

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
"ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

С. П. Іглін, Ю. І. Зайцев, Ю. Б. Решетняк

Лінійне програмування

**Навчальний посібник
для студентів усіх спеціальностей
усіх форм навчання
вищих навчальних закладів**

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету
протокол № 03 від 26.10.2022 р.

Харків
2022

УДК 519.85

I 26

Рецензенти:

М. В. Сидоров, д-р ф.-м. наук, професор, Харківський національний університет радіоелектроніки;

О. А. Галуза, д-р ф.-м. наук, професор, Національний технічний університет "ХПИ".

Іглін, С. П.

I26 Лінійне програмування: навч. посіб. для студентів усіх спеціальностей усіх форм навчання вищих навчальних закладів / С. П. Іглін, Ю. І. Зайцев, Ю. Б. Решетняк. — Харків: "НТМТ", 2023. — 120 с.

ISBN 978-617-578-344-3

Розглядаються різноманітні задачі лінійного програмування та методи їх розв'язання: графічний, симплекс-метод, теорія двоїстості, транспортна задача, метод перерізів Гоморі. Наведені приклади та варіанти домашніх завдань.

Призначено для студентів, аспірантів, викладачів, наукових працівників, що використовують цей математичний апарат.

Лл. 19. Табл. 77. Бібліогр.: 5 назв.

УДК 519.85

ISBN 978-617-578-344-3

© С. П. Іглін, Ю. І. Зайцев,
Ю. Б. Решетняк, 2022

Зміст

Вступ	5
1. Попередні відомості з аналізу та лінійної алгебри	6
1.1. Загальний розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь	6
1.2. Заміщення базису	10
1.3. Площина, пряма, відрізок та інші об'єкти в E_n	11
1.4. Опуклі області та функції	14
1.5. Екстремум функції кількох змінних	17
1.6. Метод невизначених множників Лагранжа	18
1.7. Метод штрафних функцій	18
1.8. Умови Каруша-Куна-Такера	19
1.9. Запитання для перевірки	21
2. Постановка задачі лінійного програмування	22
2.1. Приклади задач лінійного програмування	22
2.2. Різні форми запису задачі лінійного програмування	26
2.3. Основні властивості задачі лінійного програмування	28
2.4. Графічний метод	29
2.5. Запитання для перевірки	32
3. Симплекс-метод	33
3.1. Теоретичні основи симплекс-методу	33
3.2. Кутові точки — допустимі опорні розв'язки	34
3.3. Симплексні перетворення	38
3.4. Особливості розв'язання задач симплекс-методом	44
3.4.1. Необмежена область розв'язку	44
3.4.2. Неєдиний розв'язок	46
3.4.3. Вироджені розв'язки	51
3.5. Двохетапний симплекс-метод, або метод штучного базису	55
3.6. Запитання для перевірки	61
4. Елементи теорії двоїстості	62
4.1. Симетричні двоїсті задачі	62
4.2. Теореми двоїстості	63
4.3. Несиметричні двоїсті задачі	67

4.4. Запитання для перевірки	70
5. Транспортна задача лінійного програмування.	72
5.1. Постановка задачі	72
5.2. Особливості транспортної задачі	74
5.3. Допустимі опорні розв'язки в транспортній задачі	78
5.3.1. Метод північно-західного кута.	79
5.3.2. Метод мінімальної вартості	83
5.3.3. Метод подвійної переваги	86
5.3.4. Метод Фогеля	89
5.4. Симплексні перетворення в транспортній задачі	93
5.5. Метод потенціалів	98
5.6. Задача про призначення	101
5.7. Запитання для перевірки	101
6. Цілочисельне лінійне програмування	102
6.1. Графічний метод	102
6.2. Метод перерізів Гоморі	104
6.3. Запитання для перевірки	109
7. Варіанти індивідуальних домашніх завдань	110
7.1. Графічний метод	110
7.2. Симплекс-метод.	111
7.3. Транспортна задача	113
7.4. Задача про призначення	116
Література	119

Вступ

В цьому навчальному посібнику розміщені лекції та варіанти індивідуальних домашніх завдань з лінійного програмування в тому обсязі, що викладається в НТУ "ХП".

У першій главі нагадуються деякі питання з лінійної алгебри та математичного аналізу, що потрібні для подальшого використання. Докладніше з ними можна ознайомитися в [3] та інших підручниках.

Далі послідовно розглядаються формулювання задачі лінійного програмування, форми запису задач, графічний метод, симплекс-метод, теорія двоїстості, транспортна задача, цілочисельне лінійне програмування. Поряд з цим посібником можна скористатися підручниками [1, 5].

Наприкінці наведені варіанти індивідуальних домашніх завдань. В основному вони взяті з книги [4] та доповнені. Для розв'язання завдань можна скористатися сайтом [2].

Для полегшення перехресних посилань усі формули, означення, теореми, рисунки тощо мають подвійну нумерацію, що включає номер розділу. Кінець прикладу, означення, формулювання чи доведення теореми позначений ось таким квадратиком: \square .

Матриці позначаються великими жирними літерами: \mathbf{E} , а вектори — малими: \mathbf{p} . Індексація компонентів матриць та координат векторів починається з одиниці.

1. Попередні відомості з аналізу та лінійної алгебри

У цьому розділі ми пригадаємо деякі поняття математичного аналізу та лінійної алгебри, які будуть нам потрібні для розв'язання задач лінійного програмування.

1.1. Загальний розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Нехай є система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (СЛАР $m \times n$):

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (1.1)$$

де \mathbf{A} — матриця коефіцієнтів розміром $m \times n$; \mathbf{x} — вектор-стовпчик невідомих величин довжиною n ; \mathbf{b} — вектор-стовпчик правих частин довжиною m .

Позначимо через \mathbf{A}_1 розширену матрицю розміром $m \times (n + 1)$, яку отримуємо з матриці \mathbf{A} дописуванням праворуч вектора-стовпчика \mathbf{b} .

Нехай ранги матриць є такими: $r = \text{rg}\mathbf{A}$; $r_1 = \text{rg}\mathbf{A}_1$.

Теорема 1.1. Теорема Кронекера-Капеллі. Для того, щоб система (1.1) була сумісною, необхідно та достатньо, щоб $r_1 = r$. Для того, щоб сумісна СЛАР (1.1) була ще й визначеною, необхідно та достатньо, щоб $r_1 = r = n$. \square

Доведення цієї теореми розглядається в курсі лінійної алгебри, тому ми не будемо на ньому зупинятися.

Нехай СЛАР (1.1) сумісна, але не визначена: $r_1 = r < n$. В цьому випадку вона має більше одного розв'язку (насправді безліч розв'язків).

Означення 1.1. Для сумісної та невизначеної СЛАР число $f = n - r$ називається *ступенем невизначеності* або *кількістю ступенів волі*. \square

Саме стільки вільних змінних буде в загальному розв'язку цієї СЛАР. Для дослідження СЛАР та знаходження її загального розв'язку можна скористатися методом Жордана-Гауса.

Приклад 1.1. Дослідити та розв'язати методом Жордана-Гауса таку СЛАР:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1; \\ 3x_1 + 13x_2 + 13x_3 + 5x_4 = 3; \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 7; \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 19. \end{cases}$$

Розв'язання. Досліджуємо та пробуємо розв'язати:

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 13 & 13 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 7 & 7 & 2 & 19 \end{array} \right) \begin{array}{l} e_2 - 3e_1 \\ e_3 - e_1 \\ e_4 - 3e_1 \end{array} \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 16 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ e_3/3 \\ \\ \end{array} \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 16 \end{array} \right) \begin{array}{l} e_1 - 2e_3 \\ e_2 - 7e_3 \\ e_4 - e_3 \end{array} \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 14 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ e_4/(-1) \\ \end{array} \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -14 \end{array} \right) \begin{array}{l} e_1 - e_4 \\ e_2 - 2e_4 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -14 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Друге рівняння отримало вигляд: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 14$, що неможливо. Маємо: $r = 3$; $r_1 = 4$; СЛАР несумісна — розв'язків немає. □

Приклад 1.2. Дослідити та розв'язати методом Жордана-Гауса наступну СЛАР:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1; \\ 3x_1 + 13x_2 + 13x_3 + 5x_4 = 3; \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 7; \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 12; \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 = 19. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 13 & 13 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 7 & 7 & 2 & 12 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 19 \end{array} \right) \begin{array}{l} e_2 - 3e_1 \\ e_3 - e_1 \\ e_4 - 3e_1 \\ e_5 - 4e_1 \end{array} \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & 15 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ e_3/3 \\ \\ \end{array} \sim
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & 15 \end{array} \right) \begin{array}{l} e_1 - 2e_3 \\ e_2 - 7e_3 \\ e_4 - e_3 \\ e_5 + 3e_3 \end{array} \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 21 \end{array} \right) \begin{array}{l} e_4 / (-1) \end{array} \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 21 \end{array} \right) \begin{array}{l} e_1 - e_4 \\ e_2 - 2e_4 \\ e_5 + 3e_4 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -7 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

На останньому кроці відкинули два рівняння-тотожності: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$. Маємо: $r = r_1 = 3$; $n = 4$; $f = n - r = 1$. Система сумісна, невизначена, ступінь невизначеності дорівнює 1. Маємо $f = 1$ вільну змінну та $r = 3$ базисні. У стовпцях, що відповідають базисним змінним, по одній одиниці, а решта — нулі. А у стовпцях для вільних змінних можуть бути будь-які числа. Отже, у нас вільна змінна — це x_3 , а базисні — x_1, x_2, x_4 . Вільна змінна може набувати будь-якого значення: $x_3 = C$. Базисні виражаються через вільну з отриманої СЛАР:

$$\begin{cases} x_1 + C = 4; \\ x_2 = 2; \\ 2C + x_4 = -7; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -C + 4; \\ x_2 = 2; \\ x_3 = C; \\ x_4 = -2C - 7; \end{cases} \quad \mathbf{x} = C \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

В останньому векторному запису перший доданок — це загальний розв'язок відповідної однорідної СЛАР, а другий — частинний розв'язок нашої неоднорідної СЛАР. \square

Приклад 1.3. Дослідити та розв'язати методом Жордана-Гауса наступну СЛАР:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 5; \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 + x_5 = 10; \\ 2x_1 + x_2 + x_4 - 2x_5 = 20. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & -4 & -2 & 6 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -2 & 20 \end{array} \right) \begin{array}{l} e_2 - 2e_1 \\ e_3 - 2e_1 \end{array} \sim$$

$$\begin{aligned}
& \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & -5 & -4 & 10 \end{array} \right) e_2 / (-1) \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & -5 & -4 & 10 \end{array} \right) e_1 - e_2 \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & -5 & 0 & 10 \end{array} \right) e_3 / 2 \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2.5 & 1 & -2.5 & 0 & 5 \end{array} \right) e_1 + e_3 \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2.5 & 1 & -2.5 & 0 & 5 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Маємо: $r = r_1 = 3$; $n = 5$; СЛАР сумісна та невизначена; ступінь невизначеності $f = n - r = 2$. Вільні змінні: $x_2 = C_1$; $x_4 = C_2$; базисні змінні x_1, x_3, x_5 знаходимо з отриманої СЛАР:

$$\begin{cases} x_1 + 0.5C_1 + 0.5C_2 = 10; \\ x_5 = 0; \\ 2.5C_1 + x_3 - 2.5C_2 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -0.5C_1 - 0.5C_2 + 10; \\ x_2 = C_1; \\ x_3 = -2.5C_1 + 2.5C_2 + 5; \\ x_4 = C_2; \\ x_5 = 0; \end{cases}$$

$$\mathbf{x} = C_1 \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \\ -2.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 2.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В останньому векторному запису перші два доданки — це загальний розв'язок відповідної однорідної СЛАР (лінійна комбінація фундаментальних розв'язків), а третій — частинний розв'язок нашої неоднорідної СЛАР. \square

Теорема 1.2. Загальний розв'язок сумісної ($r = r_1$) невизначеної ($r < n$) СЛАР (1.1) дорівнює сумі загального розв'язку відповідної однорідної СЛАР та частинного розв'язку СЛАР (1.1). У свою чергу, загальний розв'язок відповідної однорідної СЛАР є лінійною комбінацією $f = n - r$ лінійно-незалежних фундаментальних розв'язків:

$$\mathbf{x} = C_1 \mathbf{u}_1 + C_2 \mathbf{u}_2 + \dots + C_f \mathbf{u}_f + \mathbf{x}^*. \quad \square \quad (1.2)$$

Доведення цієї теореми також розглядалося в курсі лінійної алгебри.

1.2. Заміщення базису

В прикладі 1.3 ми отримали вільні змінні x_2, x_4 та базисні x_1, x_3, x_5 . А чи можна зробити вільними (звільнити) якісь інші дві змінні? Інколи так, а інколи ні. Зокрема, в прикладі 1.3 ми ніколи не зможемо звільнити x_5 , тому що ця змінна фактично відокремилася від інших. А x_1, x_3 можна звільнити, ввівши в базис x_2, x_4 . Найпростіше це робити послідовно, замінюючи базисні змінні по одній.

