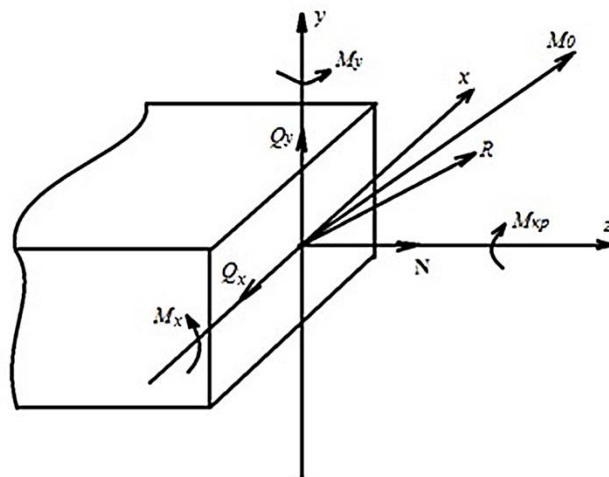


Рисунок 2.8 – Головний вектор сил  $\vec{R}$  і головний момент  $\vec{M}_0$

Приводячи внутрішні сили до центру тяжіння перерізу, одержують головний вектор сил  $\vec{R}$  і головний момент  $\vec{M}_0$ . Вибравши в центрі тяжіння перерізу початок системи координат  $x, y, z$  (вісь  $z$  – перпендикулярна перерізу;  $x, y$  – лежать в площині перерізу), вектори  $\vec{R}$  і  $\vec{M}_0$  можна розкласти на складові (проекції): сили  $N, Q_y, Q_x$  і моменти  $M_y, M_x, M_{kp}$  (рис. 2.8), де  $N$  – подовжня сила;  $Q_y, Q_x$  – поперечні сили;  $M_y, M_x$  – згинальні моменти;  $M_{kp}$  – крутильний момент.

Під дією сил (рис. 2.8) ліва частина тіла знаходиться в рівновазі, тобто для неї повинні виконуватися шість рівнянь рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum F_z = 0; \\ \sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Розв'язуючи шість рівнянь статички з шістьма невідомими, можна знайти невідомі внутрішні силові чинники.

Для полегшення розуміння студентів, цей метод доречно називати методом Р.В.З.У., що розшифровується, як розрізати, відкинути, замінити, урівноважити.

### 2.1.6. Напруження. Переміщення і деформації

Напруження характеризують інтенсивність навантаження і визначаються відношенням внутрішніх сил до площі на яку вони діють (рис. 2.9):

$$\bar{p}_{cp} = \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta A} \text{ – середнє значення напруження;}$$

$$\bar{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta A} = \frac{d\bar{R}}{dA} \text{ – дійсне значення напруження в точці.}$$

Якщо внутрішні сили рівномірно розподілені по перерізу, то:

$$p = \frac{\bar{R}}{A}. \quad (2.2)$$

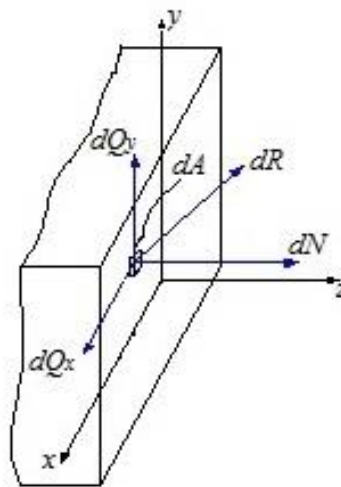


Рисунок 2.9 – Проекції головного вектору сил на осі

У загальному випадку вектор напруження направлений під деяким кутом до перерізу. Прийнято, що вісь  $z$  – перпендикулярна перерізу, тоді  $x, y$  – лежать в площині перерізу. Проекція напруження  $\vec{p}$  на вісь  $z$  називається нормальним напруженням  $\sigma$ , а проекції на осі  $x$  і  $y$  – дотичні напруження  $\tau_y, \tau_x$ . Вимірюють в одиницях напруження – паскалях ( $\text{Па} = \text{Н}/\text{м}^2$ ) та мегапаскалях ( $\text{МПа} = 10^6 \text{ Н}/\text{м}^2 = \text{Н}/\text{мм}^2$ ).

З урахуванням проекцій головного вектора сил  $\vec{R}$  на осі (рис. 2.9):

$$\sigma = \frac{dN}{dA}, \quad \tau_x = \frac{dQ_x}{dA}, \quad \tau_y = \frac{dQ_y}{dA}. \quad (2.3)$$

Повне дотичне напруження:

$$\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}. \quad (2.4)$$

Повне напруження в точці:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau_x^2 + \tau_y^2}. \quad (2.5)$$

Напруження  $\sigma$  в перерізі тіла намагається роздвинути його частини, напруження  $\tau$  – здвинути його частини.

Під дією зовнішніх сил  $N \neq 0$  ( $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ ) точки одержують переміщення  $\Delta l$  (рис. 2.10).

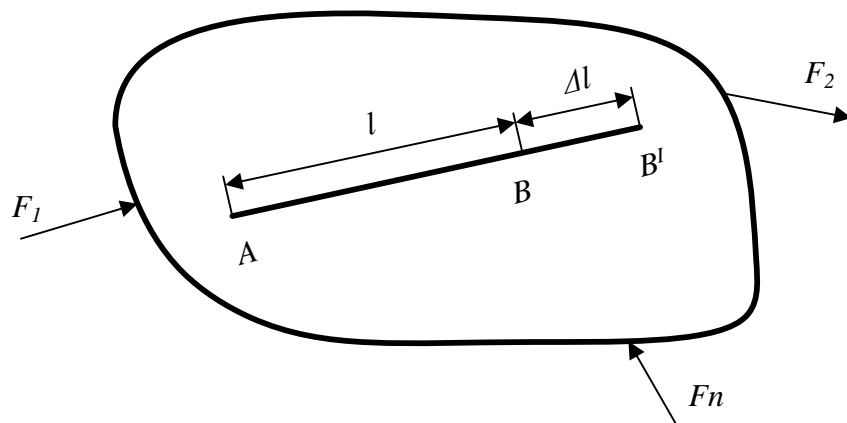


Рисунок 2.10 – Взаємне переміщення точок А і В тіла

Деформацією називається відносне переміщення точок тіла. Середнє значення деформації  $\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta l}{l}$ ; дійсне значення деформації  $\varepsilon = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{l}$ . У загальному випадку деформація може розглядатися в проекціях на координатні осі:  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ . Повна деформація:

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2}. \quad (2.6)$$

Залежно від того, які внутрішні силові чинники виникають в перерізі, розрізняють наступні види деформації:

- розтяг-стиск ( $N \neq 0$ , інші відсутні);
- кручення ( $M_{кр} \neq 0$ , інші відсутні);
- чистий згин ( $M_x \neq 0$ ,  $M_y \neq 0$ ,  $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \neq 0$ , інші відсутні);
- чистий зсув ( $Q_x \neq 0$ ,  $Q_y \neq 0$ ,  $Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} \neq 0$ , інші відсутні);
- поперечний згин ( $Q_x \neq 0$ ,  $Q_y \neq 0$ ,  $M_x \neq 0$ ,  $M_y \neq 0$ ,  $Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} \neq 0$ , інші відсутні).

Вищезначені види деформацій називаються простими.

### Контрольні запитання

1. Завдання і мета науки опір матеріалів.
2. Що розуміють під міцністю, жорсткістю і стійкістю матеріалів?
3. Що таке розрахункова схема деталі? Типові елементи конструкцій.
4. Як в опорі матеріалів класифікуються зовнішні сили?
5. Які гіпотези використовують в опорі матеріалів?
6. Внутрішні сили. Одиниці вимірювання, фізична суть внутрішніх сил. Методи визначення внутрішніх сил.
7. Що називається напруженням? В яких одиницях вимірюють напруження?
8. Що називають деформацією тіла? Зв'язок відносних лінійних деформацій і переміщень.

9. Що таке механічна деформація. Назвіть види простих деформацій.

## 2.2. Розтяг-стиск

### 2.2.1. Розтяг-стиск. Внутрішні сили і напруження

Розтяг-стиск – це такий вид деформації, при якому під дією зовнішніх силових чинників в кожному поперечному перерізі тіла виникає тільки один внутрішній силовий чинник – подовжня сила пружності  $N$ . Решта силових чинників відсутня.

Для визначення внутрішніх силових чинників, що діють в перерізі I-I на стержень під дією сили  $F$  (рис. 2.11), необхідно скористатися методом перерізів. Для цього відкидається верхня частина стержня, а нижня розглядається в стані рівноваги під дією всіх зовнішніх і внутрішніх сил.

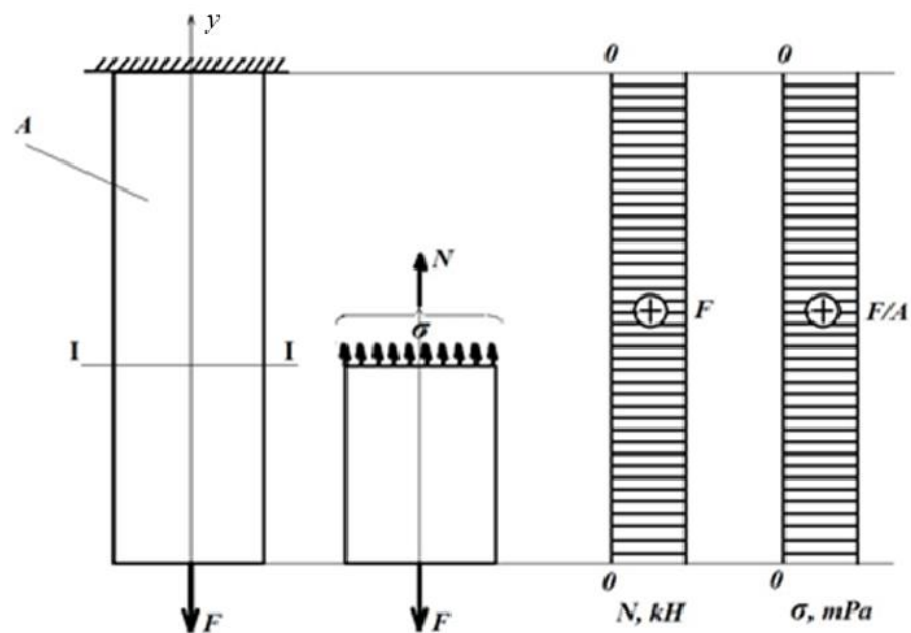


Рисунок 2.11 – Епюри подовжніх сил і напружень

У кожній точці перерізу виникне внутрішнє зусилля  $\sigma$ , рівнодіючою якого буде сила  $N$ . Оскільки внутрішні зусилля в перетинах, віддалених від місць прикладення зосереджених зусиль, розподілені рівномірно по перерізу, то

$$N = \int_A \sigma dA; \quad \sigma \rightarrow const; \quad N = \sigma \int_A dA = \sigma A. \quad (2.7)$$

$\sigma = \frac{N}{A}$  – за визначенням напруження в перерізі.

З умови рівноваги нижньої частини  $\sum F_y = 0$  маємо  $N = F$  і  $\sigma = \frac{F}{A}$ .

Графічне зображення зміни сили  $N$  і напруження  $\sigma$  уздовж осі стержня, що називається епюрою, показано на рис. 2.11. Кожна лінія на епюрі в масштабі побудови відповідає внутрішньому силовому чиннику в даному перерізі, де 0-0 – базова лінія епюри.

Якщо сила  $N$  спрямована від перерізу, то виникає деформація розтягу з умовним позначенням «+»; якщо  $N$  спрямована до перерізу – деформація стиску з умовним позначенням «-».

### 2.2.2. Закон Гука, коефіцієнт Пуассона

До стержня завдовжки  $l$  і діаметром  $d$  прикладена сила  $F$ , під дією якої стержень подовжується на величину  $\Delta l = l_1 - l$  і звужується на величину  $\Delta d = d - d_1$  (рис. 2.12).

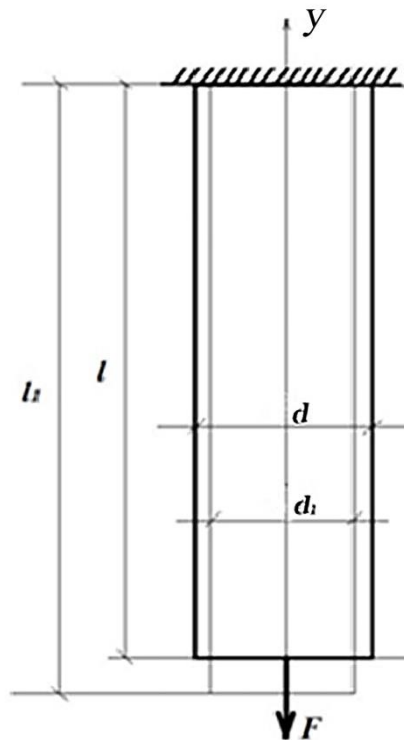


Рисунок 2.12 – Розтяг стержня

Відношення подовження до первинної довжини стрижня – подовжня деформація  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ . Експериментально встановлено, що між подовжньою де-

формацією і нормальними напруженням  $\sigma$  прямо пропорційна залежність:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon . \quad (2.8)$$

Формула (2.8) називається законом Гука в межах пружної деформації (за прізвищем англійського вченого, що вперше встановив її в 1660 р.).

Закон Гука може бути сформульований таким чином: подовжня деформація прямо пропорційна відповідному нормальному напруженню. Величина  $E$ , яка входить у формулу (2.8), є однією з найважливіших фізичних констант матеріалу. Вона характеризує його жорсткість, тобто здатність чинити опір пружній деформації. Ця величина називається модулем подовжньої пружності, вимірюється в тих же одиницях, що і напруження – Н/м<sup>2</sup> (Па), Н/мм<sup>2</sup> (МПа). Значення модулів пружності для деяких матеріалів представлені в табл. 2.1.

Таблиця 2.1.

Матеріал	E, МПа
Сталь	2...2,1*10 <sup>5</sup>
Чавун	0,75...1,6*10 <sup>5</sup>
Мідь	1,2*10 <sup>5</sup>
Алюміній	0,8*10 <sup>5</sup>

Підставивши у формулу (2.8) значення нормального напруження  $\sigma = \frac{N}{A}$

і подовжньої деформації  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ , визначають зміну довжини стержня:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} . \quad (2.9)$$

Одержаний вираз називають законом Гука в компонентах переміщень. Він показує, що подовження (скорочення) при розтягу (стиску) залежить від величини подовжньої сили  $N$ , площі поперечного перерізу  $A$  стержня, його

довжини  $l$  і модуля подовжньої пружності  $E$ . Добуток  $EA$  називається жорсткістю перерізу стержня при розтягу (стиску).

По аналогії з подовжньою деформацією є поняття поперечної деформації –  $\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d}$ . Експерименти показують, що відношення поперечної деформації  $\varepsilon'$  до подовжньої  $\varepsilon$  не залежить від  $N$  і визначається тільки властивостями матеріалу. Тоді:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|, \quad (2.10)$$

називається коефіцієнтом Пуассона. Коефіцієнт Пуассона – безрозмірна величина, що характеризує здатність матеріалу деформуватися в поперечному напрямі при розтягу або стиску його в подовжньому напрямі, причому  $\varepsilon' = -\mu \cdot \varepsilon$  (повздовжня деформація спричинена розтягом, а поперечна – стиском). Значення коефіцієнта Пуассона для різних матеріалів визначається експериментальним шляхом при випробуваннях зразків і лежить в межах  $0 \leq \mu \leq 0,5$ . Наприклад, для пробки  $\mu = 0$ , для гуми  $\mu = 0,48$ , для сталей  $\mu = 0,25 - 0,3$ .

### 2.2.3. Деформація при сумісній дії силового і температурного впливу

В процесі роботи багато деталей знаходяться під сумісною дією силового і температурного впливу. У такому разі на основі гіпотези незалежності дії сил зміну довжини стержня можна представити в наступному вигляді:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} + l\alpha\Delta T, \quad (2.11)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт лінійного температурного розширення;  $\Delta T$  – зміна температури.

Після перетворення (2.11) отримують вираз для деформації при сумісній силевій і температурній дії

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{EA} + \alpha\Delta T \rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha\Delta T. \quad (2.12)$$

Для сталей залежність (2.13) виконується в межах температур 300-400 °С, оскільки при вищих температурах залежністю від температури модуля пружності  $E$  і коефіцієнту температурного розширення  $\alpha$  нехтувати не можливо.

#### 2.2.4. Напруження в перетинах, розташованих під кутом

У довільно розташованому під кутом  $\alpha$  перерізі  $n - m$  напруження позначають як  $P$  (рис. 2.13, б), нормальні напруження в перетинах перпендикулярних осі –  $\sigma$  (рис. 2.13, а).

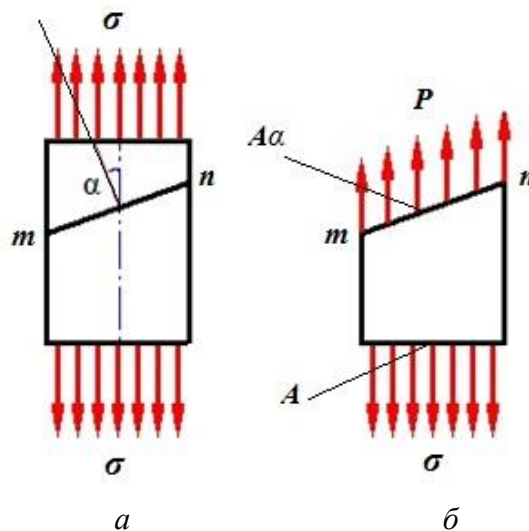


Рисунок 2.13 – Напруження в перетинах стержня

Залежність між величиною площі  $A_\alpha$  перерізу розташованого, під кутом, і величиною площі  $A$  перерізу, перпендикулярного осі, має вид

$$A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha}.$$

Залежність між напруженнями  $\sigma$  і  $P$  встановлена на основі методу перерізів при розгляданні статичної рівноваги нижньої частини стержня

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \sigma A = P A_\alpha \rightarrow P = \sigma \cos \alpha. \quad (2.13)$$

Напруження  $P$  можна уявити складовими  $\sigma_\alpha$  і  $\tau_\alpha$  (рис. 2.14).

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha} &= P \cdot \cos \alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha; \\ \tau_{\alpha} &= P \cdot \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha.\end{aligned}\quad (2.14)$$

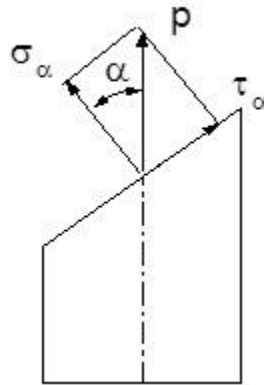


Рисунок 2.14 – Складові напруження P

Дослідження виразу (2.14) залежно від величини кута нахилу перерізу  $\alpha$  показує, що:

при  $\alpha = 0^\circ$  маємо  $\sigma_{\alpha} = \sigma$ ,  $\tau_{\alpha} = 0$ ;

при  $\alpha = \pm 45^\circ$ ;  $\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma}{2}$ ,  $\tau_{\alpha} = \pm \frac{\sigma}{2} = \tau_{\max}$ ;

при  $\alpha = 90^\circ$ ;  $\sigma_{\alpha} = 0$ ,  $\tau_{\alpha} = 0$ .

Отже, у подовжніх волокнах ( $\alpha = 90^\circ$ ) нормальні і дотичні напруження відсутні, в поперечних волокнах ( $\alpha = 0^\circ$ ) нормальні напруження – максимальні; дотичні рівні нулю. При  $\alpha = \pm 45^\circ$  дотичні напруження досягають свого максимуму.

Напруження, які виникають у перетинах під кутом  $\alpha + 90^\circ$ :

$$\sigma_{\alpha+90} = \sigma \cdot \cos^2(\alpha + 90) = \sigma \cdot \sin^2 \alpha; \quad (2.15)$$

$$\tau_{\alpha+90} = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2(\alpha + 90) = -\frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha. \quad (2.16)$$

З виразу (2.16) постає закон парності дотичних напружень: дотичні напруження на 2-х взаємоперпендикулярних і нескінченно малих площинах рівні за величиною і протилежні за знаком, тобто напрямком (рис. 2.15).

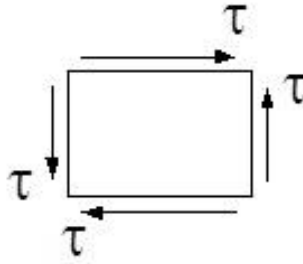


Рисунок 2.15 – Парні дотичні напруження

### 2.2.6. Запас міцності. Допустимі напруження. Умова міцності і жорсткості

Розрахунок конструкції починається з вибору матеріалу, що враховує умови роботи. Механічні випробування матеріалу дають граничні значення напружень, досягнення яких в конструкції спричиняє руйнування або появу неприпустимих деформацій.

Основним завданням розрахунку конструкції є забезпечення її безпечної експлуатації. Для безпечної роботи напруження в конструкції повинні бути нижче за граничні напруження, тобто повинна виконуватися умова міцності. Тому другим питанням розрахунку є вибір безпечного, або допустимого напруження  $[\sigma]$ .

Допустиме напруження – найбільше напруження, при якому забезпечується міцність конструкції. Залежно від виду навантаження і матеріалу при виборі допустимого напруження використовується різні граничні напруження:  $\sigma_{\text{lim}} = \sigma_T$  – межа текучості для пластичних матеріалів;  $\sigma_{\text{lim}} = \sigma_B$  – межа міцності для крихких матеріалів. Допустимі напруження, складають деяку частку від граничних –  $\sigma_{\text{lim}}$ . При статичному навантаженні тіла значення допустимих напружень визначають як:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{n}, \quad (2.17)$$

де  $n$  – запас міцності, тобто число, що показує у скільки разів допустиме напруження менше граничного.

Запас міцності повинен бути вибраний так, щоб покрити неточність визначення навантажень і напружень; вибирається тим більшим, чим відповідальніше має бути конструкція. Встановлення величини допустимого напруження є дуже важливим питанням. Якщо воно вибране великим, то конструкція буде неміцною і, навпаки, при заниженому  $[\sigma]$  розміри конструкцій будуть надмірно великими, що сприятиме великій вазі конструкції і її удорожчання. Деякі галузі машинобудування мають норми для допустимих напружень, проте дати загальні норми, що придатні для всіх випадків, не можна.

Для конструкцій, що працюють на розтяг-стиск, умову міцності для небезпечного перерізу, призначають як:

$$\sigma_{\max} = \left[ \frac{N}{A} \right]_{\max} \leq [\sigma]. \quad (2.18)$$

Вираз (2.19) дозволяє вирішувати наступні типи задач:

1. За заданим зовнішнім навантаженням і допустимим напруженням  $[\sigma]$  визначити необхідну площу перерізу  $A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]}$  (проектний розрахунок);
2. За заданою площею перерізу і допустимим напруженням  $[\sigma]$  визначити навантаження, які допускаються;
3. За заданим зовнішнім навантаженням і площею поперечного перерізу здійснити перевірку на міцність (перевірочний розрахунок).

В деяких випадках працездатність конструкції визначається не тільки його міцністю, але і жорсткістю, тобто здатністю елемента сприймати навантаження без неприпустимих пружних деформацій. При розрахунках на жорсткість визначають максимальні переміщення перерізів і зіставляють їх з переміщеннями, що допускаються. Умова жорсткості, що обмежує зміну розмірів тіла, має вигляд:

$$\Delta l \leq [\Delta l], \quad (2.19)$$

де  $\Delta l$  – зміна розмірів тіла;  $[\Delta l]$  – величина допустимої зміни розмірів тіла.

Враховуючи, що при розтягу-стиску абсолютне подовження в загальному вигляді визначається як алгебраїчна сума величин по ділянках, умову жорсткості уявляють у вигляді:

$$\sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{E_i A_i} \leq [\Delta l]. \quad (2.20)$$

### Контрольні запитання

1. Що називається деформацією розтяг-стиск?
2. Які напруження виникають в поперечному перерізі бруса при розтязі-стискові?
3. Сформулюйте закон Гука. Як він виражається математично?
4. Що характеризує модуль поздовжньої пружності матеріалу та його одиниця вимірювання?
5. Що називається коефіцієнтом Пуассона? У яких межах змінюється коефіцієнт Пуассона?
6. Запишіть деформацію при сумісній дії силового і температурного впливів.
7. Як визначаються нормальні і дотичні напруження на нахилених площадках? На яких площадках нормальні напруження досягають максимальних значень, на яких дотичні напруження максимальні?
8. Поясніть суть закону парності дотичних напружень.
9. В чому полягає умова міцності при розтязі-стискові?
10. Які фактори впливають на вибір величини допустимої напруги та коефіцієнта запасу міцності?
11. Запишіть умову жорсткості при деформаціях розтяг-стиск.

## Приклади розрахунків

**Приклад 4.** Для перерізів стержня прямокутного ступінчастозмінного перерізу на рисунку П4.1 показані епюри зміни сили  $N$ , напруження  $\sigma$ , зміни довжини  $\Delta l$ .

Побудову епюр  $N$ ,  $\sigma$  починають з нижнього кінця стержня застосовуючи метод перерізу. Для чотирьох ділянок стержня, де  $N$  незмінні, вирази для подовжніх зусиль і нормальних напружень мають вид:

$$0 \leq z_1 \leq l \quad N_1 = 2 \cdot F; \quad \sigma_1 = \frac{2 \cdot F}{2 \cdot A} = \frac{F}{A};$$

$$l \leq z_2 \leq 2 \cdot l \quad N_2 = 2 \cdot F - F = F; \quad \sigma_2 = \frac{F}{2 \cdot A};$$

$$2 \cdot l \leq z_3 \leq 3 \cdot l \quad N_3 = 2 \cdot F - F - F = 0; \quad \sigma_3 = \frac{0}{A} = 0;$$

$$3 \cdot l \leq z_4 \leq 4 \cdot l \quad N_4 = 2 \cdot F - F - F + 3 \cdot F = 3 \cdot F; \quad \sigma_4 = \frac{3 \cdot F}{A}.$$

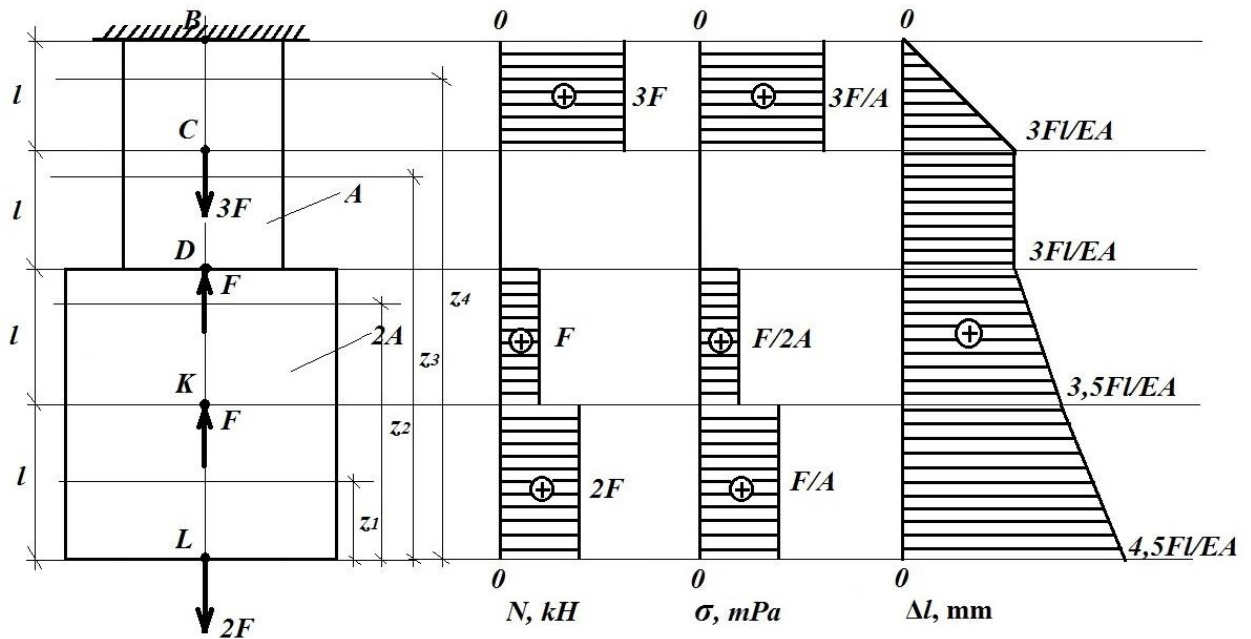


Рисунок П4.1 – Приклад побудови епюр

За одержаними функціями будують епюри  $N$  і  $\sigma$  (рис. П4.1).

Переміщення визначають у вибраних точках за законом Гука у компонентах переміщень (2.10), а побудову епюр переміщень розпочинають із защемленого кінця стержня, де його переміщення відомо ( $\Delta l = 0$ ).

$$\Delta l_B = 0;$$

$$\Delta l_C = \Delta l_B + \Delta l_{BC} = \frac{3 \cdot F \cdot l}{E \cdot A};$$

$$\Delta l_D = \Delta l_C + \Delta l_{CD} = \frac{3 \cdot F \cdot l}{E \cdot A} + 0;$$

$$\Delta l_K = \Delta l_D + \Delta l_{DK} = \frac{3 \cdot F \cdot l}{E \cdot A} + \frac{F \cdot l}{E \cdot 2 \cdot A} = \frac{3,5 \cdot F \cdot l}{E \cdot A};$$

$$\Delta l_L = \Delta l_K + \Delta l_{KL} = \frac{3,5 \cdot F \cdot l}{E \cdot A} + \frac{2 \cdot F \cdot l}{E \cdot 2 \cdot A} = \frac{4,5 \cdot F \cdot l}{E \cdot A};$$

### 2.3. Геометричні характеристики плоских перерізів

#### 2.3.1. Поняття про геометричні характеристики перерізів

Для перевірки умови міцності тіла необхідно знати напруження в поперечному перерізі, яке залежить не тільки від величини внутрішніх зусиль та площі поперечного перерізу, а і від орієнтації перерізу відносно зовнішнього навантаження. Проте, як свідчать розрахунки, при однакових параметрах розрахункових моделей балок (довжина  $l$ , площа перерізу  $b \cdot h$ , зовнішнє навантаження  $F$ ), що показані наприклад на рис. 2.16, величини прогинів їх консольних частин різні ( $f_2 > f_1$ ). Таким чином, при розрахунках конструкцій на міцність необхідно враховувати не тільки площу перерізу але і інші його геометричні характеристики, такі як статичний момент; осьовий, відцентровий та полярний моменти інерції; осьовий та полярний моменти опору, радіуси інерції. Ці характеристики визначаються розрахунками.

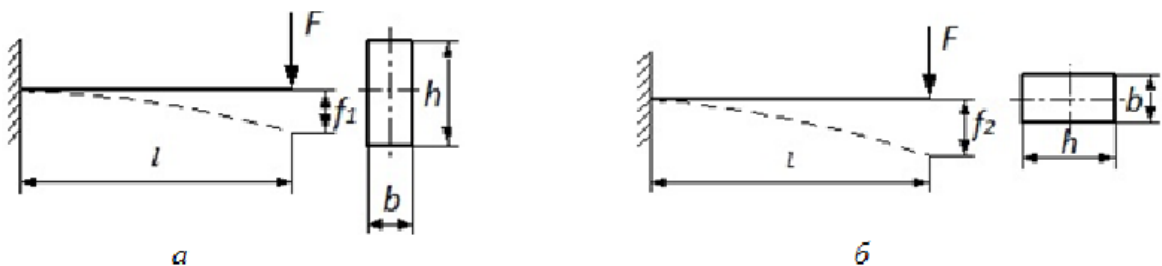


Рисунок 2.16 – Прогини балки: а – вертикальне розташування перерізу; б – горизонтальне розташування перерізу

### 2.3.2. Статичний момент перерізу. Центр тяжіння

Статичний момент перерізу – сума добутків елементарних перерізів  $dA$  на координати їх відстаней до відповідної осі  $x$  або  $y$  (рис. 2.17). Розмірність –  $\text{м}^3$ . Застосовується при визначенні центру тяжіння перерізу тіла.

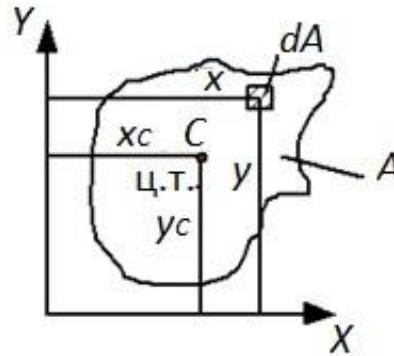


Рисунок 2.17 – Плоский перетин

Статичний момент перерізу відносно осі  $X$

$$S_x = \int_A y dA \quad (2.21)$$

Статичний момент перерізу відносно осі  $Y$

$$S_y = \int_A x dA \quad (2.22)$$

Статичний момент може бути позитивним, негативним, або рівним нулю.

З теоретичної механіки відомо, що координати центру тяжіння плоского перерізу можуть бути визначені з виразів:

$$x_c = \frac{1}{A} \int_A x dA = \frac{1}{A} S_y, \quad y_c = \frac{1}{A} \int_A y dA = \frac{1}{A} S_x. \quad (2.23)$$

З виразів (2.23) можна знайти статичні моменти фігури, якщо відома площа фігури і координати центру тяжіння.

$$S_y = x_c A; \quad S_x = y_c A. \quad (2.24)$$

З виразу (2.24) постає, що статичні моменти площі щодо центральних осей (осі, що проходять через центр тяжіння) рівні нулю (оскільки  $x_c = 0$ ,  $y_c = 0$ ).

Таким чином, осі, щодо яких статичний момент перерізу рівний нулю, називаються центральними, а точка перерізу центральних осей – центр тяжіння перерізу.

### 2.3.3. Статичний момент перерізу при паралельному переносі осей

Залежності між статичними моментами одного і того ж перерізу тіла щодо паралельних осей  $x, y$  і  $x_1, y_1$  визначають за схемою на рис. 2.13.

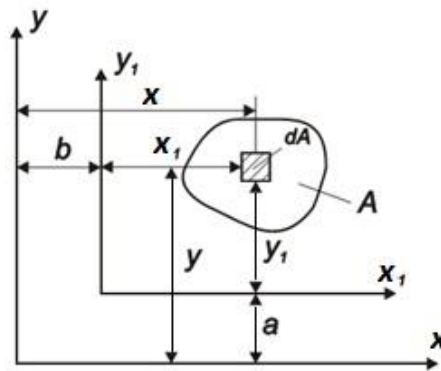


Рисунок 2.18 – Схема визначення  $S_x, S_y$  при паралельному переносі осей

Відповідно до виразу (2.21)

$$S_{x_1} = \int_A y_1 dA.$$

Проте, згідно побудові:

$$y_1 = y - a,$$

$$S_{x_1} = \int_A y_1 dA = \int_A (y - a) dA = S_x - aA. \quad (2.25)$$

Аналогічно визначають  $S_{y_1}$

$$x_1 = x - b,$$

$$S_{y_1} = \int_A x_1 dA = \int_A (x - b) dA = S_y - bA. \quad (2.26)$$

Якщо осі  $x_1, y_1$  проходять через центр тяжіння перерізу, то з раніше сказаного  $S_{x_1} = 0, S_{y_1} = 0$ , тоді:

$$x_c = b = \frac{S_y}{A} \quad y_c = a = \frac{S_x}{A}. \quad (2.27)$$

Отже, знаючи статичний момент перерізу і площу перерізу, можна визначити координату центра тяжіння.

### 2.3.4. Центр тяжіння складної фігури

Статичний момент складної фігури щодо деякої осі визначають як суму статичних моментів всіх частин цього перерізу щодо тієї ж осі.

$$S_x = S_{x_1} + S_{x_2} + \dots + S_{x_n} = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + \dots + A_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i; \quad (2.28)$$

$$S_y = S_{y_1} + S_{y_2} + \dots + S_{y_n} = A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \dots + A_n \cdot x_n = \sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i.$$

Координати центру тяжіння складної фігури можна знайти, скориставшись формулами (2.28). Отже:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \dots + A_n \cdot x_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n A_i}; \quad (2.29)$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + \dots + A_n \cdot y_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n A_i}.$$

Послідовність дій щодо визначення центру тяжіння складної фігури (рис. 2.19) наступна:

- розбити фігуру на прості частини;
- для частин визначити площі  $A_i$  і положення центру тяжіння  $x_i$  і  $y_i$ ;
- визначити  $x_c$  і  $y_c$  складної фігури за формулою (2.29).

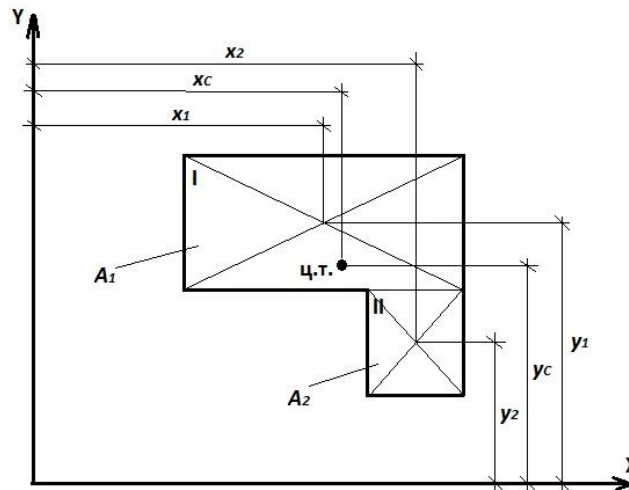


Рисунок 2.19 – Схема визначення центру тяжіння складної фігури

### 2.3.5. Моменти інерції плоских перерізів

Осьовим моментом інерції перерізу щодо деякої осі називається, узятая за всією його площею  $A$ , сума добутків елементарних перерізів  $dA$  на квадрати їх відстаней до осі (рис. 2.20). Розмірність –  $m^4$ .

$$I_x = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A x^2 dA \quad (2.30)$$

де  $I_x, I_y$  – моменти інерції плоского перерізу щодо осей  $X$  і  $Y$  відповідно.

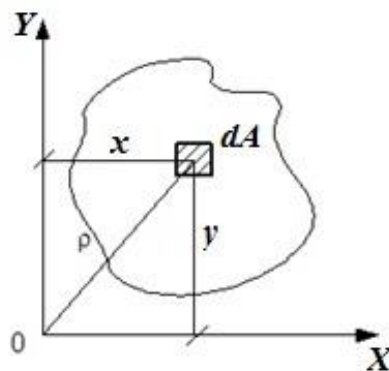


Рисунок 2.20 – Схема визначення осьових моментом інерції перерізу

Полярним моментом інерції площі перерізу щодо точки (полюса 0) називають суму добутків елементарних перерізів на квадрати їх відстаней від полюса. Розмірність –  $m^4$ .

$$I_p = \int_A \rho^2 dA, \quad (2.31)$$

де  $\rho^2 = y^2 + x^2$ .

З (2.31) постає:

$$I_p = \int_A (y^2 + x^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A x^2 dA = I_x + I_y. \quad (2.32)$$

Величини осьових і полярних моментів інерції завжди позитивні.

Відцентровим моментом інерції щодо вибраної системи відліку називається сума добутків площ елементарних перерізів на їх відстані від координатних осей  $X$  і  $Y$ :

$$I_{xy} = \int_A xy dA. \quad (2.33)$$

Залежно від положення осей відцентровий момент інерції може бути позитивним, від'ємним, або рівним нулю. Розмірність –  $m^4$ .

Застосовуються  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_p$  для визначення напружень у перетинах тіла при деформаціях згину і крутіння.

### 2.2.6. Моменти інерції перерізу при паралельному переносі осей

Для відомих моментів інерції перерізу  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_{xy}$  відносно осей  $X$  і  $Y$  (див. 2.30 і 2.33) треба визначити  $I_{x_1}$ ,  $I_{y_1}$ ,  $I_{xy_1}$  відносно осей  $X_1$  і  $Y_1$ .

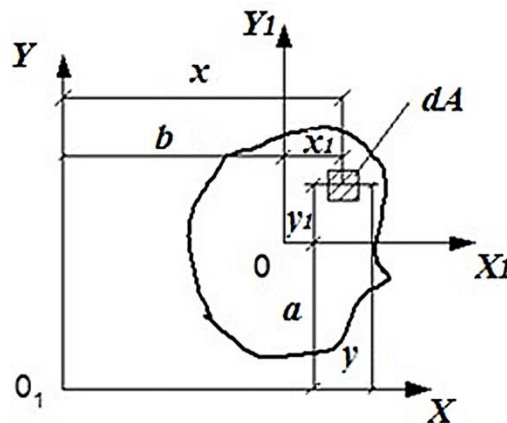


Рисунок 2.21 – Схема визначення  $I_x$ ,  $I_y$  при паралельному переносі осей

Координати будь-якої точки в новій системі  $x_1, y_1$  можна виразити через координати в старих осях:  $x_1 = x - b$ ;  $y_1 = y - a$ . Підставивши ці значення у формули (2.31 і 2.34) з наступним інтегруванням маємо:

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= \int_A y_1^2 dA = \int_A (y - a)^2 dA = \int_A y^2 dA + a^2 \int_A dA - 2a \int_A y dA = I_x + a^2 A - 2aS_x; \\ I_{y_1} &= \int_A x_1^2 dA = \int_A (x - b)^2 dA = \int_A x^2 dA + b^2 \int_A dA - 2b \int_A x dA = I_y + b^2 A - 2bS_y; \\ I_{x_1 y_1} &= \int_A x_1 y_1 dA = \int_A (x - b)(y - a) dA = \int_A xy dA + ab \int_A dA - a \int_A x dA - b \int_A y dA = \\ &= I_{xy} + abA - aS_y - bS_x. \end{aligned}$$

Якщо припустити, що осі  $X, Y$  проходять через центр тяжіння перерізу, то статичні моменти перерізу щодо цих осей рівні нулю ( $S_x = 0$  і  $S_y = 0$ ). Тоді:

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= I_x + a^2 A; \\ I_{y_1} &= I_y + b^2 A; \\ I_{x_1 y_1} &= I_{xy} + abA. \end{aligned} \quad (2.34)$$

### 2.3.7. Головні осі. Головні моменти інерції

Головними осями називаються осі, щодо яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю ( $I_{xy} = 0$ ), а осьові моменти приймають екстремальні значення (один максимальний, інший мінімальний).

Головні осі, що проходять через центр тяжіння перерізу, називаються головними центральними осями.

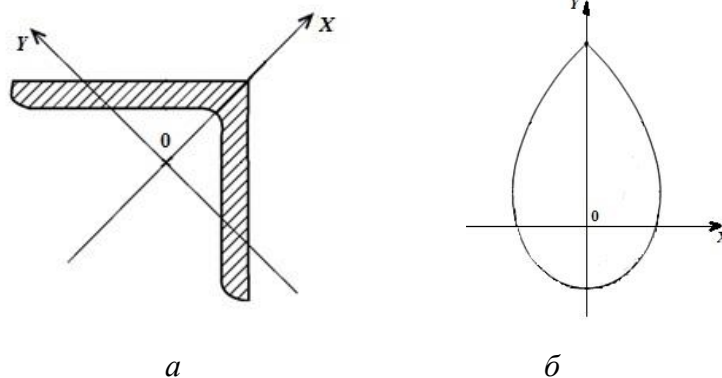


Рисунок 2.22 – Симетричні перерізи: а – куток; б – крапля

У багатьох випадках вдається відразу визначити положення головних центральних осей. Якщо фігура має вісь симетрії, то вона є однією з головних центральних осей, друга проходить через центр тяжіння перерізу перпендикулярно до першої.

Осьові моменти інерції щодо головних осей називаються головними моментами інерції і вони приймають екстремальне значення. Рівнобокий куточок:  $I_x - \min$ ;  $I_y - \max$  (рис. 2.22, а); крапля:  $I_y - \min$ ;  $I_x - \max$  (рис. 2.22, б).