Означення 1.2. *Однократне заміщення базису* — це введення в базис однієї вільної змінної з одночасним виведенням з базису (звільненням) якоїсь базисної. \square

Для виконання операції однократного заміщення базису треба спочатку визначитися, яку вільну змінну ми будемо вводити в базис. Тобто треба обрати у розширеній матриці A_1 якийсь стовпчик, що відповідає вільній змінній. Потім подивитися, які ненульові елементи є в цьому стовпчику. Якщо є якийсь ненульовий елемент, то відповідну базисну змінну можна звільнити. Номер цієї базисної змінної, що звільняється, визначається одиницею в базисному стовпці цього рядка.

Після того, як ми обрали стовпчик (вільна змінна, що вводиться в базис) та рядок (базисна змінна, що звільняється), робимо на їх перехресті одиницю (тобто ділимо відповідне рівняння на цей елемент) та проводимо це один крок методу Жордана-Гауса.

Приклад 1.4. В прикладі 1.3 ввести до базису змінні x_2, x_4 та звільнити x_1, x_3 .

Розв'язання. В цьому прикладі ми отримали таку розширену матрицю:

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2.5 & 1 & -2.5 & 0 & 5 \end{array} \right).$$

Нам треба ввести до базису x_2 . Їй відповідає другий стовпчик A_1 . Дивимося, які елементи є в цьому стовпчику, і які базисні змінні їм відповідають. В першому рядку стоїть число $a_{12} = 0.5 \neq 0$. Базисна змінна, що знаходиться в першому рядку — це x_1 : одиниця в першому рядку є у базисного стовпчика саме для x_1 . Оскільки $a_{12} \neq 0$, то x_1 можна звільнити. Це звільнення полягає в тому, що ми множимо перше рівняння на два, щоб отримати $a_{12} = 1$, а потім від третього рівняння віднімаємо перше, помножене на 2.5, тобто проводимо один крок методу Жордана-Гауса.

Розглянемо інші можливості. Наступний елемент другого стовпчика $a_{22} = 0$, тому змінну x_5 (а саме вона є базисною для другого рядка) звільнити не можна, тому що ми ніяк не зробимо з нуля одиницю.

Останній елемент другого стовпчика $a_{32} = 2.5 \neq 0$, а третьому рядку відповідає базисна змінна x_3 . Її теж можна звільнити. Для цього треба

поділити третє рівняння на 2.5, а потім від першого рівняння відняти третє, помножене на 0.5.

Введемо в базис x_2 , а виведемо, наприклад, x_3 :

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2.5 & 1 & -2.5 & 0 & 5 \end{array} \right) \sim e_3/2.5 \\ & \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0.4 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right) \sim e_1 - 0.5e_3 \\ & \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -0.2 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0.4 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Отримали базисні змінні x_1, x_2, x_5 і вільні x_3, x_4 . Далі треба ввести в базис x_4 , звільнивши x_1 . Це можна зробити, тому що $a_{14} = 1 \neq 0$. Виконуємо відповідний крок методу Жордана-Гауса:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -0.2 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0.4 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right) e_3 + e_1 \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -0.2 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0.2 & 0 & 0 & 11 \end{array} \right).$$

Вільні змінні: $x_1 = C_1$; $x_3 = C_2$. Базисні змінні x_2, x_4, x_5 виражаємо через вільні:

$$\begin{cases} C_1 - 0.2C_2 + x_4 = 9; \\ x_5 = 0; \\ C_1 + x_2 + 0.2C_2 = 11; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = C_1; \\ x_2 = -C_1 - 0.2C_2 + 11; \\ x_3 = C_2; \\ x_4 = -C_1 + 0.2C_2 + 9; \\ x_5 = 0; \end{cases}$$

$$\mathbf{x} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -0.2 \\ 1 \\ 0.2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отримали іншу відповідь, ніж у прикладі 1.3, але за тим самим принципом: перші два доданки — це загальний розв'язок відповідної однорідної СЛАР (лінійна комбінація фундаментальних розв'язків), а третій — частинний розв'язок нашої неоднорідної СЛАР. \square

1.3. Площина, пряма, відрізок та інші об'єкти в E_n

Будемо використовувати загальноприйняті позначення:

- $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots \in E_n$ — вектори (точки) в n -вимірному евклідовому просторі;
- $\mathbf{x}_k = \{x_1^{(k)}; x_2^{(k)}; \dots; x_n^{(k)}\} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})^T$ — координати вектора (точки) \mathbf{x}_k ;

- $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_{i=1}^n x_i^{(1)} x_i^{(2)}$ — скалярний добуток векторів \mathbf{x}_1 та \mathbf{x}_2 ;
- $\|\mathbf{x}_k\| = \sqrt{(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k)}$ — евклідова норма вектора \mathbf{x}_k ;
- $\varphi = \arccos \frac{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\|\mathbf{x}_1\| \cdot \|\mathbf{x}_2\|}$ — кут між векторами \mathbf{x}_1 та \mathbf{x}_2 ;
- $\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|$ — відстань між точками \mathbf{x}_1 та \mathbf{x}_2 .

Означення 1.3. Площина в E_n , що проходить через точку \mathbf{x}_0 та має нормальний вектор $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ — це множина точок $\mathbf{x} \in E_n$, що задовольняють умові:

$$(\mathbf{n}, (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) = 0. \quad \square \quad (1.3)$$

Позначимо координати нормального вектора $\mathbf{n} = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$, координати вектора $\mathbf{x} = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$, а скалярний добуток $(\mathbf{n}, \mathbf{x}_0) = b$. Тоді бачимо, що площина в E_n — це лінійне алгебраїчне рівняння:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b. \quad (1.4)$$

Якщо $b = 0$, то рівняння буде однорідним, а якщо $b \neq 0$, то неоднорідним. Точки по один бік від площини (1.3) задовольняють такий лінійній нерівності

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n > b, \quad (1.5)$$

а по інший — протилежній. Щоб з'ясувати, якій саме нерівності задовольняє та чи інша точка \mathbf{x} , треба перевірити кут між нормальним вектором \mathbf{n} та вектором $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Якщо цей кут гострий, то має місце нерівність (1.5), а якщо тупий — то протилежна.

Означення 1.4. Пряма в E_n , що проходить через точку \mathbf{x}_0 та має напрямний вектор $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ — це множина точок $\mathbf{x} \in E_n$, що задовольняють умові:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}t + \mathbf{x}_0; \quad t \in \mathbb{R}. \quad \square \quad (1.6)$$

Рівняння (1.4) — параметричне. Пряма, що проходить через дві точки \mathbf{x}_1 та \mathbf{x}_2 , може бути задана так:

$$\mathbf{x} = (1 - t) \mathbf{x}_1 + t \mathbf{x}_2; \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

Значенню параметра $t = 0$ відповідає точка \mathbf{x}_1 , а значенню $t = 1$ — точка \mathbf{x}_2 .

Означення 1.5. Відрізок $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ в E_n — це множина точок $\mathbf{x} \in E_n$, що задовольняють умові:

$$\mathbf{x} = (1 - t) \mathbf{x}_1 + t \mathbf{x}_2; \quad t \in [0; 1]; \quad (1.8)$$

або:

$$\mathbf{x} = \theta_1 \mathbf{x}_1 + \theta_2 \mathbf{x}_2; \quad \theta_1 \geq 0; \theta_2 \geq 0; \theta_1 + \theta_2 = 1. \quad \square \quad (1.9)$$

Точки відрізка також називають *внутрішньою лінійною комбінацією* точок \mathbf{x}_1 та \mathbf{x}_2 .

Означення 1.6. Трикутник $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3]$ в E_n — це множина точок $\mathbf{x} \in E_n$, що задовольняють умові:

$$\mathbf{x} = \theta_1 \mathbf{x}_1 + \theta_2 \mathbf{x}_2 + \theta_3 \mathbf{x}_3; \quad \forall \theta_k \geq 0; \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1. \quad \square \quad (1.10)$$

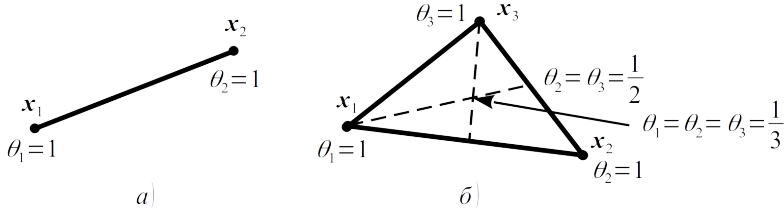


Рис. 1.1. Відрізок (а) і трикутник (б) у E_n

На рис. 1.1 показані відрізок (а) та трикутник (б) і значення θ_k для деяких точок. У трикутнику штрихові лінії — це медіани. Трикутник є сенс розглядати в E_n , коли $n \geq 2$ і вектори $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ та $\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1$ лінійно-незалежні. В протилежному випадку він вироджується у відрізок.

Означення 1.7. Тетраедр $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4]$ в E_n — це множина точок $\mathbf{x} \in E_n$, що задовольняють умові:

$$\mathbf{x} = \theta_1 \mathbf{x}_1 + \theta_2 \mathbf{x}_2 + \theta_3 \mathbf{x}_3 + \theta_4 \mathbf{x}_4; \quad \forall \theta_k \geq 0; \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 1. \quad \square \quad (1.11)$$

Тетраедр є сенс розглядати в E_n , коли $n \geq 3$ і вектори $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1$ та $\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1$ лінійно-незалежні.

Можна також розглядати тетраедри більших розмірностей. У E_n можна побудувати внутрішню лінійну комбінацію точок кількістю до $n+1$ включно.

1.4. Опуклі області та функції

Користуємося загальноприйнятими позначеннями:

- круг з центром в точці \mathbf{x}_0 та радіусом R — множина точок \mathbf{x} : $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < R$; позначається $C_R(\mathbf{x}_0)$;
- ε -окіл точки \mathbf{x}_0 — круг $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$; позначається $C_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$;
- область — множина точок $\mathbf{x} \in E_n$, що задовольняють умовам відкритості та зв'язності. Як правило, області задаються строгими нерівностями. Зокрема, круг — це область;
- відкритість області D : якщо $\mathbf{x}_0 \in D$, то існує якийсь ε -окіл \mathbf{x}_0 , може, дуже малий, такий, що всі його точки теж належать області D ;
- зв'язність області D : для двох будь-яких точок $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$ існує неперервна лінія (не обов'язково пряма), всі точки якої знаходяться в D ;
- гранична точка області D — це така точка, яка сама не належить D , але в будь-якому її ε -околі, як завгодно малому, є точки області D ;
- замкнена область — область та всі її граничні точки. Як правило, замкнена область задається нестрогими нерівностями.

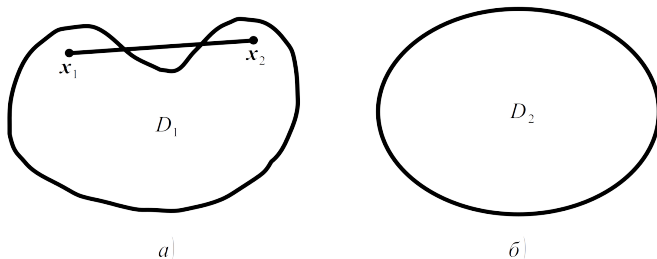


Рис. 1.2. Не опукла (а) та опукла (б) області

Далі ми будемо розглядати замкнені області, ніде це окремо не оговорюючи.

Означення 1.8. Область D називається *опуклою*, якщо $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$: $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \in D$. \square

На рис. 1.2 показані не опукла (а) та опукла (б) області. В не опуклій області існує хоча б одна пара точок $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ така, що не всі точки відрізка $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \in D$.

Розглянемо деякі приклади опуклих областей.

Приклад 1.5. Довести, що множина точок площини (1.3) або, що те ж саме, множина розв'язків лінійного алгебраїчного рівняння (1.4) є опуклою областю.

Розв'язання. Нехай \mathbf{x}_1 та \mathbf{x}_2 — два якісь розв'язки (1.4): $(\mathbf{n}, \mathbf{x}_1) = b$ та $(\mathbf{n}, \mathbf{x}_2) = b$. Візьмемо будь-яку точку \mathbf{x} на відрізку $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$: $\mathbf{x} = \theta_1 \mathbf{x}_1 + \theta_2 \mathbf{x}_2$, де $\theta_1 \geq 0; \theta_2 \geq 0; \theta_1 + \theta_2 = 1$.

Перевіряємо: $(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = (\mathbf{n}, (\theta_1 \mathbf{x}_1 + \theta_2 \mathbf{x}_2)) = \theta_1 (\mathbf{n}, \mathbf{x}_1) + \theta_2 (\mathbf{n}, \mathbf{x}_2) = \theta_1 b + \theta_2 b = b$. \square

Приклад 1.6. Довести, що множина точок по один бік від площини (1.5) або, що те ж саме, множина розв'язків лінійної алгебраїчної нерівності є опуклою областю.

Розв'язання. Ми розглядаємо замкнені області, тому всі нерівності тут нестрогі. Нехай \mathbf{x}_1 та \mathbf{x}_2 — два якісь розв'язки (1.5): $(\mathbf{n}, \mathbf{x}_1) \geq b$ та $(\mathbf{n}, \mathbf{x}_2) \geq b$. Візьмемо будь-яку точку \mathbf{x} на відрізку $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$: $\mathbf{x} = \theta_1 \mathbf{x}_1 + \theta_2 \mathbf{x}_2$, де $\theta_1 \geq 0; \theta_2 \geq 0; \theta_1 + \theta_2 = 1$.

Перевіряємо: $(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = (\mathbf{n}, (\theta_1 \mathbf{x}_1 + \theta_2 \mathbf{x}_2)) = \theta_1 (\mathbf{n}, \mathbf{x}_1) + \theta_2 (\mathbf{n}, \mathbf{x}_2) \geq \theta_1 b + \theta_2 b = b$. Знак нерівності зберігається тому, що $\theta_1 \geq 0; \theta_2 \geq 0$. \square

Доведіть самостійно, що опуклими областями є також:

- множина точок прямої (1.6);
- множина точок відрізка (1.9);
- множина точок трикутника (1.10);
- множина точок тетраедра (1.11);
- множина точок багатомірного тетраедра.

Теорема 1.3. Перетин опуклих областей є опуклою областю. \square

Доведення. Нехай D_1 та D_2 — опуклі області, а $D = D_1 \cap D_2$ — їхній перетин. Візьмемо дві будь-які точки $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$. Оскільки $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$, то $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D_1$ та $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D_2$. Далі візьмемо будь-яку точку \mathbf{x} на відрізку $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$. Області D_1 та D_2 опуклі, тому $\mathbf{x} \in D_1$ та $\mathbf{x} \in D_2$. Звідсіля слідує, що $\mathbf{x} \in D$. \square

Зауваження. Об'єднання опуклих областей може й не бути опуклою областю, як показано на рис. 1.3. Але перетин — опукла область.

Наслідок 1.1. Множина розв'язків СЛАР (1.1) є опуклою областю. \square

Наслідок 1.2. Множина розв'язків системи лінійних алгебраїчних нерівностей

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \tag{1.12}$$

є опуклою областю. \square

У формулі (1.12) вважається, що нерівності виконуються за всіма координатами.

Пригадаємо тепер поняття опуклої функції. Графік опуклої (вгору) функції однієї змінної на всьому відрізку опуклості проходить над хордою

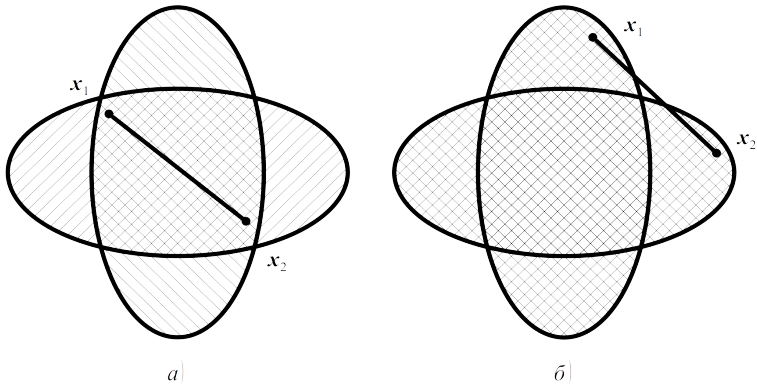


Рис. 1.3. Перетин опуклих областей є опуклою областю (а), а об'єднання — не обов'язково (б)

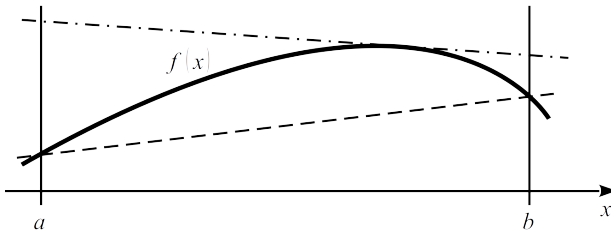


Рис. 1.4. Графік опуклої вгору функції проходить над хордою (штрихова лінія) та під дотичною (штрих-пунктирна)

та під дотичною, як показано на рис. 1.4. Для функції кількох змінних $f(\mathbf{x})$ зручніше дати означення через хорду.

Означення 1.9. Нехай функція $f(\mathbf{x})$ визначена в деякій області D . Функція $f(\mathbf{x})$ називається *опуклою вгору* в області D , якщо $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$ та для будь-якої внутрішньої точки відрізка $\mathbf{x} \in (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, якщо ця точка $\mathbf{x} \in D$, має місце нерівність:

$$f(\theta_1 \mathbf{x}_1 + \theta_2 \mathbf{x}_2) > \theta_1 f(\mathbf{x}_1) + \theta_2 f(\mathbf{x}_2); \quad (1.13)$$

$$\theta_1 > 0; \theta_2 > 0; \theta_1 + \theta_2 = 1. \quad \square$$

Для опуклої донизу функції буде мати місце протилежна нерівність.

Уточнимо поняття локального екстремуму функції. Будемо вважати, що локальний екстремум може досягатися не тільки у внутрішній точці області визначення D , але й на її границі. Відповідне означення є таким.

Означення 1.10. Нехай функція $f(\mathbf{x})$ визначена в деякій області D . Точка $\mathbf{x}_0 \in D$ називається *точкою локального максимуму* функції $f(\mathbf{x})$, якщо $\exists C_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ такий, що $\forall \mathbf{x} \in (D \cap C_\varepsilon(\mathbf{x}_0))$: $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0)$. \square

Для локального мінімуму остання нерівність буде протилежною.

Теорема 1.4. Основна теорема опуклого аналізу. Якщо функція $f(\mathbf{x})$ є опуклою вгору в опуклій області D , то її локальний максимум \mathbf{x}_0 в цій області буде глобальним. \square

Доведення будемо від протилежного. Припустимо, що в області D є інша точка \mathbf{x}_1 , в якій $f(\mathbf{x}_1) > f(\mathbf{x}_0)$. Область D опукла, тому всі точки відрізка $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0]$ знаходяться в області D . Функція $f(\mathbf{x})$ опукла, тому за (1.13) маємо, що $\forall \mathbf{x} \in (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0)$:

$$f(\mathbf{x}) = f(\theta_1 \mathbf{x}_1 + \theta_2 \mathbf{x}_0) > \theta_1 f(\mathbf{x}_1) + \theta_2 f(\mathbf{x}_0) > \theta_1 f(\mathbf{x}_0) + \theta_2 f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0).$$

З іншого боку, в точці \mathbf{x}_0 ми маємо локальний максимум, тобто $\exists C_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ такий, що $\forall \mathbf{x} \in (D \cap C_\varepsilon(\mathbf{x}_0))$: $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0)$. В цю область $(D \cap C_\varepsilon(\mathbf{x}_0))$ напевно потрапляють і деякі внутрішні точки нашого відрізка $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0)$.

Тобто з одного боку в усіх внутрішніх точках відрізка $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0)$ повинно виконуватися $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0)$, а з іншого боку, в деяких точках повинно бути $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0)$. Це протиріччя й доводить теорему. \square

Наслідок 1.3. Для опуклої донизу функції в опуклій області її локальний мінімум буде глобальним. \square

1.5. Екстремум функції кількох змінних

В цьому підрозділі та наступних розглядаємо функції, диференційовні потрібну кількість разів.

Теорема 1.5. Необхідна умова екстремуму. Якщо функція $f(\mathbf{x})$ є диференційовною в точці \mathbf{x}_0 локального екстремуму, і ця точка є внутрішньою точкою області D , то в ній усі частинні похідні дорівнюють нулю:

$$\text{grad} f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}. \quad (1.14)$$

Розв'язавши цю систему з n рівнянь (в загальному випадку нелінійних), знайдемо точки, які називаються стаціонарними. Далі перевіримо наявність чи відсутність екстремуму в цих точках.

Теорема 1.6. Достатня умова екстремуму. Якщо в стаціонарній точці \mathbf{x}_0 матриця других частинних похідних (гессіан) $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$ є додатно-визначеною, то в точці \mathbf{x}_0 досягається локальний мінімум. Якщо $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$ є від'ємно-визначеною, то в \mathbf{x}_0 досягається локальний максимум. Якщо $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$ є знакозмінною, то в \mathbf{x}_0 немає екстремуму. Якщо $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$ є напів-визначеною, потрібні додаткові дослідження за похідними вищих порядків. \square

Доведення цих теорем розглядається в курсі математичного аналізу.

1.6. Метод невизначених множників Лагранжа

Нехай на n змінних (координат вектора \mathbf{x}) накладені l обмежень-рівностей ($l < n$). Тоді ми маємо задачу на умовний екстремум:

$$z = f(\mathbf{x}) \rightarrow \text{extr}; \quad \begin{cases} \varphi_1(\mathbf{x}) = 0; \\ \varphi_2(\mathbf{x}) = 0; \\ \dots \\ \varphi_l(\mathbf{x}) = 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Для її розв'язання можна спробувати розв'язати систему рівнянь-обмежень відносно якихось l змінних, тобто виразити їх через інші $n - l$ змінних, і підставити ці вирази в цільову функцію z . Тим самим ми отримаємо функцію $n - l$ змінних, яку досліджуємо на екстремум.

Інший спосіб — це метод невизначених множників Лагранжа: замість функції $n - l$ змінних ми створюємо функцію $n + l$ змінних (функцію Лагранжа) та досліджуємо її на звичайний екстремум:

$$L(\mathbf{x}, v_1, v_2, \dots, v_l) = f(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^l v_k \varphi_k(\mathbf{x}) \rightarrow \text{extr}. \quad (1.16)$$

Числа v_k називаються невизначеними множниками Лагранжа.

1.7. Метод штрафних функцій

Якщо на n змінних у функції $f(\mathbf{x})$ накладено m обмежень-нерівностей (їх може бути й більше, ніж змінних), то маємо задачу на знаходження екстремуму функції в області:

$$z = f(\mathbf{x}) \rightarrow \min; \quad \begin{cases} \varphi_1(\mathbf{x}) \geq 0; \\ \varphi_2(\mathbf{x}) \geq 0; \\ \dots \\ \varphi_m(\mathbf{x}) \geq 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

Для визначеності ми записали її як задачу мінімізації, тому що для її розв'язання можна використовувати метод штрафних функцій у такій формі:

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^m u_k \varphi_k(\mathbf{x}) \rightarrow \min; \quad u_k \begin{cases} = 0; & \varphi_k(\mathbf{x}) \geq 0; \\ > 0; & \varphi_k(\mathbf{x}) < 0. \end{cases} \quad (1.18)$$

Числа u_k називаються штрафними коефіцієнтами.

1.8. Умови Каруша-Куна-Такера

Ці умови поєднують метод невизначених множників Лагранжа (1.15–1.16) та метод штрафних функцій (1.17–1.18). Нехай на функцію n змінних $f(\mathbf{x})$ накладено m обмежень-нерівностей та l обмежень-рівностей ($l < n$):

$$\begin{cases} z = f(\mathbf{x}) \rightarrow \min; \\ \begin{cases} g_j(\mathbf{x}) \geq 0; \\ j = \overline{1, m}; \end{cases} \\ \begin{cases} h_k(\mathbf{x}) = 0; \\ k = \overline{1, l}; \quad l < n. \end{cases} \end{cases} \quad (1.19)$$

Тоді задача зводиться до дослідження на екстремум функції $n + l$ змінних:

$$L(\mathbf{x}, v_1, v_2, \dots, v_l) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^m u_j g_j(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^l v_k h_k(\mathbf{x}) \rightarrow \min \quad (1.20)$$

при додаткових умовах:

$$\begin{cases} u_j \geq 0; \\ j = \overline{1, m}; \end{cases} \quad \begin{cases} g_j(\mathbf{x}) \geq 0; \\ j = \overline{1, m}; \end{cases} \quad \begin{cases} u_j g_j(\mathbf{x}) = 0; \\ j = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (1.21)$$

Додаткові умови (1.21) реалізують метод штрафних функцій для обмежень-нерівностей.