### 2.3.8. Головні моменти інерції простих фігур

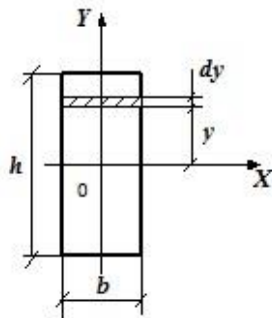


Рисунок 2.23 – Прямокутний перетин

Для визначення моменту інерції щодо осі  $x$  виділяють елементарний перетин у вигляді вузького прямокутника, паралельного осі  $x$ . Ширина елемента

$b$ , висота –  $dy$ . Отже,  $dA = bdy$

$$I_x = \int_A y^2 dA = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = 2b \int_0^{h/2} y^2 dy = \frac{bh^3}{12},$$

Аналогічно визначається момент інерції

$$\text{щодо осі } y: I_y = \frac{hb^3}{12}.$$

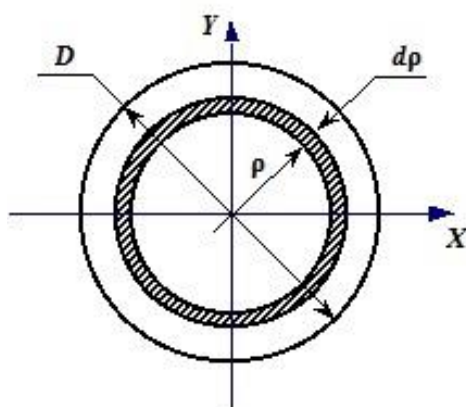


Рисунок 2.24 – Круглий перетин

При обчисленні полярного моменту інерції виділяють елементарну смужку у вигляді тонкого кільця товщиною  $d\rho$ . Площа такого елемента  $dA = 2\pi\rho d\rho$ . Полярний момент і осьові моменти інерції мають вид:

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = 2\pi \int_0^{\frac{D}{2}} \rho^3 d\rho = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$I_x = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi D^4}{64}$$

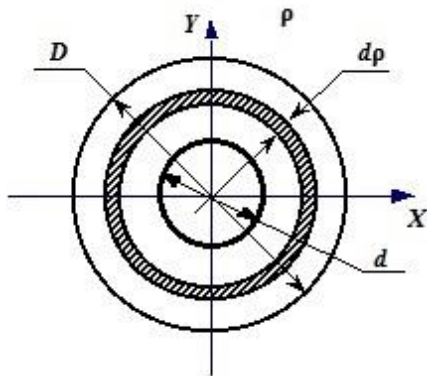


Рисунок 2.25 – Кільцевий перетин

Площа елементарної смужки у вигляді тонкого кільця товщиною  $d\rho$  має вид  $dA = 2\pi\rho d\rho$ . В порівнянні з круглим перетином зміняться межі інтегрування:

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = 2\pi \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \rho^3 d\rho = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \quad \alpha = \frac{d}{D}$$

$$I_x = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4)$$

### 2.3.9. Головні моменти інерції складних перерізів з віссю симетрії

Момент інерції складного перерізу відносно деякої осі рівний сумі моментів інерцій його складових частин щодо тієї ж осі:

$$I_{xc} = \sum_{i=1}^n I_{xci}, \quad I_{yc} = \sum_{i=1}^n I_{yci}. \quad (2.35)$$

Таким чином, для обчислення моменту інерції складного перерізу треба розбити його на ряд простих перерізів, обчислити моменти інерції цих перерізів щодо головних осей ( $I_{xci}, I_{yci}$ ). Оскільки перетин має вісь симетрії, то можна розбити його на прості таким чином, що головні осі простих перерізів будуть паралельні головним осям складного перерізу. Тоді, скориставшись виразами (2.34), моменти інерції простих перерізів щодо головних осей можуть бути визначені як:

$$I_{xci} = I_{xi} + a_i^2 A_i, \quad I_{yci} = I_{yi} + b_i^2 A_i. \quad (2.36)$$

де  $I_{xi}, I_{yi}$  – головні моменти інерції простих перерізів;  $A_i$  – площі простих перерізів;  $a_i, b_i$  – відстані між головними осями простих і складного перерізу.

Підсумувавши  $I_{xci}$  і  $I_{yci}$  можна визначити моменти інерції складного перерізу з віссю симетрії, які треба знайти

$$I_{xc} = \sum_{i=1}^n I_{xi} + a_i^2 A_i, \quad I_{yc} = \sum_{i=1}^n I_{yi} + b_i^2 A_i. \quad (2.37)$$

### 2.3.10. Поняття про радіус інерції і момент опору

Момент інерції фігури щодо будь-якої осі можна представити у вигляді добутку площі фігури на квадрат радіусу інерції:

$$I_x = \int_A y^2 dA = A \cdot i_x^2, \quad (2.38)$$

де  $i_x$  – радіус інерції щодо осі  $x$ .

З виразу (2.38) виходить, що радіус інерції щодо осі  $x$

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}. \quad (2.39)$$

Аналогічно радіус інерції площі перерізу щодо осі  $y$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}. \quad (2.40)$$

Головним центральним осям інерції відповідають головні радіуси інерції:

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}}; \quad i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}}.$$

Осьовим моментом опору перерізу називається відношення осьового моменту інерції до відстані найбільш віддаленої точки перерізу до відповідної осі:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}; \quad W_y = \frac{I_y}{x_{\max}}. \quad (2.41)$$

## Контрольні запитання

1. Як впливає орієнтація поперечного перерізу елемента на його деформацію при навантаженні?
2. Перелічити та дати визначення основних геометричних характеристик поперечних перерізів.
3. Статичні моменти плоского перерізу. Що таке центр тяжіння перерізу?
4. Як визначити центр тяжіння складного перерізу?
5. Моменти інерції плоского перерізу. Як змінюються моменти інерції перерізу в разі паралельного перенесення осей?
6. Що розуміють під головними осями інерції? Дайте визначення головним моментам інерції.
7. Обчислення головних моментів інерції простих перерізів.
8. Порядок обчислення головних моментів інерції складних перерізів.
9. Що таке радіуси інерції, моменти опору?

## Приклади розрахунків

**Приклад 5.** Порядок дій з визначення головних моментів інерції, радіусів інерції та моментів спротиву складного перерізу з віссю симетрії на прикладі рис. П5. 1:

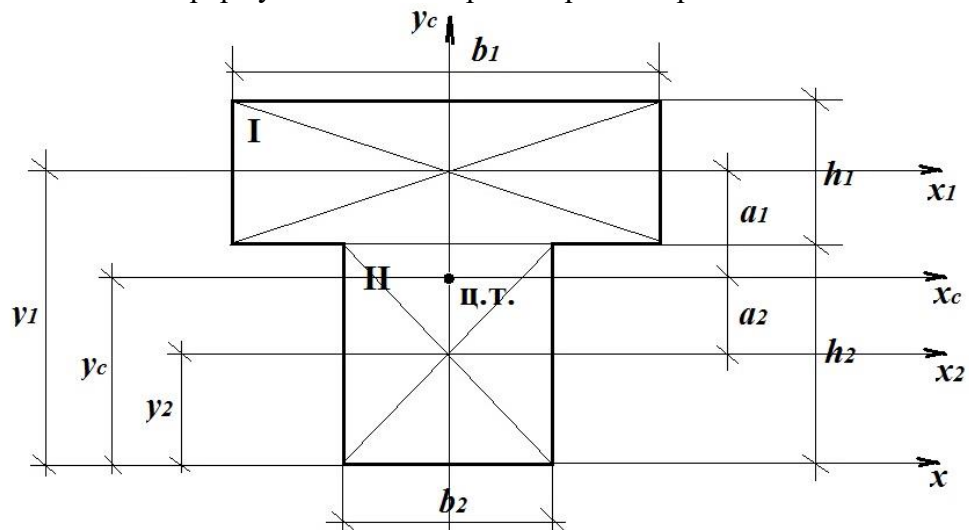


Рисунок П5.1 – Складний перетин з віссю симетрії

- розбити складний перетин на прості (I і II), для яких відомі центри тяжіння;
- знайти центр тяжіння складного перерізу

$$y_c = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2},$$

де  $A_1, A_2$  – площі простих перерізів;

- провести головні осі складного перерізу  $y_c, x_c$ ;
- визначити головні моменти інерції простих перерізів до своїх головних осей

$$I_{x_1} = \frac{b_1 h_1^3}{12}, \quad I_{x_2} = \frac{b_2 h_2^3}{12};$$

- визначити головні моменти інерції простих перерізів щодо головної осі складного перерізу

$$I_{x_{c1}} = I_{x_1} + a_1^2 A_1, \quad I_{x_{c2}} = I_{x_2} + a_2^2 A_2;$$

- визначити головний момент інерції складного перерізу щодо осі  $x_c$

$$I_{x_c} = I_{x_{c1}} + I_{x_{c2}}.$$

- визначити головний момент інерції щодо осі  $y_c$  з урахуванням особливостей її розташування

$$I_{y_c} = I_{y_{c1}} + I_{y_{c2}},$$

$$I_{y_{c1}} = I_{y_1} = \frac{h_1 b_1^3}{12}, \quad I_{y_{c2}} = I_{y_2} = \frac{h_2 b_2^3}{12}.$$

## 2.4. Деформація згину

### 2.4.1. Поняття про згин

Згин – це такий вид деформації, при якому під дією зовнішніх силових чинників в кожному поперечному перерізі тіла виникає внутрішній згинаючий момент і поперечна сила. Решта силових чинників відсутня.

Допущення при згині (рис. 2.26):

- плоскі перерізи до деформації залишаються плоскими і після деформації;
- плоскі перерізи в процесі деформації повертаються один щодо одного, викликаючи розтяг одних волокон і стиск інших;
- нейтральне волокно в процесі деформації не змінює своєї довжини;
- за рахунок розтягу і стиску волокон в кожному перерізі виникає внутрішній згинаючий момент, який прагне повернути тіло в недеформований стан.

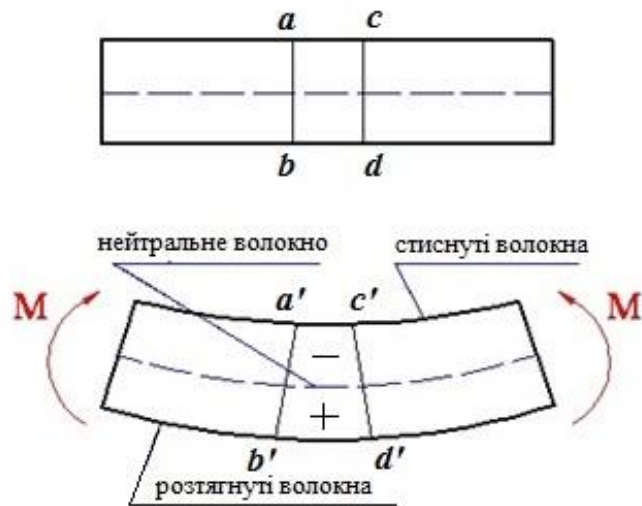


Рисунок 2.26 – Деформація згину

Якщо у якості внутрішнього силового чинника виникає тільки згинаючий момент, деформацію називається чистий згин. Якщо крім згинаючого моменту виникає поперечна сила, то деформація називається поперечний згин або просто згин.

Брус, що працює на згин, прийнято називати балкою.

Згинаючий момент викликає в перерізі нормальні напруження, поперечна сила – дотичні напруження.

#### 2.4.2. Внутрішні сили чинники при згині

При розгляді деформації згину необхідно визначити розподіл внутрішніх силових чинників по довжині балки: поперечні сили  $Q(z)$  і згинаючі моменти  $M(z)$ . Перерізи, в яких вказані параметри приймають максимальне значення, є небезпечними і в них необхідно перевірити умову міцності.

Послідовності побудови епюр  $Q(z)$  і  $M(z)$  розглянемо на наступному прикладі (рис. 2.27).

Балка спирається на рухомий і нерухомий циліндрові шарніри (опори) і навантажена зосередженою силою  $F$ . Необхідно побудувати епюри  $Q(z)$  і  $M(z)$ , після чого визначити небезпечні перерізи.

Побудову епюр  $Q(z)$  і  $M(z)$  виконують за наступною схемою:

- визначають реакції в опорах за умов статички:

$$\sum M_B = 0; \quad \Rightarrow \quad -R_A \cdot (a+b) + F \cdot b = 0; \quad R_A = \frac{F \cdot b}{(a+b)};$$

$$\sum M_A = 0; \quad \Rightarrow \quad R_B \cdot (a+b) - F \cdot a = 0; \quad R_B = \frac{F \cdot a}{(a+b)}.$$

- перевіряють знайдені реакції:

$$\sum F_y = 0; \quad \Rightarrow \quad R_A + R_B - F = 0;$$

$$\frac{F \cdot b}{(a+b)} + \frac{F \cdot a}{(a+b)} - F = 0; \quad 0 = 0.$$

- Визначають допоміжні ділянки балки, де внутрішні зусилля незмінні (рис. 2.27): переріз  $z_1$   $0 \leq z_1 \leq a$ ; переріз  $z_2$   $0 \leq z_2 \leq b$ ;

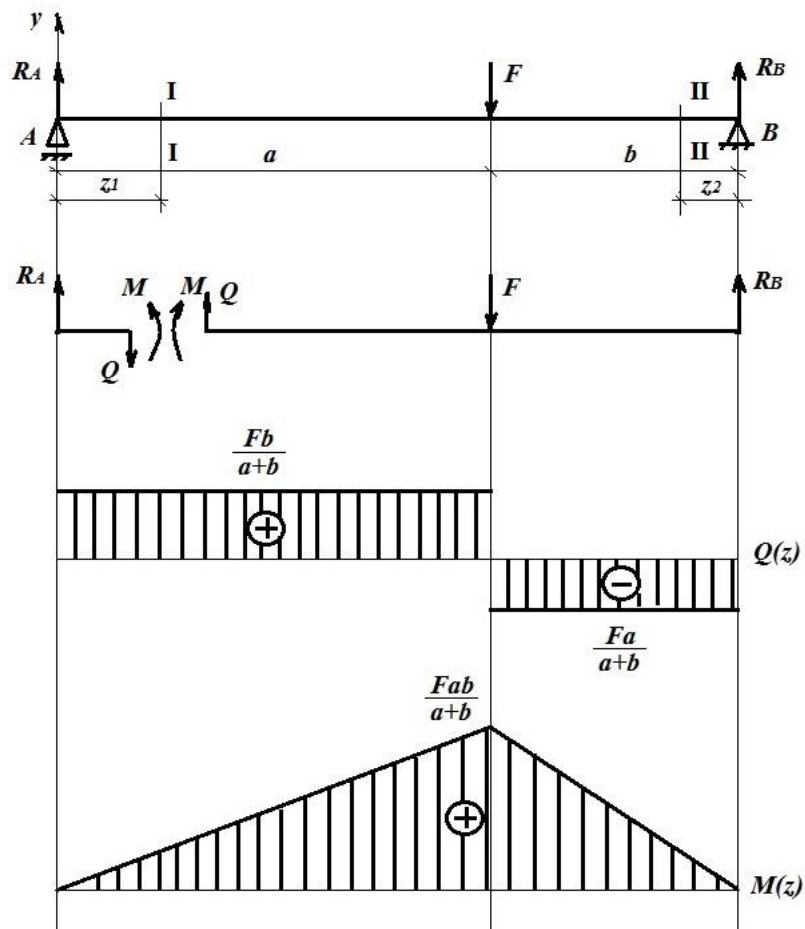


Рисунок 2.27 – Епюри  $Q$  і  $M$  до прикладу №1

- встановлюють правило знаків при побудові епюр  $Q$  і  $M$  (рис. 2.28): якщо поперечна сила  $Q$ , щодо перерізу, повертає балку за годинниковою стрілкою, вона приймається позитивною «+», якщо проти годинникової стрілки – від’ємною «-»; якщо згинаючий момент  $M$ , щодо даного перерізу, згинає балку чашею вгору, він приймається позитивним «+» і якщо чашею вниз – від’ємним «-» (правило дощу).

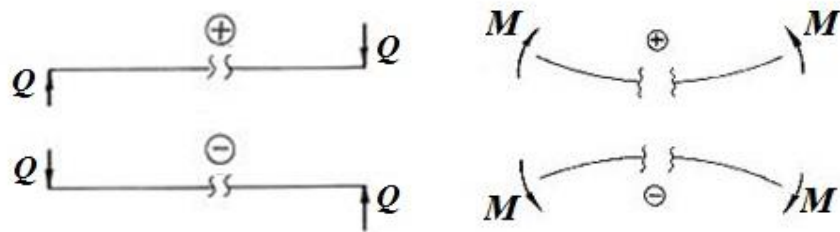


Рисунок 2.28 – Правило знаків для поперечних сил і згинаючих моментів

- застосовують метод перерізів: розрізають балку в перерізі  $z_1$  і розглядають рівновагу її лівої частини під дією всіх зовнішніх і внутрішніх зусиль. В перерізі виникають поперечна сила  $Q$  і згинаючий момент  $M$ , які за гіпотезою рівності сил дії і протидії на лівому торці даного перерізу врівноважені на правому за величиною і протилежні за знаком. Аналогічні операції проводять з перетином  $z_2$ ;

- будують функції зусиль для лівої частини балки (рис. 2.27):

$$0 \leq z_1 \leq a$$

$$Q(z_1) = R_A; \quad M(z_1) = R_A \cdot z_1;$$

$$\text{при } z_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(z_1) = R_A = \frac{F \cdot b}{a + b}; \quad M(z_1) = 0;$$

$$\text{при } z_1 = a \quad \Rightarrow \quad Q(z_1) = R_A = \frac{F \cdot b}{a + b}; \quad M(z_1) = R_A \cdot a = \frac{F \cdot b \cdot a}{a + b}.$$

- будують функції зусиль для правої частини балки (рис. 2.27):

$$0 \leq z_2 \leq b$$

$$Q(z_2) = -R_B; \quad M(z_2) = R_B \cdot z_2;$$

$$\text{при } z_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(z_2) = R_B = \frac{F \cdot a}{a + b}; \quad M(z_2) = 0;$$

$$\text{при } z_2 = b \quad \Rightarrow \quad Q(z_2) = R_B = \frac{F \cdot a}{a + b}; \quad M(z_2) = R_B \cdot b = \frac{F \cdot b \cdot a}{a + b}.$$

За знайденими параметрами по характерних точках будують епюри  $Q(z)$  і  $M(z)$ .

З епюр видно, що найнебезпечніший перетин балки знаходиться під лінією дії сили  $F$ , оскільки при деформації поперечного згину визначальною умовою міцності є нормальні напруження, які досягають максимуму в перерізі, де епюра  $M(z)$  має найбільше значення (незалежно від знаку).

### 2.4.3. Диференціальні залежності при згині

Розглядається балка під дією довільного навантаження (рис. 2.29, а).

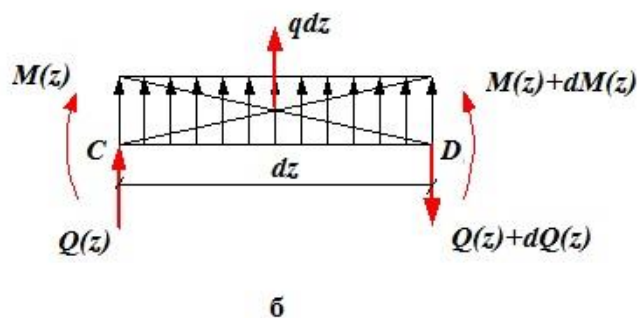
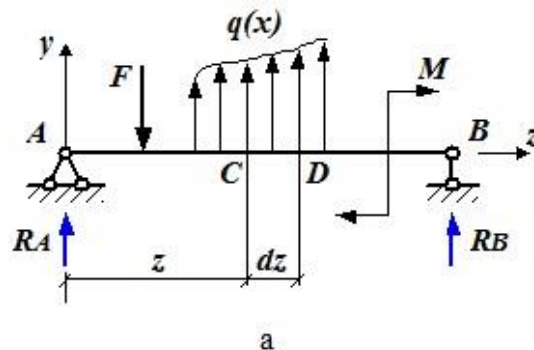


Рисунок 2.29 – Балка з довільним навантаженням

Для виділеного на ділянці довільно розподіленого навантаження балки малого елемента  $dz$  розподілене навантаження вважається постійним (рис. 2.29

, б). Елемент  $dz$  знаходиться в стані рівноваги. Статичні рівняння рівноваги мають вид:

$$\sum F_y = Q(z) + qdz - [Q(z) + dQ(z)] = 0; \quad (2.42)$$

$$\sum M_D = M(z) + Q(z)dz + qdz \frac{dz}{2} - [M(z) + dM(z)] = 0. \quad (2.43)$$

З виразу (2.42) постає:

$$\frac{dQ(z)}{dz} = q. \quad (2.44)$$

Спрощуючи другу умову (2.43) рівноваги (доданками другого порядку малості нехтуємо), отримують:

$$\frac{dM(z)}{dz} = Q(z). \quad (2.45)$$

Диференціюючи одержаний вираз (2.45), отримують:

$$\frac{d^2M(z)}{dz^2} = \frac{dQ(z)}{dz} = q. \quad (2.46)$$

Враховуючи, що розподілене навантаження постійне  $q = const$ , записують:

$$\begin{aligned} Q &= \int qdz = qz + Q_0 \\ M &= \int Qdz = q \frac{z^2}{2} + Q_0z + M_0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

Одержані залежності (2.47) між зусиллями і інтенсивністю навантаження називаються диференціальними залежностями при згині. Вони використовуються для побудови епюр  $Q(z)$  і  $M(z)$  без допоміжних ділянок балки за розрахунками значень епюр для характерних точок, а також для контролю правильності вже побудованих епюр. Отже процедура побудови епюр на основі залежностей (2.47) включає наступні правила:

- між перерізами, де прикладена зосереджена сила, епюра  $Q$  має постійне значення, а епюра  $M$  – лінійна функція;
- у перерізі, де діє зосереджена сила, епюра  $Q$  має стрибок на величину цієї сили; епюра  $M$  – перелам лінійної функції;

- у перерізі, де діє зосереджений момент, епюра  $M$  має стрибок на величину цього моменту; епюра  $Q$  – не змінна;
- у перерізі, де діє розподілене навантаження  $q$ , епюра  $Q$  – лінійна функція; епюра  $M$  – квадратична функція з опуклістю назустріч цьому навантаженню;
- на ділянці, де епюра  $M$  зростає, поперечна сила позитивна, при збуванні – відємна;
- на ділянці, де епюра  $Q$  повільно зменшється до нуля, епюра  $M$  приймає максимальне значення.

#### 2.4.4. Напруження при чистому згині

Чистий згин балки розглянуто на прикладі моделі, показаної на рис. 2.30, для якої побудовано епюри  $Q$  і  $M$  за вищенаведеними правилами.

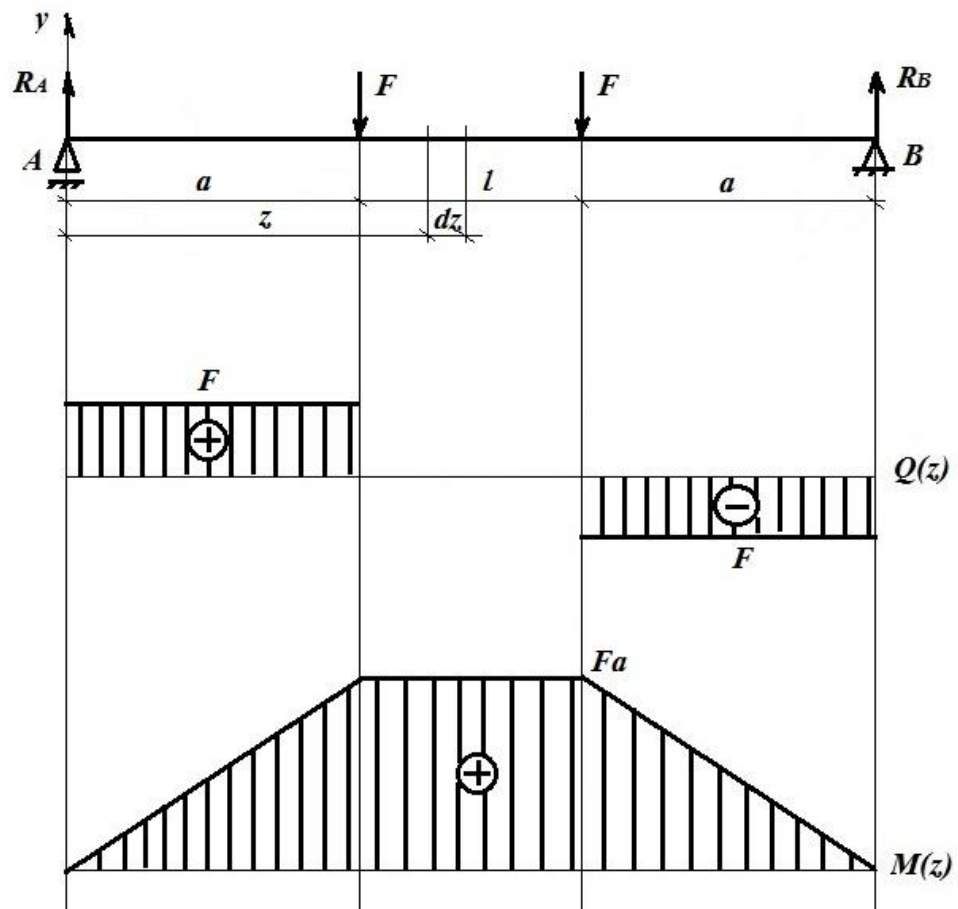


Рисунок 2.30 – Розрахункова модель навантаженої балки

На ділянці довжиною  $l$  поперечні сили відсутні. Отже,  $Q = 0$ ,  $M = const$  і має місце чистий згин, де балка приймає форму дуги кола. На рис. 2.31, а показано елемент  $dz$  ділянки з деформацією чистого згину.

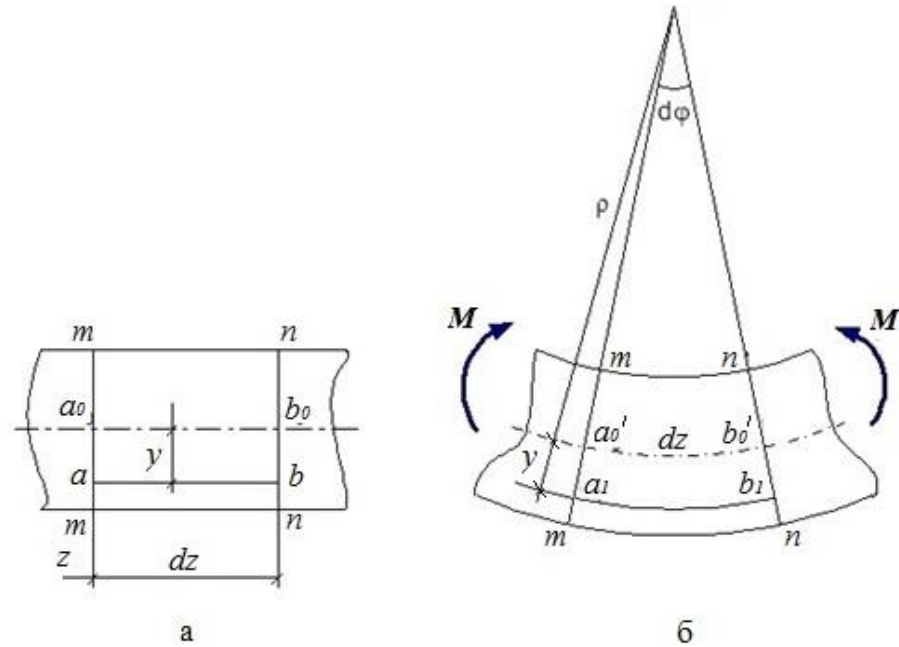


Рисунок 2.31 - Елемент балки, де реалізовано деформацію чистого згину

Після деформації перерізи  $m - m$  і  $n - n$  залишаються плоскими і повертаються на малий кут  $d\varphi$ . Елемент  $a_0b_0$  нейтрального шару перетворюється на дугу  $a_0'b_0'$  з радіусом кривизни  $\rho$ , а пряме волокно  $ab$ , що знаходиться на відстані  $y$  від нейтральної лінії – в криволінійне волокно  $a_1b_1$  з радіусом кривизни  $\rho+y$  (рис. 2.31, б).

Деформація довільного волокна  $ab$  визначається як

$$\varepsilon = \frac{a_1b_1 - ab}{ab}, \quad (2.48)$$

де  $a_1b_1 = (\rho + y)d\varphi$ ,  $ab = dz = \rho d\varphi$ . Отже

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi}. \quad \varepsilon = \frac{y}{\rho} \quad (2.49)$$

Оскільки волокно  $ab$  сприймає деформацію розтягу, то згідно до закону Гука:

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{y}{\rho} E, \quad (2.50)$$

де рівняння (2.50) називають законом Гука для чистого згину. На практиці даним виразом скористатися не можна, оскільки невідомо значення радіусу кривизни  $\rho$ . Його величини визначається за допомогою виділеного з площі поперечного перерізу елементарного елемента  $dA$ , положення якого описується координатами  $x$  і  $y$ . Елементарна нормальна сила, що діє на цьому перерізу –  $\sigma dA$  (рис. 2.32).

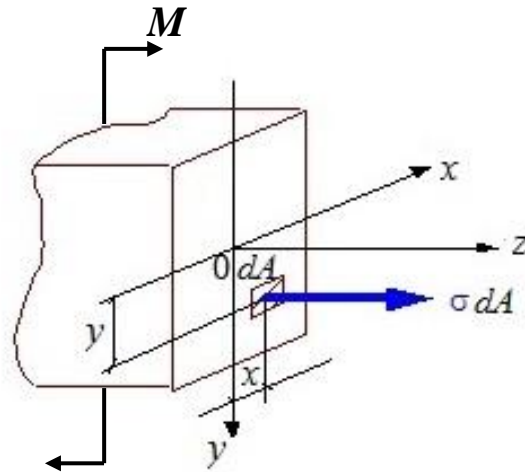


Рисунок 2.32 – Елемент перерізу

Рівняння рівноваги для виділеного елементарного елемента  $dA$ :

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow \int_A \sigma dA = 0, \quad (2.51)$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow \int_A \sigma x dA = 0, \quad (2.52)$$

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow M - \int_A \sigma y dA = 0. \quad (2.53)$$

З виразу (2.51), враховуючи, що  $E - const$ ,  $\rho - const$  отримаємо:

$$\frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0,$$

звідки постає, що статичний момент перерізу рівний нулю  $S_x = \int_A y dA = 0$ .

Отже вісь  $y$  проходить через центр тяжіння перерізу.

З виразу (2.52):

$$\frac{E}{\rho} \int_A xy dA = 0,$$

що означає рівність нулю відцентрового моменту інерції  $I_{xy} = \int_A xy dA = 0$ .

Отже вісь  $y$  є головною віссю. Звідси осі  $x$  і  $y$  – головні центральні осі перерізу.

З рівняння рівноваги (2.53) можна визначити кривизну  $\rho$ :

$$M - \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = 0, \quad \int_A y^2 dA = I_x,$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_x}, \quad (2.54)$$

де  $I_x$  – головний момент інерції.

Добуток  $EI_x$  називають жорсткістю перерізу при деформації згин.

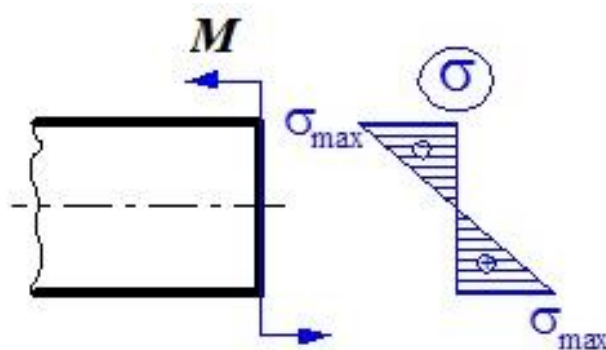
Після підстановки виразу (2.54) у (2.50) одержують формулу:

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I_x}, \quad (2.55)$$

яка дозволяє обчислювати нормальні напруження при чистому згині балки в будь-якій точці її поперечного перерізу.

З аналізу формули (2.55) постає:

- для будь-якої форми і розмірів перерізу, напруження в точках нейтральної лінії відсутні;
- величина напружень лінійно зростає по висоті перерізу від нейтральної лінії з постійним значенням по його ширині;
- максимального значення напруження досягають у волокнах, найбільш віддалених від нейтральної лінії (рис. 2.33).



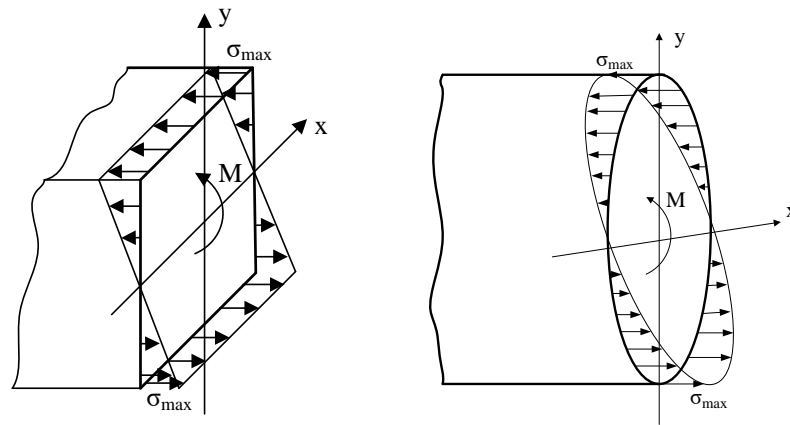


Рисунок 2.33 – Розподіл нормальних напружень по висоті перерізів

На відміну від деформації розтяг-стиск при згині напруження по перерізу розподіляються нерівномірно. Матеріал, розташований у нейтрального шару навантажений мало. Тому в цілях його економії і зниження ваги конструкції, що працює на згин, слід вибирати такі форми перерізу, щоб значна частина матеріалу була віддалена від нейтральної лінії (рис. 2.34).

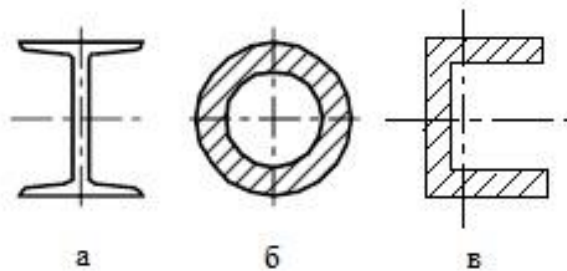


Рисунок 2.34 – Раціональні перерізи: а – двотавр; б – кільце; в – швелер

### 2.4.5. Умова міцності при чистому згині

Величина найбільшого діючого в перерізі напруження  $\sigma_{\max}$  повинна бути обмежена допустимим напруженням  $[\sigma]$ , тобто:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} y_{\max}}{I_x} \leq [\sigma], \quad (2.56)$$

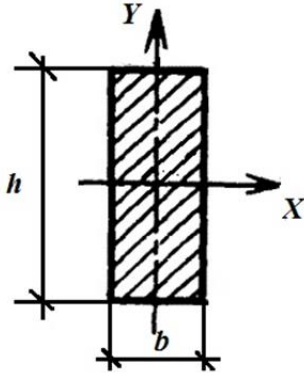
де  $\frac{I_x}{y_{\max}} = W_x$  – момент опору перерізу.

Отже:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (2.57)$$

Моменти опору простих перерізів:

Прямокутний перетин

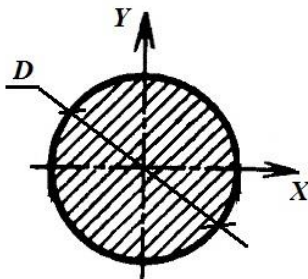


$$y_{\max} = \frac{h}{2};$$

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{b \cdot h^3 \cdot 2}{12 \cdot h} = \frac{b \cdot h^2}{6};$$

$$\text{аналогічно } W_y = \frac{h \cdot b^2}{6}.$$

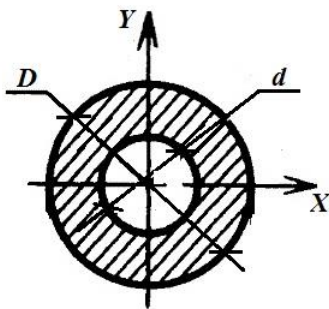
Круглий перетин



$$y_{\max} = \frac{D}{2};$$

$$W_x = W_y = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{\pi \cdot D^4 \cdot 2}{64 \cdot D} = \frac{\pi \cdot D^3}{32} \approx 0,1 \cdot D^3.$$

Кільцевий перетин



$$y_{\max} = \frac{D}{2};$$

$$\begin{aligned} W_x = W_y &= \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{\pi \cdot D^4 \cdot 2}{64 \cdot D} \cdot (1 - \alpha^4) = \\ &= \frac{\pi \cdot D^3}{32} \cdot (1 - \alpha^4) \approx 0,1 \cdot D^3 \cdot (1 - \alpha^4). \end{aligned}$$

### 2.4.5. Напруження при поперечному згині

При поперечному згині в кожному поперечному перерізі виникають внутрішні згинаючі моменти і поперечні сили. Згинаючий момент викликає нормальні напруження, а поперечна сила – дотичні.

Нормальні напруження з достатньою точністю для практичних розрахунків визначають, як для чистого згину (див. формулу (2.55)).

Дотичні напруження визначаються за формулою Журавського:

$$\tau = \frac{QS_x^*}{b_y I_x}, \quad (2.58)$$

де  $Q$  – поперечна сила в перерізі;  $I_x$  – момент інерції перерізу щодо осі  $x$ ;  $S_x^*$  – статичний момент щодо нейтральної осі  $x$  частини перерізу розташованої між даним і крайнім волокном;  $b_y$  – ширина перерізу на рівні волокна, що розглядається.

Розподіл дотичних напружень показано на прикладі балки прямокутного перерізу (рис. 2.35).

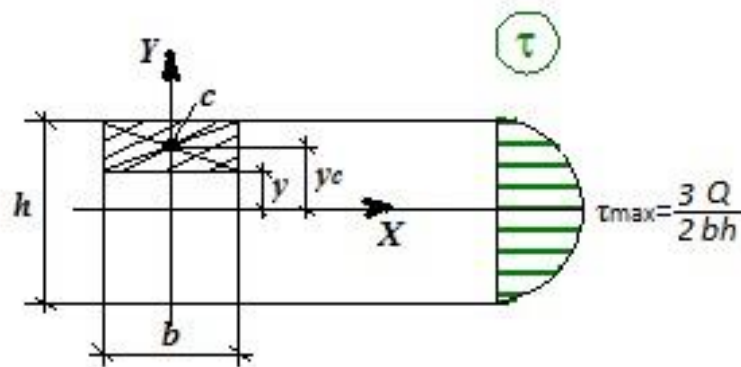


Рисунок 2.35 – Розподіл дотичних напружень по висоті прямокутного перерізу

Значення  $\tau$  для поточної координати  $y$  має вид:

$$S_x^* = A^* \cdot y_c = b \cdot \left( \frac{h}{2} - y \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{h}{2} + y \right) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right);$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}; \quad b_y = b;$$

$$\tau = \frac{Q \cdot \frac{b}{2} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{b \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} = \frac{6 \cdot Q}{b \cdot h^3} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Епюра  $\tau$  по висоті перерізу має форму квадратичної параболи:

$$\text{при } y = 0 \quad \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{3 \cdot Q}{2 \cdot b \cdot h};$$

$$\text{при } y = \pm \frac{h}{2} \quad \Rightarrow \tau = 0.$$

Висновки з розглянутого прикладу про розподіл дотичних напружень в прямокутному перерізі при поперечному згині:

- вид епюри  $\tau$  залежить від форми поперечного перерізу балки;
- у крайніх найбільш віддалених від нейтральної лінії положеннях напруження  $\tau$  завжди відсутні;
- найбільшої величини дотичні напруження для більшості видів перерізів досягають на нейтральній лінії перерізу.

### Контрольні запитання

1. Сформулюйте основні допущення які використовуються при згині.
2. Диференційні залежності між внутрішніми зусиллями при згині.
3. Яке правило знаків прийняте для поперечної сили?
4. Яке правило знаків прийняте для згинального моменту?
5. Як змінюється згинальний момент на ділянці балки, де прикладене розподілене навантаження?
6. Що буде на епюрі поперечних сил у перерізі, де прикладена зосереджена сила?
7. Запишіть закон Гука для чистого згину.
8. За якими формулами визначаються нормальні і дотичні напруження при згині?
9. Як визначаються максимальні нормальні напруження при згині?
10. Як формулюються умови міцності при деформації чистий згин?
11. Обґрунтуйте вибір раціональних перерізів при деформації чистий згин.

## Приклади розрахунків

**Приклад 6.** Балка знаходиться під дією рівномірно розподіленого навантаження  $q$  (рис. П6.1). Необхідно побудувати епюри поперечних сил  $Q(z)$  і згинальних моментів  $M(z)$ , після чого визначити небезпечні перерізи.

Побудову епюр  $Q(z)$  і  $M(z)$  виконують за наступною схемою:

- визначають реакції в опорах за умов статички:

Через симетричність навантаження реакції в опорах рівні  $R_A = R_B = \frac{q \cdot l}{2}$ .

- перевіряють знайдені реакції;
- визначають ділянки балки, де внутрішні зусилля незмінні (рис. П5.1): 0 – 1 (переріз  $z$ );
- застосовують метод перерізів і записують вирази для  $Q(z)$  і  $M(z)$

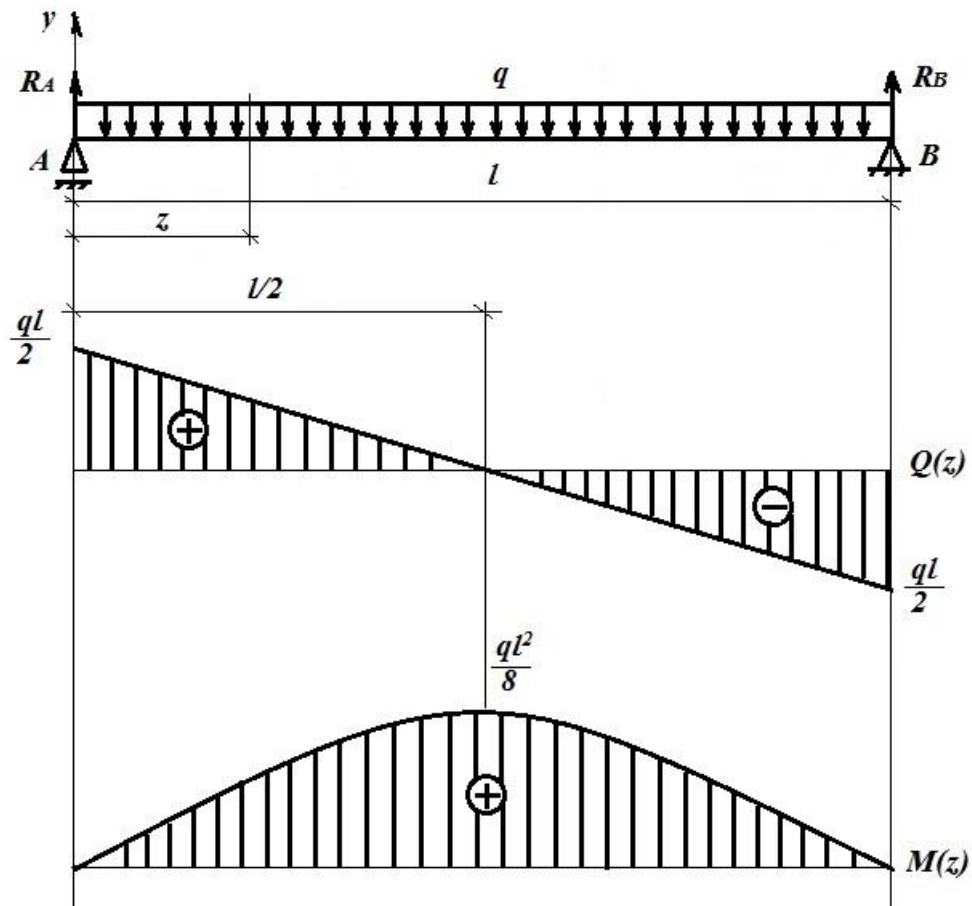
$$0 \leq z \leq l$$

$$Q(z) = R_A - q \cdot z; \quad M(z) = R_A \cdot z - q \cdot z \cdot \frac{z}{2};$$

$$\text{при } z = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(z) = R_A = \frac{q \cdot l}{2}; \quad M(z) = 0;$$

$$\text{при } z = l \quad \Rightarrow \quad Q(z) = R_A - q \cdot l = -\frac{q \cdot l}{2}; \quad M(z) = R_A \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0;$$

$$\text{при } z = \frac{l}{2} \quad \Rightarrow \quad Q(z) = R_A - q \cdot \frac{l}{2} = 0; \quad M(z) = R_A \cdot \frac{l}{2} - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{q \cdot l^2}{8}.$$

Рисунок П6.1 – Епюри  $Q$  і  $M$ 

За знайденими параметрами по характерних точках будують епюри  $Q(z)$  і  $M(z)$ . Епюра  $Q(z)$  – лінійна; епюра  $M(z)$  – квадратична парабола. Небезпечний перетин в точці максимуму епюри  $M(z)$ ;  $M = ql^2/8$ .

**Приклад 7.** (рис. П7.1). Балка навантажена зосередженою силою  $F$  і моментом  $M$ . Необхідно побудувати епюри  $Q(z)$  і  $M(z)$ , після чого визначити небезпечні перерізи.

Побудову епюр  $Q(z)$  і  $M(z)$  виконують за наступною схемою:

- визначають реакції в опорах за умов статички:

розглядаючи рівновагу тільки правої частини балки, можна побудувати епюри  $Q(z)$  і  $M(z)$  без визначення реакцій в защемленні, а їх значення визначити по епюрах в перерізі.