Приклад 1.7. За допомогою умов Каруша-Куна-Такера розв'язати задачу:

$$\begin{cases} z = x_1^2 - x_2 \rightarrow \min; \\ x_1 - 1 \geq 0; \\ 26 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0; \\ x_1 + x_2 - 6 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо функцію $n = 2$ змінних, на які накладені $m = 2$ обмеження-нерівності та $l = 1$ обмеження-рівність. Створюємо функцію Лагранжа (1.20):

$$L(x_1, x_2, v_1) = x_1^2 - x_2 - u_1(x_1 - 1) - u_2(26 - x_1^2 - x_2^2) - v_1(x_1 + x_2 - 6) \rightarrow \min.$$

Знаходимо частинні похідні від неї за змінними x_1, x_2, v_1 , дорівнюємо їх до нуля та доповнюємо умовами (1.21):

$$\begin{cases} L_{x_1} = 2x_1 - u_1 + 2u_2x_1 - v_1 = 0; \\ L_{x_2} = -1 + 2u_2x_2 - v_1 = 0; \\ L_{v_1} = 6 - x_1 - x_2 = 0; \\ u_1(x_1 - 1) = 0; \quad u_1 \geq 0; \quad x_1 - 1 \geq 0; \\ u_2(26 - x_1^2 - x_2^2) = 0; \quad u_2 \geq 0; \quad 26 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0. \end{cases}$$

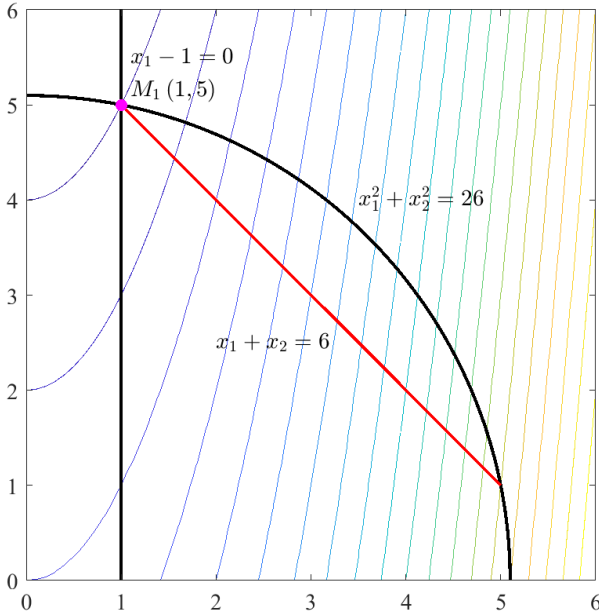


Рис. 1.5. Область розв'язку в прикладі 1.7 та лінії рівня цільової функції

Розв'язуємо отриману систему нелінійних рівнянь з додатковими нерівностями. Почнемо з двох останніх. Якщо взяти в четвертому рівнянні $u_1 = 0$, а в п'ятому $26 - x_1^2 - x_2^2 = 0$, то третє та п'яте рівняння дають:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6; \\ x_1^2 + x_2^2 = 26. \end{cases}$$

У цієї системи є два розв'язки: $M_1(1, 5)$ та $M_2(5, 1)$. Перевіряємо їх. Підставляємо $M_1(1, 5)$ та $u_1 = 0$ у перші два рівняння:

$$\begin{cases} 2 + 2u_2 - v_1 = 0; \\ -1 + 10u_2 - v_1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи: $u_2 = \frac{3}{8} > 0$; $v_1 = \frac{11}{4}$; цей розв'язок підходить.

Так само перевіряємо $M_2(5, 1)$:

$$\begin{cases} 10 + 10u_2 - v_1 = 0; \\ -1 + 2u_2 - v_1 = 0. \end{cases}$$

З цієї системи маємо $u_2 = -\frac{11}{8} < 0$, що не підходить.

Другий варіант розв'язання четвертого та п'ятого рівнянь: $x_1 = 1$; $u_2 = 0$. З третього рівняння маємо $x_2 = 5$, і перевіряємо перше та друге рівняння:

$$\begin{cases} 2 - u_1 - v_1 = 0; \\ -1 - v_1 = 0. \end{cases}$$

Тут $v_1 = -1$; $u_1 = 3$; що підходить (ця точка вже була — це M_1).

Третій варіант розв'язання четвертого та п'ятого рівнянь: $u_1 = 0$; $u_2 = 0$. Перші три рівняння дають:

$$\begin{cases} 2x_1 - v_1 = 0; \\ -1 - v_1 = 0; \\ 6 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок: $v_1 = -1$; $x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_1 - 1 = -\frac{3}{2} < 0$ — не підходить.

І, нарешті, четвертий варіант розв'язання двох останніх рівнянь: $x_1 - 1 = 0$; $26 - x_1^2 - x_2^2 = 0$. Тут $x_1 = 1$; $x_2 = \pm 5$. Першу з цих точок $M_1(1, 5)$ ми вже двічі досліджували — вона підходить. А друга $M_3(1, -5)$ не задовольняє третьому рівнянню.

Отже, точка мінімуму — це $M_1(1, 5)$; $z_{\min} = -4$. Ця точка показана на рис. 1.5. Область розв'язку — відрізок M_1M_2 . \square

1.9. Запитання для перевірки

1. В чому полягає метод Жордана-Гауса?
2. Як визначається кількість базисних і вільних змінних у сумісній СЛАР?
3. Яка структура загального розв'язку сумісної невизначеної СЛАР?
4. Як проводиться операція однократного заміщення базису в отриманому розв'язку СЛАР?
5. Як визначається площина в E_n ?
6. Як визначається пряма в E_n ?
7. Як визначається відрізок в E_n ?
8. Як визначається трикутник в E_n ?
9. Як визначається тетраедр в E_n ?
10. Яка область в E_n називається опуклою?
11. Чи утворює об'єднання опуклих областей в E_n опуклу область?
12. Чи утворює перетин опуклих областей в E_n опуклу область?
13. Яка функція в E_n називається опуклою вгору? донизу?
14. Як формулюється та доводиться основна теорема опуклого аналізу?
15. Як формулюються необхідні та достатні умови екстремуму функції кількох змінних?
16. В чому полягає метод невизначених множників Лагранжа?
17. В чому полягає метод штрафних функцій?
18. Як формулюються умови Каруша-Куна-Такера?

2. Постановка задачі лінійного програмування

У цьому розділі наводяться приклади задач лінійного програмування, дається постановка цієї задачі. Розглядаються різні форми запису задач лінійного програмування. Описується графічний метод розв'язання.

2.1. Приклади задач лінійного програмування

Розглянемо постановки деяких задач лінійного програмування. Поки що це тільки математичні постановки, а не розв'язання.

Приклад 2.1. Планування випуску продукції. Завод металічних виробів може випускати два типи продукції (наприклад, пательні та вафельниці). Прибуток від випуску одиниці продукції першого типу складає 34 умовні грошові одиниці, а від випуску одиниці продукції другого типу 40 одиниць. Для випуску продукції потрібні ресурси трьох типів (наприклад, чавун, сталь і години роботи устаткування), кількість яких обмежена. Потреби кожного ресурсу для випуску одиниці кожного продукту та загальна кількість ресурсів в умовних ресурсних одиницях наведені в табл. 2.1.

Табл. 2.1. Потреби в ресурсах для випуску продукції та обмеження на них

ресурс \ продукт	пательні	вафельниці	обмеження
чавун	10	30	1650
сталь	10	20	1200
устаткування	23	18	2060

За попередніми замовленнями треба випустити не менше ніж 20 пательнь та не менше ніж 15 вафельниць. Треба так спланувати випуск продукції, щоб отримати максимальний прибуток.

Математична постановка. Позначимо кількість пательнь, яку треба випустити, через x_1 , а кількість вафельниць через x_2 . Загальний прибуток, який треба максимізувати, буде тоді виражатися формулою: $z = 34x_1 + 40x_2 \rightarrow \max$. Обмеження на використання ресурсів записуються в вигляді системи нерівностей:

$$\begin{cases} 10x_1 + 30x_2 \leq 1650; \\ 10x_1 + 20x_2 \leq 1200; \\ 23x_1 + 18x_2 \leq 2060. \end{cases}$$

Є також обмеження знизу на змінні: $x_1 \geq 20; x_2 \geq 15$, і умови цілочисельності змінних x_1, x_2 . Отже, маємо таку постановку задачі:

$$z = 34x_1 + 40x_2 \rightarrow \max; \quad \begin{cases} 10x_1 + 30x_2 \leq 1650; \\ 10x_1 + 20x_2 \leq 1200; \\ 23x_1 + 18x_2 \leq 2060; \\ x_1 \geq 20; \\ x_2 \geq 15; \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N}^0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Ми бачимо лінійну цільову функцію, лінійні обмеження-нерівності та умови цілочисельності. \square

Приклад 2.2. Задача логістики. На двох складах є відповідно $a_1 = 6$ та $a_2 = 4$ тони продукції, яку треба розвезти в два магазини. Потреби магазинів складають відповідно $b_1 = 3$ та $b_2 = 7$ тон. Вартість перевезення однієї тони з кожного складу в кожен магазин наведена в табл. 2.2.

Табл. 2.2. Вартість перевезення товару
(в умовних грошових одиницях)

$a_i \backslash b_j$	3	7
6	80	30
4	60	90

Треба розвезти весь товар (всі 10 тон) з найменшими витратами.

Математична постановка. Позначимо через x_{ij} кількість товару, перевезеного з i -го складу до j -го магазину. Ці змінні невід'ємні, але можуть бути й дрібними. Цільова функція, яку треба мінімізувати, має такий вигляд: $z = 80x_{11} + 30x_{12} + 60x_{21} + 90x_{22} \rightarrow \min$.

З кожного складу треба вивезти весь товар: $x_{11} + x_{12} = 6; x_{21} + x_{22} = 4$. І потреби кожного магазину треба задовольнити в повному обсязі: $x_{11} + x_{21} = 3; x_{12} + x_{22} = 7$.

Маємо таку задачу:

$$z = 80x_{11} + 30x_{12} + 60x_{21} + 90x_{22} \rightarrow \min; \quad \begin{cases} x_{11} + x_{12} = 6; \\ x_{21} + x_{22} = 4; \\ x_{11} + x_{21} = 3; \\ x_{12} + x_{22} = 7; \\ \forall x_{ij} \geq 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Отримали лінійну цільову функцію, лінійні обмеження-рівності та лінійні обмеження-нерівності. \square

Приклад 2.3. Задача про раціон харчування. До складу раціону годування дитини входять п'ять продуктів — суміші "Малюк", "Здоров'як", "Силач", "Nutrilon" та "Mamex", що містять вітаміни А, В, С, D. Вміст вітамінів (в умовних одиницях на 100 г) відповідного продукту, мінімальні норми їхнього споживання, а також гранично припустимі кількості сумішей для дитини в добу наведені в табл. 2.3.

Табл. 2.3. Вміст вітамінів, норми споживання та ціна сумішей

суміші \ вітаміни	А	В	С	D	норми споживання сумішей, г/добу	ціна за 100 г, гр.
Малюк	10	3.6	1.2	120	240	20
Здоров'як	24	2.5	0.8	160	400	15
Силач	36	2	0.6	180	320	30
Nutrilon	34	4.2	1.4	220	220	40
Mamex	40	3.8	0.9	200	200	40
норми споживання вітамінів	200	24	8	800		

Треба визначити оптимальний раціон годування дитини за умовою мінімальної вартості харчування. Вважається, що в інших продуктах вітамінів немає.

Математична постановка. Позначимо через x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 кількість тієї чи іншої суміші (у порціях по 100 грам) у щоденному раціоні. Ці величини невід'ємні, можуть бути дрібними, але не можуть перевищувати норми споживання відповідних сумішей:

$$0 \leq x_1 \leq 2.4; 0 \leq x_2 \leq 4; 0 \leq x_3 \leq 3.2; 0 \leq x_4 \leq 2.2; 0 \leq x_5 \leq 2.$$

Цільова функція, що мінімізується — загальна вартість раціону:
 $z = 20x_1 + 15x_2 + 30x_3 + 40x_4 + 40x_5 \rightarrow \min$.

Щоденний раціон повинен забезпечувати потреби в усіх вітамінах:

$$10x_1 + 24x_2 + 36x_3 + 34x_4 + 40x_5 \geq 200;$$

$$3.6x_1 + 2.5x_2 + 2x_3 + 4.2x_4 + 3.8x_5 \geq 24;$$

$$1.2x_1 + 0.8x_2 + 0.6x_3 + 1.4x_4 + 0.9x_5 \geq 8;$$

$$120x_1 + 160x_2 + 180x_3 + 220x_4 + 200x_5 \geq 800.$$

Отримали таку задачу:

$$\begin{cases}
z = 20x_1 + 15x_2 + 30x_3 + 40x_4 + 40x_5 \rightarrow \min; \\
10x_1 + 24x_2 + 36x_3 + 34x_4 + 40x_5 \geq 200; \\
3.6x_1 + 2.5x_2 + 2x_3 + 4.2x_4 + 3.8x_5 \geq 24; \\
1.2x_1 + 0.8x_2 + 0.6x_3 + 1.4x_4 + 0.9x_5 \geq 8; \\
120x_1 + 160x_2 + 180x_3 + 220x_4 + 200x_5 \geq 800; \\
0 \leq x_1 \leq 2.4; \\
0 \leq x_2 \leq 4; \\
0 \leq x_3 \leq 3.2; \\
0 \leq x_4 \leq 2.2; \\
0 \leq x_5 \leq 2.
\end{cases} \quad (2.3)$$

Знову, як і в попередніх прикладах, маємо лінійну цільову функцію та лінійні обмеження-нерівності. \square

Приклад 2.4. Розподіл працівників на роботи. В задачі про призначення (або розподіл) є m працівників, n робіт, і відома продуктивність $c_{ij} \geq 0$ кожного i -го працівника на кожній j -й роботі, тобто задана матриця продуктивностей розміром $m \times n$:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Працівників треба розставити на роботи так, щоб загальна продуктивність була максимальною. При цьому на кожную роботу треба призначити не більше одного працівника, і на кожного працівника повинно припадати не більше однієї роботи.

Математична постановка. Введемо до розгляду mn бінарних змінних x_{ij} :

- $x_{ij} = 1$, якщо i -й працівник призначений на j -ю роботу;
- $x_{ij} = 0$, якщо не призначений.

Тоді обмеження на призначення не більше одного працівника на одну роботу і не більше однієї роботи на одного працівника будуть виглядати так:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1; \\ i = \overline{1, m}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq 1; \\ j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (2.5)$$

А цільова функція буде такою:

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \max. \quad (2.6)$$

Задача (2.6, 2.5) доповнюється обмеженнями на змінні:

$$\begin{cases} \forall i, j: 0 \leq x_{ij} \leq 1; \\ \forall i, j: x_{ij} \in \mathbb{N}^0; \\ i = \overline{1, m}; \\ j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Є лінійна цільова функція, лінійні обмеження-нерівності та умови цілочисельності. \square

2.2. Різні форми запису задачі лінійного програмування

На цьому етапі ми поки що не будемо розглядати умови цілочисельності. Повернемося до них далі, в розділі 6.

Означення 2.1. Задачею лінійного програмування називається задача знаходження екстремуму лінійної функції кількох змінних при лінійних обмеженнях-рівностях та лінійних обмеженнях-нерівностях. \square

Серед обмежень-нерівностей, як правило, виділяють окремо обмеження на невід'ємність змінних. Це так склалося історично: спочатку задачі лінійного програмування формувалися та розв'язувалися для економічних проблем, і змінні там були невід'ємні: кількість продукції, вантажу тощо.

Загальна форма запису задачі лінійного програмування є такою. Треба дослідити на екстремум лінійну функцію n змінних, на які накладені l обмежень-рівностей ($l < n$) та m обмежень-нерівностей. З цих n змінних перші s змінних є невід'ємними, а решта $n - s$ можуть бути довільного знаку:

$$\begin{cases} z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \text{extr}; \\ \left. \begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1s}x_s + a_{1,s+1}x_{s+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2s}x_s + a_{2,s+1}x_{s+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ & \dots \\ & a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \dots + a_{ls}x_s + a_{l,s+1}x_{s+1} + \dots + a_{ln}x_n = b_l; \\ & a_{l+1,1}x_1 + a_{l+1,2}x_2 + \dots + a_{l+1,s}x_s + a_{l+1,s+1}x_{s+1} + \dots + \\ & \quad + a_{l+1,n}x_n \leq b_{l+1}; \\ & a_{l+2,1}x_1 + a_{l+2,2}x_2 + \dots + a_{l+2,s}x_s + a_{l+2,s+1}x_{s+1} + \dots + \\ & \quad + a_{l+2,n}x_n \leq b_{l+2}; \\ & \dots \\ & a_{l+m,1}x_1 + a_{l+m,2}x_2 + \dots + a_{l+m,s}x_s + a_{l+m,s+1}x_{s+1} + \dots + \\ & \quad + a_{l+m,n}x_n \leq b_{l+m}; \\ & x_1, x_2, \dots, x_s \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.8) \end{cases}$$

Обмеження-нерівності тут записані як " \leq ". Якщо є обмеження з нерівностями протилежного знаку, їх треба помножити на -1 . Обмеження переставлені таким чином, щоб спочатку йшли рівності, а потім нерівності. І змінні перенумеровані так, щоб спочатку були невід'ємні, а потім довільні.

У загальній формі запису (2.8) матрицю коефіцієнтів обмежень \mathbf{A} можна розбити на чотири блоки:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

з розмірами:

- \mathbf{A}_{11} : $l \times s$;
- \mathbf{A}_{12} : $l \times (n - s)$;
- \mathbf{A}_{21} : $m \times s$;
- \mathbf{A}_{22} : $m \times (n - s)$.

Крім загальної форми запису, є ще канонічна та стандартна.

У **канонічній формі** запису цільова функція максимізується, всі обмеження є тільки рівностями, і всі змінні невід'ємні:

$$\begin{cases} z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max; \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \dots + a_{ln}x_n = b_l; \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

У **стандартній формі** запису цільова функція може як максимізуватися, так і мінімізуватися, всі обмеження є тільки нерівностями, і всі змінні невід'ємні:

$$\begin{cases} z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \text{extr}; \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m; \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Ці форми запису теж склалися історично і пішли від економічних задач. Ми будемо найчастіше використовувати канонічну форму з максимізацією цільової функції, обмеженнями-рівностями та невід'ємними змінними. В матрично-векторній формі вона записується так:

$$\begin{aligned} z &= (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \rightarrow \max; \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b}; \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Зрозуміло, треба, щоб система рівнянь-обмежень була сумісною та невизначеною.

До канонічної форми завжди можна звести задачу лінійного програмування в загальній та стандартній формах. Порядок зведення такий:

- якщо цільова функція мінімізується, міняємо знак у всіх координат вектора c ;
- якщо є обмеження-нерівність зі знаком " \leq ", то додаємо до лівої частини нову невід'ємну змінну (вона називається балансною); після цього це обмеження можна записати як рівність;
- якщо є обмеження-нерівність зі знаком " \geq ", то віднімаємо від лівої частини балансну змінну;
- якщо якась змінна може бути довільного знаку, представляємо її як різницю двох нових невід'ємних змінних.

Приклад 2.5. Звести до канонічної форми таку задачу лінійного програмування:

$$z = x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow \min;$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 5; \\ x_1 + 2x_3 = 8; \\ -x_1 - 2x_2 \geq 1; \\ x_1, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання. По-перше, цільова функція мінімізується, тому змінюємо в неї знак:

$$-x_1 + x_2 - 3x_3 \rightarrow \max.$$

По-друге, перше обмеження є нерівністю " \leq ", тому додаємо до його лівої частини нову балансну змінну (це буде вже x_4): $2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 5$.

Далі те ж саме робимо з третім обмеженням, тільки тут ми віднімаємо балансну змінну x_5 : $-x_1 - 2x_2 - x_5 = 1$.

І ще у нас змінна x_2 може бути довільного знаку, тому представляємо її як різницю двох невід'ємних змінних: $x_2 = x'_2 - x_6$. Підставляємо цей вираз у цільову функцію та інші обмеження:

$$z = -x_1 + x'_2 - 3x_3 - x_6 \rightarrow \max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x'_2 + 3x_3 + x_4 + x_6 = 5; \\ x_1 + 2x_3 = 8; \\ -x_1 - 2x'_2 - x_5 + 2x_6 = 1; \\ x_1, x'_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0. \end{cases}$$

Отримали задачу лінійного програмування в канонічній формі. \square

2.3. Основні властивості задачі лінійного програмування

Оскільки будь-яку задачу лінійного програмування можна звести до канонічної форми, розглянемо властивості саме такої задачі (2.12).

Означення 2.2. Розв'язок СЛАР $Ax = b$ з невід'ємними координатами $x \geq 0$ називається *допустимим*. \square

Розв'язати задачу лінійного програмування (2.12) — це значить на множині допустимих розв'язків знайти такий, який надає максимального значення цільовій функції: $z = (c, x) \rightarrow \max$.

Властивість 2.1. Область допустимих розв'язків є опуклою.

Доведення. За наслідком 1.1 множина розв'язків СЛАР $Ax = b$ є опуклою. За наслідком 1.2 множина розв'язків системи лінійних нерівностей $x \geq 0$ теж є опуклою. А за теоремою 1.3 перетин опуклих областей є опуклою областю. \square

Властивість 2.2. Глобальні максимум (та мінімум) цільової функції $z = (c, x)$ досягаються на границі області допустимих розв'язків.

Доведення. Лінійна функція $z = (c, x)$ є граничним випадком опуклої вгору (та донизу) функції, тому будь-який її локальний максимум (і мінімум) є глобальним. Але він не може досягатися у внутрішній точці області допустимих розв'язків, тому що тоді це була б стаціонарна точка, в якій $\text{grad}z = 0$. А в нас $\text{grad}z = c \neq 0$, тому стаціонарних точок всередині області допустимих розв'язків немає. Отже, і глобальний максимум, і глобальний мінімум лінійної функції $z = (c, x)$ досягаються на границі області допустимих розв'язків. \square

2.4. Графічний метод

Це один з найпростіших методів розв'язання задачі лінійного програмування. Його зручно застосовувати, коли задача записана в стандартній формі (2.11), і кількість змінних $n = 2$. Порядок розв'язання є таким.

1. Рисуємо систему координат $x_1 O x_2$.
2. На цьому ж рисунку зображаємо прямі, що обмежують нерівності в (2.11).
3. Визначаємо, де знаходиться на рисунку область допустимих розв'язків D . Помічаємо її штрихуванням всередині або зовні.
4. Рисуємо на цьому ж рисунку вектор $\text{grad}z = c$, можна в якомусь масштабі. Він визначає напрям найшвидшого зростання цільової функції z . Рисувати його можна з будь-якої точки, наприклад, з точки O .
5. Перпендикулярно до вектора c рисуємо лінії рівня цільової функції z .
6. Визначаємо, де досягається максимум (або мінімум) z і чому він дорівнює.

Приклад 2.6. Розв'язати графічним методом задачу лінійного програмування:

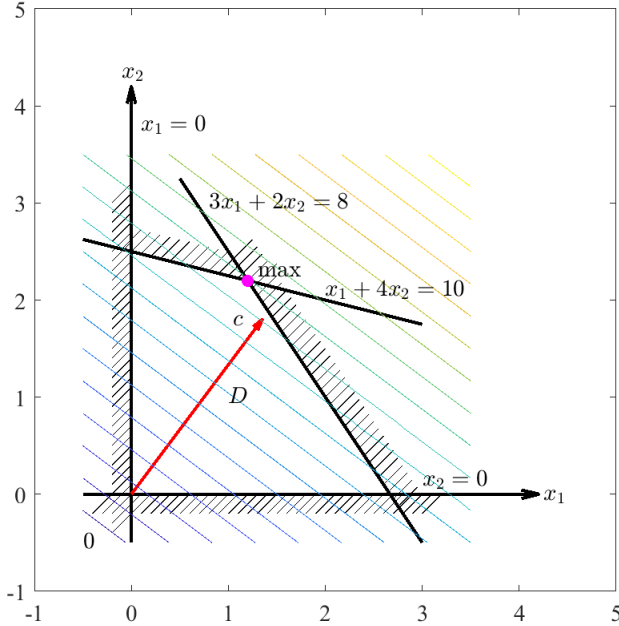


Рис. 2.1. Розв'язання прикладу 2.6

$$z = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 8; \\ x_1 + 4x_2 \leq 10; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Рисуємо на одному рис. 2.1 такі лінії:

- вісь Ox_1 ; її рівняння $x_2 = 0$; нерівність $x_2 \geq 0$ — зверху;
- вісь Ox_2 ; її рівняння $x_1 = 0$; нерівність $x_1 \geq 0$ — праворуч;
- пряму $3x_1 + 2x_2 = 8$; нерівність $3x_1 + 2x_2 \leq 8$ лівіше-нижче неї;
- пряму $x_1 + 4x_2 = 10$; нерівність $x_1 + 4x_2 \leq 10$ лівіше-нижче неї.

Ці чотири прямі обмежують область допустимих розв'язків D . Штрихування тут нарисоване зовні області D .

Далі рисуємо вектор $\mathbf{c} = \{3, 4\}$ у масштабі 1 : 2 (показаний стрілкою). Перпендикулярно до нього рисуємо лінії рівня $z = \text{const}$ (тонкі прямі). Бачимо, що точка максимуму (відмічена кружком) знаходиться на перетині прямих обмежень $3x_1 + 2x_2 = 8$ та $x_1 + 4x_2 = 10$. Ця СЛАР розв'язується усно: точка максимуму $\mathbf{x}_{\max} = \{1.2; 2.2\}$; і $z_{\max} = 12.4$. \square

Графічний метод можна також застосовувати до задач лінійного програмування в канонічній формі (2.12), якщо кількість вільних змінних $f = n - r = 2$. Для цього виключаємо базисні змінні з рівнянь

обмежень $Ax = b$. Базисні змінні невід'ємні — умови невід'ємності дадуть обмеження-нерівності.