- визначають ділянки балки, де внутрішні зусилля незмінні (рис. П6.1):  $0 - a$  (переріз  $z_1$ ) та  $a - 2a$  (переріз  $z_2$ );

- застосовують метод перерізів і записують вирази для  $Q(z)$  і  $M(z)$ :

для першої ділянки  $0 \leq z_1 \leq a$

$$Q(z_1) = -F; \quad M(z_1) = F \cdot z_1;$$

$$\text{при } z_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(z_1) = -F; \quad M(z_1) = 0;$$

$$\text{при } z_1 = a \quad \Rightarrow \quad Q(z_1) = -F; \quad M(z_1) = F \cdot a.$$

для другої ділянки  $a \leq z_1 \leq 2 \cdot a$

$$Q(z_2) = -F; \quad M(z_2) = F \cdot z_2 - M;$$

$$\text{при } z_2 = a \quad \Rightarrow \quad Q(z_2) = -F; \quad M(z_2) = F \cdot a - \frac{3}{2} \cdot F \cdot a = -\frac{1}{2} \cdot F \cdot a;$$

$$\text{при } z_2 = 2 \cdot a \quad \Rightarrow \quad Q(z_2) = -F; \quad M(z_2) = F \cdot 2 \cdot a - \frac{3}{2} \cdot F \cdot a = \frac{1}{2} \cdot F \cdot a.$$

За знайденими параметрами по характерних точках будуть епюри  $Q(z)$  і  $M(z)$ .  
Небезпечний перетин в точці максимуму епюри  $M(z)$ ;  $M = 3Fa/2$ .

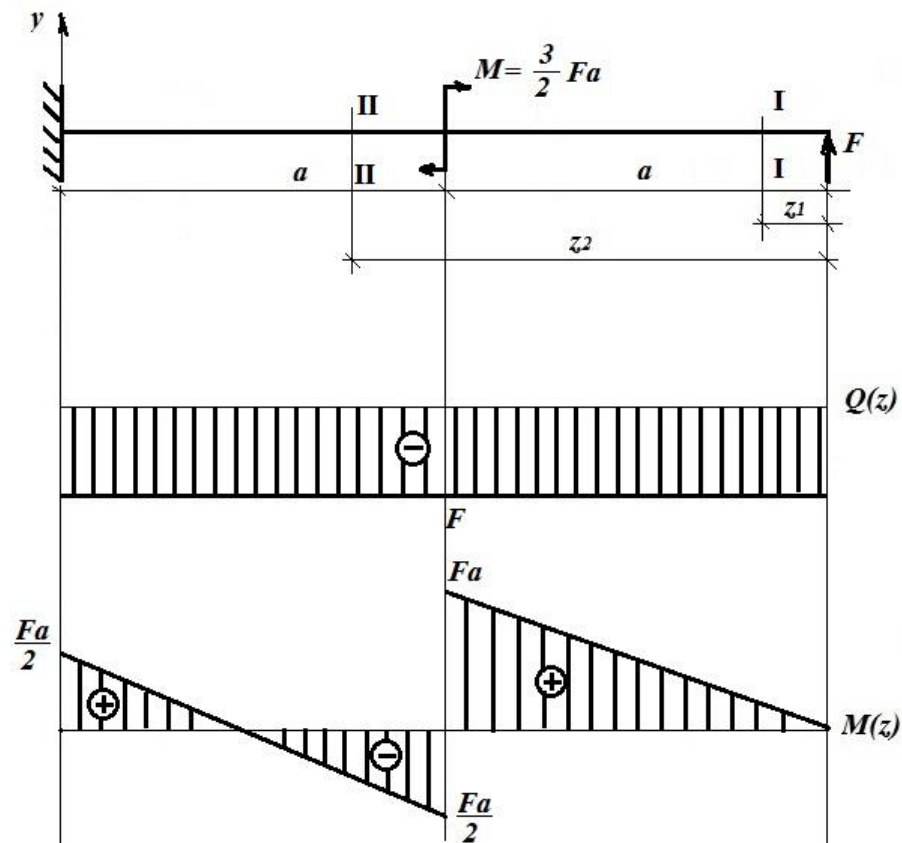


Рисунок П7.1 – Епюри  $Q$  і  $M$  до прикладу 2

## 2.5. Чистий зсув. Кручення

### 2.5.1. Поняття про чистий зсув. Деформації при чистому зсуві

Чистим зсувом називається такий вид деформації, при якому під дією зовнішніх силових факторів в кожному поперечному перерізі тіла виникають поперечні сили, а на гранях виділеного елемента діють тільки дотичні напруження (рис. 2.36, з урахуванням, що відстань  $a \rightarrow 0$ ). Решта силових чинників відсутня.

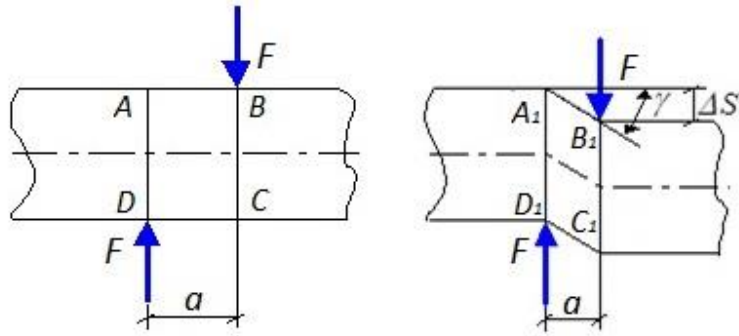


Рисунок 2.36 – Деформація зсуву

При чистому зсуві спостерігаються лінійні і кутові деформації. На рис. 2.37 показано деформацію елементарного перерізу під дією чистого зсуву. В результаті зсуву один поперечний перетин зсувається щодо іншого на величину  $\Delta S$ , яка називається абсолютною величиною зсув (розмірність – м).

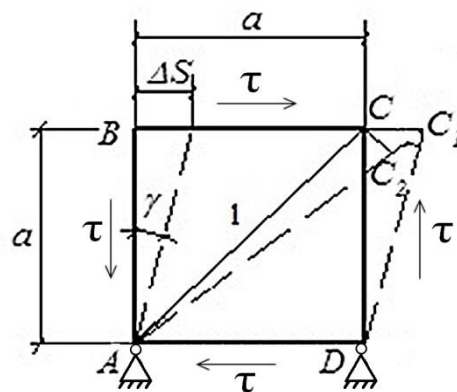


Рисунок 2.37 – Деформація елемента, що зазнає чистий зсув

Відношення абсолютної величини зсуву до відстані між перетинами, в яких прикладені зсуваючі навантаження, називається відносною деформацією зсуву або кутом зсуву:

$$\frac{\Delta S}{a} = \operatorname{tg} \gamma .$$

Оскільки, при малих пружних деформаціях  $\operatorname{tg} \gamma \cong \gamma$ , то

$$\frac{\Delta S}{a} = \gamma . \quad (2.59)$$

Подовження діагоналі  $AC$  (довжина  $\ell = \frac{a}{\sin(45^\circ)} = a\sqrt{2}$ ) одержано роз-

глядаючи геометричну картину деформації, з урахуванням малих пружних деформацій:

$$\Delta\ell = C_1C_2 \cong CC_1 \cos 45^\circ = \frac{\Delta S}{\sqrt{2}}.$$

Тоді відносне подовження діагоналі

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{\Delta S}{\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \frac{\Delta S}{a} = \frac{\text{tg}\gamma}{2} \cong \frac{\gamma}{2}. \quad (2.60)$$

Отже, лінійна деформація дорівнює половині кутової.

### 2.5.2. Напруження на довільному перерізу під кутом при чистому зсуві

Виріжемо з елемента тіла, що знаходиться під деформацією чистий зсув, тригранну призму з кутом  $\alpha$  до похилої поверхні (рис. 2.38). На похилій поверхні виникають нормальні  $\sigma_\alpha$  і дотичні  $\tau_\alpha$  напруження.

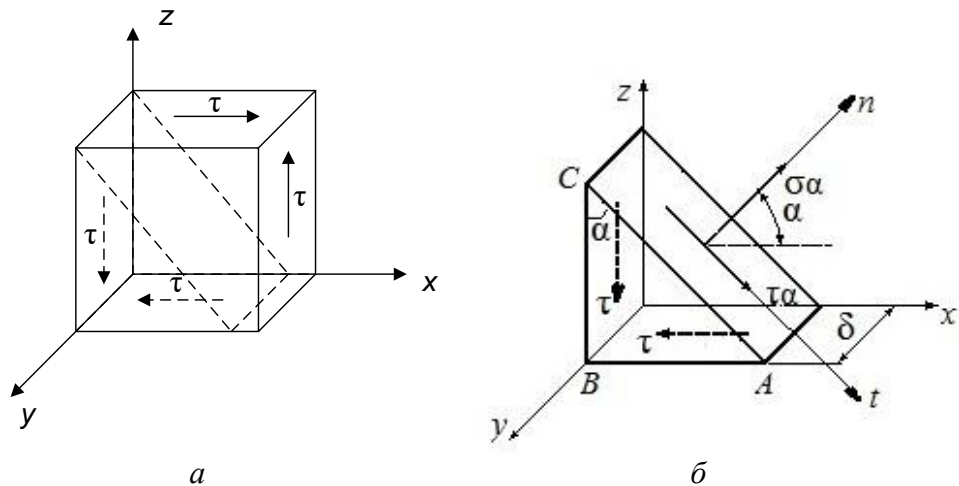


Рисунок 2.38 – Розподіл напружень на гранях тригранної призми

Умова рівноваги тригранної призми під дією прикладених напружень:

$$\sum F_n = 0 \Rightarrow \sigma_\alpha AC\delta = \tau AB\delta \cos \alpha + \tau BC\delta \sin \alpha,$$

$$\sum F_t = 0 \Rightarrow \tau_\alpha AC\delta = \tau AB\delta \sin \alpha - \tau BC\delta \cos \alpha,$$

Звідки, враховуючи, що  $AB = AC \cdot \sin(\alpha)$ ,  $BC = AC \cdot \cos(\alpha)$ , вирази для напружень на перерізі розташованому під кутом  $\alpha$ :

$$\sigma_{\alpha} = \tau \sin \alpha \cos \alpha + \tau \cos \alpha \sin \alpha = \tau \sin 2\alpha, \quad (2.61)$$

$$\tau_{\alpha} = -\tau \sin^2 \alpha + \tau \cos^2 \alpha = \tau \cos 2\alpha. \quad (2.62)$$

Напруження при різних величинах кута  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \alpha = 0^{\circ} &\Rightarrow \sigma_{\alpha} = 0 \quad \tau_{\alpha} = \tau \\ \alpha = 90^{\circ} &\Rightarrow \sigma_{\alpha} = 0 \quad \tau_{\alpha} = -\tau \\ \alpha = \pm 45^{\circ} &\Rightarrow \sigma_{\alpha} = \pm \tau \quad \tau_{\alpha} = 0 \end{aligned} \quad (2.63)$$

Отже, якщо елемент під дією деформації чистий зсув, повернути на кут  $45^{\circ}$ , то на його гранях діятимуть тільки нормальні напруження. При цьому на двох гранях вони будуть такими, що розтягують, а на двох інших – стискаючими (рис. 2.39).

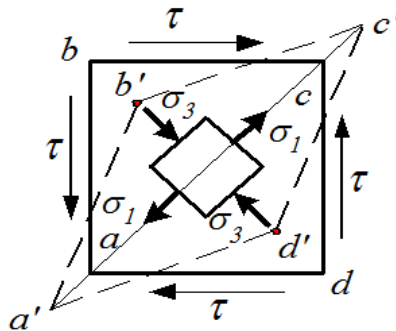


Рисунок 2.39 – Напруження при чистому зсуві

### 2.5.3. Закон Гука при чистому зсуві

Повна деформація уздовж напрямку дії  $\sigma_1$  (рис. 2.43) має вид:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_3', \quad (2.64)$$

де  $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}$ ,  $\varepsilon_3' = -\mu \varepsilon_3 = -\mu \frac{\sigma_3}{E}$ , при цьому  $\sigma_1 = \tau$ ;  $\sigma_3 = -\tau$  (див. вирази (2.63)),

тоді повна деформація з урахуванням залежності (2.60):

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{2} = \frac{\tau}{E}(1 + \mu). \quad (2.65)$$

Отже закон Гука для чистого зсуву:

$$\tau = \frac{E}{2(1 + \mu)} \gamma = G\gamma, \quad (2.66)$$

де  $G$  – модуль поперечної пружності матеріалу.  $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$ , тоді якщо прийняти для сталі  $\mu = 0,25$ , то  $G = 0,4 \cdot E = 8 \cdot 10^4$  МПа.

#### 2.5.4. Практичні розрахунки з'єднань на зсув

На зсув розраховують в основному елементи з'єднань конструкцій, які застосовують для різних машин та механізмів: заклепки, болти, зварні шви і т. ін.

Практичні розрахунки з'єднань на зсув недосконалі, оскільки ґрунтуються на ряду допущень: в перерізі, де можливе руйнування від зсуву, дотичні напруження розподілені рівномірно; зусилля між всіма деталями з'єднання (болти, заклепки) однакові.

Практичний розрахунок з'єднань розглянуто на прикладі з'єднання заклепками (рис. 2.40). Заклепки знаходяться під дією напруження зрізу по двох поперечних перетинах і називаються двозрізними.

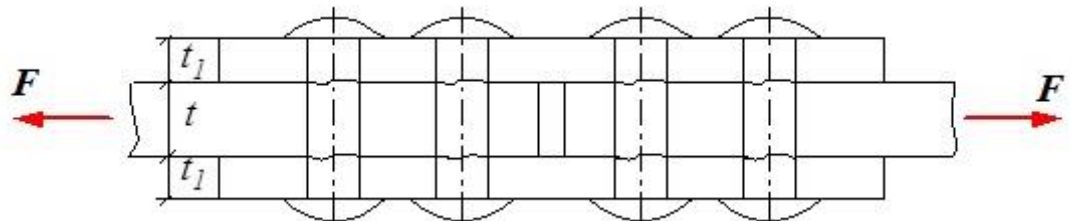


Рисунок 2.40 – Приклад з'єднання заклепками

Якщо число площин зрізу позначити через  $m$ , а число заклепок, розташованих по одну сторону від стику в з'єднанні через  $n$ , то площа зрізу з'єднання

має вигляд:  $A_{зр} = \frac{\pi d^2}{4} \cdot n \cdot m$ . Умова міцності з'єднання на зріз має вигляд:

$$\tau = \frac{F}{A_{зр}} = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot n \cdot m} \leq [\tau]. \quad (2.67)$$

Умова (2.67) дозволяє виконувати три види розрахунків на міцність – проєктний, перевірочний і визначення максимально допустимого навантаження на з'єднання.

Проєктний розрахунок:

- якщо  $n$  – відомо, то  $d \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi n m [\tau]}}$ ;
- якщо  $d$  – відомо, то  $n \geq \frac{4F}{\pi d^2 m [\tau]}$ .

Деформація зсуву часто супроводжується зминанням. Зминанням називається місцева деформація стиску, коли дія стискаючої сили передається на порівняно невелику ділянку.

У заклепувальному з'єднанні зминальні напруження розподіляються по напівциліндричній поверхні отвору листа і заклепки нерівномірно і мають найбільшу величину у точці  $K$  (рис. 2.41).

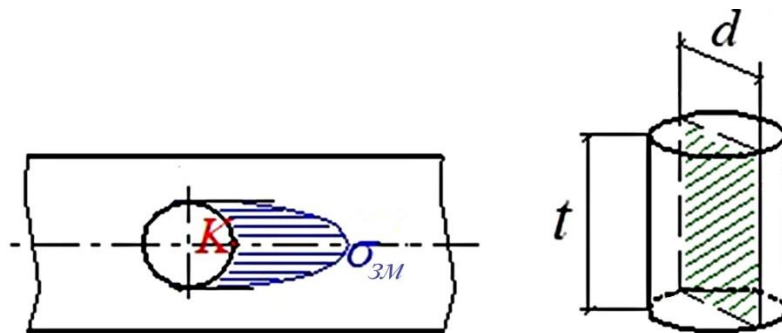


Рисунок 2.41 – Поверхня зминання заклепки

Припускаючи, що напруження зминання розподіляються рівномірно, умова перевірного розрахунку на міцність з'єднання набуває вигляду:

$$\sigma_{зм} = \frac{F}{n \cdot A_{зм}} \leq [\sigma_{зм}], \quad (2.68)$$

де  $n$  – число заклепок;  $[\sigma_{зм}]$  – допустимі напруження на зминання;  $A_{зм}$  – площа зминання ( $A_{зм} = td$ , тут  $d$  – діаметр отвору під заклепку;  $t$  – товщина листа).

### 2.5.5. Кручення бруса круглого поперечного перерізу

Кручення – такий вид деформації, при якому під дією зовнішніх силових факторів в кожному поперечному перерізі тіла виникає крутний момент. Решта силових чинників відсутня.

При розгляді деформації кручення звичайно виділяють два завдання:

- визначення напружень в перерізі;
- визначення кута закручування заданого перерізу.

Стрижні будь-якої форми поперечного перерізу, що працюють на кручення, називаються валами.

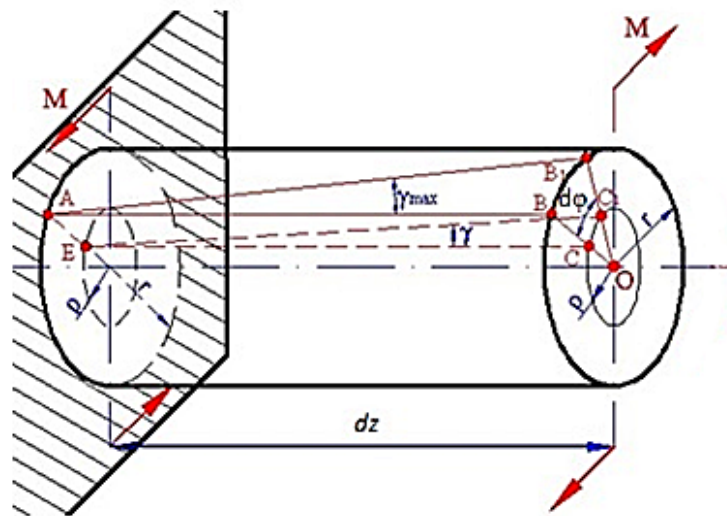


Рисунок 2.42 – Деформація кручення

Вирішення задачі визначення напружень і кутів закручування суттєво залежить від форми поперечного перерізу елемента. Найпростіше такі завдання розв'язуються для стрижнів круглого і кільцевого перерізу.

Елемент валу завдовжки  $dz$ , крайній лівий перетин якого вважатимемо умовно нерухомим, показаний на рис. 2.42. Радіус  $OC$  повертається в положення  $OC_1$  на кут  $d\phi$ , який називають кутом закручування. Оскільки

деформації малі, то виражаючи  $CC_1$  як дугу кола, можна одержати співвідношення між кутом зсуву  $\gamma$  і кутом закручування  $d\varphi$ . З одного боку  $CC_1 = \gamma dz$ , розглядаючи іншу площину  $CC_1 = \rho d\varphi$ . Остаточно:

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz} = \rho \Theta, \quad (2.69)$$

де  $\Theta = \frac{d\varphi}{dz}$  – відносний кут закручування.

Оскільки елемент  $dz$  знаходиться під деформацією чистий зсув, то з урахуванням виразу (2.69) і закону Гука при зсуві (2.66) закон Гука для кручення має вид:

$$\tau = G\gamma = G\rho\Theta. \quad (2.70)$$

Скористатися даною формулою для визначення дотичних напружень при крученні не представляється можливим, оскільки не відома величина  $\Theta$ .

Відносний кут закручування  $\Theta$  знаходять з рівняння, що пов'язує крутний момент з напруженнями:

$$M_{кр} = \int_A \tau \rho dA, \quad (2.71)$$

де  $\tau$  – дотичні напруження, що діють на елементарному перерізі  $dA$ , розташованому на відстані  $\rho$  від центру (рис. 2.43).

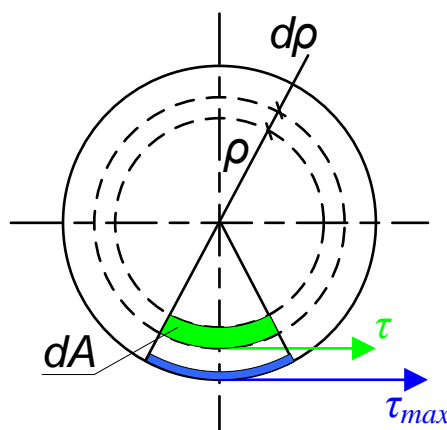


Рисунок 2.43 – Елемент круглого перерізу

Використовуючи рівняння (2.70, 2.71) і враховуючи, що  $G \rightarrow const$ ,  $\Theta \rightarrow const$  отримаємо вираз:

$$M_{кр} = \int_A \tau \rho dA = \int_A G \Theta \rho^2 dA = G \Theta \int_A \rho^2 dA = G \Theta I_p,$$

де  $I_p$  – полярний момент інерції перерізу.

Звідси формула для відносного кута закручування круглого валу

$$\Theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_{кр}}{GI_p}, \quad (2.72)$$

де  $GI_p$  – жорсткість перерізу при крученні.

З виразу (2.72) формула для визначення абсолютних кутів закручування має вид:

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_{кр}}{GI_p} dz. \quad (2.73)$$

Якщо крутні моменти постійні в межах ділянки валу довжиною  $l$ , то

$$\varphi = \Theta l = \frac{M_{кр} l}{GI_p}. \quad (2.74)$$

Для визначення дотичних напружень  $\tau$  будь-якої точки перерізу валу треба підставити у формулу (2.70) вираз (2.72). Тоді:

$$\tau = \frac{M_{кр} \cdot \rho}{I_p}. \quad (2.75)$$

Дотичні напруження в перерізі розподіляються по лінійній залежності з максимумом в крайніх волокнах (рис. 2.44).

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр} \cdot \rho_{\max}}{I_p} = \frac{M_{кр}}{W_p}, \quad (2.76)$$

де  $W_p = I_p / \rho_{\max}$  – полярний момент опору.

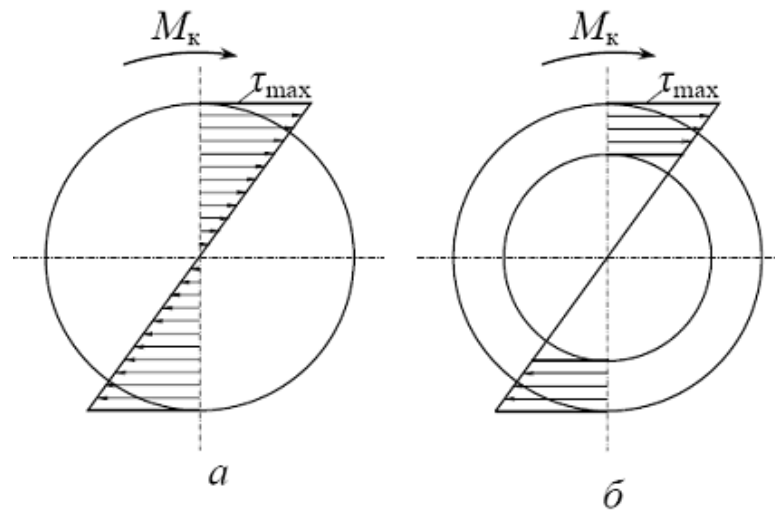


Рисунок 2.44 – Епюри дотичних напружень для круглого (а) та кільцевого (б) перерізів

### 2.5.6. Умови міцності та жорсткості при крученні

Умова міцності при крученні: максимальні дотичні напруження, що виникають в небезпечному перерізі валу, не повинні перевищувати допустимих напружень і має вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}} \leq [\tau], \quad (2.77)$$

де  $[\tau]$  – допустимі напруження при крученні (чистому зсуві).

Крім розрахунку на міцність вали розраховуються на жорсткість:

$$\Theta = \frac{M_{кр} l}{GI_p} \leq [\Theta] \quad (2.78)$$

Іноколи доцільно записати умову жорсткості при крученні в абсолютних кутах закручування  $\varphi$ :

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{GI_p} \leq [\varphi] \quad (2.79)$$

## Контрольні запитання

1. Який різновид напруженого стану називається чистим зсувом?
2. Що являє собою деформація зсуву?
3. Як формулюється закон Гука при чистому зсуві?
4. Що таке зріз? Де він виникає? Запишіть умову міцності на зріз.
5. Що таке зминання? Де воно виникає? Який вигляд має умова міцності на зминання?
6. Який різновид деформації називається крученням?
7. Які напруження діють у поперечному перерізі стрижня при крученні?
8. Як вони розподіляються у випадку круглого перерізу валу?
9. Як визначають кут закручування стрижня? Його розмірність.
10. Знайдіть дотичні напруження в довільній точці круглого перерізу валу при крученні.
11. Де виникають і як визначаються максимальні дотичні напруження у перерізі валу при крученні?  
Напишіть умову міцності для валу при крученні.
12. Запишіть умову жорсткості валу при крученні.

## Приклади розрахунків

**Приклад 8.** Побудуємо відповідні епюри для заданої схеми

Побудову епюр  $M_{кр}$  починаємо з лівої частини валу застосовуючи метод перерізу. Для трьох ділянок валу, де  $M_{кр}$  незмінні, вирази для крутних моментів мають вид:

$$0 \leq z_1 \leq l \quad M_{кр} = -T;$$

$$0 \leq z_2 \leq 2 \cdot l \quad M_{кр} = -T - 2 \cdot T = -3 \cdot T;$$

$$0 \leq z_3 \leq l \quad M_{кр} = -T - 2 \cdot T + T = -2 \cdot T;$$

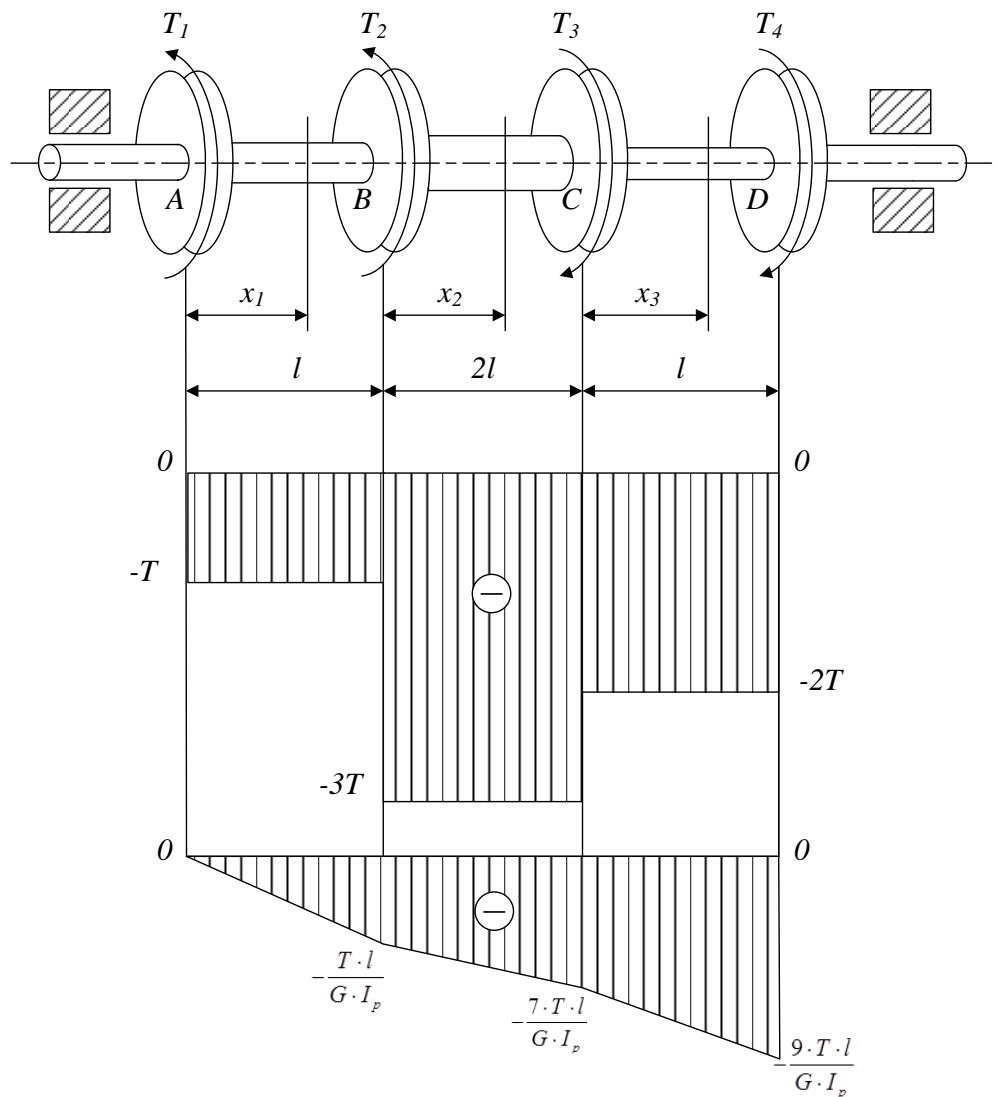


Рисунок П8.1 – Приклад побудови епюр

За одержаними функціями будують епюри  $M_{кр}$  (рис. П8.1).

З урахуванням того, що крутні моменти постійні в межах ділянки валу, кути закручування визначаємо у вибраних точках за виразом (2.74), а побудову епюр розпочинаємо із лівого кінця валу, враховуючи, що він умовно закріплений.

$$\Delta\varphi_A = 0;$$

$$\Delta\varphi_B = \Delta\varphi_A + \Delta\varphi_{AB} = -\frac{T \cdot l}{G \cdot I_p};$$

$$\Delta\varphi_C = \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BC} = -\frac{T \cdot l}{G \cdot I_p} - \frac{3 \cdot T \cdot 2 \cdot l}{G \cdot I_p} = -\frac{7 \cdot T \cdot l}{G \cdot I_p};$$

$$\Delta\varphi_D = \Delta\varphi_C + \Delta\varphi_{CD} = -\frac{7 \cdot T \cdot l}{G \cdot I_p} - \frac{2 \cdot T \cdot l}{G \cdot I_p} = -\frac{9 \cdot T \cdot l}{G \cdot I_p}.$$

## 2.6. Основи напружено-деформованого стану

### 2.6.1. Компоненти напружень у точці

Необхідно визначити напружений стан тіла у довільній точці  $A$ , припускаючи, що воно знаходиться в рівновазі під дією просторової системи сил.

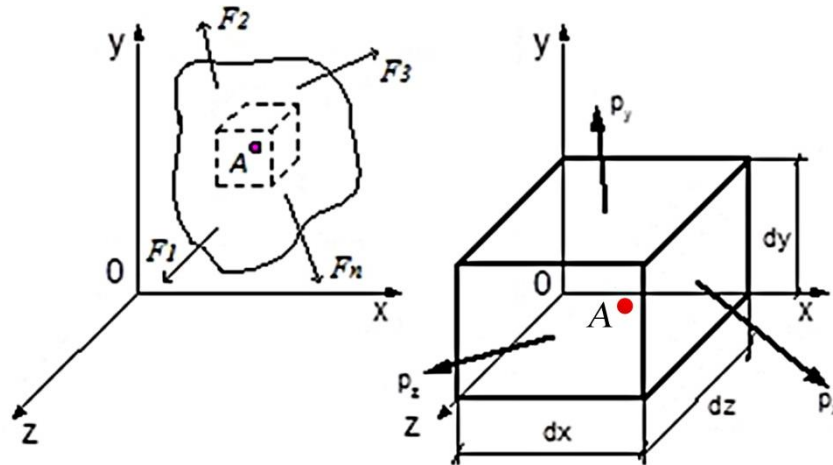


Рисунок 2.45 – Напруження, що діють на точку

Оскільки матеріал даного тіла однорідний і безперервний, можна перейти від точки до нескінченно малого об'єму (паралелепіпеду), що включає точку  $A$ . На гранях паралелепіпеду виникають внутрішні силові фактори  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  (рис. 2.45), що замінюють дію відкинутої частини тіла і які називають повними напруженнями. Індекси повних напружень відповідають нормалі до перерізів, на яких вони діють. Оскільки виділений елемент малий, то можна вважати, що напруження на кожній грані розподіляються рівномірно.

Повні напруження представляють у вигляді складових по трьом взаємно-перпендикулярним напрямках, що співпадають з координатними осями. Напруження, що перпендикулярні до граней паралелепіпеду, називаються нормальними  $\sigma$  з індексом, відповідним до осей вздовж яких вони діють. Напруження, що діють в площині грані паралелепіпеду, називаються дотичними –  $\tau$  з двома індексами: перший відповідає нормалі до перерізу, другий – напрямку дії напруження (рис. 2.46).

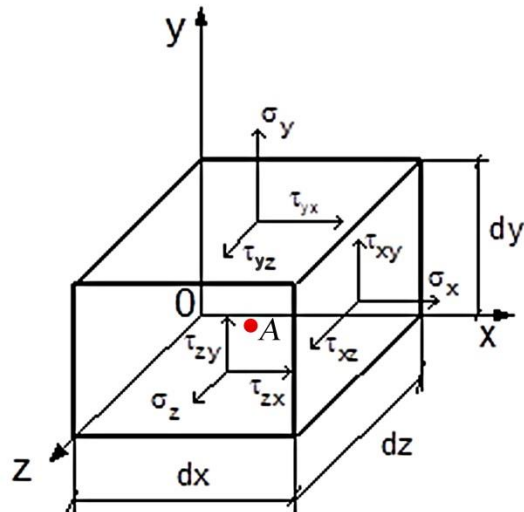


Рисунок 2.46 – Компоненти повного напруження

Таким чином, на кожній грані виділеного елемента діють три компоненти повного напруження. Сукупність напружень, що діють по всіх гранях, представляють у вигляді матриці (тензора напружень):

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}. \quad (2.80)$$

Величина кожного з вказаних напружень залежить від орієнтації перерізу в просторі, але величина повного напруження в точці  $A$  залежить тільки від зовнішніх сил.

Для дотичних напружень діє закон парності, тобто:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}. \quad (2.81)$$

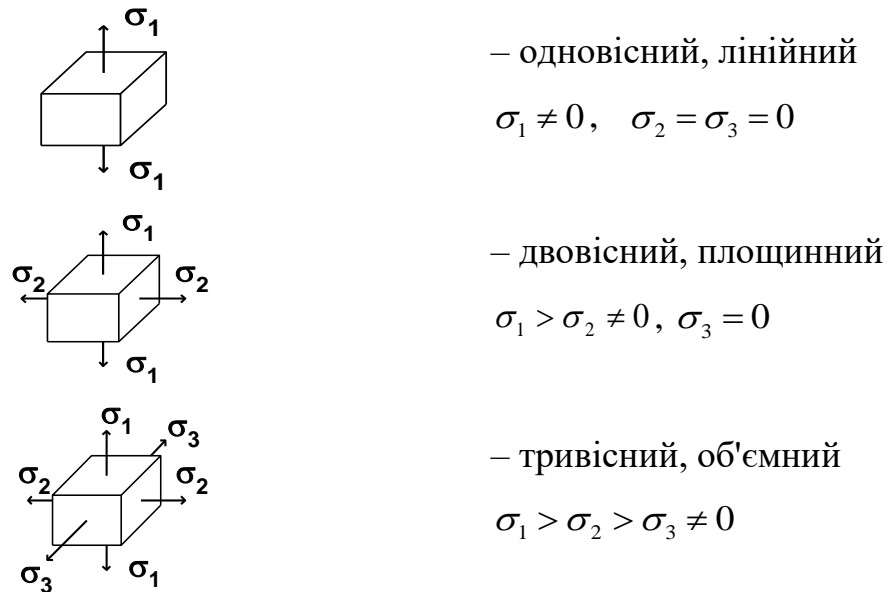
Таким чином, тензор напружень має шість невідомих (три нормальних і три дотичних напруження). Склавши шість рівнянь статички, одержують статично визначну систему, з якої можна знайти невідомі значення напружень.

### 2.6.2. Головні площини і головні напруження

Повертаючи паралелепіпед (див. рис. 2.46) у просторі навколо точки  $A$  можна знайти таке його положення, при якому дотичні напруження на гранях

будуть відсутні. Такі грані називаються головними, осі перпендикулярні їм – головними осями, а нормальні напруження, що діють на цих площинах, – головними напруженнями.

Головні напруження позначають  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . При цьому вони ранжуються як  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . Залежно від кількості головних напружень у точці А одержують різні види напружених станів, а саме:



### 2.6.3. Круг напружень Мора

Представлення тривимірного напруженого стану двовимірним запропоновано німецьким вченим Мором.

Суть кругу напружень Мора пояснюється з визначення напружень, що виникають на нахиленому перерізі. З паралелепіпеда вирізана тригранна призма з кутом  $\alpha$  так, що поверхня похилого перерізу паралельна головній осі  $Y$  (рис. 2.47).

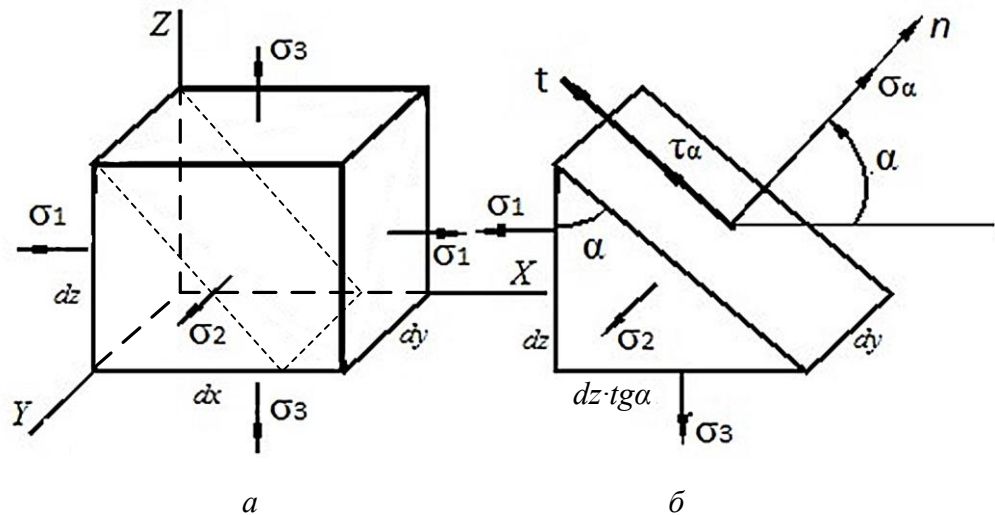


Рисунок 2.47 – Розподіл напружень у паралелепіпеді (а) і призмі (б)

Умова рівноваги тригранної призми має вид:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_\alpha dy \frac{dz}{\cos \alpha} \cos \alpha + \tau_\alpha dy \frac{dz}{\cos \alpha} \sin \alpha = \sigma_1 dz dy, \quad (2.82)$$

$$\sum F_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_\alpha dy \frac{dz}{\cos \alpha} \sin \alpha + \tau_\alpha dy \frac{dz}{\cos \alpha} \cos \alpha = \sigma_3 dy dz \text{tg} \alpha.$$

Після перетворень:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha, \quad (2.83)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha. \quad (2.84)$$

де  $\sigma_\alpha$  і  $\tau_\alpha$  – нормальні і дотичні напруження, що виникають на перерізі, що розташований під кутом  $\alpha$  (рис. 2.47, б).

Якщо рівняння (2.83) та (2.84) звести у квадрат, одержують рівняння кола Мора:

$$\left( \sigma_\alpha - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2. \quad (2.85)$$

Рівняння (2.85) відображує коло з центром на осі  $\sigma$ , який зміщений на відстань  $\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ . Рівняння (2.85) дає можливість по куту нахилу перерізу  $\alpha$  визначати нормальні і дотичні напруження.

#### 2.6.4. Побудова кола Мора. Пряме і зворотне завдання кола Мора

У координатах  $\sigma$  і  $\tau$  круг Мора є параметричним рівнянням кола, де як параметр виступає кут  $\alpha$ . Нормальні і дотичні напруження на похилих перетинах залежно від кута  $\alpha$  мають наступні значення:

$$\alpha = 0 \Rightarrow \sigma_\alpha = \sigma_1 \quad \tau_\alpha = 0,$$

$$\alpha = 90 \Rightarrow \sigma_\alpha = \sigma_3 \quad \tau_\alpha = 0,$$

$$\alpha = 45 \Rightarrow \sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Максимальні значення напружень:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1, \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (2.86)$$

У теорії напруженого стану виділяють два основні завдання: пряме і зворотне.

Пряме завдання: у точці відомі положення головних перерізів і відповідні їм головні напруження  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ; потрібно знайти нормальні і дотичні напруження  $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$  на перетинах, нахилених під заданим кутом  $\alpha$  до головних.

Аналітичне рішення прямої задачі дається формулами (2.83) – (2.84).

Проаналізуємо напружений стан, скориставшись графічною побудовою. Для цього введемо в розгляд геометричну площину і віднесемо її до прямокутних координатних осей  $\sigma, \tau$ . Вибравши для напружень деякий масштаб, відкладаємо по осі абсцис (рис. 2.48) відрізки  $OA = \sigma_1; OB = \sigma_2$ . На  $AB$  як на діаметрі будуємо коло з центром в точці  $C$ . Побудований круг і буде кругом напружень Мору.

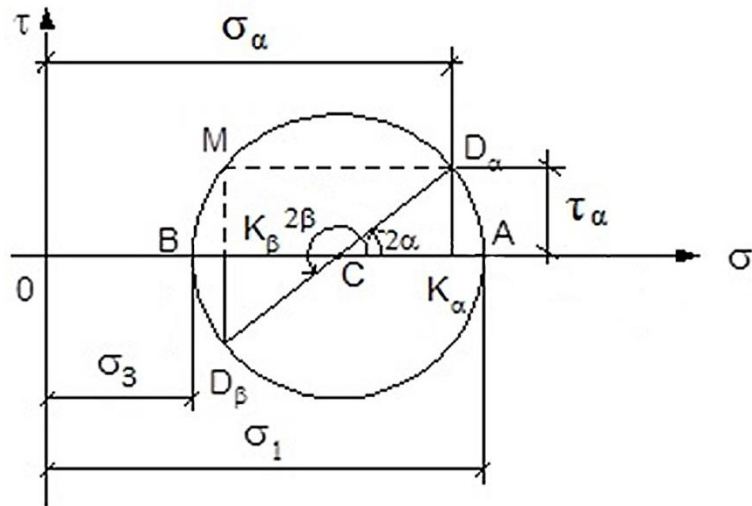


Рисунок 2.48 – Круг Мору

Координати точок круга відповідають нормальним і дотичним напруженням на різних перетинах. Так для визначення напружень на перерізу, проведеному під кутом  $\alpha$ , з центру круга  $C$  проведемо промінь під кутом  $2\alpha$  до перерізу з колом в точці  $D_\alpha$  ( $\alpha > 0$ ). Абсциса одержаної точки  $D_\alpha$  рівна нормальній напрузі  $\sigma_\alpha$ , а ордината – дотичній напрузі  $\tau_\alpha$ .

$$OK_\alpha = \sigma_\alpha, \quad K_\alpha D_\alpha = \tau_\alpha.$$

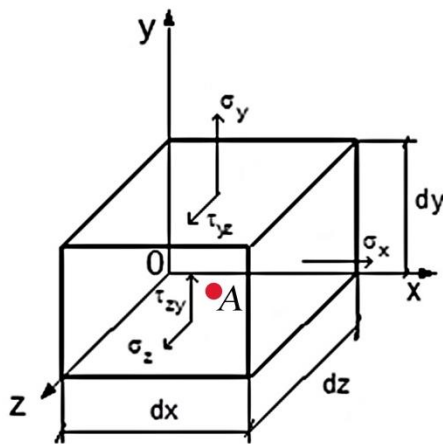


Рисунок 2.49.

Зворотнє завдання. У точці  $A$  відомі нормальні і дотичні напруження, що діють на взаємно перпендикулярних перерізах, які обмежують дану точку; потрібно знайти головні напрями і головні напруження (Відомо:  $\sigma_z, \sigma_y, \sigma_x, \tau_{zy} = \tau_{yz} = \tau$ ; визначити:  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) (рис. 2.49).

Одне із заданих нормальних напружень на рис. 2.49 є головним  $\sigma_x$ , оскільки на цьому перерізу не діють дотичні напруження. Для визначення двох

інших головних напружень спочатку визначаються положення крапок  $D_\alpha$  и  $D_\beta$  (рис. 2.48), що характеризують напруження на відповідних гранях елемента. Для цього відкладаються у відповідному масштабі відрізки  $OK_\alpha = \sigma_y$ ,  $OK_\beta = \sigma_z$ ,  $K_\alpha D_\alpha = K_\beta D_\beta = \tau$ . Далі на  $D_\alpha D_\beta$  з центром в точці С будуємо коло – круг Мору. Точки перерізу круга Мору з віссю  $\sigma$  визначать два головні напруження  $OA = \sigma'$ ;  $OB = \sigma''$ . Ранжуючи головні напруження  $\sigma_x$ ,  $\sigma'$ ,  $\sigma''$  привласнюємо їм відповідні індекси:  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

Значення головних напружень можуть бути знайдені і аналітично:

$$\begin{aligned}\sigma' = OA = OC + R &= \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau^2}; \\ \sigma'' = OB = OC - R &= \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau^2}.\end{aligned}\tag{2.87}$$

Де  $R = CD_\alpha = \sqrt{CK_\alpha^2 + K_\alpha D_\alpha^2}$ .

### 2.6.5. Узагальнений закон Гука

Цей закон встановлює зв'язок між величинами деформацій і напруженнями для складного напруженого стану.

Розглянемо деформацію елемента тіла, вибравши цей елемент у вигляді прямокутного паралелепіпеда із сторонами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . По гранях паралелепіпеда діють головні напруження  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  (рис. 2.50).

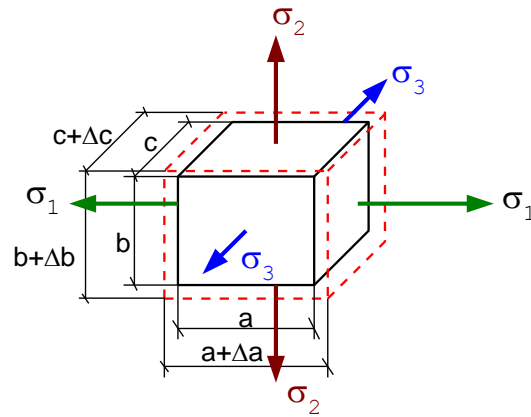


Рисунок 2.50 – Деформація призматичного елемента під дією головних напружень

На основі принципу суперпозиції, можна записати:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1''' , \quad (2.88)$$

де  $\varepsilon_1'$  – відносне переміщення від дії  $\sigma_1$  в напрямі  $\sigma_1$  ( $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ );  $\varepsilon_1''$  – відносне переміщення від дії  $\sigma_2$  в напрямі  $\sigma_1$  ( $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$ );  $\varepsilon_1'''$  – відносне переміщення від дії  $\sigma_3$  в напрямі  $\sigma_1$  ( $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ).

Припускається, що властивості матеріалу відповідають закону Гука, а деформації малі. З урахуванням того, що напрям  $\sigma_1$  для самого напруження  $\sigma_1$  є подовжнім, а для напружень  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  – поперечним:

$$\varepsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}, \quad \varepsilon_1'' = -\mu \frac{\sigma_2}{E}, \quad \varepsilon_1''' = -\mu \frac{\sigma_3}{E}. \quad (2.89)$$

З урахуванням виразів (2.88) та (2.89):

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]. \quad (2.90)$$

Аналогічно отримано вирази для інших деформацій:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Формули (2.90) і (2.91) – узагальнений закон Гука для ізотропного тіла.

Повна деформація:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (2.92)$$

З останнього виразу визначають межі зміни коефіцієнта Пуассона. Якщо припустити, що всі напруження розтягуючі  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$ , то повна деформація повинна бути більше нуля  $\varepsilon \geq 0$ . Ця умова виконується, якщо  $1 - 2\mu \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \mu \leq 0.5$ , що підтверджується експериментально.

### 2.6.6. Гіпотези міцності

Оцінка міцності є першою і головною задачею опору матеріалів, де напружений стан в небезпечній точці зіставляється з граничним станом. Така оцінка достатньо точна у разі одновісного напруженого стану (розтяг-стиск), або простішого двовісного (чистий зсув, кручення). Проте багато елементів конструкцій працюють в умовах складного напруженого стану. У цих випадках складний напружений стан замінюють простим, наприклад розтягом, і перевіряють умову:

$$\sigma_{екв} \leq [\sigma]_p, \quad (2.93)$$

де  $\sigma_{екв}$  – еквівалентне напруження.

Еквівалентним напруженням  $\sigma_{екв}$  називається напруження, яке слід створити в розтягнутому зразку, щоб його напружений стан став рівнозначним складному напруженому стану.

Для розрахунку еквівалентних напружень запропоновано ряд гіпотез (теорій) міцності, які визначають критерії переходу матеріалу у граничний становище при складному напруженому стані.

Кожна гіпотеза міцності є припущенням про переважний вплив на міцність матеріалу того або іншого чинника. Найбільш важливими чинниками, пов'язаними з виникненням небезпечного стану матеріалу є: нормальні і дотичні напруження, лінійні деформації і потенційна енергія деформації.

Гіпотеза міцності з безлічі чинників, що впливають на міцність матеріалу, вибирає один, ігноруючи всі інші. Достовірність тієї або іншої гіпотези міцності перевіряється експериментальним шляхом.

#### I. Гіпотеза (теорія) максимальних нормальних напружень.

В основу гіпотези найбільших напружень покладено чинник про переважний вплив найбільших за абсолютною величиною нормальних напружень.

Згідно цієї гіпотези міцності небезпечний стан матеріалу при складному напруженому стані настає тоді, коли найбільше за модулем головне напруження  $\sigma_1$  досягає граничного значення для заданого матеріалу при простому розтязі. Умова міцності має вигляд:

$$\sigma_{еквI} = \sigma_1 \leq [\sigma]_p. \quad (2.94)$$

Ця гіпотеза міцності дає позитивні результати лише для деяких крихких матеріалів.

#### II. Гіпотеза (теорія) максимальних лінійних деформацій.

У основі гіпотези лежить припущення, що матеріали незалежно від складності напруженого стану руйнуються тоді, коли найбільша за модулем лінійна деформація  $\varepsilon_{\max}$  в будь-якому напрямі досягає величини, що спричинює руйнування при розтягуванні. Умова міцності має вигляд:

$$|\varepsilon_{\max}| \leq [\varepsilon]_p. \quad (2.95)$$

Отримавши максимальні відносні деформації згідно узагальненому закону Гука, і проаналізувавши величину граничного значення відносної деформації при розтязі:

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E_{об}} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq \frac{[\sigma]}{E_{л}}.$$

Тоді за умови рівності об'ємного  $E_{об}$  і лінійного модуля пружності  $E_{л}$  умова міцності матиме наступний вигляд:

$$\sigma_{еквII} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]_p. \quad (2.96)$$

Експериментальна перевірка даної гіпотези виявила ряд істотних недоліків. Кращі результати знаходять для крихких матеріалів (легований чавун, високоміцні сталі після низького відпуску).

### III. Гіпотеза (теорія) максимальних дотичних напружень.

Згідно даної гіпотези міцності небезпечне становище матеріалу при складному напруженому стані настає тоді, коли найбільше дотичне напруження  $\tau_{\max}$  досягає граничного значення для даного матеріалу. Умова міцності має вигляд:

$$\tau_{\max} \leq [\tau]_p. \quad (2.97)$$

При об'ємному напруженому стані

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \leq [\tau]_p = \frac{[\sigma]_p}{2}.$$

Тоді умова міцності за третьою гіпотезою матиме вигляд:

$$\sigma_{\text{еквIII}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]_p. \quad (2.98)$$

Ця гіпотеза дає добрий збіг з результатами дослідів для пластичних матеріалів.

### IV. Енергетична гіпотеза (теорія) міцності.

Ця гіпотеза міцності заснована на припущенні, що небезпечний стан, незалежно від його виду, настає тоді, коли питома потенційна енергія деформації, пов'язана із зміною форми, досягає граничного для даного матеріалу значення. Умова міцності має вигляд:

$$u_{\text{фсл}} \leq [u_{\text{ф}}]_p. \quad (2.99)$$

При об'ємному напруженому стані умова міцності в цьому випадку прийме вигляд:

$$\sigma_{\text{еквIV}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]_p. \quad (2.100)$$

Досліди добре підтверджують четверту теорію для пластичних матеріалів, що однаково працюють на розтяг і стиск. Поява в матеріалі малих пластичних деформацій за четвертою гіпотезою визначається точніше, ніж за третьою.

## V. Гіпотеза (теорія) Мору.

Гіпотеза міцності Мору дозволяє врахувати відмінність у властивостях матеріалу. Її можна одержати шляхом модифікації гіпотези найбільших дотичних напружень:

$$\sigma_{екв} = \sigma_1 - \frac{[\sigma]_p}{[\sigma]_{cm}} \sigma_3 \leq [\sigma]_p. \quad (2.101)$$

Якщо властивості матеріалу при розтягу і стиску однакові, то п'ята гіпотеза міцності перетвориться у третю.

На практиці перша і друга гіпотези не використовуються (носять історичний характер). Для пластичних матеріалів використовуються третя і четверта гіпотези міцності, для крихких – п'ята.

### Контрольні запитання

1. Що слід розуміти під поняттям «напружений стан тіла в точці»?
2. Що характеризує тензор напружень?
3. Що таке головні площини і головні напруження?
4. Скільки головних площадок можна провести через будь яку точку деформованого тіла?
5. Які існують три види напруженого стану при розрахунках на міцність?
6. Який напружений стан називається об'ємним, плоским та лінійним?
7. Що характеризують та як будуються круги Мора?
8. Сформулюйте пряму та зворотню задачі круга Мору.
9. Які залежності існують між напруженнями і деформаціями твердого тіла згідно з узагальненим законом Гука?
10. Які існують гіпотези міцності? Сформулюйте енергетичну гіпотезу.

## 2.7. Складний опір. Міцність при змінних напруженнях

Під складним опором розуміють комбінацію простих напружених станів (розтяг, стиск, зсув, кручення і згин), спричинених дією  $Q_x, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z$ . У розрахунках на складний опір зазвичай виходять з принципу незалежності дії сил. Цей принцип застосується у всіх випадках, коли деформації малі і відповідають закону Гука. Нижче розглянуто складні деформації, що найбільш часто зустрічаються у практиці розрахунків. При цьому виділено дві групи складного опору: без застосування (косий згин) і з застосуванням (сумісна дія згину з крученням) гіпотез міцності.

### 2.7.1. Косий та просторовий згин

Косий (неплоский) згин викликається зовнішніми силами, розташованими в силових площинах, які не співпадають ні з одною з головних площин інерції поперечних перерізів балки. Зігнута вісь балки в цьому випадку є просторовою кривою. Якщо окремі складові навантаження діють в різних площинах, то такий згин балки називається просторовим (рис. 2.51). При просторовому згині напружений стан кожного перерізу балки визначається за формулами косоного згину.

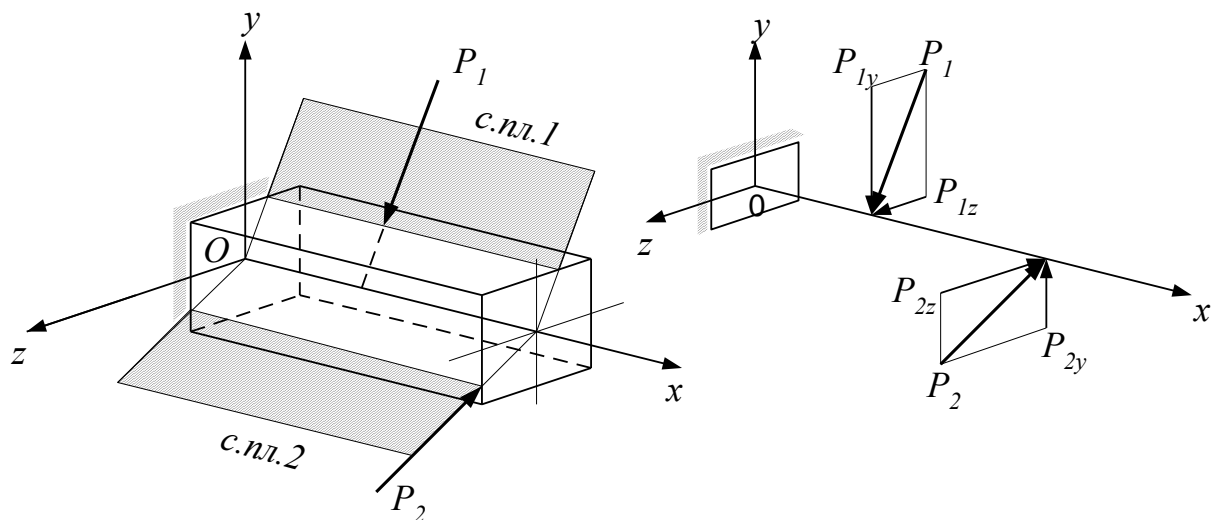


Рисунок 2.51 – Просторовий згин

Косий згин зручно показують як згин у двох площинах. Для цього всі перпендикулярні до головних осей інерції (осі  $y$  і  $z$ ) навантаження слід розкласти на складові, які знаходяться у головних площинах  $xu$  и  $xz$ . Вертикальні складові викликають згин у вертикальній площині, а горизонтальні – у горизонтальній. У поперечних перетинах виникають згинаючі моменти  $M_z$  та  $M_y$  і поперечні сили  $Q_z$  та  $Q_y$ . Через незначний вплив дотичних напружень на міцність балки поперечними силами нехтують і напружений стан приблизно вважається одноосним, що не потребує гіпотез міцності.

Напруження в будь-якій точці поперечного перерізу визначаються як сума нормальних напружень, викликаних згином у двох площинах:

$$\sigma = \pm \frac{M_z \cdot y}{J_z} \pm \frac{M_y \cdot z}{J_y}. \quad (2.102)$$

Знаки напружень визначаються згинаючими моментами і координатами точок перерізу. Напруження лінійно залежать від координат точок перерізу  $y$  і  $z$ . Епюра напружень обмежена площиною, яка з площиною поперечного перерізу перетинаються по прямій, напруження в якій рівні нулю. Ця пряма називається нейтральною лінією (рис. 2.52). Нейтральна лінія поділяє розтягнуту зону перерізу від стиснутої.

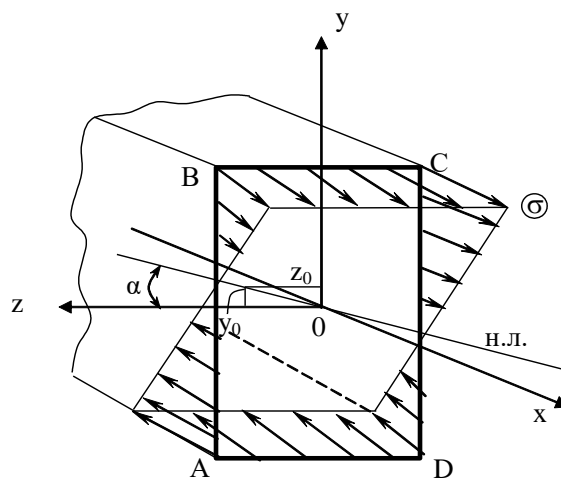


Рисунок 2.52 – Розподіл напружень

Умова міцності при косому згині має вигляд:

$$\frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (2.103)$$

Якщо балка має круглий переріз косий згин не можливий.

### 2.7.2. Сумісна дія згину і кручення

Сумісна дія згину і кручення є найбільш характерним випадком навантаження валів. Нижче розглядаються вали круглого перерізу (вали не круглого перерізу зустрічаються значно рідше). Сили, що діють на вали зі шківками пасових передач, зірочками ланцюгових передач, зубчастими колісами, муфтами викликають його згин і кручення.

Від скручування валу виникають дотичні напруження, які по перерізу розподіляються нерівномірно (рис.2.53)

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}}. \quad (2.104)$$

При згині валу в його перетинах виникають нормальні і дотичні напруження. Останніми нехтують, оскільки вони значно менші за дотичні напруження від скручування. Нормальні напруження по перерізу також розподіляються нерівномірно і досягають максимальних значень у крайніх волокнах валу (див. рис.2.53)

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{изг}}{W_z}. \quad (2.105)$$

Отже, небезпечними за міцністю є точки на поверхні валу.

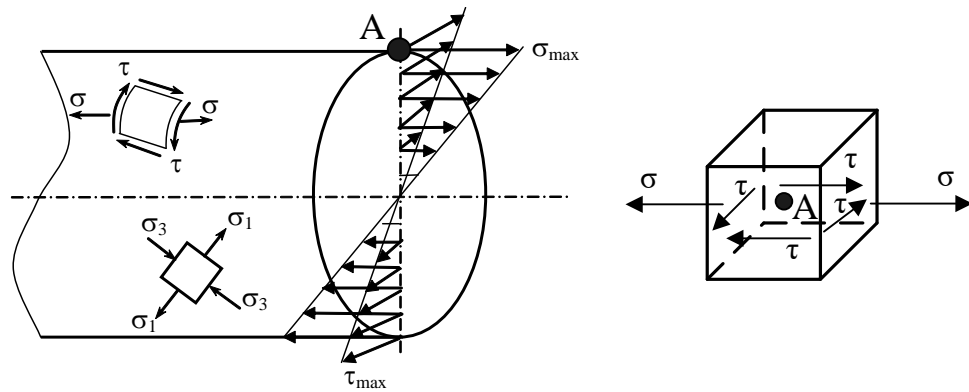


Рисунок 2.53 – Сумісна дія згину і кручення

Для визначення характеру напруженого стану матеріалу вала виділимо елемент на поверхні біля точки  $A$  і розглянемо напруження по його гранях. По чотирьох гранях елемента діють дотичні напруження, а по двох – нормальні напруження (рис. 2.53). Таким чином, при згині з крученням матеріал вала знаходиться у площинному напруженому стані. Отже, умова міцності матеріала вала має бути сформульована на основі гіпотез міцності. Для пластичних матеріалів застосовують третю і четверту гіпотези міцності, заздалегідь визначивши головні напруження.

Згідно до третьої теорії міцності умова міцності має вигляд:

$$\sigma_{екв.III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (2.106)$$

Аналогічно одержують умову міцності по четвертій теорії міцності:

$$\sigma_{екв.IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (2.107)$$

Одержані умови міцності дозволяють виконувати всі види розрахунку на міцність: проєктний і перевірний, а також визначати допустимі навантаження.

### 2.7.3. Поняття про міцність матеріалу від втоми

У машинах та механізмах більшість деталей знаходиться під дією напружень періодично змінних у часі через змінні за напрямком чи величиною навантаження. Наприклад, у таких умовах працюють деталі кривошипно-

шатунного механізму, вали трансмісій, лопатки турбін, залізничні рейки, осі коліс вагонів і локомотивів та інші.

Розглянемо роботу осі вагонних коліс (рис. 2.54).

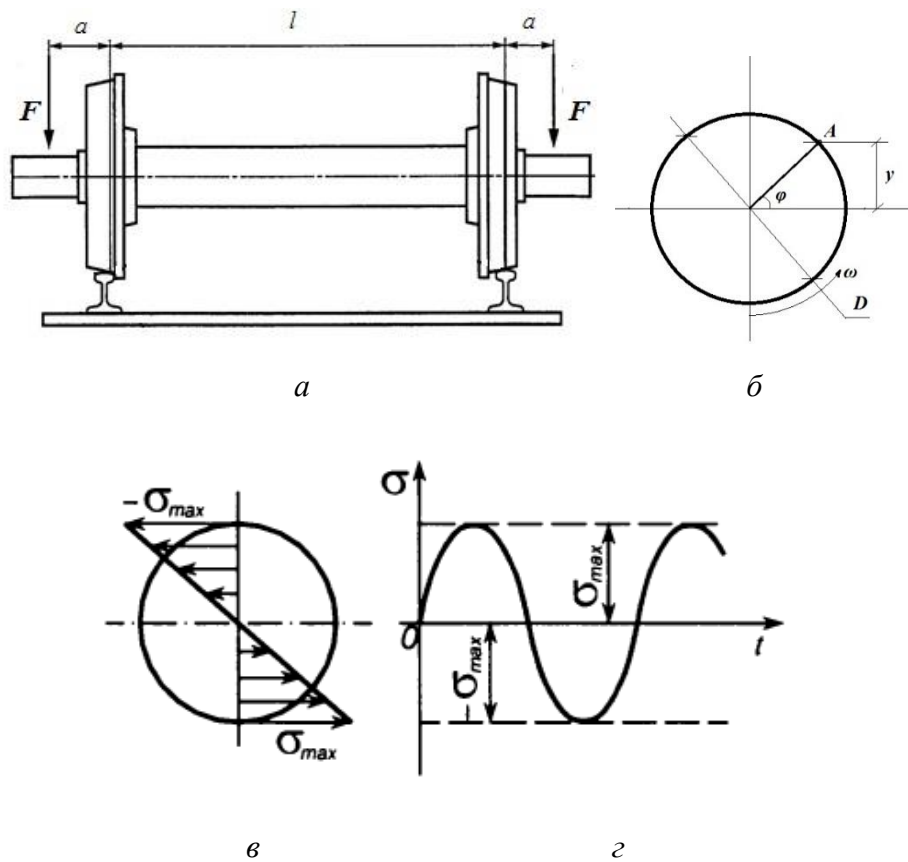


Рисунок 2.54 – Вісь вагонних коліс (а), переріз вісі (б), епюра нормальних напружень (в), цикл зміни напружень (г)

Якщо на вісь коліс, що обертається із кутовою швидкістю  $\omega$ , діє постійна сила  $F$  з боку вагону, то на ділянці  $l$  вона має деформацію чистого згину  $M = F \cdot a$  і нормальні напруження визначаються як

$$\sigma = \frac{My}{J_z}, \quad (2.108)$$

де  $y$  – відстань від нейтральної осі до даного волокна, що змінюється за законом  $y = \frac{D}{2} \sin \varphi = \frac{D}{2} \sin \omega t$ .

Остаточно напруження в осі мають вигляд

$$\sigma(t) = \frac{M D}{J_z} \sin \omega t. \quad (2.109)$$

З одержаного виразу виходить, що нормальні напруження в осі змінюючись за синусоїдальним законом, мають максимальне значення  $\sigma_{\max}(t) = \frac{M D}{J_z 2}$ . Отже, не зважаючи, що зовнішня сила постійна за величиною, напруження в осі є змінними через зміну її положення відносно напрямку сили.

Експериментально встановлено, що конструкції під дією змінних напружень, на відміну від дії таких самих постійних, з часом руйнуються. Тому явище руйнування матеріалів при багатократному повторюванні напружень називають втомою, а здатність чинити опір руйнуванню при повторно змінних напруженнях – витривалістю.

Міцність від втоми викликана утвореннями мікротріщин, які розвиваються і зменшують фактичну площу поперечного перерізу. Механізм утворення тріщин та руйнування матеріалів при циклічно змінних напруженнях вельми складний і вивчений не достатньо. Тому питання міцності від втоми матеріалів розв'язуються на основі експериментальних досліджень.

#### 2.7.4. Основні характеристики циклів

В інженерних розрахунках передбачається, що змінні напруження є функціями часу  $\sigma = f(t)$  з періодом  $T$ . Сукупність всіх значень напружень за час одного періоду називається циклом напружень (рис. 2.55).

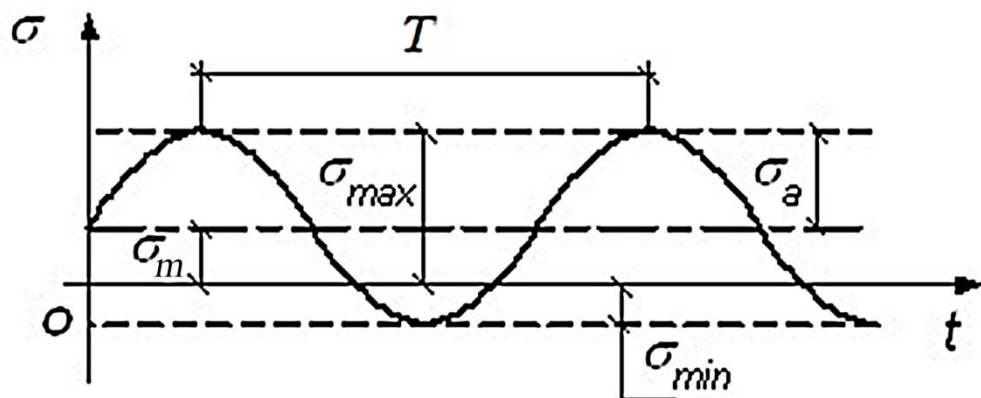


Рисунок 2.55 – Цикл зміни напружень

Експериментальні дослідження показують, що вплив форми кривої циклу зміни напружень на міцність від втоми незначний, а визначальну роль грають максимальні і мінімальні напруження циклу та їх відношення. Тому вважається, що зміна напружень в часі відбувається за законом, близьким до синусоїди. Отже, цикл змінних напружень характеризується (див. рис. 2.55):

- максимальним напруженням  $\sigma_{\max}$  ;
- мінімальним напруженням  $\sigma_{\min}$  ;
- середнє (постійне) напруження  $\sigma_c = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$  ;
- амплітуда циклу  $\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$  ;
- коефіцієнт асиметрії циклу  $r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$  .

Якщо  $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$ , то  $r = -1$  і такий цикл називають симетричним (рис. 2.56 а); при  $\sigma_{\max} \neq -\sigma_{\min}$  – асиметричний цикл. Будь-який асиметричний цикл можна уявити, як суму симетричного циклу та постійного напруження; при  $\sigma_{\max}$  і  $\sigma_{\min}$  одного знаку ( $r > 0$ ) – знакопостійний цикл (рис. 2.56 б); при  $\sigma_{\max}$  і  $\sigma_{\min}$  різних знаків ( $r < 0$ ) – знакозмінний цикл (рис. 2.56 а); при  $\sigma_{\max}$  або  $\sigma_{\min}$  рівних нулю – віднульовий (пульсуючий) цикл (рис. 2.56 в). Якщо  $\sigma_{\max} = \sigma_{\min} = \sigma = const$ , то  $r = 1$  і тоді маємо постійне статичне навантаження. Цикли, у яких  $r$  однакові називаються подібними.

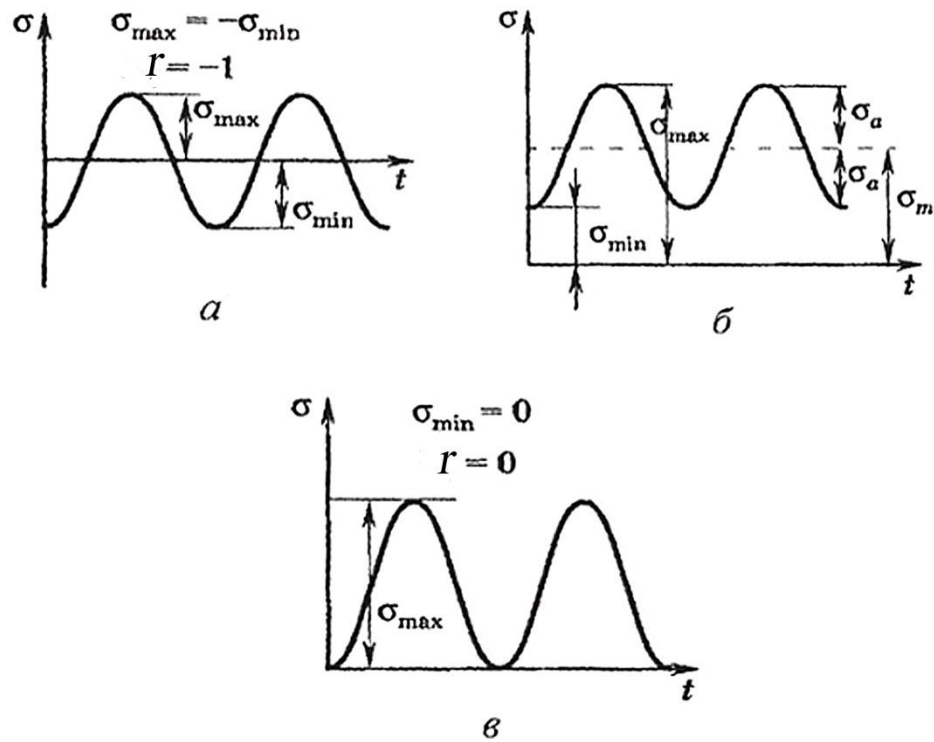


Рисунок 2.56 – Види циклів напружень

Якщо змінними є дотичні напруження залишаються в силі всі наведені вище терміни та співвідношення при заміні  $\sigma$  на  $\tau$ .

### 2.7.5. Криві втоми. Межа втомної міцності

Для розрахунків на міцність від втоми необхідно знати механічні характеристики металу. Вони визначаються шляхом випробувань, частіше при симетричному циклі, зразків на спеціальних машинах. В результаті випробувань визначають кількість циклів  $N$ , які витримує зразок до руйнування. За одержаними даними будують графік залежності  $\sigma_{\max} = f(N)$ , який називається кривою втоми або кривою Веллера (рис. 2.57).

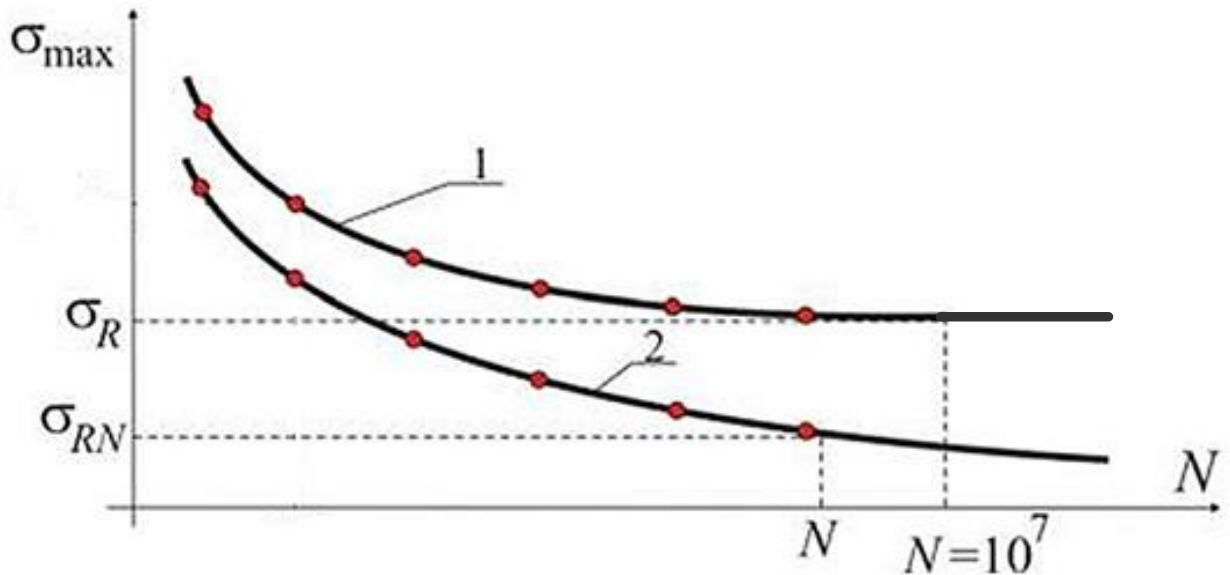


Рисунок 2.57 – Криві втоми (Криві Веллера): 1 – крива для чорних металів; 2 – крива для кольорових металів.

Здатність чинити опір, не руйнуючись, при будь-якому великому числі повторень змінних навантажень, називається межею витривалості (межею втоми). Із зменшенням  $\sigma_{\max}$  кількість циклів  $N$  до руйнування зразка швидко зростає і крива асимптотично наближається до прямої – асимптоти. Асимптота відсікає на осі ординат напруження, при якому матеріал не руйнується за будь-якої кількості циклів – межу витривалості  $\sigma_R$  ( $\sigma_{-1}$  при симетричному циклі).

Експериментальні дослідження показують, що для більшості чорних металів крива втомленості і її асимптота практично зливаються при  $N = 10^7$  (лінія 1 на рис.2.57), це число циклів називається базою. Виходячи з цього, вважають, що якщо зразок не руйнувався до  $10^7$  циклів, то він не руйнуватиметься і при триваліших випробуваннях. Крива втомленості для кольорових металів із зростанням  $N$  спадає поступово (лінія 2 на рис.2.57), і не має асимптоти ні при якому числі циклів. Це означає, що для таких матеріалів не існує дійсної межі витривалості. Тому в цьому випадку за базу випробувань приймають деяку умовну границю витривалості (в деяких випадках ця границя відповідає  $N = 10^8$  циклів навантаження), а максимальне напруження, відповідне цій кількості циклів називається умовною межею втоми  $\sigma_{RN}$ .

Межа втомної міцності не є характеристикою тільки властивостей матеріалу як, наприклад, модуль пружності або коефіцієнт Пуассона. Вона залежить від багатьох чинників: умов проведення експерименту, температури, параметрів циклів, концентрації напружень, форми і розмірів зразків, стану поверхні і т. д., а величина максимального напруження не визначає повністю процес втомного руйнування.

### 2.7.6. Діаграма граничних амплітуд

Для розрахунку на міцність матеріалу від втоми необхідно знати величини меж витривалості з різними коефіцієнтами асиметрії циклу  $r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$ .

Тому проводять випробування як при симетричних, так несиметричних циклах. Випробування зразків за несиметричними циклами частіше виконують при постійних середніх напруженнях і різних амплітудах. В результаті випробувань визначають найбільшу амплітуду напружень  $\sigma_a$ , за якої зразок не руйнується ні при будь-якому числі циклів і будують графік залежності  $\sigma_a = f(\sigma_m)$ , який називається діаграмою міцності від втоми або діаграмою граничних амплітуд (рис. 2.58, а).

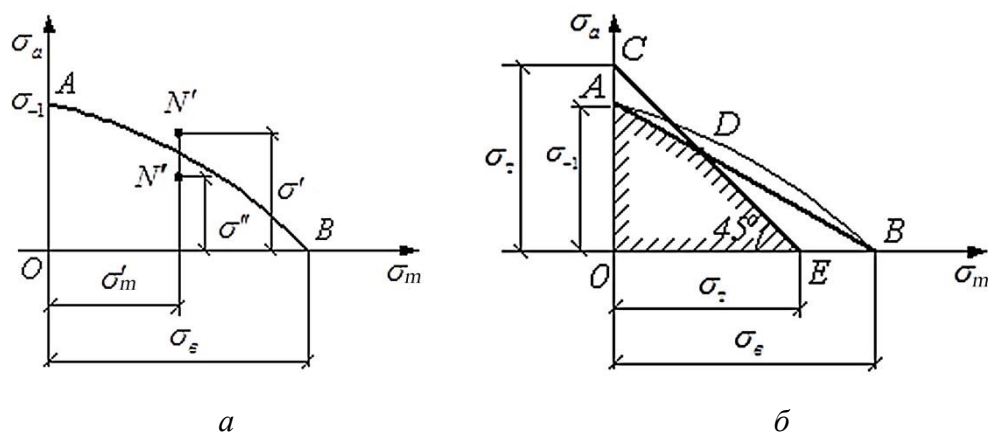


Рисунок 2.58 – Діаграма граничних амплітуд

Точка А на діаграмі відповідає межі витривалості при симетричному циклі навантаження ( $\sigma_m = 0$  и  $r = -1$ ), точка В – граничному значенню напружень при статичному навантаженні (межі міцності  $\sigma_B$ ).

По цій діаграмі можна визначити стан деталі, що працює при заданих напруженнях циклу  $\sigma_a$  і  $\sigma_m$ . Для цього на діаграму наносять точку  $N(\sigma_a, \sigma_m)$ . Якщо положення точки  $N$  виявиться нижчим кривої  $AB$  ( $N''$ ), то матеріал працюватиме необмежено довго, не руйнуючись. Якщо точка  $N$  лежатиме вище за криву  $AB$  ( $N'$ ), то матеріал руйнуватиметься після декількох циклів змін напружень. Отже, сама оцінка втомної міцності виконується просто. Проте побудова діаграми пов'язана з виконанням трудомістких і тривалих випробувань, тому на практиці криву  $AB$  замінюють прямою (рис. 2.58, б) з рівнянням у відрізках по координатних осях:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_s} = 1 \quad (2.110)$$

і отримують область трикутника  $OAB$  – область безпечних циклів з погляду міцності від втоми. При цьому відсічена деяка криволінійна частина діаграми йде в запас міцності. Подальша схематизація діаграми пов'язана з тим, що при  $\sigma_{\max} > \sigma_T$  деталь може вийти з ладу через появу великих пластичних деформацій. Тому з діаграми треба виключити зону пластичності, тобто обмежити діаграму циклами, для яких  $\sigma_{\max} \leq \sigma_T$ . Для цього з точки  $E$ , що відповідає межі текучості, проводять пряму  $EC$  під кутом  $45^\circ$  до перерізу з віссю ординат. Рівняння цієї прямої має вигляд:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_T} + \frac{\sigma_m}{\sigma_T} = 1. \quad (2.111)$$

Отримана область  $OADE$  (рис. 2.58, б) є зоною безпечних циклів за втомою і текучістю матеріалу конструкції. Одержана діаграма називається схематизованою діаграмою граничних амплітуд.

### 2.7.7. Вплив концентрації напружень, чистоти обробки поверхні і розмірів деталі на межу витривалості

Найбільш важливим чинником, що знижує межу витривалості, є концентрація напружень, викликана різкою зміною форми і (або) розмірів деталі (гальтельні переходи, пази, свердлення).

Такі концентратори напружень характеризуються теоретичним коефіцієнтом концентрації напружень  $K_{\sigma T}$ . У розрахунках використовують фактичний коефіцієнт концентрації напружень, який враховує чутливість матеріалу до концентраторів напружень:

$$K_{\sigma} = 1 + q_{\sigma}(K_{\sigma T} - 1), \quad (2.112)$$

де  $q_{\sigma}$  – коефіцієнт чутливості (приводиться у довідниках).

Чим міцніший матеріал, тим більше його чутливість до концентрації напружень. Якщо  $q_{\sigma} = 0$ , то  $K_{\sigma} = 1$  – матеріал не чутливий до концентрації напружень. Якщо  $q_{\sigma} = 1$ , то  $K_{\sigma} = K_{\sigma T}$  – матеріал суттєво чутливий до концентрації напружень.

З поліпшенням чистоти обробки поверхні міцність матеріалу від втоми підвищується, оскільки зменшується кількість точок концентрації напружень на поверхні деталі. У розрахунках якість поверхні враховується коефіцієнтом якості поверхні:

$$\beta_{\text{п}\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1\text{п}}}, \quad (2.113)$$

де  $\sigma_{-1}$  – межа витривалості стандартного полірованого зразка;  $\sigma_{-1\text{п}}$  – межа витривалості стандартного зразка із заданою чистотою обробки поверхні.

Зменшити вплив стану поверхні на втомну міцність можна відповідними технологічними прийомами обробки, що приводять до зміцнення поверхневих шарів (наклеп, обкаткою роликом, обдуванням дробом, азотуванням, цементацією, поверхневим гартуванням і т. і.).

Із збільшенням абсолютних розмірів деталей втомна міцність деталей знижується, оскільки в деталях великих розмірів є більше внутрішніх дефектів

і інших точок зародження втомних тріщин. Це враховується в розрахунках масштабним коефіцієнтом:

$$\beta_{m\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1m}}, \quad (2.114)$$

де  $\sigma_{-1m}$  – межа витривалості зразка геометрично подібного до заданих розмірів.

Наявність всіх основних чинників, що знижують втомну міцність, враховується у розрахунках загальним коефіцієнтом зниження втомної міцності:

$$K_{\sigma\delta} = K_{\sigma} \cdot \beta_{n\sigma} \cdot \beta_{m\sigma}, \quad (2.115)$$

### 2.7.8. Практичні розрахунки на витривалість

Всі розрахунки на витривалість виконуються як перевірни в наступному порядку:

- визначають геометричні розміри деталей без урахування циклічної дії навантаження, але за заниженими допустимими напруженнями;
- визначають коефіцієнт зниження міцності від втоми матеріалу  $K_{\sigma\delta}$  ( $K_{\sigma}$ ,  $\beta_{n\sigma}$ ,  $\beta_{m\sigma}$ ), використовуючи відповідні графіки і таблиці;
- визначають фактичний коефіцієнт запаса міцності від втоми  $n$ . Якщо  $n \geq [n]$ , то міцність від втоми забезпечена ( $[n]$  – допустимий коефіцієнт запаса міцності; він залежить від умов роботи деталі, її призначення, матеріалу, наявності концентраторів і т.д.). Зазвичай  $[n] = 1,4 \div 3,0$ .

Методика визначення фактичного коефіцієнта запаса міцності від втоми залежить від виду напруженого стану деталі і параметрів циклу.

При лінійному напруженому стані і симетричному циклі, якщо відомі:  $\sigma_{-1}$  – межа витривалості матеріалу і  $K_{\sigma\delta}$  – загальний коефіцієнт зниження міцності від втоми, то  $\sigma_{-1\delta} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma\delta}}$  – межа витривалості деталі, а фактичний кое-

фіцієнт запаса міцності від втоми визначають за виразом:



Проведемо пряму  $NF$  паралельно  $OB$  і  $NM$  паралельно  $AB$  (рис. 2.59).  $\triangle ONM$  подібний  $\triangle OK'A$ , тоді  $\frac{OK'}{ON} = \frac{OA}{OM}$ , але  $OA = \sigma_{-1}$ , а

$OM = OF + FM = \sigma_a + \sigma_m \cdot \operatorname{tg} \gamma$ . Позначивши  $\varphi_\sigma = \operatorname{tg} \gamma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_s}$ , отримаємо

$n_\sigma = \frac{OK'}{ON} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a + \varphi_\sigma \sigma_m}$ . Наявність чинників зниження міцності від втоми впли-

ває тільки на граничні амплітуди циклу і не впливає на  $\sigma_m$ . Тому коефіцієнт запасу втомної міцності при лінійному напруженому стані і асиметричному циклі запишеться у вигляді:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma 0} \sigma_a + \varphi_\sigma \sigma_m}. \quad (2.117)$$

У другому випадку, коли пряма  $ON_1$  перетинає пряму  $DE$  у точці  $K''$  (рис. 2.59), коефіцієнт запасу за умовами текучості має вигляд:

$$n_{\sigma T} = \frac{\sigma''_{\max}}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_T}{\sigma_a + \sigma_m}. \quad (2.118)$$

При виконанні практичних розрахунків на витривалість, наперед невідомо яку пряму перетне відрізок  $ON$  у граничному стані. Тому визначають коефіцієнт запасу як по втомі –  $n_\sigma$ , так і по текучості –  $n_{\sigma T}$ . За розрахунковий приймають коефіцієнт, який має менше значення, тобто необхідно, щоб  $n_\sigma \geq [n]$  і  $n_{\sigma T} \geq [n]$ .

Аналогічно визначаються фактичні коефіцієнти запасу втомної міцності при інших видах деформацій. Наприклад, при крученні коефіцієнт запасу втомної міцності визначається по формулах:

- при лінійному напруженому стані і симетричному циклі

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau 0} \tau_{\max}};$$

- при лінійному напруженому стані і асиметричному циклі по втомі

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau\sigma}\tau_a + \varphi_{\tau}\tau_m};$$

- при лінійному напруженому стані і асиметричному циклі по текучості

$$n_{\tau\tau} = \frac{\tau_{\tau}}{\tau_a + \tau_m}.$$

У разі, коли одночасно змінюються і нормальні і дотичні напруження повний запас міцності від втоми визначають за виразом:

$$n = \frac{n_{\sigma} \cdot n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}}. \quad (2.119)$$

### Контрольні запитання

1. Що називається складним опором? Назвіть найбільш поширені випадки складного опору.
2. Що таке косий згин? Умови його існування.
3. Чи може балка круглого перерізу знаходитись в умовах косоного згину?
4. За якими формулами визначають нормальне напруження у поперечному перерізі бруса в умовах косоного згину? Як встановлюють знаки цих напружень?
5. Який вид навантаження бруса називають сумісною дією згину та кручення?
6. Які внутрішні силові фактори виникають у поперечному перерізі стержня в умовах одночасної дії згину та кручення?
7. За якими формулами розраховують напруження, діючі в поперечному перерізі вала круглого профілю при згині з крученням?
8. Як розраховують на міцність вал круглого перерізу при сумісній дії згину і кручення?
9. Що таке втомленість та витривалість?

10. Що таке коефіцієнт асиметрії циклу? Чому він дорівнює для віднульового та симетричного циклів?
11. Що таке межа витривалості? Від яких конструктивно-технологічних факторів залежить межа витривалості?
12. Який вигляд має діаграма граничних амплітуд?
13. Що є концентратором напружень? Якими коефіцієнтами враховується концентрація напружень?
14. Як впливають розміри деталі на величину межі витривалості?
15. Як визначається коефіцієнт запасу міцності за нормальними напруженнями при розрахунку на витривалість?

### 3. ОСНОВИ ІНЖЕНЕРНОГО ПРОЕКТУВАННЯ

#### 3.1. Основні поняття

##### 3.1.1. Складові машин

В цьому розділі розглядаються основні положення з курсу «Деталі машини».

Машина – пристрій, що здійснює механічний рух для перетворення матеріалу, енергії чи інформації з метою підвищення продуктивності праці. За характером виконання роботи машини умовно поділяють: на технологічні (преси, прокатні стани, верстати), транспортні (автомобілі, крани, конвеєри), енергетичні (двигуни, генератори), інформаційні (комп'ютери).

В цілому машина являє собою єдиний комплекс механізмів, збірних одиниць (вузлів) і деталей, що дозволяють виконувати наявні функції.

Деталь – виріб, виготовлений із матеріалу однієї марки без використання складальних операцій.

Деталі, які використовують у певних машинах, належать до деталей спеціального призначення. Приклади: лопатки турбін, канати, колінчасті вали та інші. Деталі, що зустрічаються майже в усіх машинах, називають деталями загального призначення. Приклади: гайки, шпонки, зубчасті колеса, підшипники та інші. Ці деталі є об'єктом вивчення дисципліни «Деталі машин». Деталі загального призначення використовують в машинобудуванні у великих кількостях (сучасний літак має близько 400 тис. болтів і 1 млн. заклепок).

Деталі утворюють складальні одиниці або вузли.

Вузол – складальна одиниця з декількох деталей, з'єднаних на підприємстві за допомогою складних операцій (згвинчування, зварювання) і призначених для спільної роботи. Найпростіший вузол є складовою складнішого, який у свою чергу виявляється вузлом виробу, комплексу і т. д. Наприклад, підшипник, вузол опори, редуктор. Деякі вузли одночасно є механізмами.