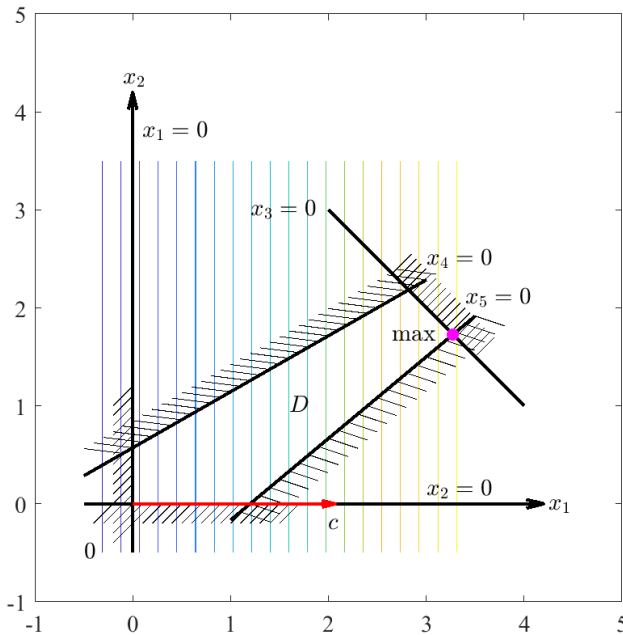


Рис. 2.2. Розв'язання прикладу 2.7

Приклад 2.7. Розв'язати графічним методом задачу лінійного програмування:

$$z = x_1 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5; \\ -4x_1 + 7x_2 + x_4 = 4; \\ 5x_1 - 6x_2 + x_5 = 6; \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Розширена матриця СЛАР обмежень має вигляд:

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ -4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & -6 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right).$$

Ця СЛАР вже розв'язана: $r = r_1 = 3$; $n = 5$; $f = n - r = 2$; вільні змінні x_1, x_2 , базисні x_3, x_4, x_5 . Виражаємо базисні змінні через вільні:

$$\begin{cases} x_3 = 5 - x_1 - x_2 \geq 0; \\ x_4 = 4 + 4x_1 - 7x_2 \geq 0; \\ x_5 = 6 - 5x_1 + 6x_2 \geq 0. \end{cases}$$

У цільову функцію z підставляти x_3, x_4, x_5 немає потреби: вона залежить тільки від вільної змінної x_1 .

Рисуємо на одному рис. 2.2 такі лінії:

- вісь Ox_1 ; її рівняння $x_2 = 0$; нерівність $x_2 \geq 0$ — зверху;
- вісь Ox_2 ; її рівняння $x_1 = 0$; нерівність $x_1 \geq 0$ — праворуч;
- пряму $x_3 = 0$ або $5 - x_1 - x_2 = 0$; нерівність $x_3 \geq 0$ або $5 - x_1 - x_2 \geq 0$ лівіше-нижче неї;
- пряму $x_4 = 0$ або $4 + 4x_1 - 7x_2 = 0$; нерівність $x_4 \geq 0$ або $4 + 4x_1 - 7x_2 \geq 0$ правіше-нижче неї;
- пряму $x_5 = 0$ або $6 - 5x_1 + 6x_2 = 0$; нерівність $x_5 \geq 0$ або $6 - 5x_1 + 6x_2 \geq 0$ лівіше-вище неї.

Ці п'ять прямих обмежують область допустимих розв'язків D . Штрихування тут нарисоване зовні області D .

Далі рисуємо вектор $\mathbf{c} = \{1, 0\}$ у масштабі $2 : 1$ (горизонтальна стрілка). Перпендикулярно до нього рисуємо лінії рівня $z = \text{const}$ (тонкі вертикальні прямі). Бачимо, що точка максимуму (кружок) знаходиться на перетині прямих обмежень $x_3 = 0$ та $x_5 = 0$. Розв'язуємо цю СЛАР методом Жордана-Гауса:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_3 = 0; \\ x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 5; \\ 5x_1 - 6x_2 = 6; \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 5 & -6 & 6 \end{array} \right) e_2 - 5e_1 \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -11 & -19 \end{array} \right) e_2 / (-11) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{19}{11} \end{array} \right) e_1 - e_2 \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{36}{11} \\ 0 & 1 & \frac{19}{11} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Отримали розв'язок: $x_1 = \frac{36}{11}$; $x_2 = \frac{19}{11}$; інші змінні: $x_3 = 0$; $x_4 = 4 + 4x_1 - 7x_2 = 5$; $x_5 = 0$. Отже, точка максимуму $\mathbf{x}_{\max} = \left\{ \frac{36}{11}; \frac{19}{11}; 0; 5; 0 \right\}$; і $z_{\max} = \frac{36}{11}$. \square

2.5. Запитання для перевірки

1. Як формулюється задача лінійного програмування?
2. Які ви знаєте форми запису задачі лінійного програмування?
3. Що таке область допустимих розв'язків?
4. Чому область допустимих розв'язків є опуклою?
5. Де досягаються максимальне та мінімальне значення цільової функції в області допустимих розв'язків? Чому?
6. В чому полягає графічний метод розв'язання задачі лінійного програмування? Для яких задач його можна застосувати?

3. Симплекс-метод

У цьому розділі розглядається найпоширеніший метод розв'язання задачі лінійного програмування: симплекс-метод.

3.1. Теоретичні основи симплекс-методу

Будемо розглядати задачу лінійного програмування в канонічній формі (2.10, 2.12). Згідно з властивістю 2.1 область допустимих розв'язків є опуклою. А в силу лінійності обмежень її границі можуть бути тільки лінійними. Отже, область допустимих розв'язків є опуклим багатовимірним багатогранником (симплексом). Зокрема, в E_2 область D є опуклим багатокутником (див. рис. 2.1, 2.2). У E_3 область допустимих розв'язків є опуклим багатогранником, як показано на рис. 3.1.

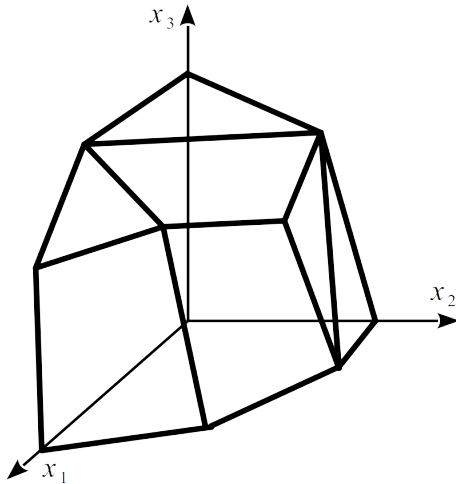


Рис. 3.1. Опуклий багатогранник (симплекс) у E_3

Згідно з властивістю 2.2 глобальний максимум цільової функції досягається на границі області D . Це може бути або кутова точка, або ребро, або грань, або лінійні багатовиди більших розмірностей. Але в усіх випадках серед точок, де досягається глобальний максимум, буде кутова точка (або декілька кутових точок).

Лема 3.1. Якщо глобальний максимум досягається в кількох точках, то він буде досягатися і в усіх точках їхньої внутрішньої лінійної комбінації. \square

Доведення. Нехай $f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_2) = \dots = f(\mathbf{x}_m) = z_{\max}$. Візьмемо будь-яку точку внутрішньої лінійної комбінації:

$\mathbf{x} = \theta_1 \mathbf{x}_1 + \theta_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \theta_m \mathbf{x}_m$; де $\forall \theta_k \geq 0$; $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_m = 1$.

Обчислимо: $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{c}, \mathbf{x}) = (\mathbf{c}, (\theta_1 \mathbf{x}_1 + \theta_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \theta_m \mathbf{x}_m)) =$
 $= \theta_1 (\mathbf{c}, \mathbf{x}_1) + \theta_2 (\mathbf{c}, \mathbf{x}_2) + \dots + \theta_m (\mathbf{c}, \mathbf{x}_m) =$
 $= \theta_1 z_{\max} + \theta_2 z_{\max} + \dots + \theta_m z_{\max} = z_{\max}$. \square

Отже, задача полягає в тому, щоб знайти ту кутову точку області D (або всі, якщо вона не одна), в якій досягається глобальний максимум цільової функції. Цю задачу й розв'язує симплекс-метод. Його назва походить від назви опуклого багатовимірного багатогранника: симплекс.

Означення 3.1. *Симплекс-метод* — це метод пошуку глобального максимуму в задачі лінійного програмування, заснований на переході від однієї кутової точки області допустимих значень D до іншої доти, доки не буде знайдена точка з z_{\max} або не з'ясується, що такої точки немає. \square

Кроки симплекс-методу.

1. Знаходимо якусь кутову точку області допустимих значень D .
2. Перевіряємо, чи досягається в ній z_{\max} . Якщо ні, то йдемо на крок 3.
3. Якщо так, то йдемо на крок 4.
3. Переходимо до сусідньої кутової точки, в якій z збільшується. Йдемо на крок 2.
4. Перевіряємо, чи є інша кутова точка з z_{\max} . Якщо є, знаходимо її та повертаємося на крок 4. Якщо немає — виходимо.

Це — скорочена схема. Треба ще перевіряти, чи не пуста область допустимих розв'язків, чи обмежена вона тощо.

Переходимо до опису основних етапів симплекс-методу.

3.2. Кутові точки — допустимі опорні розв'язки

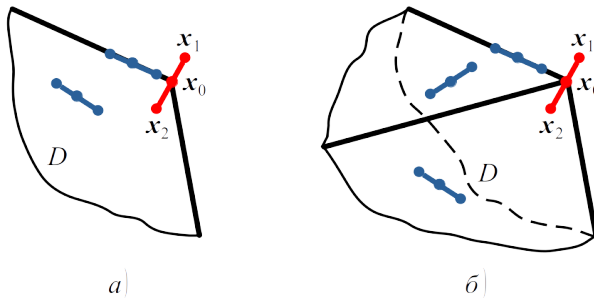


Рис. 3.2. Кутові та не кутові точки в E_2 та E_3

Чим відрізняються кутові точки симплекса D від інших? Подивіться на рис. 3.2. На ньому показані кутові та не кутові точки в E_2 (а) та E_3 (б). Якщо точка \mathbf{x}_0 знаходиться всередині області D , на ребрі, грані або лінійному багатовиді більшої розмірності, то вона є внутрішньою лінійною комбінацією якихось кутових точок. Отже, завжди можна побудувати відрізок $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$, нехай досить малий, для якого точка \mathbf{x}_0 буде його серединою: $\mathbf{x}_0 = \frac{1}{2}\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_2$, і який усіма своїми точками знаходиться в області D . Кілька таких відрізків показані на рисунку. Якщо ж точка \mathbf{x}_0 є кутовою, то, який би малий відрізок $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ з серединою \mathbf{x}_0 ми б не взяли, принаймні одна його половина не буде належати області D . Відповідні відрізки на рис. 3.2 нарисовані в кутових точках.

Означення 3.2. Точка \mathbf{x}_0 називається *кутовою точкою* симплексу D , якщо будь-який відрізок $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$, як завгодно малий, серединою якого є точка \mathbf{x}_0 , не може цілком знаходитися в D : або $\mathbf{x}_1 \notin D$, або $\mathbf{x}_2 \notin D$ разом з відповідною половиною відрізка. \square

З'ясуємо, як знайти якусь кутову точку в задачі (2.10, 2.12). Розв'яжемо СЛАР обмежень-рівностей $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ методом Жордана-Гауса так, щоб в останній розширеній матриці \mathbf{A}_1 елементи останнього стовпчика (тобто праві частини) були невід'ємними: $\forall b_i \geq 0$. Якщо після розв'язання виходить, що $\exists b_i < 0$, можна спробувати обрати інші базисні та вільні змінні. Якщо знову нічого не виходить, і залишаються $\exists b_i < 0$, можна скористатися двохеталним симплекс-методом або методом штучного базису, описаними нижче в підрозділі 3.5.

Отже, нехай нам вдалося розв'язати СЛАР $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ методом Жордана-Гауса так, що $\forall b_i \geq 0$. Відомо, що вільні змінні можуть набувати будь-яких значень. Покладемо всі вільні змінні нулю. Тоді всі базисні змінні будуть дорівнювати правим частинам. У знайденого вектора всі координати невід'ємні: $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, і задовольняють СЛАР $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Отже, знайдена точка є допустимим розв'язком. Він називається допустимим опорним розв'язком.