Механізм – сукупність взаємопов'язаних деталей, яка припускає їх відносний рух і призначається для довготривалого перетворення руху однієї (чи

декількох) деталей в певний рух решти деталей. Приклади: передача гнучким зв'язком, муфта, редуктор та інші.

### 3.1.2. Критерії та особливості розрахунків

При створенні машини задовольняють основним вимогам: технічним і економічним. До технічних вимог належать поняття працездатності та надійності. Працездатність – це стан деталі, при якому вона здатна виконувати задані функції з параметрами технічної документації. Розрахунки працездатності деталей за критеріями є предметом вивчення розділу «Основ інженерного проектування». Надійність – це властивість деталі зберігати працездатність протягом заданого часу. Економічними називаються деталі, що потребують мінімальної витрати праці, коштів та часу на проектування, виготовлення й експлуатацію.

Працездатність деталі при конструюванні забезпечують розрахуванням розмірів за основними критеріями (рис. 3.1) та вибором матеріалу.

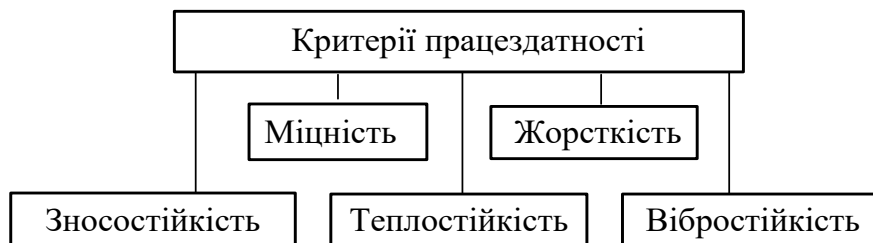


Рис. 3.1. Основні критерії працездатності

Для більшості деталей основним критерієм працездатності є міцність (зубчасті колеса), для деяких деталей – міцність і жорсткість (вали). Поняття міцності і жорсткості викладено у розділі «Основи розрахунків на міцність».

Зносостійкість – стійкість до спрацьовування. Спрацьовування – процес руйнування та відділення поверхневих шарів деталі в умовах тертя. Результат процесу спрацьовування – поступова зміна розмірів, форми та стану поверхні деталі, який називають зносом.

Теплостійкість – здатність конструкції працювати в заданому діапазоні температур упродовж потрібного терміну, не втрачаючи експлуатаційні показники.

Вібростійкість – здатність деталі працювати в заданому діапазоні експлуатаційних режимів без появи резонансу, коли частота власних коливань її конструкції може збігаються з частотою діючої сили.

Розрахунки працездатності деталей машин за критеріями виконують у два етапи: проєктний та перевірний. Проєктний – попередній розрахунок за основним критерієм працездатності з використанням спрощеної методики для вибору матеріалу і визначення основних розмірів деталі. За результатами проєктного розрахунку розробляють ескізний варіант конструкції деталі. Уточнення ескізного варіанта конструкції здійснюють перевірним розрахунком за потрібними (одним чи двома) критеріями працездатності на основі найбільш удосконаленої методики розрахунку. Після цих розрахунків виконують креслення деталі, де проставлені розміри і допуски на їх виготовлення, необхідні дані про макро- і мікрогеометрію (форми поверхонь, взаємне відхилення поверхонь, профіль поверхні).

Проєктування являє собою пошук науково обґрунтованих, технічно здійсненних та економічно доцільних інженерних рішень для елементів машин на основі техніко-економічних розрахунків. Отримані інженерні рішення подаються у вигляді технічної документації (проєкту), яка аналізується, коректується і приймається як основа для подальшого опрацювання.

### **3.1.3. Матеріали для деталей та їх змащування**

У машинобудуванні застосовують чорні (сталь, чавун) і кольорові (мідь, алюміній) метали, їх сплави (латунь, дюралюміній), неметалеві (полімери, гума, графіт) та комбіновані (металокерамічні, композитні) матеріали.

Основні вимоги до матеріалів: експлуатаційні та економічні, яким задовольнити одночасно і повною мірою – занадто важка задача, оскільки елементи більшості деталей працюють у різних умовах. Для покращення

характеристик, наприклад, чорних металів, застосовують такі засоби: механічне зміцнення (обдубання металевими кульками, накатування роликом), термічна (гартування, нормалізація) та хіміко-термічна (цементация, азотування) обробки, зміцнення концентрованими потоками енергії. Перспективними є полімерні матеріали, застосування яких у машинобудуванні дедалі більше розширюється.

Мастильний матеріал – невід’ємний складовий конструктивний елемент будь-якої машини для зменшення тертя і спрацювання деталей. У машинобудуванні застосовують рідкі, пластичні та тверді мастильні матеріали.

### 3.1.4. Відомості про механічні передачі

Структурно машина включає такі елементи (рис. 3.2):



Рисунок 3.2 – Структурна схема машини

- машина-двигун (МД) – джерело енергії;
- робоча машина (РМ) забезпечує виконання технологічної операції;
- передавальний механізм (ПМ) забезпечує синхронізацію параметрів МД і РМ;
- система управління (СУ) дозволяє варіювати режими роботи машини.

Кожна конкретна машина може мати відхилення від указаної схеми. Машина-двигун і передавальний механізм утворюють привід – пристрій для приведення в дію робочого органу машини. Серед багатьох типів приводів з різними передавальними механізмами найбільшого використання набули приводи з механічними передачами завдяки простоті конструкції, надійності в роботі, відносно невеликій вартості та високому коефіцієнту корисної дії.

У цьому розділі розглядаються приводи з одним електричним двигуном та декількома механічними передачами, що зменшують частоту обертання і підвищують обертальний момент.

Проектування механічних приводів розпочинають з вибору двигуна, визначають передаточне число приводу, виконують розбивку передаточного числа за ступенями, розраховують кінематичні та силові параметри приводу.

Для приводів технологічних і транспортних машин застосовують трифазні асинхронні електродвигуни серії 4А. Ці двигуни найбільш універсальні, можуть використовуватись як у приміщеннях, так і в забруднених умовах навколишнього середовища, допускають тривале без перегрівання перевантаження до 5 %. Вибір двигуна зі стандартних здійснюється за потужністю (до 400 кВт) та частотою обертання (750, 1000, 1500, 3000 хв<sup>-1</sup>).

Механічні передачі узгоджують режим роботи двигуна з режимом роботи виконавчого органу. В цьому розділі розглядаються механічні передачі обертового руху як найпоширенішого руху в машинах, так як обертовий рух легко зробити безперервним, легше досягти рівномірності ходу, зменшити втрати на тертя.

Механічні передачі поділяють на дві основні групи:

- передачі з використанням сил тертя (пасові (рис. 3.3, а), фрикційні (рис. 3.3, б));
- передачі з використанням зачеплення (ланцюгові (рис. 3.4, а), зубчасті (рис. 3.4, б)).

Механічні передачі можуть виконуватись двома способами:

- безпосереднім дотиканням ведучої та веденої ланок (фрикційні (рис. 3.3, б), зубчасті (рис. 3.4, б));
- гнучким зв'язком між ланками передачі (пасові (рис. 3.3, а), ланцюгові (рис. 3.4, а)).



Рис. 3.3. Передачі з використанням сил тертя: а – пасова; б – фрикційна



Рис. 3.4. Передачі з використанням зачеплення: а – ланцюгова; б – зубчаста

### 3.1.5. Характеристики механічних передач

Основні характеристики, необхідні для виконання проектного розрахунку будь-якої передачі, – потужність  $P$  на валу та частота обертання  $n$  валу. Характеристики, наприклад одноступеневої передачі, що належать до ведучої ланки, позначають індексом «1», а до веденої – індексом «2». Додатковими характеристиками є:

- кутова швидкість  $\omega$ ,  $\text{с}^{-1}$

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}; \quad (3.1)$$

- колова швидкість  $V$ , м/с

$$V = \omega \frac{d}{2}; \quad (3.2)$$

- передаточне відношення  $i$

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (3.3)$$

- коефіцієнт корисної дії (ККД)  $\eta$

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}; \quad (3.4)$$

- колова сила  $F_t$ , (Н)

$$F_t = \frac{P}{V}; \quad (3.5)$$

- обертальний момент  $T$ , (Н·м)

$$T = F_t \frac{d}{2} = \frac{P}{\omega}. \quad (3.6)$$

Якщо за умовами завдання  $F_t$  (Н),  $V$  (м/с),  $d$  (мм) відомі, то потужність  $P$  (кВт) доцільно визначати за формулою:

$$P = \frac{F \cdot V}{1000}, \quad (3.7)$$

а частоту обертання  $n$  (хв<sup>-1</sup>) – за формулою:

$$n = \frac{60000 \cdot V}{\pi \cdot d}. \quad (3.8)$$

Для відомих  $T$  та  $n$  потужність  $P$  визначають за формулою:

$$P = \frac{T \cdot n}{9550}. \quad (3.9)$$

На рис. 3.5 показані кінематичні і силові характеристики одноступеневої механічної передачі безпосереднім дотиканням із паралельними валами.

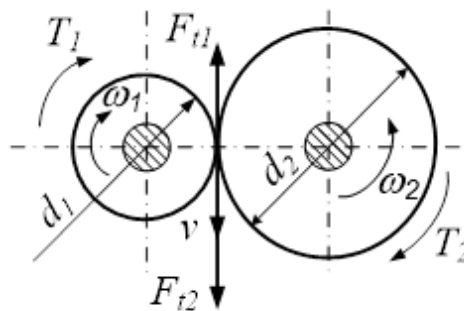


Рис. 3.5. Одноступенева передача

### Контрольні запитання

1. Дайте визначення деталі та вузлу. Наведіть конкретні приклади.
2. Якими ознаками механізм відрізняється від машини?
3. Чому необхідно виконувати перевірні розрахунки?
4. Які існують основні вимоги до деталей машин?
5. Які матеріали застосовують для виготовлення деталей?
6. Опишіть структурну схему машини. Що таке привід?

7. Що таке і для чого потрібна механічна передача?
8. Які характеристики необхідні для розрахунку передачі?
9. Що таке передаточне відношення передачі. Як визначається загальне передаточне відношення привода?

## 3.2. Передачі гнучкою ланкою

### 3.2.1. Загальні відомості про пасові передачі

Пасова передача (рис. 3.6) складається переважно з ведучого 1 та веденого 2 шківів і паса 3, що має ведучу (ВЧ) і ведену (ВН) ланки.

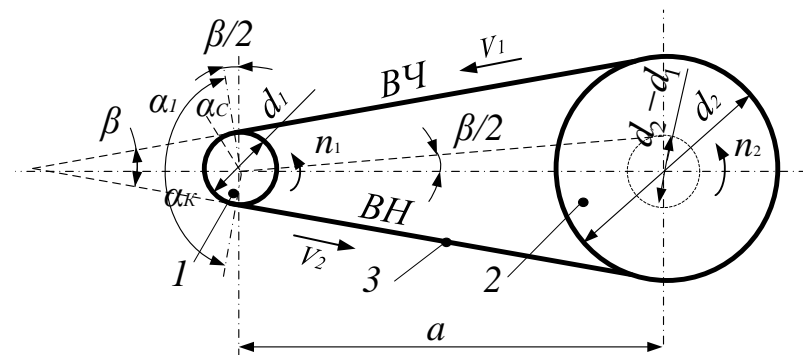


Рис. 3.6. Схема пасової передачі

Попередній натяг паса для передавання корисного навантаження за допомогою сил тертя частіше забезпечується переміщенням двигуна з ведучим шківом на полозках, розташуванням двигуна на хиткій плиті, застосуванням натяжного ролика.

Тип пасової передачі визначається формою перерізу паса: плоскопасові (рис. 3.7, а), клинопасові (рис. 3.7, б), поліклинопасові (рис. 3.7, в), круглопасові (рис. 3.7 г). Пасові передачі застосовують переважно на першому (швидкісному) менш навантаженому ступені приводу з метою зниження частоти обертання (від 2 до 4) при передаванні невеликої потужності (зазвичай до 50 кВт) на відстань до 15 м зі швидкістю не більше 30 м/с.

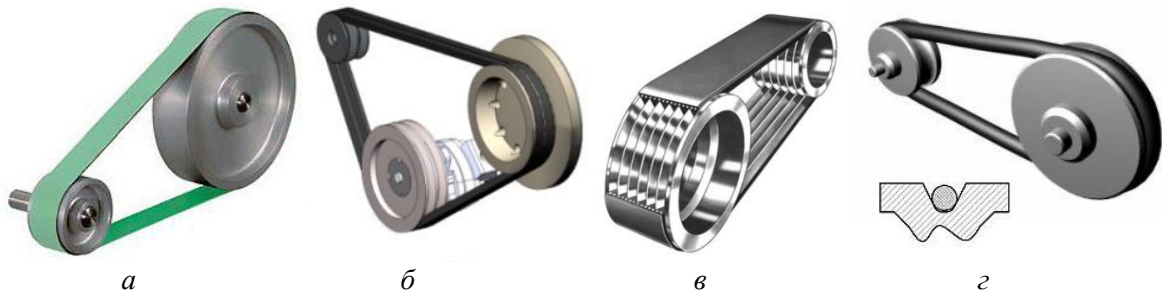


Рис. 3.7. Типи пасових передач

Плоскі паси більш поширені у швидкісних передачах ( $V \geq 30$  м/с), круглі – в малопотужних кінематичних передачах побутового призначення. В сучасному машинобудуванні найбільш поширені передачі з клиновими і полікліновими пасами, що здатні передавати більші обертальні моменти при менших габаритах.

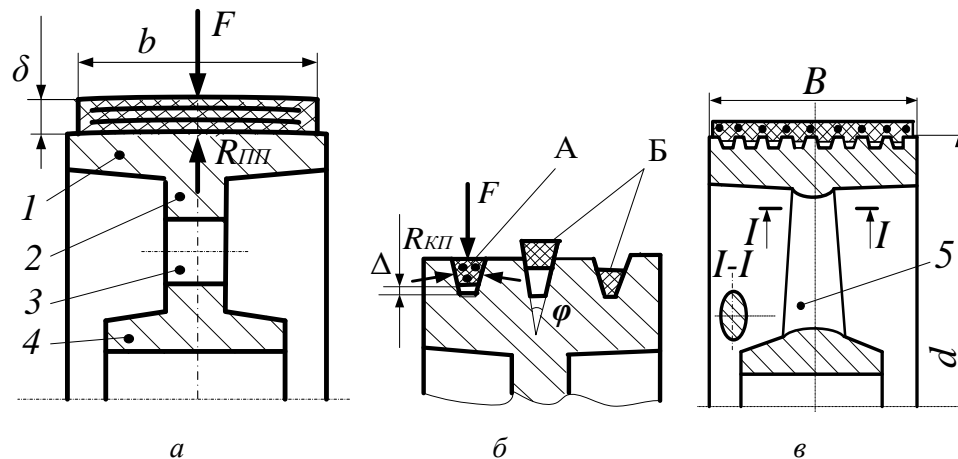


Рис. 3.8. Профілі пасів: а – плоский; б – клиновий (А – вірний монтаж пасу; Б – невірний монтаж пасу); в – полікліновий, та елементи шківів: 1 – обід; 2 – диск; 3 – технологічний отвір; 4 – маточина; 5 – спиці.

Підвищена навантажувальна здатність передач із клиновими пасами пояснюється умовами їх зчеплення зі шківом. Сили тертя які виникають між плоским і клиновим пасами і шківом, при притисканні силою  $F$  (рис. 3.8. а, б) суттєво різні. В системі плоский пас–шків сила тертя визначається як:

$$F_T = f \cdot R_{III} = f \cdot F,$$

де  $f$  – коефіцієнт тертя,  $R_{III}$  – реактивна сила, а сила тертя між клиновим пасом та шківом при середньому значенні кута клина  $\varphi = 38^\circ$  – як

$$F_T = f \cdot 2 \cdot R_{кп} = f \cdot 2 \cdot \frac{F}{2 \cdot \sin \frac{\varphi}{2}} \approx 3f \cdot F,$$

де  $R_{кп}$  – реактивна сила

Таким чином, клинова форма паса збільшує його зчеплення майже у три рази. Подальше зменшення величини кута  $\varphi$  з метою підвищення сил тертя недоцільно, оскільки виникає самозаклинювання паса, зниження його ресурсу та коефіцієнта корисної дії (ККД) передачі.

За конструкцією шківів бувають монолітними, з дисками 2 (рис. 3.8, а), зі спицями 5 (рис. 3.8, в). У дисках шківів передбачають технологічні отвори 3 (рис. 3.8, а) для кріплення при обробленні, транспортуванні та виході ливарних газів у виливки. Шківів з дисками використовують при значній колій швидкості ( $V > 30$  м/с), в іншому випадку – шківів зі спицями. При діаметрі шківів  $d < 500$  мм застосовують чотири спиці, при  $d = 500 \dots 1600$  мм – шість спиць; при ширині  $B < 300$  мм застосовують один ряд спиць, для більш широких шківів – два ряди спиць. Спиці виконують еліптичного перерізу (рис. 3.8, в).

Форма робочої поверхні ободу 1 (рис. 3.8, а) шківів визначається перерізом паса. Для плоских пасів найкращою формою робочої поверхні ободу шківів є гладка полірована поверхня, причому для забезпечення центрування паса для одного зі шківів (частіше більшого) робоча поверхня ободу виконується опуклою. Для клинових пасів геометричні параметри жолобків визначаються перерізом паса та кількістю пасів і регламентовані стандартом.

Паси можуть бути гумотканинними, шкіряними, бавовняними, поліамідними. Гумотканинні паси є одними з найрозповсюджених. Основне навантаження сприймається тканиною, а гума забезпечує роботу паса як єдиного цілого, захищає тканину від пошкоджень і підвищує коефіцієнт тертя паса зі шківом. Гумотканинні паси допускають швидкість до 30 м/с. Шкіряні паси виготовляють із окремих нарізаних смуг шкіри склеюванням їх спеціальним клеєм або зшиванням, призначені для передавання малих та середніх

потужностей і працюють при швидкостях до 45 м/с. Бавовняні паси виготовляють із бавовняної пряжі у кілька переплетених шарів, їх застосовують переважно у передачах невеликої потужності при швидкостях до 25 м/с. Поліамідні паси є найбільш перспективними внаслідок високої статичної міцності та довговічності. Армовані плівкові багат шарові паси на основі синтетичних поліамідних матеріалів можуть працювати при швидкостях до 80 м/с і передавати потужність до 3000 кВт.

Шківи виготовляють із чавуну, сталі, легких сплавів на основі алюмінію, полімерних матеріалів.

Переваги пасової передачі: простота конструкції, обслуговування та експлуатації; відносно низька вартість виготовлення; можливість передавання руху на значну відстань; плавність та безшумність у роботі; пом'якшення динамічних навантажень і запобігання ударному перевантаженню механізмів.

До недоліків пасової передачі належать: великі габарити (у 4...5 разів більші від зубчастих передач); несталість передаточного відношення через проковзування паса; підвищене навантаження валів та їх опор; низька довговічність пасів швидкісних передач (1000...5000 годин).

### 3.2.2. Кінематичні та геометричні параметри

Дослідженнями руху паса в пасовій передачі доведено, що є два види ковзання паса по шківу: пружне – неминуче при нормальній роботі та буксування – при перевантаженні.

Природа пружного ковзання пояснюється за допомогою моделі пасової передачі (рис.3.9). До обох кінців паса зачеплені однакові вантажі вагою  $F_1$ , що спричиняють появу однакових деформацій  $\varepsilon_1$  лівої та правої віток (рис. 3.9, а). Між пасом та нерухомим шківом виникає однакове контактне тиснення. Якщо на правому кінці паса зменшити вантаж до величини  $F_2$  так, щоб уся система залишилась у рівновазі, то зменшаться і деформації правої частини паса до величини  $\varepsilon_2$  (рис. 3.9, б).

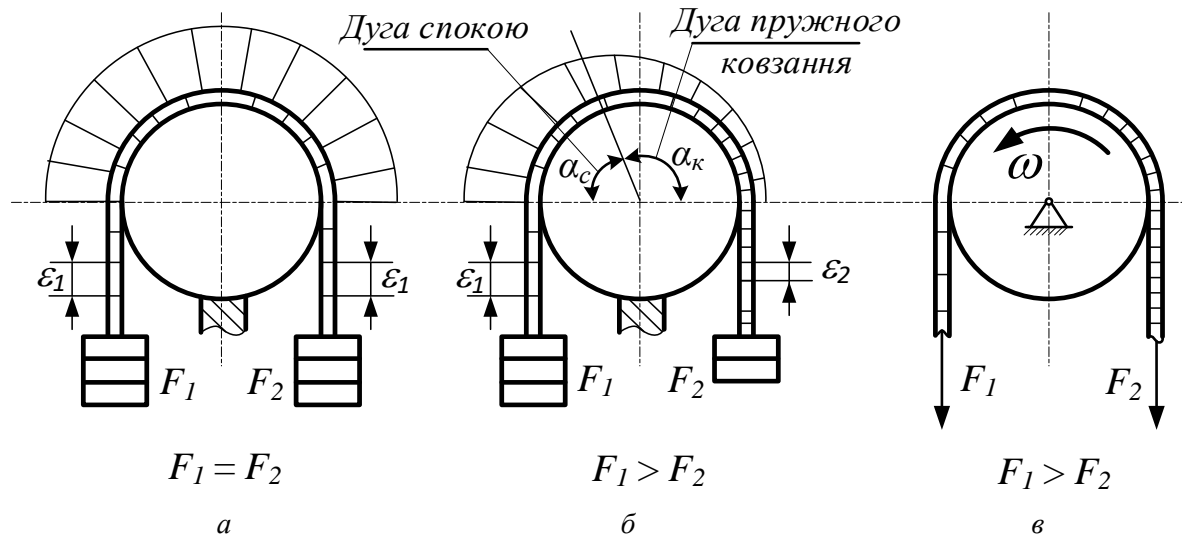


Рис. 3.9. Модель пасової передачі

Відносне скорочення довжини паса  $\xi = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$  поширюється по дузі обхвату пасом шківів, що визначається кутом ковзання  $\alpha_k$ , тобто відбувається пружне ковзання паса по поверхні шківів справа наліво. На дузі з кутом  $\alpha_c$  пас за рахунок сил тертя знаходиться у спокої. Контактне тиснення між пасом та шківом по дузі з кутом  $\alpha_c$  стає нерівномірним (рис. 3.9, б). Подальше зменшення вантажу  $F_2$  призведе до зростання кута  $\alpha_k$  аж до  $\alpha_k^{\text{крит}}$ , коли порушиться рівновага системи пас-вантаж і з'явиться буксування (сповзання) паса з нерухомого шківів.

Аналогічні процеси мають місце при роботі пасової передачі (рис. 3.9, в). При цьому дуга спокою на обох шківів розташована з боку ведучої вітки паса (рис. 3.6). Таким чином, пружне ковзання – неминуче явище в пасовій передачі; воно спричинюється різницею навантаження ведучої та веденої віток паса.

Співвідношення швидкості  $V_1$  ведучої вітки та веденої  $V_2$  знаходять як:

$$V_2 = V_1 \cdot (1 - \xi), \quad (3.10)$$

де  $\xi$  – коефіцієнт ковзання; ( $\xi = 0,01$  для гумотканинних плоских пасів;

$\xi = 0,02$  для кордшнурових клинових пасів);  $V_1 = \pi \cdot d_1 \cdot n_1 / 60$ ;

$V_2 = \pi \cdot d_2 \cdot n_2 / 60$ .

Передаточне відношення пасової передачі з урахуванням виразу (3.10):

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1 \cdot (1 - \xi)}. \quad (3.11)$$

Основні геометричні параметри (рис. 3.6) пасових передач: діаметри шківів  $d_1$ ,  $d_2$ , міжосьова відстань  $a$ , кут обхвату пасом меншого шківа  $\alpha_1$ , довжина паса  $L$ .

Діаметр  $d_1$  для передач із плоским пасом визначають за емпіричною залежністю

$$d_1 = (1100 \dots 1300) \sqrt[3]{P_1/n_1}; \quad (3.12)$$

діаметр  $d_1$  для передач із клиновими пасами вибирають за стандартом залежно від перерізу паса. Діаметри  $d_2$  для всіх передач визначають із виразу (3.11). Для відкритих плоскопасових передач доцільно вибирати міжосьову відстань  $a \geq 2(d_1 + d_2)$ , для відкритих клинопасових передач – за рекомендаціями залежно від передаточного відношення пасової передачі і діаметра  $d_2$ . На основі відомих величин  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $a$  виконують геометричний розрахунок довжини паса  $L$ :

$$L = 2a + \frac{\pi \cdot (d_2 + d_1)}{2} + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4 \cdot a}, \quad (3.13)$$

розрахована довжина паса  $L$  узгоджується зі стандартними значеннями, згідно до ряду. За остаточно прийнятою довжиною паса уточнюється величина міжосьової відстані:

$$a = \frac{(2L - \frac{\pi}{2} \cdot (d_1 + d_2)) + \sqrt{[2L - \frac{\pi}{2} \cdot (d_1 + d_2)]^2 - 8 \cdot (d_2 - d_1)^2}}{8}. \quad (3.14)$$

Після чого визначають кут обхвату пасом меншого шківа

$$\alpha_1 = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 60^\circ \cdot \frac{(d_2 - d_1)}{a}. \quad (3.15)$$

Для плоскопасових передач рекомендується  $\alpha_1 \geq 150^\circ$ , для клинопасових  $\alpha_1 \geq 110^\circ$ , при менших значеннях кута обхвату можливе зниження ККД через часткове буксування паса під навантаженням.

Всі геометричні параметри визначають після проектного розрахунку.

### 3.2.3. Сили та напруження в пасі

У перерізах паса виникають сили від попереднього натягу  $F_0$ , корисного (робочого) навантаження  $F_t$  та дії відцентрових сил  $F_v$ , які разом утворюють навантаження  $F_1$ ,  $F_2$  відповідно у ведучій та веденій вітках (рис. 3.10).

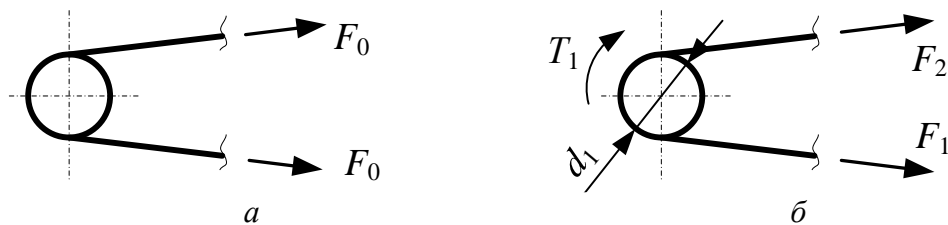


Рис. 3.10. Сили в пасі

З умови рівноваги ведучого шківa (див. рис. 3.10, б):

$$T_1 + (F_2 \cdot d_1 / 2) - (F_1 \cdot d_1 / 2) = 0 \quad (3.16)$$

отримуємо:

$$F_1 - F_2 = \frac{2 \cdot T}{d_1} = F_t, \quad (3.17)$$

з урахуванням сили попереднього натягу і пружного пасу (однакові деформації на розтяг і на стиск)

$$F_1 = F_0 + \frac{F_t}{2}; \quad F_2 = F_0 - \frac{F_t}{2}; \quad F_1 + F_2 = 2 \cdot F_0. \quad (3.18)$$

В отриманих виразах (3.20-3.21) не враховані сили тертя між пасом і шківом, щоб їх врахувати скористаємось формулами Ейлера. Розглянемо відрізок паса, обмежений кутом  $d\varphi$ . Позначимо:  $dN$  – реакція шківa;  $F$  – сила натягу паса на шківі;  $f dN$  – сила тертя між пасом і шківом (рис. 3.11).

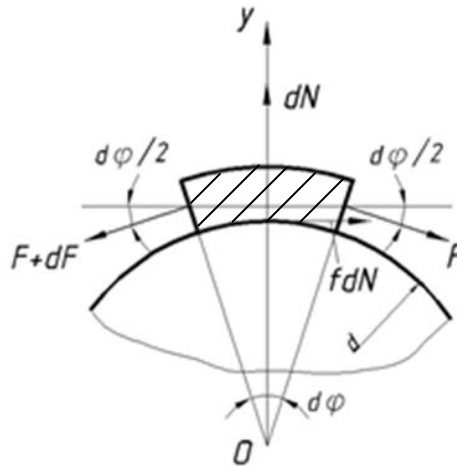


Рис. 3.11. Елемент паса

Нехтуючи товщиною паса, напишемо умови рівноваги елемента паса:

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow (F + dF) \cdot \frac{d}{2} - F \cdot \frac{d}{2} - fdN \cdot \frac{d}{2} = 0 \Rightarrow dF = fdN$$

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow dN - F \cdot \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) - (F + dF) \cdot \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) = 0,$$

$$\text{так як } d\varphi \text{ - малий } -\sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) = \frac{d\varphi}{2} \quad dN = Fd\varphi$$

Після інтегрування і врахування рівнянь (3.17-3.18) отримаємо вирази:

$$F_1 = \frac{F_t \cdot e^{\alpha_1 \cdot f}}{e^{\alpha_1 \cdot f} - 1}; \quad F_2 = \frac{F_t}{e^{\alpha_1 \cdot f} - 1}; \quad F_0 = \frac{F_t}{2} \cdot \frac{e^{\alpha_1 \cdot f} + 1}{e^{\alpha_1 \cdot f} - 1}, \quad (3.19)$$

які відображають якісну картину роботи передачі, оскільки не враховують пружне ковзання паса, його деформацію та вагу. Для підвищення величини корисної сили  $F_t$  рекомендується збільшити коефіцієнт тертя  $f$  та кут обхвату  $\alpha_1$  пасом ведучого шківів, що практично досягається використанням натяжних пристроїв, спеціальних конструкцій шківів та клинових пасів.

Отримані вирази для сил  $F_1$ ,  $F_2$  необхідні для теоретичного визначення навантажень на вали та розрахунків напружень у вітках паса.

Вплив відцентрових сил  $F_v$  не враховується, якщо швидкість паса  $v \leq 10$  м/с. Такий режим роботи пасових передач характерний для більшості приводів загального машинобудування. Шкідливу дію відцентрових сил на тягову здатність пасової передачі зменшують завдяки натяжним пристроям.

Для визначення відцентрових сил розглянемо елемент паса (рис. 3.12)

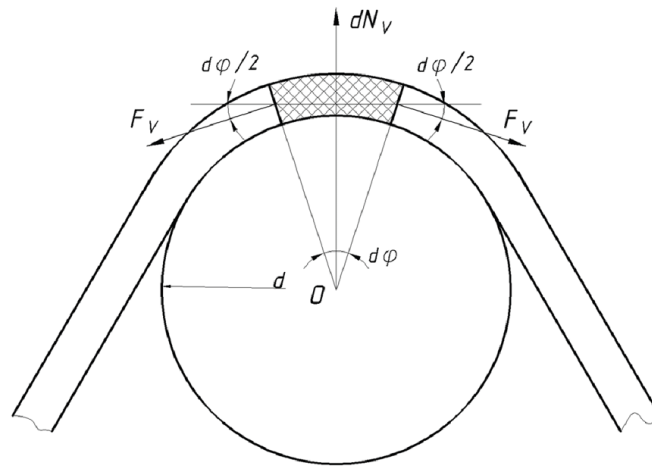


Рис. 3.12. Визначення відцентрових сил

Складемо рівняння рівноваги:

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow dN_v = 2 \cdot F_v \cdot \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right),$$

де  $dN_v = m \cdot a = \rho \cdot A \cdot d\varphi \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{2 \cdot v^2}{d}$ ;  $A \cdot d\varphi \cdot \frac{d}{2}$  – об'єм елемента паса, що розглядається,  $A$  – площа перерізу паса,  $\rho$  – щільність матеріалу паса.

Звідки відцентрова сила дорівнює:

$$F_v = \rho \cdot A \cdot V^2 \quad . \quad (3.20)$$

На практиці навантаження валу від дії початкового натягу визначають за наближеною формулою:

$$R \approx 2 \cdot F_0 \cdot \cos \frac{\beta}{2} = 2 \cdot F_0 \cdot \cos(90 - \frac{\alpha_1}{2}) = 2 \cdot F_0 \cdot \sin \frac{\alpha_1}{2} \quad . \quad (3.21)$$

Силам  $F_0$ ,  $F_t$ ,  $F_v$  у вітках паса відповідають напруження  $\sigma_0$ ,  $\sigma_t$ ,  $\sigma_v$ :

$$\sigma_0 = \frac{F_0}{A}; \quad \sigma_t = \frac{F_t}{A}; \quad \sigma_v = \frac{F_v}{A}.$$

У перерізах паса, що знаходяться на шківках, додатково виникають напруження згину  $\sigma_{зг}$ .

Напруження згину не впливають на тягову здатність передачі, змінюються за віднульовим циклом і є основною причиною руйнування від утомленості паса. За напруженнями  $\sigma_0$ ,  $\sigma_t$ ,  $\sigma_v$ ,  $\sigma_{зг}$  будують епюру їх розподілу по довжині паса.

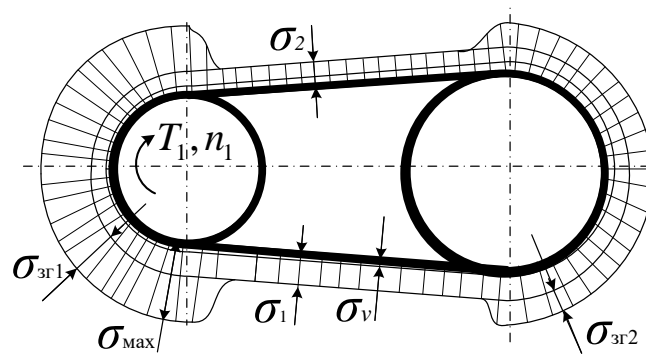


Рис. 3.13. Епюра розподілу напружень по довжині паса

Напруження згину визначають за відомою формулою опору матеріалів:

$$\sigma_{зг} = E \cdot \frac{y_{\max}}{r_1}. \quad (3.22)$$

Враховуючи, що  $y_{\max} = \frac{\delta}{2}$ ;  $r_1 \approx \frac{d_1}{2}$ , маємо:

$$\sigma_{зг} = E \cdot \frac{\delta}{d_1}. \quad (3.23)$$

Встановлено, що  $\sigma_{зг}$  можуть перевищувати всі інші напруження разом узяті у декілька разів, а вплив напружень від відцентрових сил  $\sigma_v$  для передач з  $V \leq 20$  м/с не суттєвий.

Максимальне напруження спостерігається у ведучій (нижній) вітці паса (див. рис. 3.13), в тому перерізі, який набігає на ведучий (менший) шків

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 + \sigma_V + \sigma_{\text{зг1}} = \sigma_0 + 0,5\sigma_t + \sigma_V + \sigma_{\text{зг1}}. \quad (3.24)$$

Умовою міцності паса є вираз:

$$\sigma_{\max} = \sigma_0 + 0,5\sigma_t + \sigma_V + \sigma_{\text{зг1}} \leq [\sigma_p], \quad (3.25)$$

де  $[\sigma_p]$  – допустиме напруження паса на розтягування.

Однак працездатність пасової передачі визначається не міцністю паса, а величиною корисного навантаження. Тому умову міцності (3.25) подають як:

$$\sigma_{\max} = ([\sigma_p] - \sigma_0 - \sigma_V - \sigma_{\text{зг1}}) \leq [\sigma_t], \quad (3.26)$$

де  $[\sigma_t]$  – допустиме корисне напруження, що визначається емпіричним шляхом, оскільки на працездатність передачі впливає багато факторів (пружне ковзання, сили тертя), теоретична оцінка яких має низьку достовірність.

### 3.2.4. Розрахунки пасових передач

Досвід експлуатації пасових передач свідчить, що їх працездатність насамперед обмежується тяговою здатністю, а потім ресурсом паса. Тягова здатність обумовлена зчепленням паса зі шківками. Ресурс паса визначається стійкістю до руйнування від утомленості внаслідок циклічної зміни напружень протягом заданого часу роботи. Отже, розрахунок тягової здатності пасів є проєктним, а розрахунок ресурсу – перевірним.

Для проведення аналізу тягової здатності, експериментально отримують криві ковзання, які будують у координатах  $\xi$ ,  $\varphi$  ( $\varphi$  – коефіцієнт тяги,  $\varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{\sigma_t}{2 \cdot \sigma_0}$ ). В експерименті використовують базову передачу (горизонтальне розташування передачі при спокійному навантаженні з  $i=1$ ;  $V=10$  м/с;  $\alpha_1=180^\circ$ ). Для фіксованого попереднього натягу  $F_0$ , збільшуючи корисне навантаження  $F_t$ , визначають пружне ковзання та ККД і будують криві  $\xi$  та  $\eta$  (рис. 3.14).

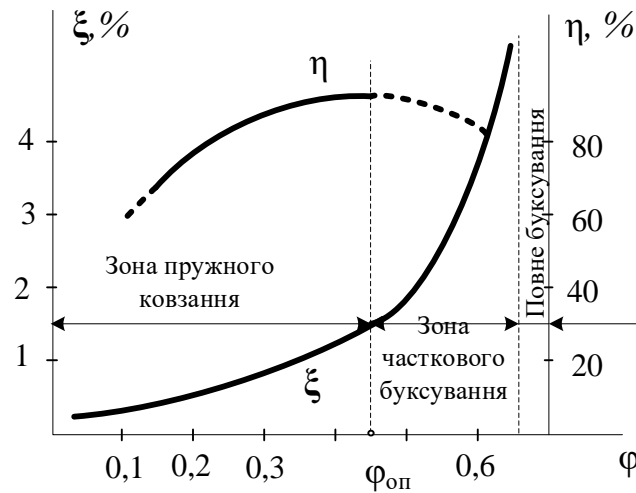


Рис. 3.14. Криві ковзання і коефіцієнта корисної дії

З отриманих кривих випливає, що величину корисного навантаження потрібно вибирати біля оптимальної величини  $\varphi_{\text{оп}}$  (краще для  $\varphi \leq \varphi_{\text{оп}}$ ), де ККД – максимальний. Тоді величину  $[\sigma_t]$  базової передачі визначають як

$$[\sigma_t] = 2\sigma_0 \cdot \varphi_{\text{оп}}. \quad (3.27)$$

Для реальної передачі, яка відрізняється від базової конструкцією та умовами експлуатації, значення  $[\sigma_t]$  визначають за виразом

$$[\sigma_t] = 2\sigma_0 \cdot \varphi_{\text{оп}} \cdot C_\alpha \cdot C_v \cdot C_p \cdot C_\theta, \quad (3.28)$$

де  $C_\alpha$  – коефіцієнт кута обхвату пасом малого шківів;  $C_v$  – коефіцієнт впливу на роботу передачі відцентрових сил;  $C_p$  – коефіцієнт режиму роботи;  $C_\theta$  – коефіцієнт, який враховує вид передачі та кут її нахилу до горизонту.

Розрахунок тягової здатності пасових передач зводять до визначення розрахункової площини перерізу паса (пасів) за умовою:

$$A = \frac{F_t}{[\sigma_t]}, \quad (3.29)$$

де  $A = b \cdot \delta$  – площа перерізу плоского паса (рис. 3.8, а);  $A = z' \cdot A_0$  – площа перерізу клинових пасів (рис. 3.8, б);  $z'$  – кількість клинових пасів;  $A_0$  – площа перерізу одного клинового паса.

На практиці виникає необхідність вибирати плоский пас із тією чи іншою кількістю «к» шарів (прокладок), тому в проєктному розрахунку плоскопасової передачі визначають ширину паса за питомим корисним навантаженням  $q_t$ , що може передаватися к шарами:

$$q_t = \frac{F_t}{b} \leq [q_t], \quad (3.30)$$

де  $[q_t] = 2 \cdot q_0 \cdot \phi_0 \cdot C_\alpha \cdot C_v \cdot C_p \cdot C_\theta$  – допустиме питоме корисне навантаження, що припадає на к шарів;  $q_0$  – питома сила попереднього натягу паса, що припадає на к шарів.

Методика визначення  $[q_t]$  не відрізняється від методики визначення  $[\sigma_t]$ . Отже, з виразу (3.30) отримують ширину плоского паса

$$b \geq \frac{F_t}{[q_t]}. \quad (3.31)$$

При конструюванні клинопасової передачі зручно підбирати кількість  $z$  клинових пасів стандартного перерізу за допустимою потужністю для одного паса. З виразу (3.27) з урахуванням коефіцієнта кількості пасів  $C_z$  ( $z = 2 \dots 3$   $C_z = 0,95$ ;  $z = 4 \dots 6$   $C_z = 0,9$ ;  $z \geq 6$   $C_z = 0,85$ ), визначають  $z$ :

$$z = \frac{P}{C_z \cdot [P]} = \frac{F_t}{C_z \cdot A_0 \cdot [\sigma_t]} \leq [z], \quad (3.32)$$

де  $[P]$  – допустима потужність на один пас,  $[P] = (P_0 \cdot C_L \cdot C_\alpha + \Delta P_{3z}) \cdot C_p$ ;  $P_0$  – допустима потужність на один пас базової передачі;  $\Delta P_{3z}$  – поправка до потужності, яка враховує вплив згину на довговічність паса;  $C_L$  – коефіцієнт, який враховує вплив довжини паса на його довговічність;  $[z]$  – допустима кількість пасів,  $[z] \leq 8$  (доцільно  $3 \leq [z] \leq 6$ ).

Для поліклинового паса визначають кількість ребер  $z$  за виразом:

$$z = \frac{10 \cdot P}{[P]}. \quad (3.33)$$

Дотепер відсутні дані, потрібні для визначення ресурсу паса передачі. Однак відомо, що зміна в часі сумарного напруження у довільному перерізі паса має циклічний характер. Тому, враховуючи залежність ресурсу від величини напружень та частоти циклів, пропонується його оціночний розрахунок.

Оскільки один цикл напружень відповідає пробігу паса, то оцінка його ресурсу здійснюється за умовою обмеження пробігів  $v$  в одиницю часу:

$$v = \frac{V}{L} \leq [v], \quad (3.34)$$

де  $[v]$  – допустима кількість пробігів паса; ( $[v] \leq 3 \dots 5 \text{ c}^{-1}$  для плоских гумотканинних пасів;  $[v] \leq 10 \dots 15 \text{ c}^{-1}$  для клинових пасів);  $V$  – швидкість паса, м/с;  $L$  – довжина паса, м.

Якщо умова (3.34) не виконується, то підвищити ресурс паса можна, наприклад, за рахунок збільшення міжосьової відстані і його довжини.

Зменшення ресурсу паса при збільшенні кількості пробігів пов'язано не тільки з втомою, але із термостійкістю його матеріалу. Тому практика експлуатації показала, що середній ресурс гумових пасів складає 2000...3000 г.

Оцінку довговічності виконують частіше тільки для плоских пасів, оскільки в розрахунках тягової здатності клинопасових передач фактор довговічності паса враховується коефіцієнтом  $C_L$  та поправкою  $\Delta P_{32}$ .

### Контрольні запитання

1. Укажіть переваги і недоліки пасових передач.
2. Як передається навантаження в пасових передачах?
3. Які пасові передачі найбільше використовуються в машинобудуванні?
4. Що таке пружне ковзання паса на шківках і чим воно відрізняється від буксування паса?

5. Як визначити сили у ведучій та веденій вітках пасової передачі?
6. Якою величиною характеризується тягова здатність пасової передачі?
7. Що є основною причиною руйнування від утомленості пасів?
8. Чому тягова здатність клинопасової передачі більша від плоскопасової?
9. Чому для клинопасових передач можна не виконувати перевірочний розрахунок на довговічність паса?

### 3.3. Зубчасті передачі

#### 3.3.1. Загальні відомості

Зубчасті передачі з круглими колесами – найбільш поширені механічні передачі у сучасному машинобудуванні. Зубчасті колеса бувають розміром від кількох міліметрів до 10 м, здатні передавати потужності до 100 000 кВт, працювати з коловими швидкостями до 150 м/с.

Зубчасті передачі в більшості випадків складаються з двох коліс (рис. 3.15), на ободі яких розміщені зубці; працюють за принципом зачеплення безпосередньо ведучого та веденого коліс, тобто обертання ведучого зубчастого колеса (шестірні), наприклад, перетворюється в обертання веденого шляхом надавлювання зубців першого колеса на зубці другого.