Означення 3.3. Розв'язок СЛАР $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, у якому $f = n - r$ вільних змінних дорівнюють нулю, а r базисних змінних дорівнюють невід'ємним правим частинам, називається *допустимим опорним розв'язком*. \square

Приклад 3.1. Повернемося до прикладу 2.7. Ми розв'язали СЛАР обмежень (власне, вона відразу була розв'язана), і отримали розширену матрицю з невід'ємними правими частинами:

$$\mathbf{A}_1 = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ -4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & -6 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right).$$

Вільні змінні тут x_1, x_2 , а базисні — x_3, x_4, x_5 . Якщо покласти всі вільні змінні нулю: $x_1 = x_2 = 0$; то отримаємо базисні змінні: $x_3 = 5$;

$x_4 = 4$; $x_5 = 6$. Ці значення невід'ємні, отже знайдений розв'язок $\mathbf{x} = \{0; 0; 5; 3; 6\}$ є допустимим опорним розв'язком. \square

Так ось, виявляється, що допустимі опорні розв'язки і є кутовими точками симплексу D , і навпаки.

Теорема 3.1. Будь-який допустимий опорний розв'язок є кутовою точкою симплексу D . \square

Доведення. Нехай \mathbf{x}_0 — допустимий опорний розв'язок: у ньому f координат нульові, а решта невід'ємні. Перенумеруємо для зручності координати так, щоб спочатку йшли базисні (невід'ємні), а потім вільні (нульові): $\mathbf{x}_0 = \{x_1^{(0)}; x_2^{(0)}; \dots; x_r^{(0)}; 0; 0; \dots; 0\}$.

Доведення будемо від протилежного. Припустимо, що \mathbf{x}_0 — не кутова точка. Тоді повинен існувати відрізок $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$, нехай дуже малий, для якого точка \mathbf{x}_0 є серединою: $\mathbf{x}_0 = \frac{1}{2}\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_2$, і який усіма своїми точками знаходиться в області D .

І у точки \mathbf{x}_1 , і у точки \mathbf{x}_2 всі координати повинні бути невід'ємними (вони ж знаходяться в області D). Зокрема, і останні f координат теж повинні бути невід'ємними. Але рівність $0 = \frac{1}{2}x_k^{(1)} + \frac{1}{2}x_k^{(2)}$ при $x_k^{(1)} \geq 0$ та $x_k^{(2)} \geq 0$ може виконуватися тоді й тільки тоді, коли $x_k^{(1)} = x_k^{(2)} = 0$. Отже всі останні f координат і у точки \mathbf{x}_1 , і у точки \mathbf{x}_2 є нульовими.

Далі, обидві точки: і \mathbf{x}_1 , і \mathbf{x}_2 повинні задовольняти СЛАР $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, у якої ранг матриці дорівнює r . А оскільки f вільних змінних вже визначені (це нулі), то r базисних змінних знаходяться однозначно, і вони будуть такими самими, як і у точки \mathbf{x}_0 . Отже, наше припущення про те, що існують дві різні точки \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 , для яких \mathbf{x}_0 є серединою, і які обидві знаходяться в області D , було хибним. Від протилежного теорема доведена. \square

Теорема 3.2. Зворотна до теореми 3.1. Будь-яка кутова точка симплексу є допустимим опорним розв'язком. \square

Доведення. Кутова точка \mathbf{x}_0 є допустимим розв'язком, тобто $\mathbf{x}_0 \in D$. Отже, всі її координати невід'ємні. Якись із них додатні, якись нульові. Для зручності перенумеруємо координати вектора \mathbf{x}_0 так, щоб спочатку йшли додатні координати, а в кінці — нульові. Якщо нульових координат рівно f , то це й є допустимий опорний розв'язок: вільні координати нульові, а базисні додатні. Якщо нульових координат більше, ніж f , то це теж допустимий опорний розв'язок, у якого не тільки вільні, а й деякі базисні змінні нульові.

Залишилося розглянути випадок, коли серед координат точки \mathbf{x}_0 менше, ніж f нулів, і відповідно, є $k > r$ додатних координат. Всі додатні координати в \mathbf{x}_0 ми для зручності розмістили спочатку, а всі нульові — в кінці. Тому в СЛАР $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ можна залишити тільки k перших стовпів

ців. Ранг матриці A дорівнює r , а невідомих $k > r$, тому ця СЛАР буде мати неєдиний розв'язок. Загальний розв'язок такої СЛАР є сумою загального розв'язку відповідної однорідної СЛАР та частинного розв'язку неоднорідної СЛАР. Частинний розв'язок ми знаємо: це строго додатні координати вектора x_0 . А в загальному розв'язку однорідної СЛАР можна задати настільки малі значення довільних сталих, що й додавання, і віднімання такого загального розв'язку залишить всі додатні координати вектора x_0 додатними. Таким чином, x_0 можна представити як середню точку відрізка, який цілком знаходиться в симплексі D . А така точка не може бути кутовою. \square

Отже, щоб знайти якусь кутову точку симплексу D , треба розв'язати СЛАР $Ax = b$ методом Жордана-Гауса так, щоб в останній розширеній матриці були $\forall b_i \geq 0$. Потім покласти всі вільні змінні нулю, а базисні правим частинам. Отриманий розв'язок буде кутовою точкою симплексу D .

Приклад 3.2. Продовження прикладів 2.7 та 3.1. Допустимий опорний розв'язок $x = \{0; 0; 5; 3; 6\}$ відповідає точці O на рис. 2.2. У цій точці $x_1 = x_2 = 0$, а інші змінні додатні. \square

Приклад 3.3. Розв'язати графічним методом наступну задачу лінійного програмування, а також звести її до канонічного вигляду та знайти якийсь допустимий опорний розв'язок:

$$z = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 35; \\ 2x_1 + x_2 \leq 18; \\ x_1 + x_2 \leq 10; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Графічне розв'язання наведено на рис. 3.3. Далі ми будемо розв'язувати цю задачу симплекс-методом, тому на рисунку позначені й інші точки.

Знайдений глобальний максимум: $x_{\max} = \{5; 5\}$; $z_{\max} = 40$ — це точка $E(5, 5)$ на рис. 3.3.

Щоб звести задачу до канонічного вигляду, додаємо в ліві частини обмежень-нерівностей невід'ємні балансні змінні:

$$z = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 35; \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 18; \\ x_1 + x_2 + x_5 = 10; \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Отримали задачу лінійного програмування в канонічній формі. Знаходимо допустимий опорний розв'язок. Для цього розв'язуємо СЛАР обмежень методом Жордана-Гауса.

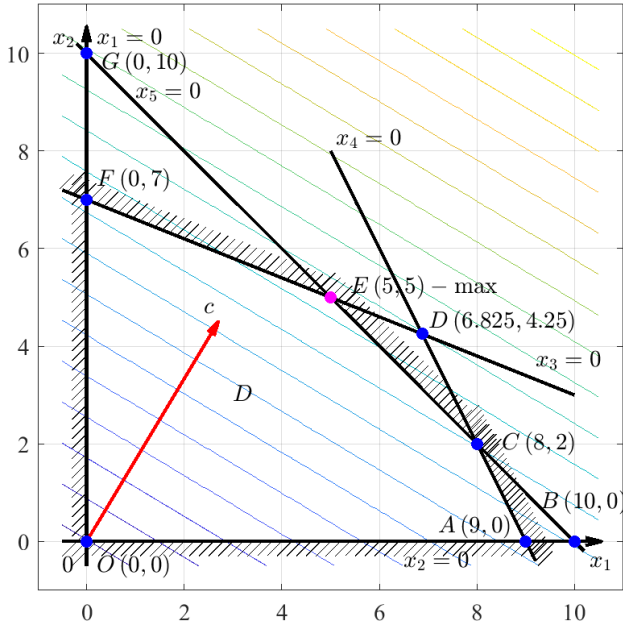


Рис. 3.3. Розв'язання прикладу 3.3

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 35 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 18 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array} \right).$$

СЛАР розв'язана: $r = r_1 = 3$; $n = 5$; $f = n - r = 2$; вільні змінні x_1, x_2 ; базисні — x_3, x_4, x_5 ; і всі праві частини невід'ємні. Для отримання допустимого опорного розв'язку покладемо вільні змінні $x_1 = x_2 = 0$; а базисні тоді будуть дорівнювати правим частинам: $x_3 = 35$; $x_4 = 18$; $x_5 = 10$. Маємо допустимий опорний розв'язок $\mathbf{x} = \{0; 0; 35; 18; 10\}$. На рис. 3.3 йому відповідає точка $O(0, 0)$. Бачимо, що це дійсно кутова точка області допустимих значень D . \square

3.3. Симплексні перетворення

Після того, як знайдений хоч якийсь допустимий опорний розв'язок (кутова точка), треба рухатися від неї до наступної (сусідньої) у бік збільшення цільової функції. Кутові точки — це розв'язки СЛАР $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ з різними наборами базисних та вільних змінних, але з невід'ємними правими частинами. Переходу від одного набору базисних змінних до іншого відповідає заміщення базису. Сусідні кутові точки відрізняються одна від одною лише однією базисною змінною. Отже, перехід до сусідньої кутової

точки — це однократне заміщення базису. При цьому змінні для введення в базис та для виведення з базису треба обирати так, щоб, з одного боку, цільова функція z збільшувалася (або принаймні не зменшувалася), а з іншого боку, щоб ми при цьому залишалися в області допустимих розв'язків D .

Означення 3.4. *Симплексним перетворенням* називається операція однократного заміщення базису, що збільшує (або принаймні не зменшує) значення цільової функції z та залишає нас в області допустимих розв'язків D . \square

Таке симплексне перетворення зручніше за все робити в симплекс-таблиці.

Означення 3.5. *Симплекс-таблицею* називається розширена матриця A_1 розв'язання СЛАР $Ax = b$ методом Жордана-Гауса з додатковими рядками та стовпцями. \square

На прикладі 3.3 розглянемо, як будується симплекс-таблиця. Після розв'язання СЛАР $Ax = b$ у нас є розширена матриця A_1 . Додамо зверху до неї два рядки (табл. 3.1). У другому запишемо номери змінних (можливо, ми змінювали їхню нумерацію), а в першому — коефіцієнти цільової функції z при них, тобто числа c_1, c_2, \dots, c_n у потрібному порядку.

Табл. 3.1. Початок заповнення першої симплекс-таблиці в прикладі 3.3

3	5	0	0	0	b_i
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	5	1	0	0	35
2	1	0	1	0	18
1	1	0	0	1	10

В деяких книгах (в основному для економістів) замість нулів залишають порожні комірки, а стовпчик правих частин b_i записують зліва.

Продовжуємо заповнювати симплекс-таблицю (табл. 3.2). Зліва додамо ще два стовпчики. У другому запишемо номери базисних змінних у відповідному рівнянні. В нашому випадку в першому рівнянні базисна змінна x_3 , у другому x_4 і в третьому x_5 . А в найлівішому стовпчику запишемо коефіцієнти цільової функції z при цих базисних змінних. Беремо їх з верхнього рядка. В нашому випадку коефіцієнти при x_3, x_4, x_5 — всі нулі.

Знайдемо значення цільової функції z у цій точці. Це допустимий опорний розв'язок, тому вільні змінні дорівнюють нулю, а базисні — пра-

Табл. 3.2. Перше продовження заповнення першої симплекс-таблиці в прикладі 3.3

c_k		3	5	0	0	0	b_i
c_{B_i}	x_{B_i}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	2	5	1	0	0	35
0	x_4	2	1	0	1	0	18
0	x_5	1	1	0	0	1	10

вим частинам. Праві частини (тобто значення базисних змінних) записані в останньому стовпчику таблиці b_i , а коефіцієнти при базисних змінних — у лівому c_{B_i} . Тому маємо таке правило.

Правило 3.1. Значення цільової функції в симплекс-таблиці дорівнює сумі добутків елементів стовпчика c_{B_i} на відповідні елементи стовпчика b_i . \square

У нашому прикладі $z = 0 \cdot 35 + 0 \cdot 18 + 0 \cdot 10 = 0$. Додаємо до симплекс-таблиці ще один рядок знизу, і записуємо це значення під стовпчиком b_i (табл. 3.3).

Табл. 3.3. Друге продовження заповнення першої симплекс-таблиці в прикладі 3.3

c_k		3	5	0	0	0	b_i
c_{B_i}	x_{B_i}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	2	5	1	0	0	35
0	x_4	2	1	0	1	0	18
0	x_5	1	1	0	0	1	10
Δz_k				×	×	×	$z = 0$

Цій таблиці відповідає точка $O(0,0)$ на рис. 3.3. Далі нам треба робити симплексне перетворення: вводити в базис якусь вільну змінну та звільняти якусь базисну так, щоб значення z збільшувалося (або принаймні не зменшувалося), і ми залишалися в симплексі D . Яку ж вільну змінну треба вводити в базис? Щоб вирішити це питання, треба з'ясувати, як буде змінюватися z при збільшенні тієї чи іншої вільної змінної. Позначимо приріст z при змінюванні вільної змінної x_k від нуля до одиниці як Δz_k . Для цих величин призначений останній рядок у табл. 3.3. Для

базисних змінних ці величини обчислювати не треба, тому там ставимо хрестики.