*a*

*б*

*в*

Рис. 3.15. Зубчасті передачі: а – циліндричні; б – конічні; в – черв'ячні

Зубчасті передачі класифікують:

- 1) за можливістю перетворення характеру руху:
  - обертовий рух ведучого колеса перетворюється в обертовий рух веденого (рис. 3.16, а);
  - обертовий рух ведучого колеса перетворюється в поступальний рух рейки (рис. 3.16, б);

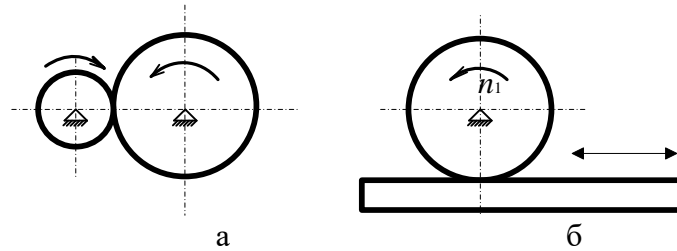


Рис. 3.16. Зубчасті передачі зовнішнього зачеплення

- 2) за можливістю руху опор валів:
  - рядові передачі, в яких опори валів не рухомі (рис. 3.16, а; рис. 3.17, а);
  - планетарні передачі, в яких опори валів здійснюють обертовий рух (рис. 3.17, б);

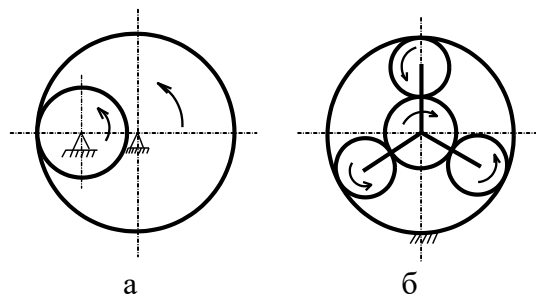


Рис. 3.17. Зубчасті передачі внутрішнього зачеплення

- 3) за взаємним розміщенням валів:
  - паралельні (рис. 3.15, а; рис. 3.16);
  - ті, що перетинаються (рис. 3.15, б – кут перетину становить  $90^\circ$ );
  - мимобіжні у просторі (рис. 3.15, в – черв'ячна передача);
- 4) за відносним розміщенням поверхонь вершин та впадин:
  - зовнішнє зачеплення (див. рис. 3.15);
  - внутрішнє зачеплення (див. рис. 3.17);

5) за формою зубців:

- прямозубі (рис. 3.18, а);
- косозубі (рис. 3.18, б) та шевронні (рис. 3.18, в);
- кругові зубці (рис. 3.18, г);

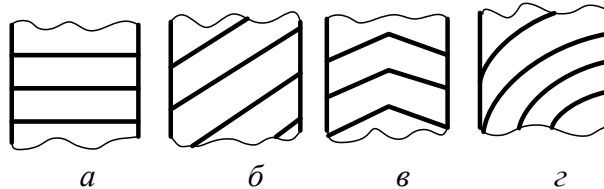


Рис. 3.18. Зубчасті колеса з різною формою зубців

б) за формою профілю зубців:

- евольвентний (рис. 3.19, а);
- круговий (рис. 3.19, б – один із можливих профілів);
- циклоїдний (рис. 3.19, в – один із можливих профілів);

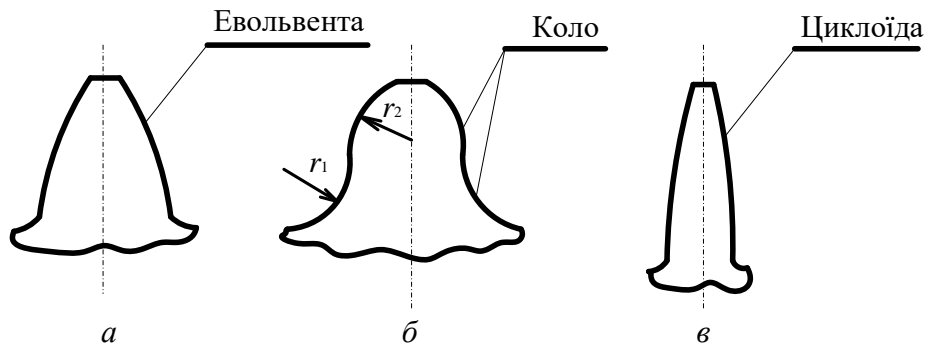


Рис. 3.19. Форми профілів зубців

8) за функціональним призначенням:

- силові та кінематичні;
- які підвищують або знижують швидкість обертання;
- тихохідні ( $V \leq 3$  м/с), швидкохідні ( $V > 15$  м/с);

Агрегат з передачею яка знижує швидкість обертання двигуна називають редуктором; з передачею яка підвищує – мультиплікатором. Закриті передачі (редуктори) добре змащуються і допускають великі колові швидкості.

Основні переваги зубчастих передач: компактність; висока вантажна здатність; велика надійність та довговічність; сталість передаточного відношення; широкий діапазон швидкостей та передаточних відношень.

Недоліки зубчастих передач: високі вимоги до точності виготовлення та монтажу; шум при роботі з високими швидкостями; потреба в постійному змащуванні; неможливість безступеневої зміни передаточного відношення.

### 3.3.2. Основи теорії зубчастого зачеплення

Кінематичною умовою придатності профілів зубців зубчастих коліс є сталість миттєвого передаточного відношення, тобто:

$$i = \text{const.} \quad (3.35)$$

Умова (3.38) забезпечується, коли профілі зубців окреслені кривими, що задовольняють вимогам основного закону зачеплення: профілі зубців двох коліс повинні бути такими, щоб спільна нормаль до них у довільній точці дотику поділяла міжосьову відстань на відрізки, обернено пропорційні кутовим швидкостям зубчастих коліс.

Для пояснення вказаного вище розглянемо площинну картину спряження пари зубців, які торкаються в довільній точці  $S$  – зачеплення при незмінній міжосьовій відстані  $O_1O_2$  (рис. 3.20).

Колові швидкості точки  $S$  відносно центрів  $O_1$  та  $O_2$  визнають як

$$V_{S1} = O_1S \cdot \omega_1; \quad V_{S2} = O_2S \cdot \omega_2.$$

Для забезпечення безперервного контакту двох зубців потрібно, щоб проєкції  $V_{S1}$  та  $V_{S2}$  на нормаль  $n$  до профілів у точці контакту були однакові:

$$V_{S1}^n = V_{S2}^n, \text{ тобто } 0,5 \cdot \omega_1 \cdot d_{b1} = 0,5 \cdot \omega_2 \cdot d_{b2}.$$

Отже, з подібності  $\Delta CO_2\Pi$  та  $\Delta BO_1\Pi$ :

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_{b2}}{d_{b1}} = \frac{O_2\Pi}{O_1\Pi}. \quad (3.36)$$

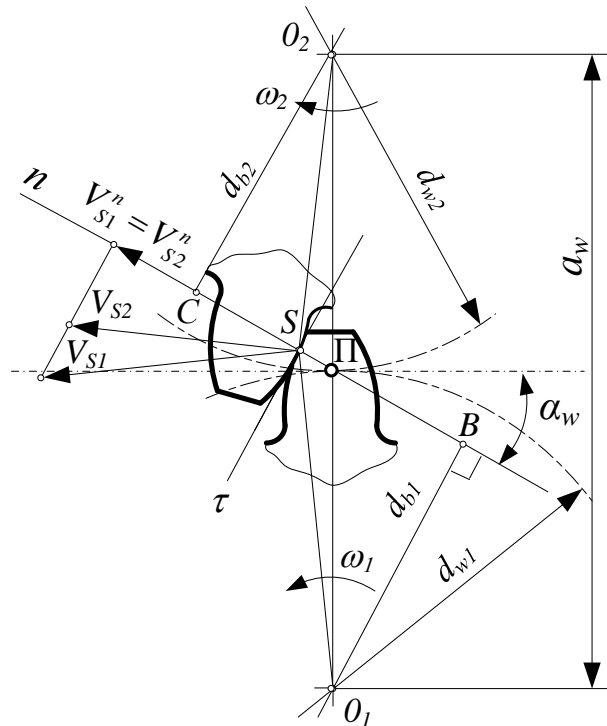


Рис. 3.20. Схема взаємодії пари спряжених зубців

Якщо умова (3.36) виконується для довільних положень контактуючих зубців, то точка перетину  $\Pi$  нормалі  $n$  до їх профілів з міжосьовою відстанню  $a_w$  має незмінне положення, яке називають полюсом. У полюсі зачеплення ковзання зубців відсутнє, а при переході через полюс швидкість ковзання змінює знак. Лінія зачеплення – геометричне місце точок контакту спряжених зубців при обертанні зубчастих коліс де  $B$  – початок,  $C$  – кінець контакту.

З великої кількості кривих, які задовольняють вимогі (3.36), найбільш широкого використання набула евольвента, що забезпечує:

- пряму лінію зачеплення, яка є твірною евольвентного профілю;
- нечутливість до незначних змін міжосьової відстані;
- високу технологічність виробництва коліс.

### 3.3.3. Відомості про геометрію циліндричних передач

Всі поняття та терміни, що належать до геометрії зубчастих передач, стандартизовані. Стандарти встановлюють визначення, позначення та методи розрахунку основних геометричних параметрів, які пояснюються на прикладі циліндричних прямозубих передач, що показані на рис. 3.21 (параметрам шестірні відповідає індекс «1», колеса – «2»):

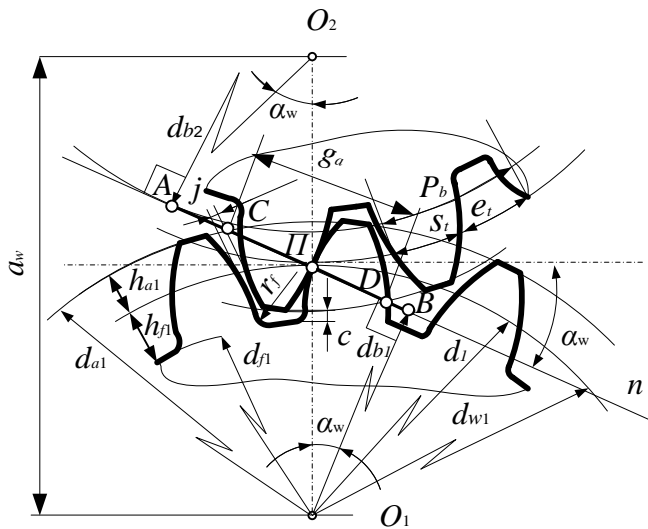


Рис. 3.21. Основні геометричні параметри

$d_{w1}$  – діаметр початкового кола;  
 $d_i$  – діаметр ділительного кола;  
 $d_{a1}$  – діаметр кола вершин зубців;  
 $d_{f1}$  – діаметр кола западин зубців;  
 $d_{b1}$  – діаметр основного кола;  
 $h_{a1}$  – висота головки зуба;  
 $h_{f1}$  – довжина ніжки зуба;  
 $P_b$  – основний коловий крок;  
 $P_t$  – ділительний коловий крок;  
 $S_t$  – колова товщина зуба;  
 $e_t$  – колова ширина западин;  
 $c$  – радіальна щілина;  
 $j$  – бічна щілина;  
 $r_f$  – радіус западин;  
 $a_w$  – міжосьова відстань.

Початкові кола в кінематичному розумінні визначають зачеплення зубчастих коліс. Пара зубчастих коліс може мати множину початкових кіл, а у окремого колеса початкового кола не існує, оскільки це кінематичне поняття.

Ділительні кола – база для визначення розмірів елементів зубців: вони поділяють зубець на головку та ніжку. Ділительне коло – на відміну від початкового – реальна постійна геометрична фігура окремо взятого зубчастого колеса. При зміні міжосьової відстані  $a_w$  величини  $d_i$  не змінюються. У більшості нормальних зубчастих передач, за виключенням коригованих (коли інструмент при нарізанні колеса зміщується), діаметри ділительних та початкових кіл збігаються, тобто  $a_w$  визначається як

$$a_w = (d_{w1} + d_{w2})/2 = (d_1 + d_2)/2. \quad (3.37)$$

Основне коло визначає ділянку евольвенти, за якою описана бічна поверхня зуба. Зі збільшенням діаметра  $d_b$  евольвента стає більш пологою і при  $d_b \rightarrow \infty$  перетворюється у пряму лінію, а зубчасте колесо – у зубчасту рейку з прямолінійним профілем зубців.

Основний коловий крок зубців  $P_b$  – відстань між однойменними профілями двох сусідніх зубців по дузі основного кола. Ділильний коловий крок  $P_t$  вимірюється по дузі ділильного кола. Оскільки  $d_b = d \cdot \cos \alpha_w$  (див.  $\Delta CO_2P$  чи  $\Delta BO_1P$  на рис. 3.21), то:

$$P_b = P \cdot \cos \alpha_w, \quad (3.38)$$

де  $\alpha_w$  – кут зачеплення (кут між лінією зачеплення  $n$  та дотичною  $l$  до початкових кіл; для нормальних коліс  $\alpha_w = 20^\circ$ ). Для пари спряжених коліс колові кроки однакові. За визначенням кроку зубців  $P_t: \pi d_w = P_t Z$ , тобто:

$$P = \frac{\pi \cdot d_w}{Z}, \quad (3.39)$$

де  $Z$  – кількість зубців колеса.

Оскільки крок зубців, як і довжина кола, визначається трансцендентним числом, то для зручності вимірювань та розрахунків вводять поняття модуля зубців за виразом:

$$m = \frac{P}{\pi}. \quad (3.40)$$

Модуль – основна характеристика розмірів зубців, і для пари спряжених коліс він однаковий. Для забезпечення взаємозамінності зубчастих коліс та уніфікації зубонарізного інструменту значення  $m$  регламентовані стандартом.

Висоту головки та ніжки зуба нормальних (некоригованих) коліс визначають відповідно до виразів:

$$h_a = m; \quad h_t = h_a + c = 1,25m, \quad (c = 0,25m). \quad (3.41)$$

Діаметри ділильні, початкові, вершин та западин зубців нормальних (некоригованих) циліндричних прямозубих коліс визначають за формулами:

$$d_i = d_{wi} = mz_i; \quad (3.42)$$

$$d_{ai} = d_i + 2h_a = m(z_i + 2); \quad (3.43)$$

$$d_{fi} = d_i - 2h_f = m(z_i - 2,5). \quad (3.44)$$

Ширину зубчастого вінця шестірні  $b_1$  вибирають як

$$b_1 = b_2 + (0,2 \dots 0,4)m, \quad (3.45)$$

а ширину зубчастого вінця колеса  $b_2$  – за виразами:

$$b_2 = \Psi_a \cdot a_w; \quad b_2 = \Psi_d \cdot d_w, \quad (3.46)$$

де  $\Psi_a$ ,  $\Psi_d$  – коефіцієнти ширини вінця, що враховують розташування коліс відносно опор, форму зубців і твердість їх поверхонь.

Передаточне відношення зубчастої передачі

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2V_1}{d_1} \cdot \frac{2V_2}{d_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{mz_2}{mz_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

надалі будемо називати передаточним числом та позначати як :

$$u = \frac{z_2}{z_1}. \quad (3.47)$$

Безперервність роботи передачі та сталість її передаточного відношення залежить не тільки від виду профілю зубців, а і від геометрії передачі та можлива, коли наступна пара зубців входе в зачеплення до виходу з нього попередньої, тобто коли забезпечується перекриття роботи однієї пари зубців другою. Чим більша величина перекриття, тим вища плавність роботи та несуча здатність передачі, тим менші динамічні навантаження. Перекриття однієї пари зубців другою характеризують коефіцієнтом торцевого перекриття  $\varepsilon_a$  :

$$\varepsilon_a \frac{g_a}{P_b}. \quad (3.48)$$

Для прямозубих передач рекомендують  $\varepsilon_a \geq 1,2$ , тобто зона двопарного зачеплення повинна займати не менше 20 % загальної площини поля зачеплення. Поле зачеплення – прямокутник, одна сторона якого є довжина  $g_a$  лінії зачеплення (геометричне місце точок контакту зубців), а друга – ширина  $b_w$  вінця шестірні. Саме випадок зачеплення з  $\varepsilon_a > 1$  показаний на рис. 3.22, а, де напрямок переміщення лінії контакту першої 1 та другої 2 пар зубців позначений стрілкою.

Коли перша пара зубців прийде на межу поля 1', друга пара займе положення 2'. При подальшому русі на ділянці 1'–2 контактує тільки одна пара зубців. Однопарне зачеплення продовжується, доки пара 1 не займе положення 2. Після цього вказаний вище процес продовжується.

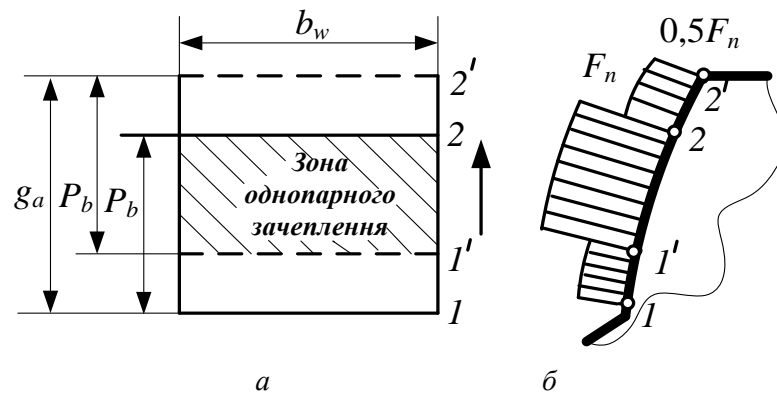


Рис. 3.22. Зв'язок поля зачеплення з навантаженням зуба

Аналізуючи вплив поля зачеплення на характер навантаження зуба, можна зазначити, що зоні однопарного зачеплення порівняно з двопарним відповідає майже двократне збільшення навантаження посередині профілю зубців (рис. 3.22, б).

Невідповідність колових кроків шестірні та колеса через похибки виготовлення, а також пружні деформації зубців спричиняють появу додаткових динамічних навантажень внаслідок ударів (серединного, кромкового) і, як наслідок, підвищення шумності роботи передачі.

### 3.3.4. Особливості геометрії циліндричних передач із косими зубцями

Косі зубці коліс нахилені під кутом  $\beta$  до твірної ділильного циліндра (рис. 3.23, а). Різновидом косозубих коліс є шевронні зубчасті колеса, що являють собою два косозубих колеса, суміщених торцями так, що зубці мають протилежний нахил (рис. 3.23, б). У парі спряжених косозубих коліс із зовнішнім зачепленням кути  $\beta$  рівні, але протилежні за напрямком. Якщо до передачі не ставлять спеціальні вимоги, то шестірню нарізають із правим зубом (на циліндричній поверхні вінця зуб нахилений зліва направо – рис. 3.23, а), коло – з лівим.

У косозубих коліс відстань між зубцями визначають у торцевому ( $t-t$ ), нормальному ( $n-n$ ) та осьовому ( $x-x$ ) напрямках (рис. 3.23, а) переважно на ділильній поверхні відповідно через торцевий крок  $P_t$ , нормальний крок  $P_n$  та осьовий крок  $P_x$ . Торцевому і нормальному крокам відповідають торцевий модуль  $m_t$  та нормальний модуль  $m_n$

$$P_t = P_n / \cos \beta ; \quad P_x = P_n / \sin \beta ; \quad m_t = m_n / \cos \beta \quad (3.49)$$

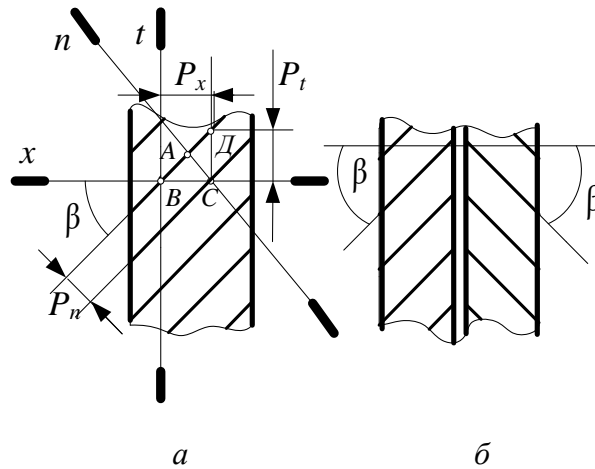


Рис. 3.23. Фрагменти коліс із косими зубцями

Косозубі колеса нарізають таким самим стандартним інструментом, як і прямозубі, тому вихідною величиною геометричних розрахунків косозубих коліс є стандартизований нормальний модуль.

Діаметри ділільні, початкові, вершин та западин зубців нормальних (не коригованих) циліндричних косозубих коліс визначають за формулами:

$$d_i = d_{wi} = m_n z_i / \cos \beta ; \quad (3.50)$$

$$d_{ai} = d_i + 2h_a = m_n (z_i / \cos \beta + 2) ; \quad (3.51)$$

$$d_{fi} = d_i - 2h_a = m_n (z_i / \cos \beta - 2) . \quad (3.52)$$

Завдяки нахилу зубців зростає сумарна довжина лінії контакту  $l_\Sigma$  в полі зачеплення, тобто зменшується питома величина навантаження на зубець. Відносна тривалість зачеплення косих зубців у осьовому перерізі характеризується коефіцієнтом осьового перекриття:

$$\varepsilon_\beta = \frac{b_w}{P_x} = \frac{b_w \cdot \operatorname{tg} \beta}{P_t} . \quad (3.53)$$

Згідно з виразом (3.53)  $\varepsilon_\beta$  збільшується з підвищенням  $\beta$ . Однак для запобігання великих осьових навантажень у косозубому зачепленні рекомендується обмежуватись величинами  $\beta = 8 \dots 20^\circ$ ; для шевронних коліс допускають  $\beta = 30 \dots 40^\circ$ .

Загальний коефіцієнт перекриття косозубої передачі

$$\varepsilon = \varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta}, \quad (3.54)$$

що перевищує значення коефіцієнта перекриття прямозубої передачі, сприяє підвищенню плавності роботи передачі.

### 3.3.5. Відомості про геометрію конічних передач

Геометрію конічних коліс відрізняють за радіальною та осьовою формами зубців. Радіальна форма зубців має три види: прямі (рис. 3.24, а), тангенціальні (рис. 3.24, б), кругові (рис. 3.24, в).

Використання тієї чи іншої радіальної форми зубців залежить від колової швидкості коліс. Прямозубі колеса застосовують при колових швидкостях до 3 м/с – це переважно у відкритих передачах. Колеса з тангенціальними та круговими зубцями мають ті самі переваги над прямозубими, що і в циліндричних передачах. Спряжені колеса з непрямыми зубцями мають різні напрямки: шестірні виконують, наприклад, із правим зубом, колеса – з лівим.

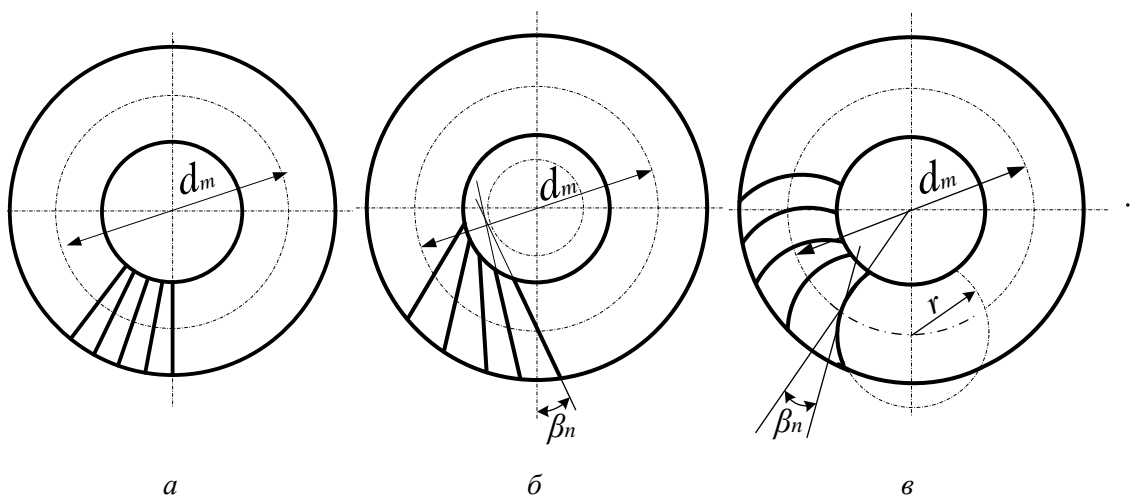


Рис. 3.24. Радіальні форми зубців конічних коліс

Осьова форма зубців конічних коліс має три види. Найбільш поширені зубці осьової форми I (рис. 3.25, а), в якій вершини ділильного конуса і конуса западин збігаються. Це основна форма для прямозубих та косозубих передач, а для коліс із круговим зубом має обмежене використання. Форму II (рис. 3.25, б, в), де вершини конусів ділильного та западин не збігаються (два варіанти

форми), та форму III (див. рис. 3.25, *г*) використовують для коліс із круговими зубцями.

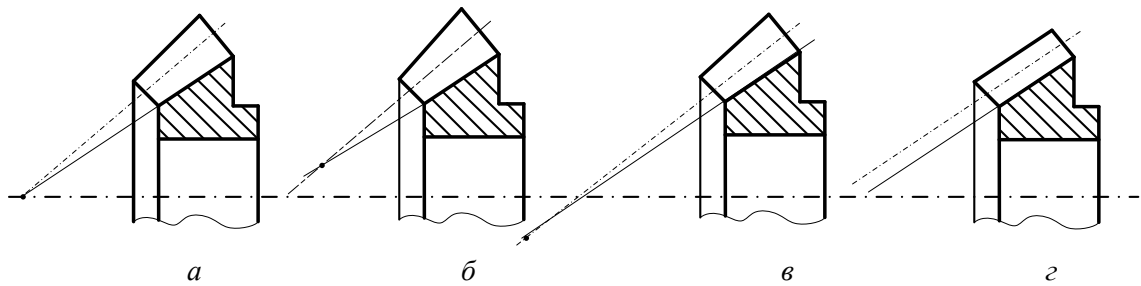


Рис. 3.25. Осьові форми зубців конічних коліс

Для умовного позначення конічних передач застосовують початкові та ділильні конуси, що збігаються, оскільки кутова корекція для цих передач відсутня. Нижче розглядається геометрія найбільш поширених конічних передач, коли кут між осями коліс  $\delta_1 + \delta_2 = \pi/2$  (рис. 3.26).

На рис. 3.26 показано: ділильні конуси 1; середні додаткові конуси 2 (твірні ділильних і додаткових конусів перпендикулярні); еквівалентне циліндричне колесо 3; зовнішня конусна відстань  $R_e$ ; середня конусна відстань  $R_m$ ; діаметр зовнішнього ділильного кола  $d_e$ ; діаметр середнього ділильного кола  $d_m$ ; діаметр еквівалентного циліндричного колеса  $d_v$ ; міжосьова відстань пари еквівалентних циліндричних коліс  $a_v$ ; ширина зубця  $b$ ; кути ділильних конусів  $\delta_1, \delta_2$ ; висота  $h_{ae}$  головки і довжина  $h_{fe}$  ніжки зубця. Оскільки модуль зубців конічних коліс у різних нормальних перерізах зубців не однаковий, як стандартний беруть модуль у зовнішньому нормальному перерізі, який називають зовнішнім коловим модулем  $m_{te}$ .

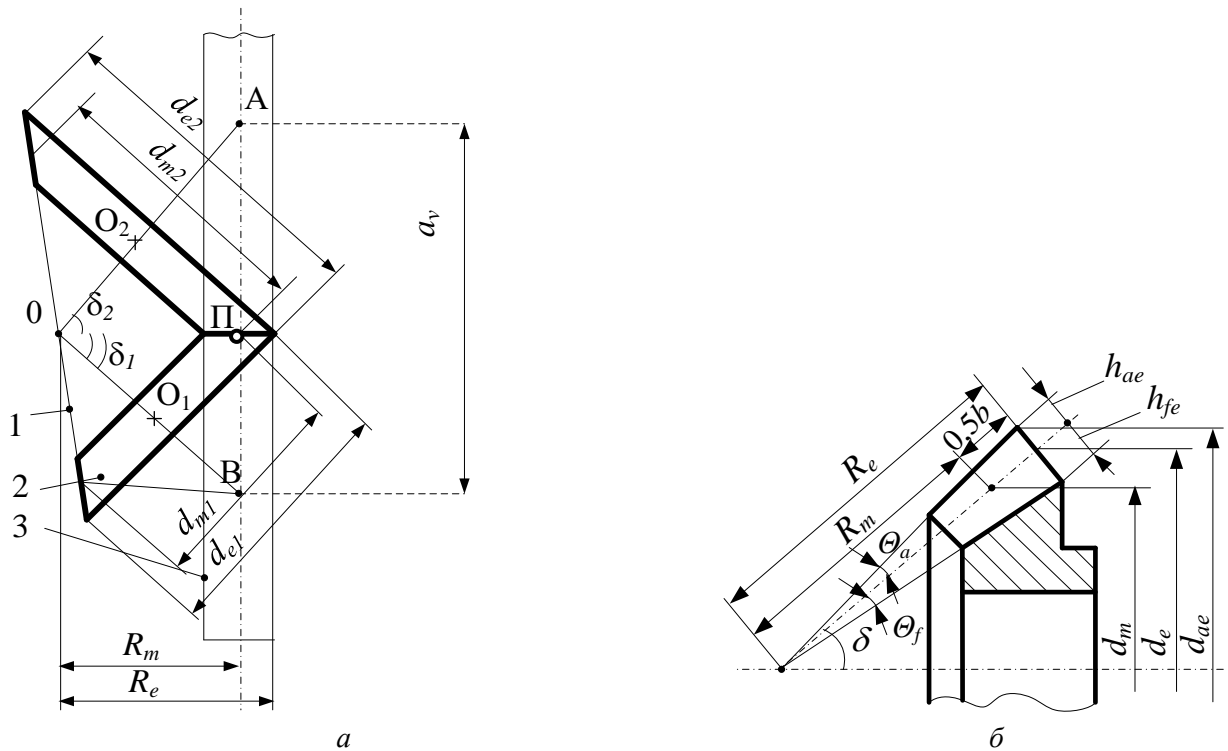


Рис. 3.26. Основні параметри:  
 а – конічних зубчастих передач; б – конічного колеса

Основні геометричні співвідношення розмірів розглянуто на прикладі прямозубого некоригованого колеса з зубцями форми I (див. рис. 3.26, б).

Зовнішній ділильний діаметр

$$d_e = m_{te} \cdot z. \quad (3.55)$$

Висота головки і довжина ніжки зуба відповідно

$$h_{ae} = m_{te}, \quad h_{fe} = 1,2m_{te}. \quad (3.56)$$

Кут ніжки

$$\operatorname{tg} \theta_f = h_{fe} / R_e. \quad (3.57)$$

Кут головки

$$\operatorname{tg} \theta_a = h_{ae} / R_e; \quad \theta_{a1} = \theta_{f2}; \quad \theta_{a2} = \theta_{f1}. \quad (3.58)$$

Ширина зубчастого вінця шестірні та колеса

$$b = \psi_k \cdot R_e; \quad b \leq 10m_{te}, \quad (3.59)$$

де  $\psi_k$  – коефіцієнт ширини зубчастого вінця по зовнішній конусній відстані.

Зовнішній діаметр вершин зубців

$$d_{ae} = d_e + 2m_{te} \cdot \cos \delta. \quad (3.60)$$

Зовнішня конусна відстань (див. рис. 3.26)

$$R_e = 0,5\sqrt{d_{e1}^2 + d_{e2}^2} = 0,5d_{e1}\sqrt{1+u^2}. \quad (3.61)$$

Середня конусна відстань

$$R_m = R_e - 0,5b = R_e(1 - 0,5\psi_k). \quad (3.62)$$

Середній ділительний діаметр зубців

$$d_{mi} = z_i \cdot m_{nm}, \quad (3.63)$$

де  $m_{nm}$  – нормальний середній модуль зубців:  $m_{nm} = m_{te}(1 - 0,5\psi_k)$ .

Передаточне число конічної передачі

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_{m2}}{d_{m1}} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (3.64)$$

Діставши  $d_{mi}$  через  $R_m$  і  $\sin\delta_i$ , знаходять новий вираз передаточного числа

$$u = \frac{d_{m2}}{d_{m1}} = \frac{R_m \sin \delta_2}{R_m \sin \delta_1} = \operatorname{ctg} \delta_1 = \operatorname{tg} \delta_2. \quad (3.65)$$

### 3.3.6. Сили в зачепленні

Площинну картину взаємодії зубців визначають у полюсі зачеплення нормальною силою  $F_n$  (вздовж лінії зачеплення) і силою тертя  $F_{тр} = f F_n$  (рис. 3.27).

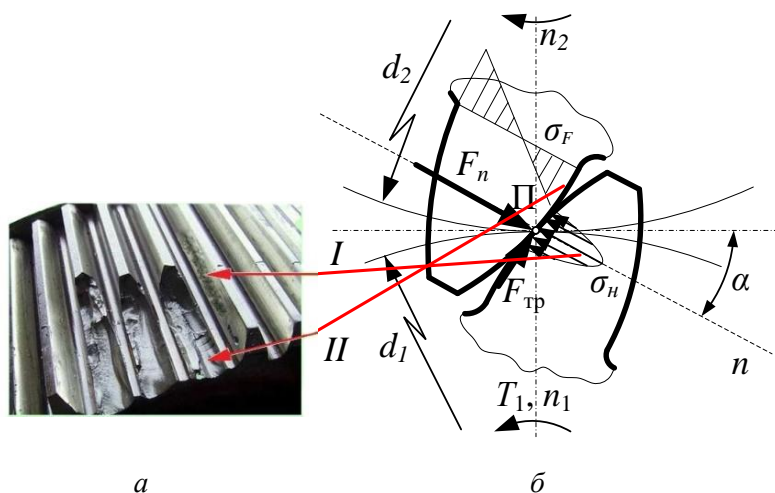


Рис. 3.27. Пошкодження в зачепленні, спричинені нормальною силою  $F_n$

Сила тертя  $F_{тр}$  виникає внаслідок ковзання в зачепленні, а її зображення на рис. 3.27 – умовне, оскільки реальна картина розподілу сил тертя по

поверхнях зубців має складний характер. Дослідження працездатності зубчастих передач свідчать, що сили  $F_{тр}$  мають незначний вплив на міцність зубців, тому у відповідних розрахунках відсутні.

У розрахунках зубців на міцність їх реальну картину взаємодії характеризують розрахунковим питомим навантаженням, яке розподілене вздовж лінії контакту у зачепленні, і для циліндричних передач має вигляд:

$$W = \frac{F_n}{l_\Sigma} K_\alpha \cdot K_\beta \cdot K_v, \quad (3.66)$$

де коефіцієнти відповідно  $K_\alpha$  – розподілу навантаження між зубцями;  $K_\beta$  – концентрації навантаження на поверхні зуба;  $K_v$  – динамічного навантаження.

Коефіцієнтам навантаження в розрахунках на контактну витривалість приписують індекс Н ( $K_{H\alpha}$ ,  $K_{H\beta}$ ,  $K_{Hv}$ ), у розрахунках на витривалість при згині – індекс F ( $K_{F\alpha}$ ,  $K_{F\beta}$ ,  $K_{Fv}$ ).

У розрахунках валів та підшипників використовують складові сили  $F_n$  – колову  $F_t$ , радіальну  $F_r$ , осьову  $F_a$ . Колова сила  $F_t$  діє вздовж дотичної лінії до початкового кола і визначається обертальним моментом  $T_1$  та початковим діаметром  $d_{w1}$  шестірні для всіх типів зачеплення (циліндричного, конічного):

$$F_t = \frac{2T_1}{d_{w1}}. \quad (3.67)$$

Для шестірні сила  $F_t$  є реакцією з боку веденого колеса і спрямована протилежно обертанню; для колеса  $F_t$  – сила, що спричинює рух, спрямована в бік обертання.

Величини радіальної  $F_r$  та осьової  $F_a$  сил визначаються окремо для кожного типу зачеплення: прямозубого та косозубого циліндричного і конічного.

Радіальна сила  $F_r$  завжди спрямована по радіусу до центра зубчастого колеса, а осьова  $F_a$  – паралельно осі колеса у середину зубця.

На рис. 3.28–3.30 показані сили, які діють на зубці циліндричного та конічного зачеплень: *a* – вигляд зверху; *b* – вигляд у перерізі *A*; *v* – вигляд у напрямку, що співпадає з дотичною до основного кола колеса.

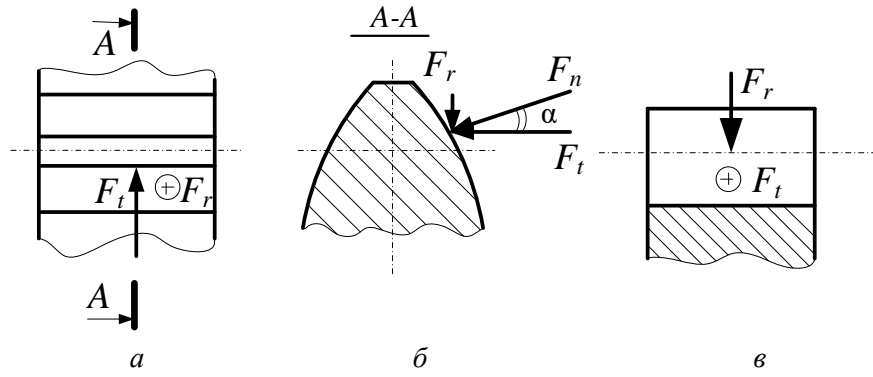


Рис. 3.28. Сили в прямозубій циліндричній передачі

$$F_r = F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha; \quad F_a = 0. \quad (3.68)$$

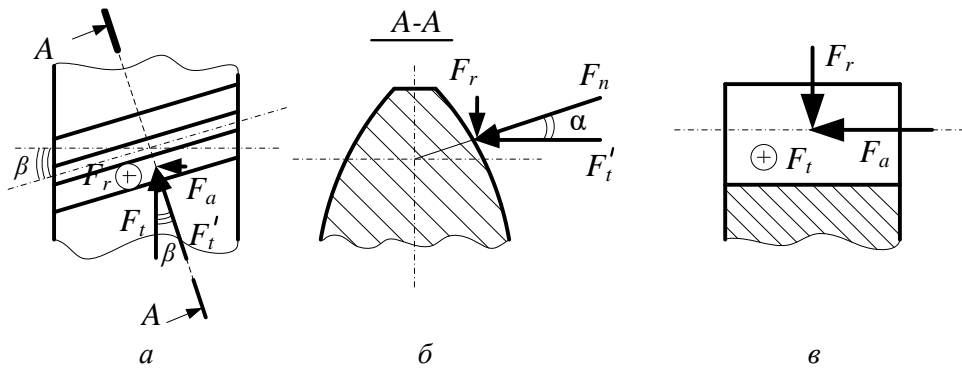


Рис. 3.29. Сили в косозубій циліндричній передачі

$$F_r = \frac{F_t}{\cos \beta} \operatorname{tg} \alpha; \quad F_a = F_t \operatorname{tg} \beta. \quad (3.69)$$

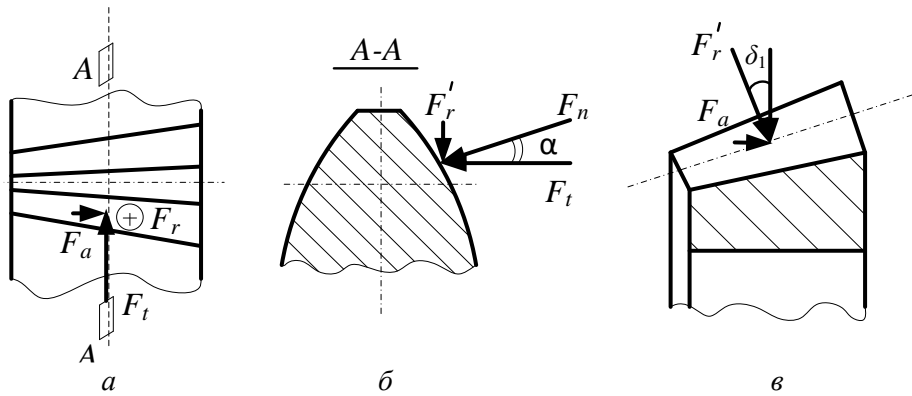


Рис. 3.30. Сили в прямозубій конічній передачі

$$F_r = F_r' \cdot \cos \delta_1 = F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \delta_1; \quad (3.70)$$

$$F_a = F_r' \cdot \sin \delta_1 = F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \delta_1. \quad (3.71)$$

### 3.3.7. Види відмов та критерії розрахунку

Складний характер навантаження зубців зубчастих коліс є причиною певних руйнувань як поверхневого шару зубців, так і зубців взагалі. Найбільш характерні види руйнувань зубців – викришування від утомленості активних поверхонь, відшарування поверхневих шарів, абразивне спрацювання, заїдання, поломка зубців.

Заходи запобігання викришування: розрахунки на контактну витривалість, підвищення твердості поверхонь зубчастих коліс, підвищення точності виготовлення та монтажу передачі, вибір мастила. Заходи запобігання відшарування поверхневих шарів: забезпечення відповідної товщини зміцненого шару та достатньої міцності серцевини зубця. Заходи підвищення стійкості зубців до спрацювання: збільшення твердості зубців, надійний захист передачі від потрапляння твердих абразивних частинок, використання мастил із відповідними властивостями. Заходи запобігання заїдання такі самі, як і при спрацюванні зубців. Заходи запобігання поломки зубців: розрахунки міцності на витривалість при згині; підвищення точності виготовлення та монтажу, зміцнення поверхонь зубців в основі ніжки.

Розглянуті види руйнування зубців зубчастих передач не однаковою мірою вивчені до цього часу. Найглибше теоретично і практично досліджені явища викришування та поломки від утомленості зубців. Тому, критерій працездатності закритих передач – контактна витривалість активних поверхонь зубців, а критерій працездатності відкритих передач – витривалість зубців при згині.

### 3.3.8. Розрахунки зубців на міцність при змінному навантаженні

Усі розрахунки зубців на міцність при змінному навантаженні проводять за допустимими напруженнями. Напруження в зубцях визначають за допомогою методів теорії пружності (для  $\sigma_H$ ) та опору матеріалів (для  $\sigma_F$ ), а допустимі напруження – з використанням кривих витривалості матеріалу. Загальні коефіцієнти в розрахунках контактних напружень ( $\sigma_H$ ) та напружень згину ( $\sigma_F$ )

позначають літерою «К», специфічні для розрахунків  $\sigma_H$  – літерою «Z»; специфічні для розрахунків  $\sigma_F$  – літерою «Y».

Нижче на прикладі циліндричної передачі показано розрахунки зубців на міцність в контакті та міцність при згині.

### ***Розрахунки на витривалість матеріалу у контакті***

Спряжені зубці розглядають як циліндри з радіусами, що дорівнюють радіусам кривини профілів у місцях контактів, а їх контактну міцність розраховують за формулою Герца для полюсної зони, що відповідає однопарному зачепленню.

На відміну від задачі Герца про контакт паралельних циліндрів, робочі поверхні зубців не ідеально гладкі: між ними є мастильне середовище; поверхні не тільки перекочуються, але і ковзають; зубці мають кінцеву довжину; навантаження на зубці має змінний за довжиною характер; матеріал зубців анізотропний через термообробку.

Розрахунок на контактну витривалість проводять для колеса, зубці якого мають меншу міцність.

Найбільше контактне напруження в полюсі зачеплення визначають за формулою Герца

$$\sigma_H = \sqrt{q \cdot E_{зв} / 2\pi(1 - \mu^2) \cdot \rho_{зв}}, \quad (3.72)$$

де  $E_{зв} = 2E_1 \cdot E_2 / (E_1 + E_2)$  – зведений модуль пружності;  $E_1, E_2$  – відповідно модулі пружності матеріалів шестірні і колеса;  $\mu$  – коефіцієнт Пуассона;  $\rho_{зв}$  – зведений радіус кривизни профілів зубців шестірні і колеса,  $\rho_{зв} = 1/r_1 \pm 1/r_2$  (+, – відповідно для контакту опуклих / увігнутих поверхонь).

Величини  $\rho_1$  та  $\rho_2$  визначають за рис. 3.31

$$\rho_1 = 0,5d_{w1} \cdot \sin \alpha_w; \quad \rho_2 = 0,5d_{w2} \cdot \sin \alpha_w.$$



Позначивши  $z_m = \sqrt{\frac{E}{\pi(1-\mu^2)}}$  – коефіцієнт урахування механічних властивостей матеріалу,  $z_n = \sqrt{\frac{2 \cos \beta}{\sin 2\alpha}}$  – коефіцієнт форми спряжених зубців та, враховуючи торцеве перекриття коефіцієнтом  $z_\varepsilon = \sqrt{\frac{4-\varepsilon_\alpha}{3}}$  (для прямозубих передач) і  $z_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_\alpha}}$  (для косозубих передач), де  $\varepsilon_\alpha \approx [1,88 - 3,2 (1/z_1 \pm 1/z_2)] \cos \beta$ , остаточно маємо умову контактної міцності зубців:

$$\sigma_H = z_m \cdot z_n \cdot z_\varepsilon \sqrt{\frac{2T_1 \cdot K_{n\alpha} \cdot K_{n\beta} \cdot K_{nv} \left(\frac{u \pm 1}{u}\right)}{b \cdot d_{w1}^2}} \leq [\sigma_H]. \quad (3.73)$$

Позначаючи в (3.81)  $b = \psi_d \cdot d_{w1}$ , де  $\psi_d$  – коефіцієнт ширини шестірни, знаходять  $d_{w1}$ , коли виконують проєктний розрахунок:

$$d_{w1} = \sqrt[3]{\frac{2T_1 \cdot K_{n\alpha} \cdot K_{n\beta} \cdot K_{nv} (z_m \cdot z_n \cdot z_\varepsilon)^2 \left(\frac{u \pm 1}{u}\right)}{\psi_d \cdot [\sigma_H]^2}}. \quad (3.74)$$

Коментарі до формул (3.73), (3.74):

1) Отримані формули завдяки спеціальному вибору допустимих напружень забезпечують інженерну точність розрахунків зубчастих передач.

2) В межах заданого габариту передачі перевагу слід надавати колесам із малими модулями, які забезпечують більш плавне зачеплення (більша кількість зубців знаходиться в зачепленні) і які більш економічні (менші витрати на тертя в роботі, а у виробництві менші витрати матеріалу на зрізання). Остаточні висновки про раціональність попереднього визначення модуля зубчастих коліс можна зробити після перевірних розрахунків на контактні утому і міцність та утому і міцність при згині.

### Розрахунки на витривалість при згині

Зубець знаходиться в складному напруженому стані, і тому для його спрощених розрахунків вводять такі припущення:

- зубець розглядають як консольну балку, для якої застосовують гіпотезу площинних перерізів;
- все навантаження в зачепленні сприймається однією парою зубців і прикладається до вершини зубця;
- сили тертя в зачепленні відсутні.

Припущення про сприйняття навантаження однією парою зубців відповідає випадку завершення їх контакту. Таке положення зубців, що зміщене відносно полюса, визначається кутом  $\alpha > \alpha_w$  (рис. 3.32, а).

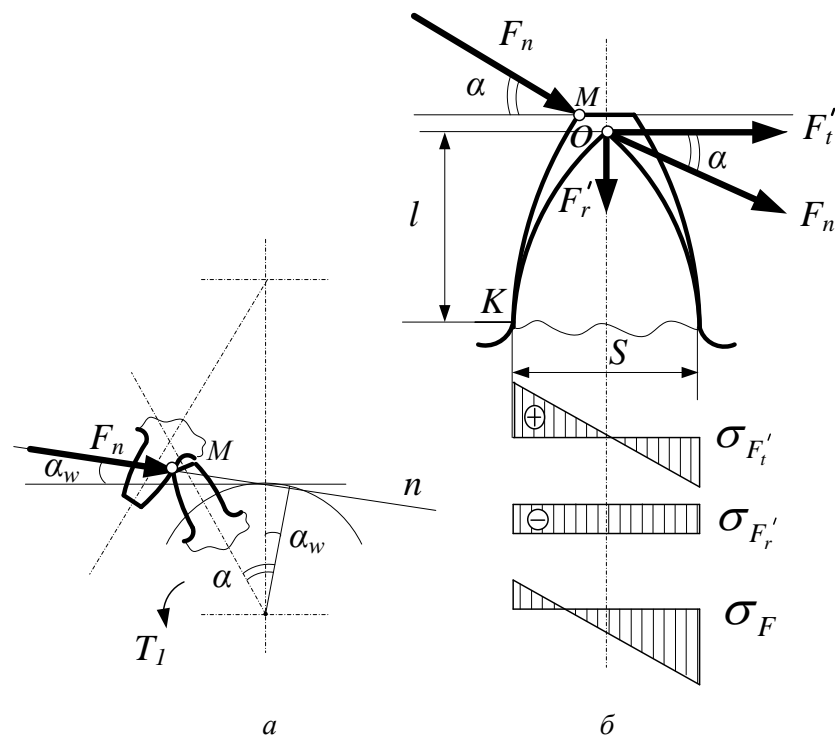


Рис. 3.32. Розрахункова схема зубця

Після перенесення сили  $F_n$  з точки  $M$  до точки  $O$ , її подано у вигляді складових  $F_t'$  і  $F_r'$ . У небезпечному перерізі завдовжки  $S$  виникає напруження згину  $\sigma_{F_t'}$  та стиску  $\sigma_{F_r'}$ , сума яких у точці  $K$ , де можливі тріщини від утомленості, визначаються виразом:

$$\sigma_F = \sigma_{F'_t} - \sigma_{F'_r} = \frac{F'_t \cdot l}{W} - \frac{F'_r}{A},$$

$$\text{де } W = \frac{bS^2}{6}; \quad A = b \cdot S; \quad F'_t = F_n \cos \alpha = \frac{F_t}{\cos \alpha_w} \cos \alpha; \quad F'_r = F_n \sin \alpha = \frac{F_t}{\cos \alpha_w} \sin \alpha.$$

Враховуючи пропорційність розмірів  $l$  та  $S$  модулю зубців  $m$  (для косо-зубих коліс  $m_n$ ), дістанемо:

$$\sigma_F = \frac{F_t \cos \alpha}{\cos \alpha_w} \frac{l'm \cdot 6}{b \cdot (s'm)^2} - \frac{F_t \sin \alpha}{\cos \alpha_w} \frac{1}{b \cdot s'm} = \frac{F_t}{bm} \left[ \frac{6l' \cos \alpha}{(s')^2 \cos \alpha_w} - \frac{\sin \alpha}{s' \cos \alpha_w} \right].$$

$$\text{Вводячи позначення для коефіцієнта форми } Y_F = \left[ \frac{6l' \cos \alpha}{(s')^2 \cos \alpha_w} - \frac{\sin \alpha}{s' \cos \alpha_w} \right],$$

та розраховуючи за відповідними коефіцієнтами розподіл навантаження між зубцями ( $K_{F\alpha}$ ), концентрацію навантаження на поверхні зуба ( $K_{F\beta}$ ), динамічне навантаження ( $K_{FV}$ ), кут нахилу зубів ( $Y_\beta$ ), перекриття зубців ( $Y_\epsilon$ ), остаточно маємо умову міцності зубців при згині:

$$\sigma_F = Y_F \cdot Y_\beta \cdot Y_\epsilon \frac{F_t \cdot K_{F\alpha} \cdot K_{F\beta} \cdot K_{FV}}{b \cdot m} \leq [\sigma_F]. \quad (3.75)$$

Оскільки форма зубця шестірні та колеса залежить від кількості зубців  $z_1, z_2$ , то  $Y_{F1} \neq Y_{F2}$ . Отже, потрібно відрізнити напруження згину для зубців шестірні та колеса. Умова міцності на згин для зубця шестірні:

$$\sigma_{F1} = Y_F \cdot Y_\beta \cdot Y_\epsilon \frac{F_t \cdot K_{F\alpha} \cdot K_{F\beta} \cdot K_{FV}}{b \cdot m} \leq [\sigma_{F1}], \quad (3.76)$$

умова міцності на згин для зубця колеса

$$\sigma_{F2} = \frac{Y_{F2}}{Y_{F1}} \cdot \sigma_{F1} \leq [\sigma_{F2}]. \quad (3.77)$$

З урахуванням виразу:  $b = \psi_d \cdot d_{V1}$ , де  $d_{V1} = \frac{m_n \cdot z_1}{\cos \beta}$ , маємо умову міцності

сті

$$Y_F \cdot Y_\beta \cdot Y_\varepsilon \frac{2T_1 \cdot K_{F\alpha} \cdot K_{F\beta} \cdot K_{FV}}{d_{V1} \cdot m_n \cdot \Psi_d \cdot d_{V1}} = Y_F \cdot Y_\beta \cdot Y_\varepsilon \frac{2T_1 \cdot K_{F\alpha} \cdot K_{F\beta} \cdot K_{FV}}{\Psi_d \cdot m_n^3 \cdot z_1^2} \cdot \cos^2 \beta \leq [\sigma_{F1}],$$

звідки вираз для нормального модуля зачеплення  $m_n$  має вигляд:

$$m_n = \sqrt[3]{\frac{2T_1 \cdot K_{F\alpha} \cdot K_{F\beta} \cdot K_{FV} \cdot \cos^2 \beta}{\Psi_d \cdot z_1^2 \cdot [\sigma_{F1}]} \cdot Y_F \cdot Y_\beta \cdot Y_\varepsilon}. \quad (3.78)$$

Для прямозубих коліс, коли  $\beta = 0$ , з виразу (3.78) знаходять модуль  $m$ .

### 3.3.9. Відомості про матеріали та допустимі напруження

Розрахунок зубчастих передач починають із вибору матеріалу коліс та методу його покращення залежно від умов експлуатації, можливостей виробництва та економічних міркувань. Оскільки допустиме навантаження за міцністю зубців у контакті та при згині визначається переважно твердістю матеріалу, то для зубчастих коліс використовують термічно оброблювані сталі (вуглецеві та леговані).

Залежно від твердості робочих поверхонь зубців після термообробки зубчасті колеса розділяють на дві групи:

- з твердістю  $HV \leq 350$ , яка досягається після нормалізації та поліпшення;
- з твердістю  $HV > 350$ , яка досягається після об'ємного гартування, гартування СВЧ, цементації, азотування.

Визначення допустимих контактних напружень  $[\sigma_H]$  та допустимих напружень згину  $[\sigma_F]$  базується на використанні кривих витривалості матеріалу для змінних (віднульових) циклі навантаження.

Допустимі контактні напруження  $[\sigma_H]$  визначають за формулою

$$[\sigma_H] = \frac{\sigma_{H0}}{S_H} Z_R \cdot Z_V \cdot K_{HL}, \quad (3.79)$$

де  $S_H$  – коефіцієнт запасу;  $Z_R$  – коефіцієнт, що враховує шорсткість поверхонь зубців;  $Z_V$  – коефіцієнт, що враховує колову швидкість;  $K_{HL}$  – коефіцієнт довговічності.

Коефіцієнти  $S_H$ ,  $Z_R$ ,  $Z_V$ , а також  $\sigma_{H0}$  призначають згідно з емпіричними даними, величину  $K_{HL}$  визначають за кривою витривалості.

Допустиме напруження згину визначають за формулою

$$[\sigma_F] = \frac{\sigma_{F0}}{S_F} Y_R \cdot Y_S \cdot K_{FC} \cdot K_{FL}, \quad (3.80)$$

де  $\sigma_{F0}$  – необмежена витривалість зубців на згин при базовій кількості циклів навантаження ( $N \geq N_{F0}$ );  $S_F$  – коефіцієнт запасу;  $Y_R$  – коефіцієнт, що враховує шорсткість поверхні зубця;  $Y_S$  – коефіцієнт, що враховує чутливість матеріалу до концентрації напружень;  $K_{FC}$  – коефіцієнт, що враховує двостороннє навантаження  $K_{FL}$  – коефіцієнт довговічності.

### Контрольні запитання

1. Які зубчасті передачі мають найбільше використання і чому?
2. Запишіть геометричні параметри евольвентного зачеплення.
3. Навіщо введено поняття модуля зубчастого зачеплення?
4. Які сили та напруження діють в зубчастому зачепленні?
5. Види пошкоджень, характерні для зубчастих коліс, їх причини появи, місця локалізації і заходи запобігання.
6. Які основні переваги косозубих коліс порівняно з прямозубими?
7. Яку осьову форму зубців використовують для прямозубих конічних коліс?
8. В якому вигляді подають нормальну силу взаємодії зубців для розрахунків зубців і для розрахунків валів та підшипників?
9. У чому суть розрахунків зубців на контактну витривалість?
10. У чому суть розрахунків зубців на витривалість при згині?

### 3.4. Вали та осі. Підшипники

#### 3.4.1. Загальні відомості про вали та осі

Вали та осі призначені для розміщення на них деталей, які обертаються (на валах – шків, зірочки, зубчасті колеса; на осях – колеса автомобіля чи вагона і таке інше).

Вали відрізняються від осей такими ознаками: вали завжди обертаються, передають обертальний момент, а за геометричною формою можуть бути прямими (рис. 3.33, *a*), ламаними (рис. 3.32, *в*), гнучкими (рис. 3.32, *г*); осі можуть обертатись чи бути нерухомими, ніколи не передають обертальних моментів, завжди прямі. В цьому розділі розглядаються прямі вали сідчасті (рис. 3.33, *б*) круглого перерізу.

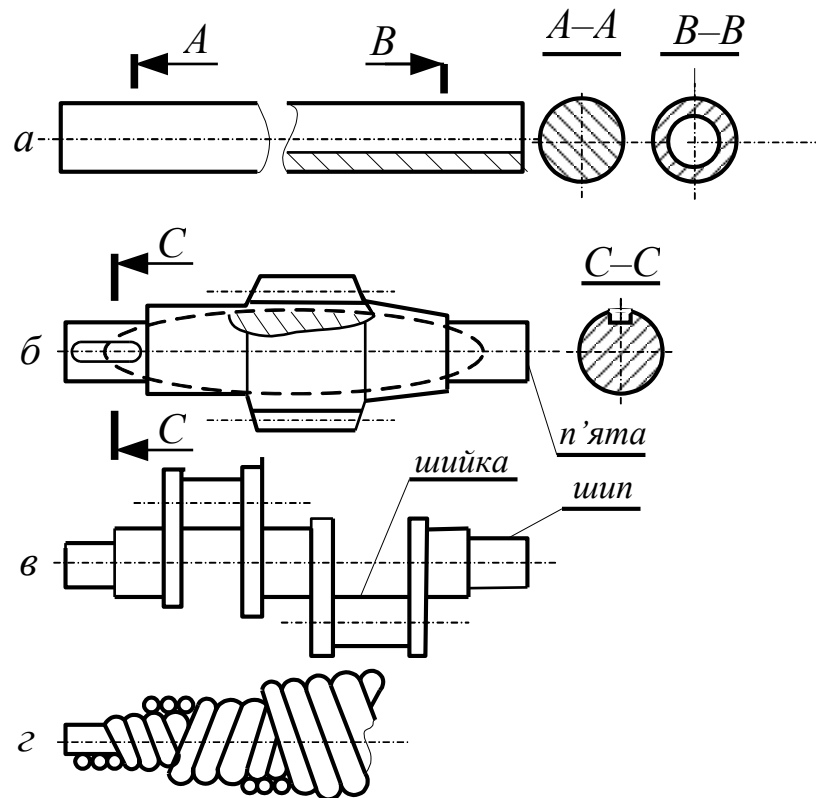


Рис. 3.33. Види валів

Опорні у радіальному напрямку частини валів та осей називають цапфами; проміжні цапфи – шийки, а кінцеві – шипи; опорна частина вала в осьовому напрямку – п'ята. Безпосередньо опорами для шипів, шийок та п'ят служать підшипники.

Цапфи валів, що працюють у підшипниках ковзання, можуть бути циліндричними (рис. 3.34, *а*), конічними (рис. 3.34, *б*) або сферичними (рис. 3.34, *в*); у підшипниках кочення – циліндричні (рис. 3.34, *г*).

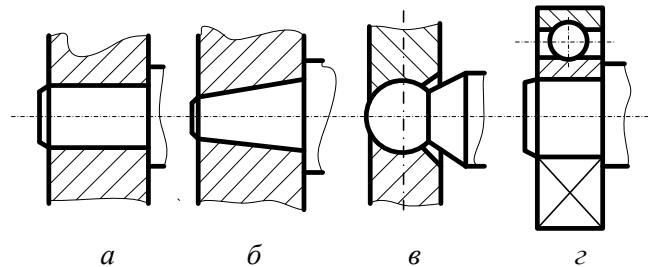


Рис. 3.34. Цапфи валів

Перехідні ділянки валів між двома ступенями неоднакових діаметрів виконують різними конструктивними варіантами (рис. 3.35).

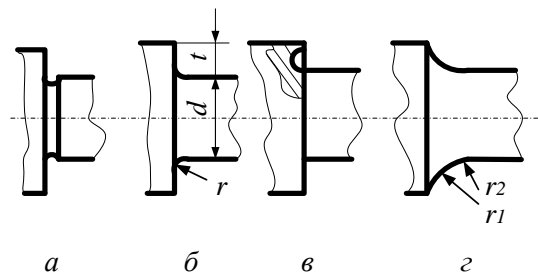


Рис. 3.35. Перехідні ділянки валів

Шкідливий вплив концентрації напружень від перехідних ділянок валів (проточки – див. рис. 3.35, *а* та галтелі – див. рис. 3.35, *б*) зменшують конструктивними (торцева проточка – *в*, галтель двома радіусами – *г*) та технологічними (пластичне зміцнення галтелей) заходами.

Основними матеріалами для валів є вуглецеві та леговані сталі. Для більшості валів редукторів загального призначення застосовують сталі 45, 50, 40Х.

### 3.4.2. Розрахунки валу

Практикою експлуатації встановлено, що руйнування валів та осей, які обертаються, має втомний характер внаслідок циклічно-змінних напружень. Тому основним критерієм працездатності валів та осей є втомна міцність (витривалість). Для тихохідних валів обмежувачим критерієм може бути статична

міцність за умови дії короточасних (пікових) перевантажень. Сумісна робота валів з деталями передач та підшипниками потребує додатково виконувати розрахунки за критерієм жорсткості.

Розрахунки валів редукторів виконують у чотири етапи: проєктний розрахунок на кручення; перевірочний розрахунок на статичну міцність; перевірочний розрахунок на втомну міцність; перевірочний розрахунок на жорсткість.

*Проєктний розрахунок.*

У проєктному розрахунку після вибору матеріалу валу, виходячи з умови його роботи на кручення, визначають діаметр консольної або опорної частини:

$$d = \sqrt[3]{\frac{T}{0,2[\tau]}}, \quad (3.81)$$

де  $[\tau]$  – допустиме напруження на кручення; для редукторних валів  $[\tau] = 15 \dots 30$  МПа. Менші значення з цього діапазону беруть для швидкісних валів, більші – для тихохідних.

Після проєктного розрахунку розробляють всю конструкцію валу, визначають місця посадки пов'язаних з ним деталей (зубчастих коліс, зірочок, шківів і т. ін.), розташування підшипників і т. ін. Всі перелічені дії втілюють в ескізне компонування. В результаті визначають розміри всіх конструктивних елементів валу, після чого приступають до виконання перевірочних розрахунків.

*Перевірка на статичну міцність.*

Перевірку статичної міцності валів виконують із метою запобігання появі пластичних деформацій під час дії короточасних перевантажень, наприклад, у період пуску двигуна, реверсу швидкості, гальмування або спрацьовування пристрою безпеки. Величина перевантаження розраховується з урахуванням специфіки роботи, наприклад, за пусковим моментом електродвигуна, граничним моментом запобіжної муфти, моментами інерції, викликаними

раптовим гальмуванням, тощо. У розрахунку використовується коефіцієнт перевантаження  $K_0 = T_{max}/T_{ном}$ , де  $T_{max}$  – це максимальний короткочасно діючий крутний момент (момент перевантаження), а  $T_{ном}$  – номінальний крутний момент.

Для перевірки статичної міцності валу необхідно скласти його розрахункову схему: відзначити точки, в яких розташовані умовні опори, визначити величину і напрямок сил, що діють на вал, а також точки їх прикладання. При побудові розрахункової схеми власна маса валів, а також маси, встановлених на них деталей (за винятком важких маховиків і так далі), та сили тертя в підшипниках не враховуються. Основні навантаження на вали створюють сили, що діють у зубчастому та черв'ячному зачепленнях.

Після складання розрахункової схеми валу вирішують задачу складного опору, при цьому дію зовнішніх сил розглядають в двох взаємно перпендикулярних площинах (горизонтальній  $X$  і вертикальній  $Y$ ). Потім визначають реакції в опорах в площинах  $X$  і  $Y$ . В цих же площинах будують епюри згинальних моментів  $M_x, M_y$ . Консольна зона вихідного або вхідного валу може бути навантажена радіальною силою  $F_K$ , що діє з боку муфти, пасової або ланцюгової передач. Якщо напрямок вектору сили  $F_K$  заздалегідь не відомий, то епюра згинального моменту  $M$  від цієї сили будується окремо від площин  $X$  і  $Y$ . Епюри крутного моменту  $T$  також будуються окремо.

Перевірка на статичну міцність проводиться в небезпечних перерізах, які визначаються за побудованими епюрами, розмірами і формою ділянок валу. Для запропонованого прикладу (рис. 3.36) можемо зазначити два небезпечних перерізи: переріз 1, який навантажений крутним моментом  $T$  і згинальними моментами  $M_x, M_y$  і  $M$ ; переріз 2, навантажений обертовим  $T$  і згинальним  $M$  моментами.

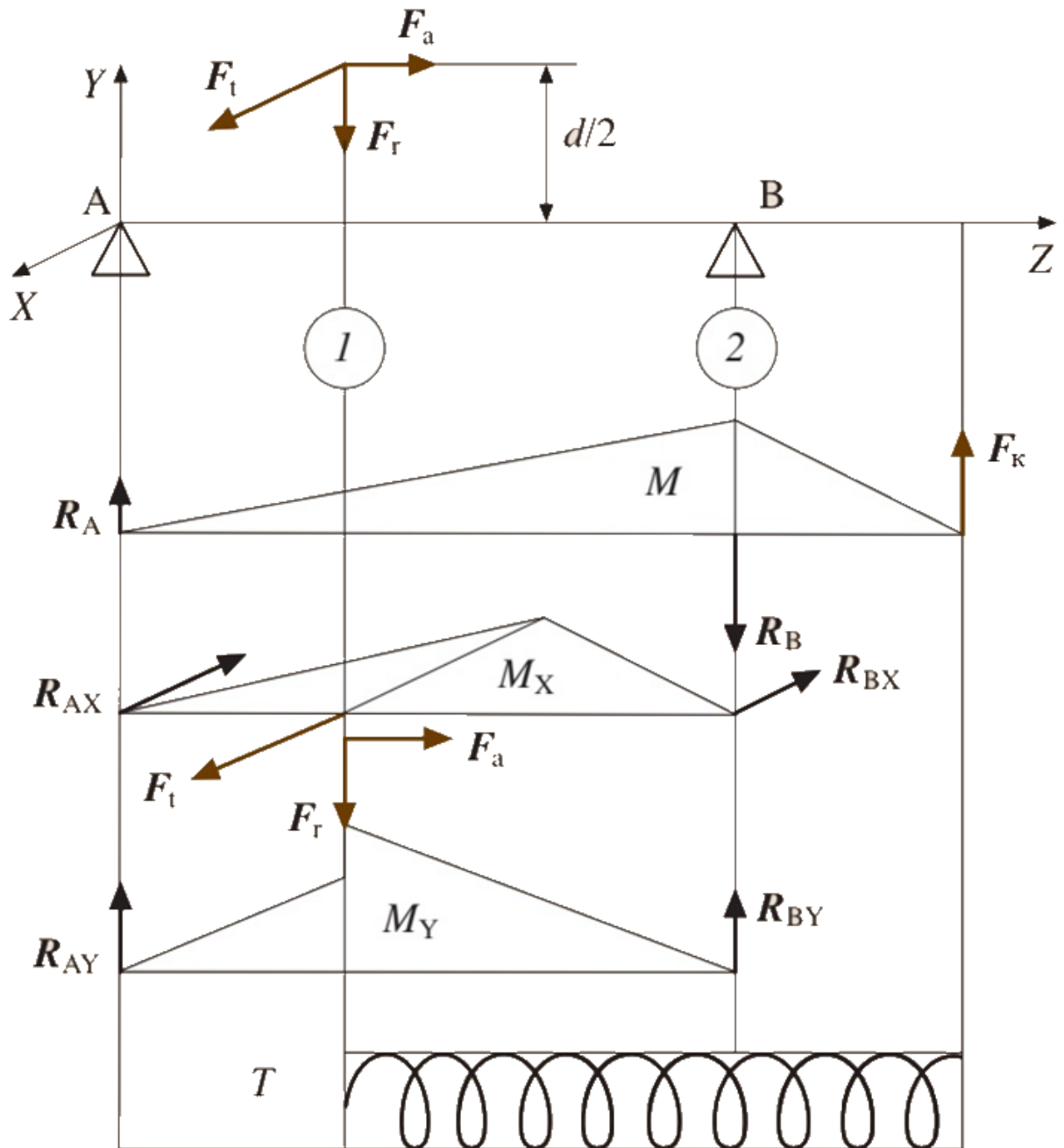


Рисунок 3.36 Вихідний вал двоступеневого циліндричного редуктора

Нормальні напруження  $\sigma$  і дотичні напруження  $\tau$  визначаються в небезпечних перерізах при дії максимальних навантажень по відомим формулам з опору матеріалів:

$$\sigma = \frac{M_{max}}{W_0}; \tau = \frac{T_{max}}{W_p}, \quad (3.82)$$

де  $M_{max} = K_0 \cdot \left( M + \sqrt{(M_x^2 + M_y^2)} \right)$ ;  $T_{max} = K_0 \cdot T$ ;  $W_0$  і  $W_p$  – осьовий і полярний моменти опору відповідно;  $A$  – площа перерізу валу.

При визначенні напружень площі перерізів  $A$ , осьові  $W_0$  і полярні  $W_p$  моменти опору підраховують з урахуванням ослаблення валу шпонками, шліцями, лисками і т. ін.

Для валу суцільного перерізу при діаметрі  $d$ :

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi \cdot d^2}{4}; \\ W_0 &= \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3; \\ W_p &= \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Коефіцієнти запасу міцності по границі текучості можуть бути визначені наступним чином:

$$S_{T\sigma} = \frac{\sigma_T}{\sigma}, \quad S_{T\tau} = \frac{\tau_T}{\tau}, \quad (3.84)$$

де  $\sigma_T, \tau_T$  – границі текучості.

Загальний коефіцієнт запасу по границі текучості при сумісній дії нормального і дотичного напружень становить:

$$S_T = \frac{S_{T\sigma} \cdot S_{T\tau}}{\sqrt{S_{T\sigma}^2 + S_{T\tau}^2}} \quad (3.85)$$

Статична міцність забезпечується, якщо  $S_T \geq [S_T]$ . Мініміально допустиме значення коефіцієнта запасу приймається в межах  $[S_T] = 1,2 - 2,2$  для пластичних матеріалів;  $[S_T] = 2,0 - 3,0$  для крихких матеріалів при куванні  $[S_T] = 1,2 - 2,2$  (високолеговані сталі, дуже міцні чавуни);  $[S_T] = 2,5 - 3,5$  для крихких матеріалів при відливці (високолеговані сталі, дуже міцні чавуни).

### Перевірка на втомну міцність.

Перевірка валів на втомну міцність виконується лише після попереднього конструювання валу. Це викликано тим, що втомна міцність деталі визначається низкою факторів, які встановлюються в процесі проектування: радіусами галтелей, перепадом діаметрів між сусідніми ступенями валу, шорсткістю поверхонь, посадками деталей та ін. Перевірочний розрахунок валу на втомну міцність є остаточним та основним.

Періодичне зовнішнє навантаження на вал може змінюватись або по симетричному, або по асиметричному циклу. В наслідок обертання валу напруження згину на валу знакозмінні, симетричні. У реверсивної передачі дотичні напруження при крученні умовно можемо вважати також знакозмінними, хоча зміна знаку відбувається не за кожену половину обороту, як у напружень згину, а при реверсуванні передачі. При зробленому допущенні обидва напруження змінюються за однаковими циклами (рис. 3.37, а), з такими параметрами:  $\sigma_a$  – амплітудне нормальне напруження,  $\sigma_m = 0$  – середнє нормальне напруження;  $\tau_a$  – амплітудне дотичне напруження,  $\tau_m = 0$  – середнє дотичне напруження. У нереверсивній передачі дотичні напруження при крученні носять пульсуючий віднульовий характер (рис. 3.37, б). У цьому випадку  $\tau_a = \tau_m$ .

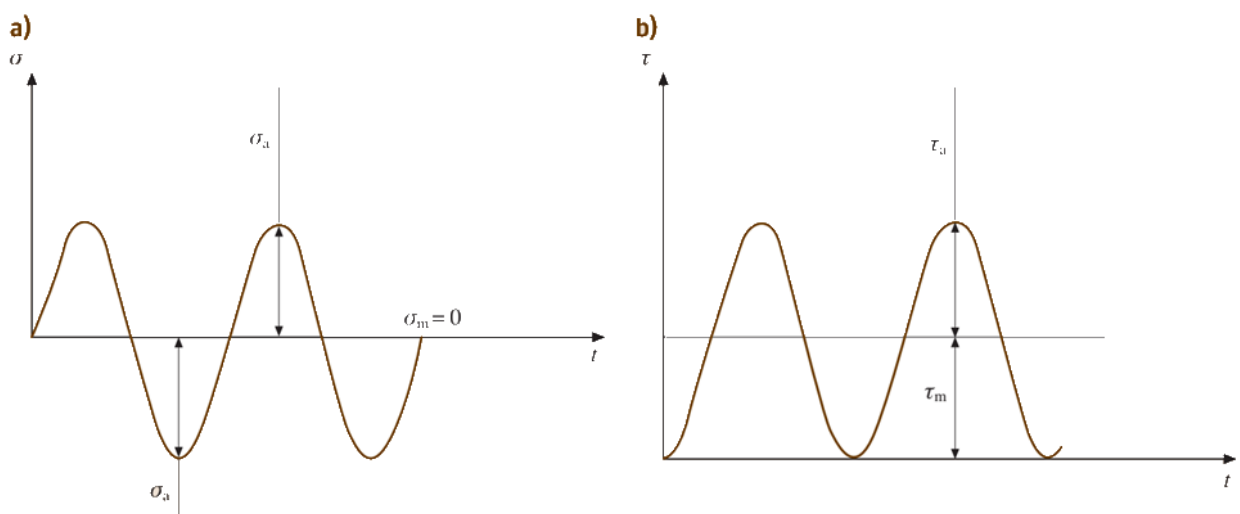


Рисунок 3.37 Цикли навантажень на вал

Перевірка валів на втомну міцність виконується у формі перевірки коефіцієнта запасу на втомну міцність  $S$  в найбільш небезпечних перерізах у яких є концентрація напружень (доцільно розглядати перерізи, які були вибрані попередньо при перевірці на статичну міцність). Перевірка виконується, якщо  $S \geq [S]$ . Допустимі значення коефіцієнта запасу на втомну міцність: при високій точності визначення навантажень, досконалому знанні особливостей матеріалу, точному дотриманню технологічних процедур.  $[S] = 1,3-1,5$ ; при менш точному розрахунку без будь-якої експериментальної перевірки, помірних вимогах до технології виробництва (більшість валів загального машинобудування)  $[S] = 1,5-1,8$ ; при зниженій точності розрахунків, зниженій однорідності матеріалу, для валів великого діаметра ( $d > 200$  мм)  $[S] = 1,8-2,5$ .

Коефіцієнт запасу втомної міцності для нормальних напружень може бути визначений наступним чином:

$$S_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D} \cdot \sigma_a}, \quad (3.86)$$

для дотичних напружень:

$$S_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau D} \cdot \tau_a + \psi_{\tau} \cdot \tau_m}. \quad (3.87)$$

Як вказувалось раніше для реверсивної передачі  $\tau_m = 0$  для не реверсивної  $\tau_m = \tau_a$ .

Загальний коефіцієнт запасу втомної міцності при сумісній дії нормального і дотичного напружень:

$$S = \frac{S_{\sigma} \cdot S_{\tau}}{\sqrt{S_{\sigma}^2 + S_{\tau}^2}}. \quad (3.88)$$

У наведених формулах  $\sigma_{-1}$ ,  $\tau_{-1}$  – границі втоми гладкого зразка при симетричному циклі напружень згину і при симетричному циклі дотичних напружень при крученні відповідно;  $\psi_{\tau}$  - коефіцієнт чутливості матеріалу до асиметрії циклу напружень при крученні:

$$\psi_{\tau} = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0}, \quad (3.89)$$

де  $\tau_0$  – границя витривалості при пульсуючих від нуля напруженнях.

Напруження в небезпечних перерізах визначають за формулами:

$$\sigma_a = \frac{M}{W_0}; \tau_a = \tau_m = \frac{T}{2W_p}, \quad (3.90)$$

де  $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$  сумарний згинальний момент,  $T$  – крутний момент,  $W_0$  і  $W_p$  – осьовий і полярний моменти опору відповідно, які можуть бути знайдені за формулами 3.91.

В якості розрахункових навантажень ( $M$  або  $T$ ) приймають найбільш тривале навантаження. Пускові та інші короткочасні (менше 50 тис. циклів) пікові навантаження не враховуються.

Ефективні коефіцієнти концентрації напружень для деталі  $K_{\sigma D}$ ,  $K_{\tau D}$  за відсутності технологічного зміцнення визначають за формулами

$$\begin{aligned} K_{\sigma D} &= \frac{K_{\sigma} + K_{\sigma}^n - 1}{\varepsilon_{\sigma}}; \\ K_{\tau D} &= \frac{K_{\tau} + K_{\tau}^n - 1}{\varepsilon_{\tau}}, \end{aligned} \quad (3.91)$$

а за наявності технологічного зміцнення (термохімічна обробка, обдування дробом, обкатка роликami):

$$K_{\sigma D} = \frac{K_{\sigma}}{\beta \cdot \varepsilon_{\sigma}}; K_{\tau D} = \frac{K_{\tau}}{\beta \cdot \varepsilon_{\tau}}. \quad (3.92)$$

В цих формулах:  $K_{\sigma}$ ,  $K_{\tau}$  – ефективні коефіцієнти концентрації напружень для полірованого зразка;  $K_{\sigma}^n$ ,  $K_{\tau}^n$  – коефіцієнти стану поверхні;  $\varepsilon_{\sigma}$ ,  $\varepsilon_{\tau}$  – коефіцієнти впливу абсолютних розмірів деталі (масштабні коефіцієнти);  $\beta$  – коефіцієнт впливу поверхневого зміцнення. При розрахунку валу у місці посадки деталей коефіцієнт стану поверхні не враховується, а використовуються відношення  $K_{\sigma}/\varepsilon_{\sigma}$  та  $K_{\tau}/\varepsilon_{\tau}$ .

За наявності в одному перерізі декількох концентраторів напружень враховують один з них – той, для якого  $K_{\sigma D}$ ,  $K_{\tau D}$  найбільше.

Якщо запас втомної міцності виявився нижчим від допустимого, насамперед змінюють конфігурацію валу з метою зменшення концентрації напружень (змінюють форму переходів у галтелях, збільшують їх радіуси). Тільки після того, як з'ясується, що ці заходи не дають підвищення запасу втомної міцності до потрібного значення, збільшують діаметр валу.

*Перевірка на жорсткість.*

У ряді випадків, коли пружні деформації валу негативно впливають на працездатність пов'язаних з ними деталей (шестерні, підшипники, муфти), викликаючи збільшення концентрації контактних напружень, збільшення зносу, зниження втомної міцності, а також зниження точності і рівномірності обертання, проводять перевірочні розрахунки валу на жорсткість.

Розрахунок зводиться до визначення прогинів  $y$  і кутів повороту  $\theta$  поперечних перерізів валу при згинанні, кутів закручування  $\varphi$  при крученні валу, а також до порівняння їх з допусковими значеннями.

Повний прогин валу  $y$  і кут повороту  $\theta$  поперечного перерізу валу можуть бути розраховані наступним чином:

$$f = f_k + \sqrt{f_x^2 + f_y^2}; \theta = \theta_k + \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2}, \quad (3.93)$$

де  $f_k$ ,  $\theta_k$  – прогин і поворот поперечного перерізу валу від дії радіальної сили на консольній частині валу;  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  – прогини і повороти у двох взаємно перпендикулярних площинах  $X$  і  $Y$ .

Точне визначення деформацій – трудомістка задача через вплив на кінцевий результат розрахунку ряду факторів: жорсткості корпусу, зазорів, місцевої форми валу та ін. При спрощених розрахунках вал ступінчастої форми сприймається як брус постійного перерізу з діаметром рівним розрахунковому діаметру в перерізі установки колеса.

Перевірка жорсткості на згин забезпечується за умов

$$f \leq [f]; \theta \leq [\theta]. \quad (3.94)$$

Допустимі значення  $[f]$  і  $[\theta]$  залежать від типу валу, його функції та конструктивних особливостей. Для валів редукторів загального призначення можна застосувати наступні рекомендації. Для допустимих значень прогинів: у точці посадки зубчастого колеса – для прямозубого зачеплення  $[f] = 0,01 \cdot m$ , для конічних і черв'ячних коліс  $[f] = 0,005 \cdot m$ , де  $m$  – модуль зачеплення; для інших ділянок валу (не в точках посадки коліс) рекомендований максимальний прогин  $[f] = 0,0003 \cdot l$ , де  $l$  – відстань між опорами (підшипниками). Допустиме кутове відхилення валу  $[\theta]$  в точках посадки зубчастого колеса знаходиться в інтервалі  $[\theta] = 0,05^\circ \div 0,12^\circ$ ; в точках установки підшипників залежить від типу та внутрішньої конструкції підшипника.

Жорсткість валу постійного діаметра під час кручення перевіряється за формулою

$$\varphi = \frac{T}{G \cdot I_p} \cdot \frac{180}{\pi} \leq [\varphi], \quad (3.95)$$

де  $G$  – модуль зсуву, для сталі  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа;  $I_p$  – полярний момент інерції поперечного перерізу валу, для круглого перерізу  $I_p = \pi \cdot d^4 / 32$ . Кут закручування  $\varphi$  ступінчастого валу визначається як сума кутів закручування окремих ділянок. Допустимі кути закручування  $[\varphi]$  залежать від конструкції і виду навантаження валу. Для валів редукторів рекомендоване значення  $[\varphi] = 0,5^\circ$  на один метр довжини валу.

### 3.4.3. Загальні відомості про підшипники

Відомо два типи опор осей та валів: підшипники ковзання (рис. 3.38, а) і підшипники кочення (рис.3.38, б). Підшипники кочення основний вид опор валів багатьох машин та механізмів, у тому числі: валів коробок передач і шпинделів металорізальних верстатів; валів редукторів зубчастих передач транспортувальних, підйомних, енергетичних машин; опорних вузлів поворотних кранів; буксових вузлів рухомого залізничного складу ходових коліс кранів;

канатних блоків та роликів конвесрів. Підшипники кочення – опори валів та осей, що працюють на використанні переважно принципу тертя кочення. Умовний коефіцієнт тертя кочення малий ( $\approx 0,0015-0,006$ ) і близький до коефіцієнта рідинного тертя гідродинамічних підшипників ковзання.

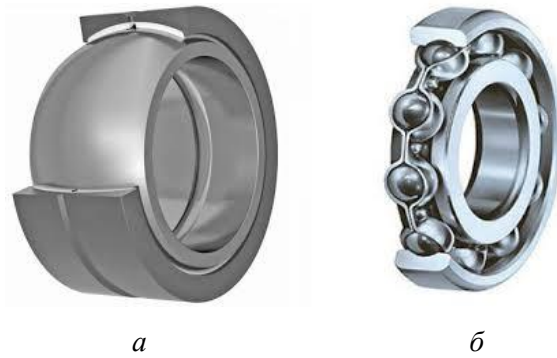


Рис. 3.38. Типи підшипників

Підшипники кочення, в більшості випадків, складаються із зовнішнього 1 та внутрішнього 2 кілець, тіл кочення 3, сепаратора 4 (рис. 3.39), а іноді мають додаткові деталі, наприклад кільця ущільнень та інші.

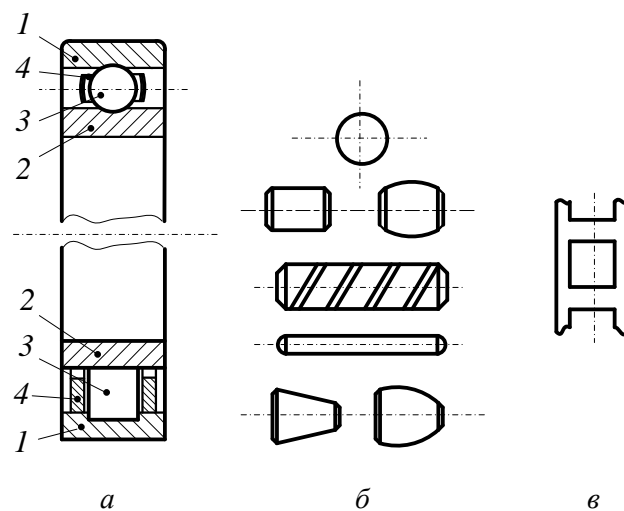


Рис. 3.39. Будова підшипників кочення

Тіла кочення – шарики або ролики забезпечують обертання кілець: вони перекочуються по доріжках кочення (бігових доріжках), які передбачені на кільцях. Використовують ролики різної форми – короткі і довгі циліндричні, виті, голчасті, конічні або сферичні (рис. 3.39 б). Сепаратор розділяє тіла кочення й утримує їх на одній відстані. Будова сепаратора (див. рис. 3.39, в) залежить від типу підшипника та умов його експлуатації.

Широке застосування підшипників кочення обумовлене суттєвими перевагами порівняно з підшипниками ковзання: малими витратами на тертя; високою несучою здатністю на одиницю ширини підшипника; простотою обслуговування; низькою вартістю великосерійного виробництва; незначними габаритними розмірами в осьовому напрямку; кращими умовами для взаємозамінності та уніфікації.

До недоліків підшипників кочення належать: низька здатність демпфувати ударні навантаження; підвищений шум та нагрівання при високих швидкостях обертання; висока вартість дрібносерійного виробництва.

Підшипники кочення поділяють:

- за формою тіла кочення: шарикопідшипники та роликотпідшипники;
- за напрямком сприйняття навантаження (рис. 3.40):  
радіальні ( $F_a = 0$ ) (рис. 3.40, *a*); радіально-упорні ( $F_r > F_a$ ) (рис. 3.40, *б*); упорно-радіальні ( $F_a > F_r$ ) (рис. 3.40, *в*); упорні ( $F_r = 0$ ) (рис. 3.40, *г*);
- за основними конструктивними ознаками:  
а) за кількістю рядів тіл кочення: одно- (рис. 3.40, *a*), двох-, чотири- багаторядні;

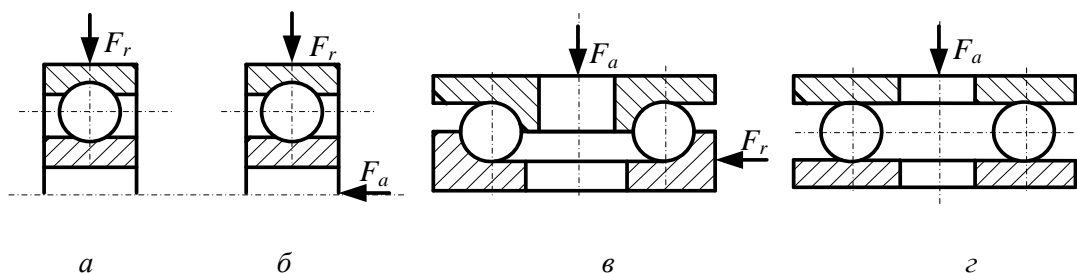


Рис. 3.40. Підшипники за напрямком сприйняття навантаження

- б) за габаритними розмірами з одним і тим самим внутрішнім діаметром на серії (рис. 3.41): 1 – особливо легку, 2 – легку, 3 – середню, 4 – важку, 5 – легку широку, 6 – середню широку, 8 – надлегку;

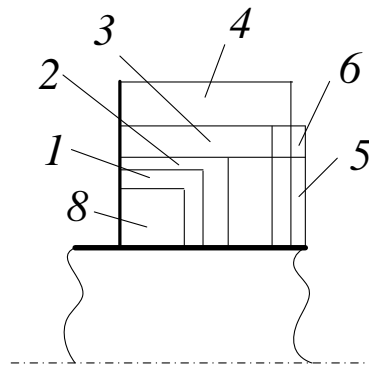


Рис. 3.41. Серії підшипників

в) за наявністю додаткових деталей у конструкції підшипника (захисні шайби і т. д.);

- за точністю основних розмірів і точністю обертання:

на п'ять класів, які позначають цифрами (у порядку підвищення точності) – 0, 6, 5, 4, 2.

Усі підшипники кочення мають умовне позначення, що складається з ряду цифр та букв і призначається для маркування підшипника, вказівок на кресленнях та в технічній документації. Підшипники можуть мати повний або скорочений запис умовного позначення, яке розшифровують за допомогою відповідних таблиць.

Розшифровку умовного позначення рекомендується виконувати в запропонованій послідовності – справа наліво, починаючи з основної частини (рис. 3.42).

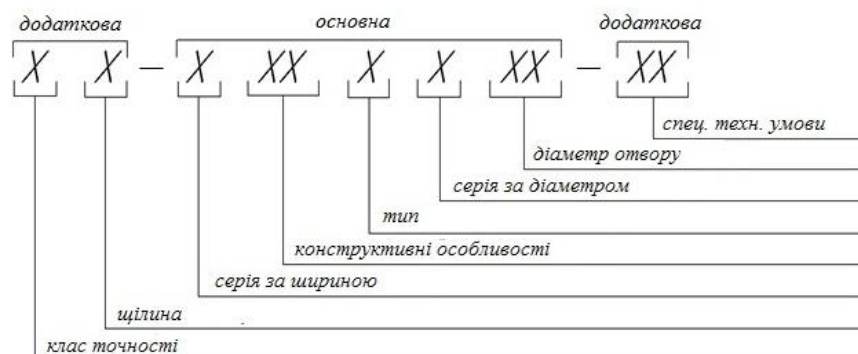


Рис. 3.42. Схема умовного позначення підшипників кочення

Наприклад, умовне позначення підшипника 311Е розшифровують так: підшипник шариковий радіальний однорядний, з посадковим діаметром внутрішнього кільця 55 мм, середньої серії, нормального класу точності, з полімерним сепаратором.

### 3.4.4. Підшипникові вузли

Підшипники кочення встановлюють на вали і розміщують у підшипникових вузлах, які можуть включати: корпус, кришку, деталі кріплення, стакани, прокладки, ущільнення.

Підшипниковий вузол повинен забезпечити: сприйняття сил та обмеження осьового зміщення підшипника; належні умови змащення та захист підшипника від забруднення; зручність монтажно-демонтажних робіт.

Для двоопорного валу існує три способи установалення валу на підшипниках кочення:

- вал фіксується від осьових переміщень в обох опорах;
- вал фіксується від осьових переміщень в одній опорі;
- вал не фіксується від осьових переміщень в опорах.

Вибір способу установалення валу залежить від конструкції редуктора і суттєво впливає на надійність роботи підшипників.

Для запобігання витіканню мастильного матеріалу з підшипникових вузлів і для захисту від забруднення сторонніми компонентами навколишнього середовища застосовують ущільнення підшипникових вузлів. Ущільнення повинні забезпечувати необхідну герметичність, мати високу надійність, створювати мінімальне тертя в зоні контакту.

За принципом дії ущільнення поділяють на контактні; безконтактні; комбіновані (рис.3.43).

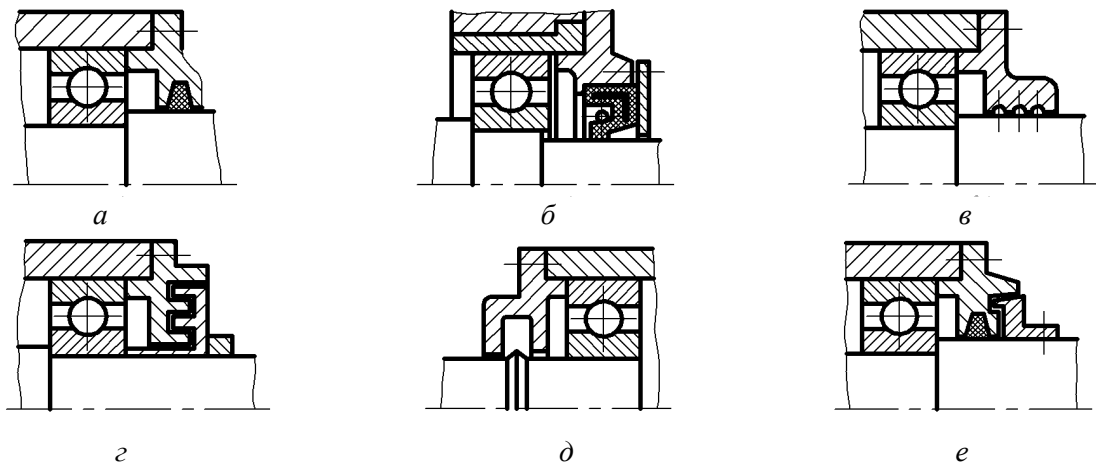


Рис. 3.43. Пристрої для ущільнень підшипників

*Повстяні* (рис. 10.12, а) – найбільш простий тип ущільнень; застосовуються при консистентному змащенні і незначному забрудненні навколишнього середовища з коловою швидкістю валу до 5 м/с.

*Манжетні* (рис. 10.12, б) – найбільш поширений тип контактного ущільнення; застосовуються при рідкому і консистентному змащенні, допускають колову швидкість валу до 10 м/с (при ретельному поліруванні контактної поверхні валу – до 15 м/с).

*Щілинні* (рис. 10.12, в) – найбільш простий, дешевий, але і недостатньо надійний тип безконтактного ущільнення; можуть працювати тільки в порівняно чистому навколишньому середовищі при необмеженій швидкості обертання валу.

*Лабіринтні* (рис. 10.12, г) – більш ефективні порівняно з щілинними, особливо при високих колових швидкостях вала при рідинному та консистентному змащенні.

*Відцентрові*, наприклад, у вигляді виступу на валу (рис. 10.12, д) застосовуються при коловій швидкості валу понад 8 м/с. Ущільнення прості, але не забезпечують повного захисту, особливо під час зупинок приводу.

*Комбіновані* (рис. 10.12, е) – складаються з двох чи більше контактних або безконтактних ущільнень.

При виборі пристрою для ущільнення враховують колову швидкість валу, вид змащування і спосіб його подачі, робочу температуру сполучених з

підшипником деталей, умови навколишнього середовища (абразивні частинки, волога та інше).

### 3.4.5. Практичний розрахунок (підбір) підшипників

При проектуванні машин підшипники кочення підбирають із ряду стандартних за діаметром опорної частини валу. Тому для підшипників кочення проєктні розрахунки не потрібні, а виконують лише перевірні. При цьому визначають динамічно та статично навантажені підшипники.

Для динамічно навантажених підшипників, що розглядаються нижче, потрібно враховувати такі основні фактори: характер навантаження (постійне чи змінне) та вид навантаження (радіальне, осьове, комбіноване), частоту обертання, ресурс, навколишнє середовище (температура, волога, забруднення), особливі вимоги (підвищена жорсткість, надійність, зручність складання і таке інше).

Для опор валів циліндричних зубчастих (прямих та косих) передач перевагу віддають кульковим радіальним підшипникам як найбільш простим і дешевим в експлуатації, орієнтуючись спочатку на легку серію. Для опор валів конічних і черв'ячних передач застосовують переважно роликові конічні підшипники, які мають достатньо високу жорсткість у радіальному та осьовому напрямках. Для плаваючих валів шевронних передач встановлюють радіальні підшипники з короткими циліндричними роликами.

Уточнення попереднього вибору типу і розмірів підшипника проводять на основі розрахунків динамічної вантажності, або, частіше, перевіркою його ресурсу.

Розрахункова динамічна вантажність підшипника  $C_{гр}$  визначається як

$$C_{гр} < C_r, \quad (3.96)$$

де  $C_r$  – динамічна вантажність підшипника, тобто постійне радіальне навантаження для радіальних та радіально-упорних підшипників, яке вони можуть умовно сприймати без появи втоми на робочих поверхнях кілець та тіл

кочення протягом одного мільйона обертів при ймовірності безвідмовної роботи 90 %.

Стандартна базова величина динамічної вантажності підшипника  $C_r$  подається в каталогах для всіх типорозмірів. Величина  $C_{rp}$  визначається з емпіричного виразу для ресурсу підшипника:

$$C_{rp} = P_r \sqrt[p]{L}, \quad (3.97)$$

де  $P_r$  – розрахункове еквівалентне динамічне навантаження, тобто постійна радіальна сила, що при дії на підшипник гарантує такий ресурс, який буде при сумісній дії радіальної та осьової сил в дійсних умовах експлуатації;  $p$  – експериментально визначений показник степеня, для кулькових і роликів підшипників  $p = 3$  і  $p = 10/3$  відповідно;  $L$  – потрібний ресурс підшипника.

Значення  $P_r$  розраховують залежно від режиму навантаження. Наприклад, у постійному режимі навантаження, наприклад, для радіальних і радіально-упорних кулькових та роликів підшипників еквівалентне навантаження визначають за формулою

$$P_r = (X \cdot V \cdot F_r + Y \cdot F_a) K_\sigma \cdot K_T, \quad (3.98)$$

де  $F_r, F_a$  – відповідно радіальна та осьова зовнішні сили;  $X, Y$  – відповідно коефіцієнти радіальної та осьової сил;  $V$  – коефіцієнт обертання ( $V = 1$  при обертанні внутрішнього кільця);  $K_\sigma, K_T$  – відповідно коефіцієнти безпеки та температурний.

Розрахунок ресурсу (в годинах) підшипника виконують за виразом:

$$L_h > L, \quad (3.99)$$

де  $L_h$  – розрахунковий ресурс підшипника  $L_h = 10^6 \cdot L_{10} / (60n)$ , який визначають при постійній частоті  $n$  обертання;  $L_{10}$  – базовий ресурс підшипника  $L_{10} = a_1 \cdot a_{23} (C_r / P_r)^p$ , що відповідає ймовірності безвідмовної роботи 90 %,  $a_1$  – коефіцієнт надійності (для більшості підшипників  $a_1 = 1$ , що відповідає ймовірності безвідмовної роботи 90 %);  $a_{23}$  – узагальнений коефіцієнт сумісного впливу якості металу, особливостей технології виробництва, конструкції і

умов експлуатації при спрощених розрахунках (у звичайних умовах експлуатації з матеріалом звичайного плавлення, за наявності перекосів кілець і забруднення мастила для кулькових і роликових циліндричних підшипників  $a_{23} = 0,7 \dots 0,8$ ; для роликових конічних підшипників  $a_{23} = 0,5 \dots 0,6$ ).

Для підшипників, що обертаються з малою швидкістю ( $n \leq 1 \text{ хв}^{-1}$ ) розрахунок виконують за виразом:

$$P_o < C_o, \quad (3.100)$$

де  $C_o$  – статична вантажність підшипника, тобто таке статичне навантаження на підшипник (радіальне – для радіальних та радіально-упорних, центральне осьове – для упорних та упорно-радіальних), якому відповідає загальна залишкова деформація 0,0001 діаметра тіла кочення у найбільш навантаженій точці контакту;  $P_o$  – еквівалентне статичне навантаження:  $P_o = X_o \cdot F_r + Y_o \cdot F_a$ ;  $X_o$ ,  $Y_o$  – коефіцієнти радіального та осьового статичного навантаження.

### Контрольні запитання

1. У чому різниця між валом та віссю?
2. За якими критеріями працездатності розраховують вали?
3. У чому полягає проєктний розрахунок валу?
4. У чому суть розрахунку валу на статичну міцність?
5. У чому суть розрахунку валу на міцність від утомленості?
6. Коли доцільно застосовувати підшипники ковзання?
7. Яке призначення основних деталей підшипника кочення?
8. Навіщо потрібна велика кількість типів та серій підшипників кочення?
9. Навіщо потрібен сепаратор у підшипнику кочення?
10. Які види пошкоджень характерні для підшипників кочення і за якими критеріями їх розраховують?

### 3.5. Муфти та з'єднання

#### 3.5.1. Загальні відомості про муфти

Муфти (рис. 3.44) – пристрої, що з'єднують вали. Деякі муфти одночасно виконують й інші функції, а саме: компенсують похибки розміщення валів (рис. 3.45), захищають машину від перевантажень, керують її роботою.



Рис. 3.44. Фланцева муфта

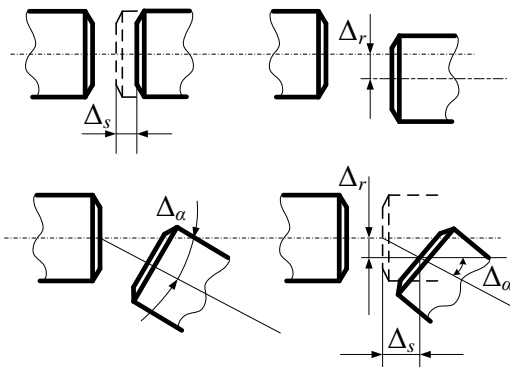


Рис. 3.45. Похибки взаємного розташування валів:

$\Delta_s$  – осьові;  $\Delta_r$  – радіальні;  $\Delta_\alpha$  – кутові

Далі розглядаються механічні муфти, принцип роботи яких базується на зачепленні під дією механічних сил. Класифікацію муфт подано на рис. 3.46.

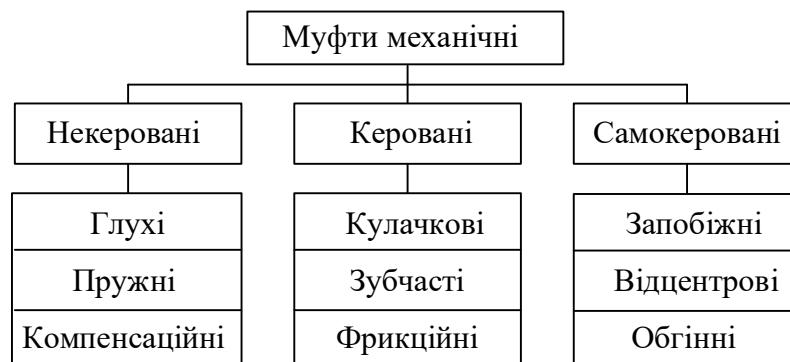


Рис. 3.46. Основні типи механічних муфт

Найбільш поширені муфти – стандартизовані; їх не розраховують, а підбирають за основною характеристикою кожної муфти – обертальним моментом згідно з умовним розрахунком

$$T = K \cdot T_n, \quad (3.101)$$

де  $T_n$  – номінальний обертальний момент;  $K$  – коефіцієнт режиму роботи.

Нижче розглянуто найбільш поширені муфти.

### 3.5.2. Види муфт

Некеровані – нерозчіпні (постійно діючі) муфти, що не допускають роз'єднання валів без демонтажу муфт. Цей клас муфт є найпоширенішим і складається з глухих, пружних та компенсаційних.

Фланцева муфта (рис. 3.45) – основний вид глухих муфт. Вона стандартизована і складається з двох виконаних у вигляді фланців півмуфт 3, 4, насаджених на кінці валів 1, 2, зафіксованих шпонками 5 і з'єднаних між собою болтами з гайками і шайбами 6, 7, 8. Болти ставлять з щілиною або без щілини. У першому випадку момент  $T$  передається за рахунок сил тертя, що виникають у площині стику півмуфт від затяжки болтів; у другому – безпосередньо болтами, які витримують деформації зрізу.

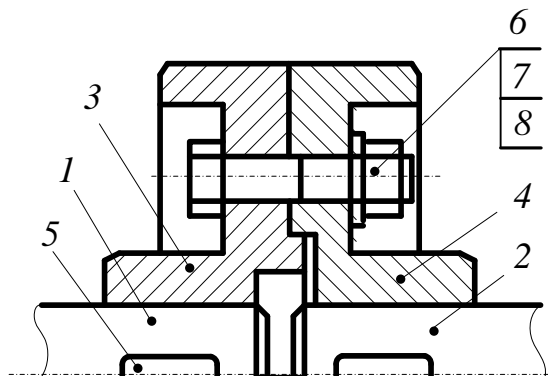


Рис. 3.45. Будова фланцевої муфти

Пружні муфти використовують переважно для зменшення динамічних навантажень у приводі та компенсації незначних неспіввісностей валів. Пружними елементами в цих муфтах можуть бути неметалеві деталі (гумові та полімерні диски, зірочки, оболонки) або металеві деталі (плоскі та гвинтові пружини, пакети пластин). Оскільки при динамічному навантаженні пружні муфти частково акумулюють та розсіюють енергію, їх роботу характеризують жорсткістю  $C_\varphi$  ( $C_\varphi = d \cdot T / d\varphi$ , де  $\varphi$  – кут закручування муфти моментом  $T$ ) та властивістю демпфірування.

Серед муфт із неметалевими пружними елементами для передавання малих та середніх обертальних моментів набула широкого використання пружна втулково-пальцева муфта (МПВП), показана на рис. 3.46.

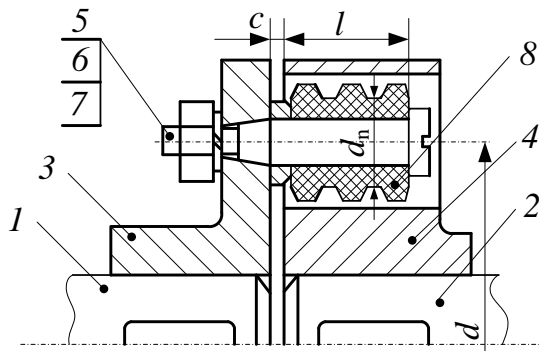


Рис. 3.46. Будова МПВП

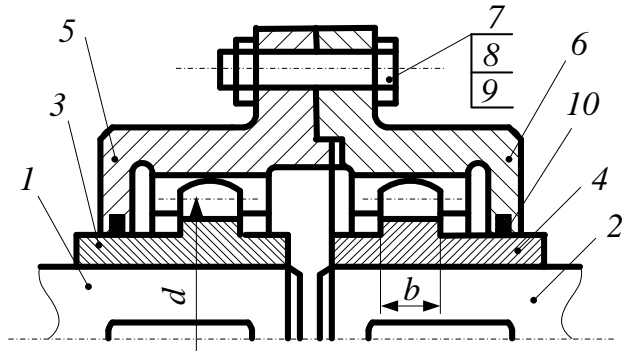


Рис. 3.47. Будова зубчастої муфти

МПВП стандартизована і складається з двох півмуфт (3, 4), насаджених на кінці валів 1, 2 і зафіксованих шпонками, нерухомо закріплених нарізним з'єднанням в одній півмуфті пальців 5, на яких розміщені гумові гофровані втулки 8, що взаємодіють із другою півмуфтою.

Працездатність МПВП визначається міцністю пальців та гумових втулок. Перевірний розрахунок гумових втулок виконують за умови обмеження тиску на поверхні їхнього контакту із пальцями:

$$p = \frac{F_{\text{п}}}{d_{\text{п}} \cdot l} \leq [p], \quad (3.102)$$

де  $F_{\text{п}} = 2T/d \cdot z_{\text{п}}$  – навантаження одного пальця;  $z_{\text{п}}$  – кількість пальців ( $z = 4 \dots 8$ ), а розрахунок пальців – за умовою міцності на згин:

$$\sigma = \frac{M}{W_0} = 32 F_{\text{п}} (0,5l + c) / \pi d_{\text{п}}^3 \leq [\sigma]. \quad (3.103)$$

Вантажна здатність МПВП обмежена стійкістю гумових елементів.

Усереднене значення радіального навантаження валів, що з'єднуються МПВП, визначають за виразом

$$F_{\text{м}} = (0,5 \dots 0,6) T/d. \quad (3.104)$$

Компенсаційні муфти використовують для з'єднання валів із неспіввісністю, спричиненою неточністю виготовлення та монтажу, а також пружними

деформаціями валів. Серед компенсаційних муфт найбільш поширена зубчаста (рис. 3.47), яка складається з півмуфт 3, 4, що мають зовнішні зубчасті вінці, рознімних обойм 5, 6 з внутрішніми зубчатими вінцями, скріплених нарізним з'єднанням 7, 8, 9 (зубці півмуфт та обойм мають евольвентний профіль). Широке використання стандартизованих зубчастих муфт пояснюється суттєвими перевагами: невеликою масою та габаритними розмірами; високою несучою здатністю; можливістю експлуатації з високими коловими швидкостями. Компенсація неспіввісності валів під час роботи муфти супроводжується неперервним ковзанням у контакті зубців і відповідним їх спрацюванням, що є основною причиною виходу муфт із ладу. Для зменшення спрацювання в обойму муфти заливають рідке мастило високої в'язкості й передбачають ущільнення 10.

Керовані муфти з'єднують чи роз'єднують вали під час зупинки та роботи приводу за допомогою пристроїв керування. За принципом дії ці муфти поділяють на два види: муфти, робота яких ґрунтується на зачепленні (кулачкові зубчасті); муфти, робота яких ґрунтується на використанні тертя ковзання (фрикційні). Перші використовують при передаванні великих обертальних моментів в умовах нечастого вмикання-вимикання муфти та обмеження її габаритів; другі – для плавного зачеплення і розчеплення валів при будь-яких швидкостях та обертальних моментах із регулюванням часу вмикання.

Самокеровані муфти автоматично з'єднують чи роз'єднують вали в умовах експлуатації, якщо параметри роботи машини стають недопустимі. Самокерування виконується: за робочим навантаженням запобіжними муфтами; за швидкістю обертання відцентровими муфтами; за напрямком обертання обгінними муфтами. Запобіжні муфти поділяють на муфти із неруйнівними та руйнівними елементами. Перші бувають кулачковими, кульковими, фрикційними; вони конструктивно подібні до відповідних керованих муфт, але з наявністю механізму керування. Запобіжні муфти із руйнівним елементом використовують при відносно рідких перевантаженнях приводу машин. Недоліками цих муфт є потреба заміни зруйнованих елементів.

### 3.5.3. Нарізні з'єднання. Різи, нарізні деталі та їх з'єднання

У процесі виготовлення машин деякі деталі з'єднують між собою так, що вони утворюють рознімні та нерознімні з'єднання.

Рознімні з'єднання допускають розбирання з'єднаних деталей без пошкоджень їх елементів. До них належать нарізні, шпонкові, шліцьові, штифтові з'єднання.

Нерознімні з'єднання не дають змоги використати розбирання з'єднаних деталей без пошкоджень їх елементів. До них належать зварні, клепані, паяні з'єднання.

Проміжне місце між рознімними та нерознімними займають пресові з'єднання. У деяких випадках ці з'єднання проєктують як нерознімні, але при малих натягах, характерних, наприклад, для кілець підшипників кочення, зубчастих коліс, пошкодження при їх розбиранні незначні.

Нарізні з'єднання є найбільш поширеними серед рознімних з'єднань, що пояснюється їх такими перевагами: високою вантажною здатністю і надійністю у статичному навантаженні; наявністю значної номенклатури нарізних деталей; зручністю з'єднання та роз'єднання деталей; простотою конструкції та низькою вартістю виготовлення.

Основним недоліком нарізних з'єднань є недостатня надійність в умовах вібраційного навантаження.

Різь на деталях утворюється шляхом нанесення на зовнішню чи внутрішню поверхню деталі гвинтових канавок відповідного профілю; утворені виступи – витки різи.

Різи визначають:

- за формою основної поверхні: циліндричні, конічні;
- розміщенням на поверхні: внутрішні, зовнішні;
- формою профілю: трикутні, прямокутні, трапецеїдальні, круглі (рис. 3.48);
- напрямком гвинтової лінії: праві, ліві;

- кількістю заходів: одно -, багатозахідні;
- призначенням: кріпильні, ходові;
- видом кріпильних: метричні, трубні.

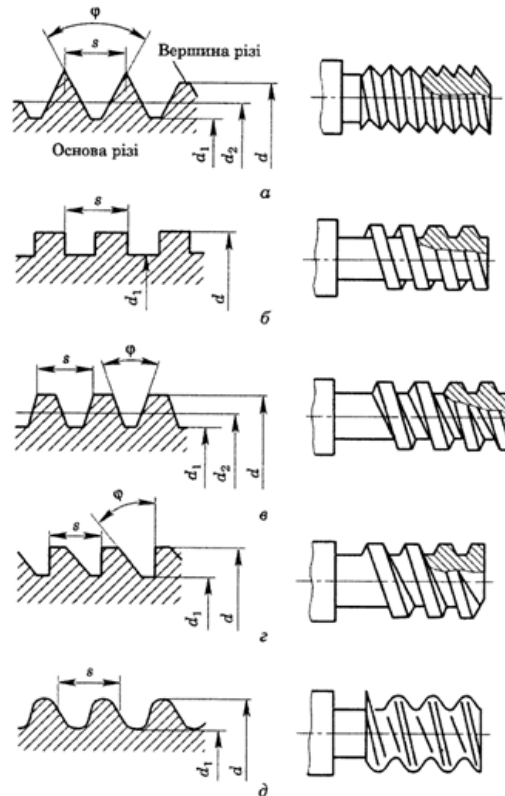


Рис. 3.48. Види різі за формою профілю:

а – трикутна, б – прямокутна, в – трапецеїдна, г – упорна (пилкоподібна), д - кругла

У машинобудуванні найбільш поширені метричні однозахідні різі з правою ниткою нарізані на циліндричних поверхнях, які є стандартизовані (основні параметри показані на рис. 3.49).

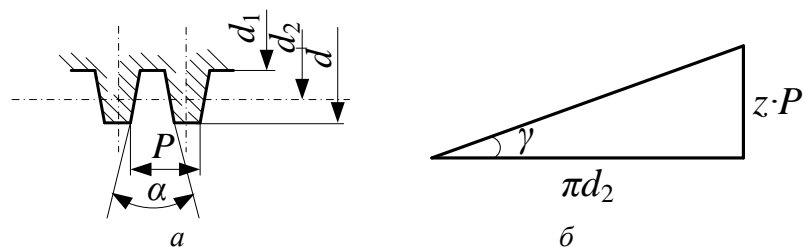


Рис. 3.49. Основні геометричні параметри метричних різей: діаметри (зовнішній  $d$ , внутрішній  $d_1$ , середній  $d_2$ ), крок  $P$ , кількість заходів  $z$ , кут підйому  $\gamma$ , кут профілю  $\alpha$

Для з'єднань деталей використовують болти, гвинти, шпильки, гайки та шайби (рис. 3.50).

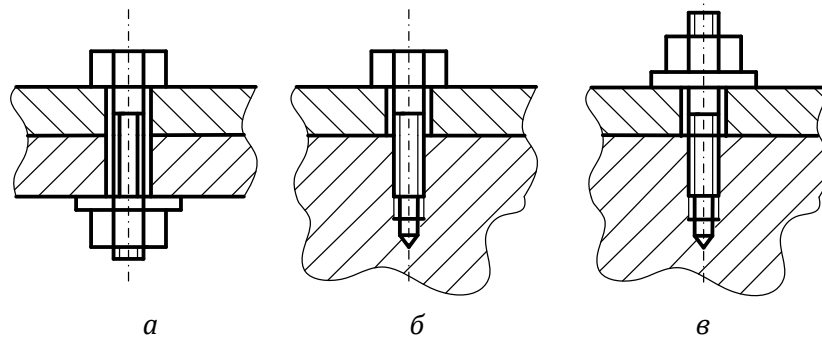


Рис. 3.50. Види нарізних з'єднань

З'єднання болтом (рис. 3.50, *a*) виконують для деталей малої товщини, а також у випадку частого відгвинчування та загвинчування з'єднання; з'єднання гвинтом (рис. 3.50, *б*) або шпилькою (рис. 3.50, *в*) – при значній товщині однієї із з'єднуваних деталей, а також у важкодоступних місцях машини.

Часто під гайку ставлять плоску круглу шайбу, наприклад, для зменшення пошкоджень поверхні деталі. Геометричні форми та розміри гвинтів, гайок, шпильок дуже різноманітні й описані в довідниках та стандартах.

У з'єднанні кріпильними різьми при статичному навантаженні надійно забезпечується самогальмування, оскільки кут тертя між витками різі гвинта та гайки перевищує кут підйому гвинтової лінії. При дії змінних (вібраційних чи ударних) навантажень різко зменшується коефіцієнт тертя між витками і спостерігається самовідгвинчування нарізних деталей. Для запобігання цьому слід використовувати стопорні пристрої, робота яких базується на створенні додаткових сил тертя, наприклад: контргайки, пружинні шайби, шплінти, загнуті стопорні шайби. На практиці застосовують приварювання гайки або гвинта до деталі, а також пластичне деформування витків різі шляхом їх кернування.

Кріпильні деталі масового виробництва для роботи в умовах статичного навантаження виготовляють з пластичних сталей; при роботі в умовах циклічних навантажень – із високоміцних сталей (конструкційних та легованих); в умовах підвищеної температури – з жаростійких сталей. Для захисту від впливу агресивного навколишнього середовища застосовують спеціальні покриття.

Залежно від матеріалу нарізної деталі, умов її роботи, можливостей виробництва, різі виконують нарізуванням, накатуванням, литтям і пресуванням.

За даними теоретичного розв'язання розподілу навантаження по витках стандартної гайки зі шістьма витками встановлено, що на перші три витка припадає близько трьох чвертей загальної сили. Це свідчить про недоцільність конструювання з'єднань з великою кількістю витків різі (більше шести).

У реальних умовах експлуатації навантаження на перший виток декілька зменшується за рахунок впливу контактних пластичних деформацій, спрацювання, можливих похибок профілю витків. Розподіл сили по витках різі поліпшують використанням, наприклад, спеціальних гайок із місцевою підвищеною податливістю нарізної ланки.

Оскільки розміри елементів стандартних нарізних деталей (висота головки гвинта, висота витка, висота гайки) встановлені за умови рівномірності, то проєктний розрахунок з'єднань частіше виконують тільки за одним головним критерієм працездатності – міцністю гвинта.

#### 3.5.4. Розрахунки одиничного та групи болтових з'єднань при постійному навантаженні

Відзначають чотири основні випадки розрахунку одиничного болтового з'єднання при постійному навантаженні, розглянуті нижче.

*Навантаження силою, що розтягує з'єднання.*

Прикладом такого з'єднання може бути кріплення вантажної петлі або крюка у підйомному механізмі, коли відсутня попередня затяжка (рис. 3.51).

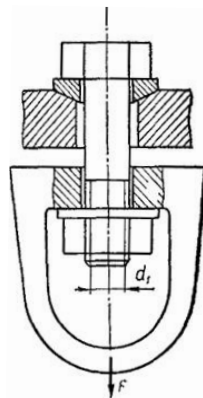


Рис. 3.51. Осьове навантаження не затягнутого болта

Умова міцності гвинта при його розтягуванні силою  $F$  має вигляд

$$\sigma = \frac{4F}{\pi d_1^2} \leq [\sigma_p], \quad (3.105)$$

звідки потрібний внутрішній діаметр різі

$$d_1 \geq \sqrt{4F / (\pi[\sigma_p])}. \quad (3.106)$$

Розрахункове значення  $d_1$  округляють до стандартного, за яким встановлюють номінальний діаметр різі болта.

*З'єднання затягнутим болтом без зовнішнього навантаження.*

Прикладом такого з'єднання може бути кріплення герметичних люків, кришок (див. рис. 3.52).

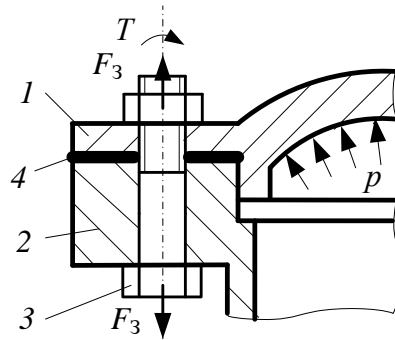


Рис. 3.52. З'єднання кришки 1 з корпусом 2 високого тиску  
(3 – болти з гайками; 4 – прокладка)

Гвинт розтягується силою  $F_3$  і одночасно скручується моментом  $T$ . Напруження розтягу від дії  $F_3$  та напруження кручення від дії  $T$  в небезпечному перерізі гвинта визначають відповідно за виразами

$$\sigma_p = 4F_3 / \pi d_1^2; \quad \tau = T / W_p = 8F_3 \cdot d_2 \cdot \operatorname{tg}(\gamma + \beta') / \pi \cdot d_1^3.$$

Міцність болта оцінюють за еквівалентним напруженням:

$$\sigma_{\text{екв}} = \sqrt{\sigma_p^2 + 3\tau^2} = \sigma_p \sqrt{1 + 3 \left( \frac{\tau}{\sigma_p} \right)^2} = \sigma_p \sqrt{1 + 12 \left[ \frac{d_2}{d_1} \cdot \operatorname{tg}(\gamma + \beta') \right]^2} = \sigma_p \cdot \rho \leq [\sigma_p], \quad (3.107)$$

де  $\rho$  – коефіцієнт, що враховує скручування болта при затягуванні; для стандартних метричних різей  $\rho \approx 1,3$ .

Таким чином, напруження в затягнутому зусиллям  $F_3$  гвинті визначають напруженням розтягування від сили  $F$ , яке збільшують на 30 %.

Потрібний внутрішній діаметр гвинта

$$d_1 \geq \sqrt{5,2 F / (\pi \cdot [\sigma_p])}. \quad (3.108)$$

*З'єднання затягнутим болтом і навантажене осьовою силою.*

Під дією затяжки болтового з'єднання у гвинті з'являються розтягуючі напруження, а у з'єднуваних деталях – напруження стиску. З появою додатково осьової розтягуючої сили напруження розтягування у гвинті збільшаться, а напруження стиску у з'єднуваних деталях зменшаться. Саме ці факти враховуються коефіцієнтом зовнішнього навантаження  $\chi$ , а щільність стику при розтягуванні – коефіцієнтом надійності  $K_{щр}$ . Тоді з урахуванням затяжки болта його повне навантаження має вигляд

$$F_6 = 1,3 F_3 + F \cdot \chi = 1,3 K_{щр} \cdot F + F \cdot \chi = F(1,3 K_{щр} + \chi), \quad (3.109)$$

а потрібний внутрішній діаметр болта за умови міцності:

$$d_1 \geq \sqrt{4F(1,3K_{щ} + \chi) / (\pi[\sigma_p])}. \quad (3.110)$$

*З'єднання затягнутим болтом, навантажене силами зсуву.*

Умовою міцності таких з'єднань є відсутність зсуву деталей. Відзначають два варіанти нарізних з'єднань, що навантажені силами зсуву: болт встановлено в отвори зі щілиною (рис. 3.53, а) і болт встановлено без щілини (рис. 3.53, б).

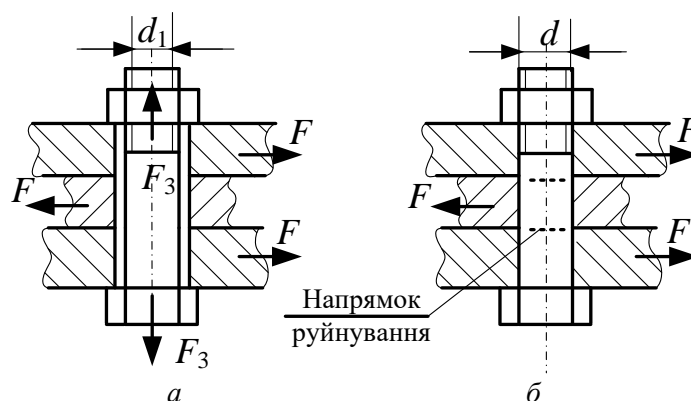


Рис. 3.53. Болтове з'єднання:  
а – зі щілиною; б – без щілини

Потрібний діаметр болта  $d_1$  в першому випадку визначають за виразом:

$$d_1 \geq \sqrt{5,2 K_3 \cdot F / (\pi \cdot i \cdot f[\sigma_p])}, \quad (3.111)$$

у другому випадку:

$$d_1 \geq \sqrt{4F / (\pi[\tau_3]i)}. \quad (3.112)$$

З порівняння обох варіантів установа болта видно, що перший дешевший від другого, оскільки він не потребує точних розмірів болта й отвору в деталях з'єднань, однак вимагає використання болта з більшим діаметром.

У розрахунках групи болтових з'єднань припускають: поверхні стиків плоскі і жорсткі; всі болти однакові за розмірами і мають однакове початкове затягування; болти в з'єднанні розміщені симетрично щодо осей стику, які проходять через центр його ваги.

Розрахунок групи болтових з'єднань виконують у такій послідовності:

- будують розрахункову схему з'єднання;
- визначають найбільш навантажений болт;
- виконують розрахунок міцності цього болта.

### 3.5.5. Шпонкові, шліцьові, профільні з'єднання

Шпонкові (рис. 3.54, *а*), шліцьові (рис. 3.54, *б*) та штифтові (рис. 3.54, *в*) з'єднання служать для закріплення на валах деталей, які передають обертальний момент (шків, зірочки, зубчасті колеса).



Рис. 3.54. Шпонкові (а), шліцьові (б) та штифтові (в) з'єднання

На рис. 3.55 зображені деталі шпонкових з'єднань: 1 – вал, 2 – маточина (шків, зірочки, зубчастого колеса), 3 – шпонка.

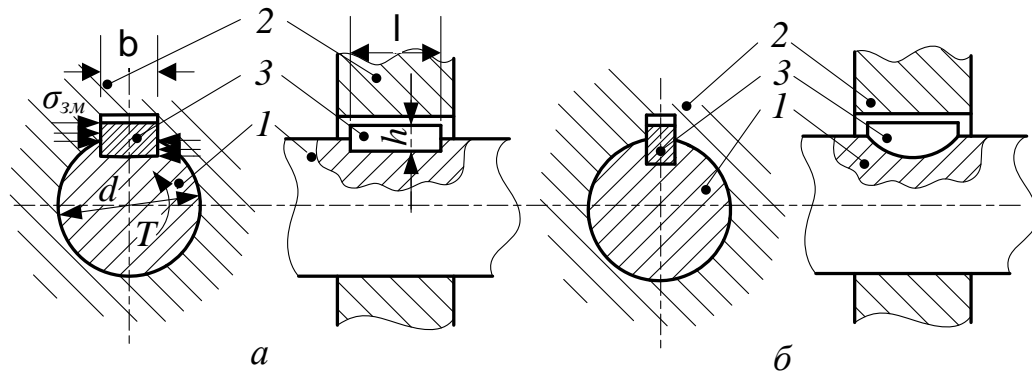


Рис. 3.55. Шпонкові з'єднання

У машинобудуванні частіше застосовують стандартні призматичні та сегментні шпонки, які здійснюють ненапруженими з'єднаннями. Ширину ( $b$ ) і висоту ( $h$ ) призматичних шпонок (див. рис. 3.55, *a*) вибирають залежно від діаметра ( $d$ ) валу, а довжину ( $l$ ) – за шириною маточини деталі, розміщеної на валу; їх перевіряють розрахунком на міцність та узгоджують зі стандартом. Недоліком призматичних шпонок є труднощі забезпечення взаємозамінності, що обмежує їх використання в масовому виробництві.

Сегментні шпонки (див. рис. 3.55, *б*) застосовують завдяки технологічності цих з'єднань – вони не потребують ручної пригінки. Крім того, глибока посадка шпонки забезпечує їй більш стійке положення, запобігає перекосу під навантаженням. Однак глибокий паз значно послаблює вал, тому сегментні шпонки використовують здебільшого для з'єднання деталей на малонавантажених ділянках валу.

Переваги шпонкових з'єднань: простота та надійність конструкції; низька вартість виготовлення; зручність складання з'єднання.

До недоліків належать: послаблення валу та маточини шпонковим пазом; неприйнятність для швидкісних валів.

Розрахунок шпонкових з'єднань у більшості випадків виконують як перевірний, оскільки розміри шпонок вибирають залежно від діаметра валу за відповідним стандартом.

Навантажені поверхні зминаються і при незначних переміщеннях, як наслідок, спрацьовуються, тому основним розрахунком цього з'єднання є розрахунок за умови обмеження напружень зминання. У спрощеному розрахунку

вважають, що шпонка врізана у вал на глибину  $0,5h$ ; напруження зминання  $\sigma_{зм}$  розподіляються за висотою та довжиною рівномірно; відстань від рівнодіючої  $\sigma_{зм}$  до центра валу дорівнює  $0,5d$ . За цими допущеннями умова міцності шпоноквого з'єднання має вигляд

$$\sigma_{зм} = F / A_{зм} = T / 0,5d \cdot 0,5h \cdot l_p \leq [\sigma_{зм}]. \quad (3.113)$$

Для попередньо вибраної висоти шпонки  $h$  її робоча довжина

$$l_p \geq 4T / d \cdot h \cdot [\sigma_{зм}]. \quad (3.114)$$

Шліцьові з'єднання в більшості випадків утворюються за допомогою зубців (шліців), що нарізуються на поверхнях вала та отворів маточини (рис. 3.56).

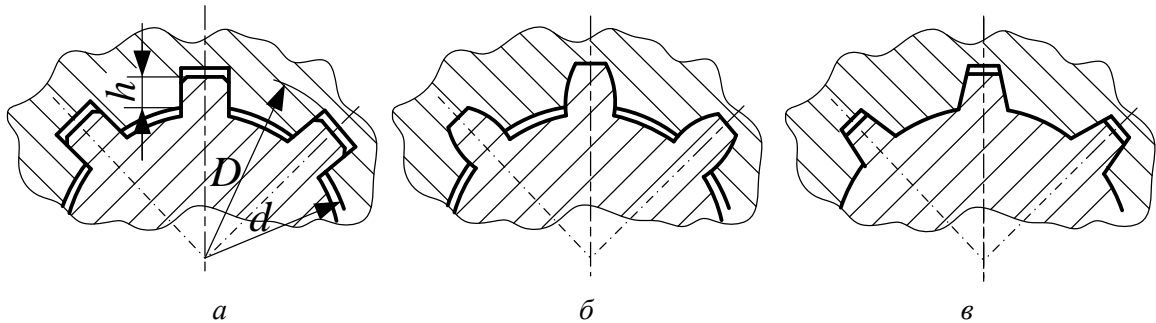


Рис. 3.56. Шліцьові з'єднання: а – прямокутні; б – евольвентні; в – трапецеїдальні

Шліцьові з'єднання вирізняють:

- за формою профілю зубців: прямокутні (див. рис. 3.56, а); евольвентні (див. рис. 3.56, б); трапецеїдальні (див. рис. 3.56, в);
- способом центрування: по бічних гранях (див. рис. 3.56, а); по зовнішньому діаметру (див. рис. 3.56, б); по внутрішньому діаметру (див. рис. 3.56, в);
- серією з'єднання прямокутних профілів: легка, середня, важка.

Для валів загальномашинобудівного призначення найбільш поширені прямокутні стандартизовані шліцьові з'єднання з центруванням по бічних гранях.

Порівняно із шпонковими шліцьові з'єднання мають такі переваги: більшу компактність та несуча спроможність; підвищену точність центрування деталей на валу; можливість взаємозамінності.

При проєктуванні шліцьового з'єднання геометричні параметри (кількість шліців  $z$ , зовнішній діаметр  $D$ ) вибирають залежно від діаметра  $d$  вала.

Основним критерієм працездатності шліцьових з'єднань є опір робочих поверхонь спрацюванню, яке виникає через відносні переміщення навантажених поверхонь внаслідок деформації вала та щілин у деталях з'єднань. Тому перевірний розрахунок цих з'єднань виконують за умови обмеження напружень зминання робочих поверхонь зубців. Наприклад, для прямокутних шліцьових з'єднань умова міцності має вигляд

$$\sigma_{3M} = F / A_{3M} = 2T / d_c \cdot z \cdot h \cdot l \cdot \psi \leq [\sigma_{3M}], \quad (3.115)$$

де  $d_c = 0,5 (D + d)$  – середній діаметр шліцьового з'єднання;  $h$  – висота робочої поверхні шліца;  $l$  – довжина шліцьового з'єднання;  $\psi$  – коефіцієнт нерівномірності розподілу навантаження між шліцами.

### Контрольні запитання

1. Які функції виконують муфти у приводах машин?
2. Які існують класи механічних муфт і як їх підбирають?
3. Які існують переваги у самокерованих муфт?
4. Які різі частіше використовують у загальному машинобудуванні?
5. Коли відбувається самовідгвинчування нарізних з'єднань і які засоби стопоріння цих з'єднань застосовують у техніці?
6. Чому виникає нерівномірний розподіл навантаження по витках різі і які використовують засоби для вирівнювання навантажень по вітках різі?
7. Які існують випадки навантаження болтового з'єднання?
8. Які є основні види ненапружених та напружених шпонкових з'єднань?
9. За якою умовою міцності виконують перевірний розрахунок шпонки?
10. В яких випадках використовують шліцьові з'єднання?

11. Які існують основні види шліцьових з'єднань і в чому їх перевага над шпонковими?
12. Як розраховують шліцьові з'єднання?

## Список літератури

1. Павлице В.Т. Навчальний посібник /, Є.В. Харченко, А.Ф. Барвінський, Ю.Г. Гаршнєв. За ред. В.Т. Павлице. Львів: Інтелект-Захід, 2004. 368 с.
2. Писаренко, Г.С. Опір матеріалів : підручник / Г.С.Писаренко, О.Л.Квітка, Е.С. Уманський.-К. : Вища школа, 2004. 655 с.
3. А.В. Міняйло Деталі машин : підручник / Міняйло А.В., Тіщенко Л.М., Мазоренко Д.І. та ін. – К. : Агроосвіта, 2013. – 448 с.
4. Музикін Ю.Д. Основи кінематичного і силового аналізу матеріальних тіл. Ч.1 : конспект лекцій з прикладної механіки для студ. немашинобудівних спец / Ю.Д. Музикін, В.В. Клітної, О.І. Наумов. – Харків : НТУ "ХПІ", 2014. – 51 с.
5. Музикін Ю.Д. Основи розрахунків на міцність. Ч.2 : конспект лекцій з прикладної механіки для студ. немашинобудівних спец / Ю.Д. Музикін, В.В. Клітної, О.І. Наумов. – Харків: НТУ "ХПІ", 2016. – 75 с.
6. Архангельський Г. В. Деталі машин. Розрахунок та конструювання : підручник / Г. В. Архангельський, М. С. Воробйов, В. С. Гапонов, О. І. Дубинець, О. І. Пилипенко, А. В. Гайдамака, С. Л. Панов, А. С. Столбовий. – Київ : Талком, 2014. – 684 с.
7. Гайдамака А. В. Деталі машин. Основи теорії та розрахунків: навчальний посібник для студентів машинобудівних спеціальностей усіх форм навчання. Харків : НТУ «ХПІ» – 2020. 275 с.
8. Гайдамака А. В. Деталі машин: підручник для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання / А.В. Гайдамака. – Харків: ФОП Панов А.М., 2023. – 316 с.

Навчальне видання

КЛІТНОЙ Володимир Вікторович  
МУЗИКІН Юрій Дмитрович  
БОРОДІН Дмитро Юрійович  
БОБРИЦЬКИЙ Сергій Владиславович

ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ТА РОЗРАХУНКІВ

Навчальний посібник  
для здобувачів вищої освіти  
не машинобудівних спеціальностей  
денної та заочної форм навчання  
технічних ЗВО

Відповідальний за випуск доц. Кулик Г.Г.

Роботу до видання рекомендував проф. Крутіков Г.А.

В авторській редакції.

План 2023 р., поз. 141

Підписано до друку 2023

Гарнітура Times New Roman.

---

Видавничий центр НТУ «ХП»  
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.  
м. Харків, вул. Кирпичова, 2

---

Електронне видання