Обчислимо Δz_1 . Збільшимо x_1 з нуля до одиниці. Коефіцієнт при x_1 записаний у верхньому рядку: $c_1 = 3$. Тому, якщо збільшити x_1 з нуля до одиниці, то z збільшиться на $c_1 \cdot (1 - 0) = 3 \cdot 1 = 3$. Але при змінюванні x_1 (і не змінюванні інших вільних змінних) змінюються також усі базисні змінні. Наприклад, перше рівняння, оскільки x_2 не змінюється, буде мати вигляд: $2x_1 + x_3 = 35$. Якщо ми збільшили x_1 на одну одиницю, для збереження цього рівняння треба зменшити x_3 на дві одиниці. Так само для збереження другого рівняння $2x_1 + x_4 = 18$ треба зменшити x_4 на дві одиниці, і для збереження третього рівняння треба зменшити x_5 на одну одиницю. Бачимо, що кожну базисну змінну (другий стовпчик табл. 3.3) треба зменшити на стільки одиниць, скільки записано в стовпчику коефіцієнтів при x_1 . Коефіцієнти при базисних змінних у цільовій функції z знаходяться у першому стовпчику таблиці. Отже, маємо таке правило.

Правило 3.2. Щоб обчислити приріст Δz_k цільової функції z при збільшенні вільної змінної x_k від нуля до одиниці, треба від коефіцієнта c_k (у верхньому рядку над x_k) відняти суму добутків елементів першого стовпчика c_{Bi} на відповідні елементи стовпчика коефіцієнтів при x_k (вони знаходяться під x_k). \square

Обчислимо: $\Delta z_1 = 3 - 0 \cdot 2 - 0 \cdot 2 - 0 \cdot 1 = 3$; $\Delta z_2 = 5 - 0 \cdot 5 - 0 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 5$. Ці числа записуємо в останньому рядку симплекс-таблиці (табл. 3.4).

Табл. 3.4. Третє продовження заповнення першої симплекс-таблиці в прикладі 3.3

c_k		3	5	0	0	0	b_i
c_{Bi}	x_{Bi}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	2	5	1	0	0	35
0	x_4	2	1	0	1	0	18
0	x_5	1	1	0	0	1	10
Δz_k		3	5 \uparrow	\times	\times	\times	$z = 0$

Якщо якийсь $\Delta z_k > 0$, то вільну змінну x_k є сенс вводити в базис: її збільшення збільшує цільову функцію z . В нашому прикладі можна вводити в базис як x_1 , так і x_2 . На рис. 3.3 введенню в базис (збільшенню) x_1 відповідає рух від точки O в напрямку точок A, B , а збільшенню x_2 — в напрямку точок F, G . На цьому етапі треба визначитися, в якому напрямку рухатися, тобто яку саме вільну змінну вводити в базис. Можна брати будь-яку змінну x_k з $\Delta z_k > 0$. Але, якщо розв'язувати багато задач,

то в середньому краще брати ту x_k , для якої Δz_k більше. Буде менше кроків до точки максимуму. Тому оберемо для введення в базис змінну x_2 . Це позначено стрілкою вгору.

На рис. 3.3 збільшенню x_2 відповідає рух з точки O в напрямку точок F, G . Але, щоб залишитися в симплексі D , ми можемо рухатися тільки до точки F , і не далі. Отже, треба знайти, при якому значенні x_2 та чи інша базисна змінна обертається до нуля, і обрати найменше з цих значень. Це можна знайти з симплекс-таблиці таким чином. Оскільки $x_1 = 0$, то з першого рівняння маємо: $5x_2 + x_3 = 35$. Якщо покласти $x_3 = 0$, то отримаємо: $x_2 = \frac{b_1}{a_{12}} = \frac{35}{5} = 7$. На рис. 3.3 це точка $F(0, 7)$ — перетин прямих $x_1 = 0$ та $x_3 = 0$. Так само з другого рівняння: $x_2 + x_4 = 18$; якщо покласти $x_4 = 0$, то отримаємо: $x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{18}{1} = 18$. Ця точка не вмістилася на рис. 3.3. І, нарешті, з третього рівняння: $x_2 + x_5 = 10$; $x_5 = 0$; $x_2 = \frac{b_3}{a_{32}} = \frac{10}{1} = 10$ — точка G . Ці величини називаються відношеннями. Для їх обчислення застосовується таке правило.

Правило 3.3. Після того, як обрана вільна змінна x_k для введення в базис, обчислюємо відношення елементів стовпця b_i до відповідних елементів стовпця під x_k : величини $\frac{b_i}{a_{ik}}$. Ці числа називаються відношеннями та записуються в стовпці після b_i . \square

Додамо до симплекс-таблиці ще один стовпчик праворуч від b_i , і запишемо туди знайдені відношення. Для виведення з базису треба обрати ту змінну, для якої відношення є найменшим серед додатних. У нашому прикладі це x_3 . Вона позначається в симплекс-таблиці стрілкою праворуч (табл. 3.5).

Табл. 3.5. Закінчення заповнення першої симплекс-таблиці в прикладі 3.3

c_k		3	5	0	0	0	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
c_{Bi}	x_{Bi}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	2	5	1	0	0	35	7 \rightarrow
0	x_4	2	1	0	1	0	18	18
0	x_5	1	1	0	0	1	10	10
Δz_k		3	5 \uparrow	\times	\times	\times	$z = 0$	

Тепер ми можемо провести операцію однократного заміщення базису:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 35 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 18 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array} \right) e_1/5 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \frac{2}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 18 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array} \right) \begin{array}{l} e_2 - e_1 \\ e_3 - e_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \frac{2}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 7 \\ \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 1 & 0 & 11 \\ \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Отримали дані для другої симплекс-таблиці. Заповнюємо її (табл. 3.6).

Табл. 3.6. Друга симплекс-таблиця в прикладі 3.3

c_k		3	5	0	0	0	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
c_{B_i}	x_{B_i}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
5	x_2	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	0	7	17.5
0	x_4	$\frac{8}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	1	0	11	6.875
0	x_5	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	1	3	5 \rightarrow
Δz_k		1 \uparrow	\times	-1	\times	\times	$z = 35$	

Цій таблиці відповідає точка $F(0, 7)$ на рис. 3.3. Пояснення до її заповнення. Верхні два рядки не змінюються. Ліві стовпчики: базисні змінні в першому, другому та третьому рівняннях відповідно x_2, x_4, x_5 . Коефіцієнти в цільовій функції при них беремо з верхнього рядка: це числа 5, 0, 0.

Цільову функцію обчислюємо за правилом 3.1: $z = 5 \cdot 7 + 0 \cdot 11 + 0 \cdot 3 = 35$.

Прирости для вільних змінних обчислюємо за правилом 3.2: $\Delta z_1 = 3 - 5 \cdot \frac{2}{5} - 0 \cdot \frac{8}{5} - 0 \cdot \frac{3}{5} = 1$; $\Delta z_3 = 0 - 5 \cdot \frac{1}{5} - 0 \cdot (-\frac{1}{5}) - 0 \cdot (-\frac{1}{5}) = -1$. Є додатний приріст — максимум не досягнутий. Вводимо в базис змінну x_1 . На рис. 3.3 цьому відповідає рух з точки F у напрямку точок E, D .

Відношення (останній стовпчик) обчислюємо за правилом 3.3: $\frac{b_1}{a_{11}} = 7 : \frac{2}{5} = 17.5$; $\frac{b_2}{a_{21}} = 11 : \frac{8}{5} = 6.875$; $\frac{b_3}{a_{31}} = 3 : \frac{3}{5} = 5$. Найменше додатне з цих чисел — це 5, тому звільняємо змінну x_5 . Проводимо операцію однократного заміщення базису:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \frac{2}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 7 \\ \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 1 & 0 & 11 \\ \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) e_3 / \frac{3}{5} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \frac{2}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 7 \\ \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 1 & 0 & 11 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3} & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} e_1 - \frac{2}{5}e_3 \\ e_2 - \frac{1}{5}e_3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 5 \end{array} \right).$$

Заповнюємо третю симплекс-таблицю (табл. 3.7).

Табл. 3.7. Третя симплекс-таблиця в прикладі 3.3

c_k		3	5	0	0	0	b_i
c_{B_i}	x_{B_i}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
5	x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	5
0	x_4	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{8}{3}$	3
3	x_1	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	5
Δz_k		×	×	$-\frac{2}{3}$	×	$-\frac{5}{3}$	$z = 40$

Базисні змінні: в першому рівнянні x_2 , в другому x_4 , в третьому x_1 . Коефіцієнти біля них у цільовій функції: 5, 0, 3.

Значення цільової функції за правилом 3.1: $z = 5 \cdot 5 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 40$.

Прирости за правилом 3.2: $\Delta z_3 = 0 - 5 \cdot \frac{1}{3} - 0 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot (-\frac{1}{3}) = -\frac{2}{3}$;

$\Delta z_5 = 0 - 5 \cdot (-\frac{2}{3}) - 0 \cdot (-\frac{8}{3}) - 3 \cdot \frac{5}{3} = -\frac{5}{3}$.

Додатних приростів немає — досягнута точка максимуму: $\mathbf{x}_{\max} = \{5; 5; 0; 3; 0\}$; $z_{\max} = 40$. На рис. 3.3 це точка $E(5, 5)$ — перетин прямих $x_3 = 0$ та $x_5 = 0$.

3.4. Особливості розв'язання задач симплекс-методом

3.4.1. Необмежена область розв'язку

Нехай у якійсь симплекс-таблиці є додатні прирости для вільних змінних: $\exists \Delta z_k > 0$, але для кожної з цих x_k всі відношення від'ємні: $\forall \frac{b_i}{a_{ik}} < 0$. Це свідчить про те, що при збільшенні цієї x_k всі перетини з лініями обмежень знаходяться позаду, а попереду їх немає. Тобто можна збільшувати z до нескінченності.

Правило 3.4. Якщо в симплекс-таблиці $\exists \Delta z_k > 0$, але $\forall \frac{b_i}{a_{ik}} < 0$, то область допустимих розв'язків необмежена, і $z_{\max} \rightarrow +\infty$. □

Приклад 3.4. Розв'язати графічним та симплекс-методами задачу лінійного програмування:

$$z = 3x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 - 8x_2 + x_4 = 24; \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Задача записана в канонічній формі, причому СЛАР розв'язана: базисні змінні x_3, x_4 , а вільні — x_1, x_2 . Для розв'язання графічним методом виключимо базисні змінні: $x_3 = 4 + 2x_1 - x_2$; $x_4 = 24 - 3x_1 + 8x_2$. Підставимо їх у цільову функцію:

$$z = 3x_1 - 4x_2 + 4 + 2x_1 - x_2 + 24 - 3x_1 + 8x_2 = 2x_1 + 3x_2 + 28.$$

Маємо задачу лінійного програмування в стандартній формі:

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 28 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 4; \\ 3x_1 - 8x_2 \leq 24; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

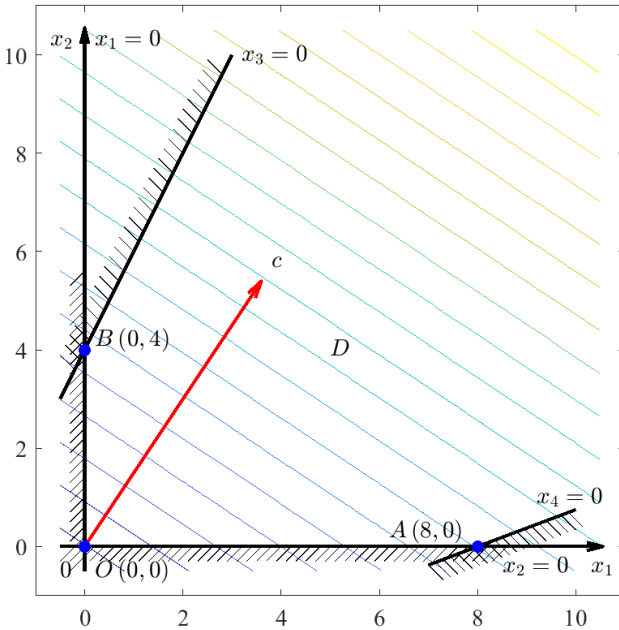


Рис. 3.4. Розв'язання прикладу 3.4

Розв'язуємо її графічним методом (рис. 3.4). Бачимо, що область допустимих розв'язків D необмежена: можна збільшувати цільову функцію z до нескінченності.

Переходимо до розв'язання симплекс-методом. Перша симплекс-таблиця — це табл. 3.8.

Їй відповідає точка $O(0,0)$ на рис. 3.4. Вводимо в базис змінну x_2 , що відповідає руху до точки B на рис. 3.4. Звільняємо змінну x_3 — це й є точка $B(0,4)$. Відношення в другому рядку $\frac{b_2}{a_{22}} = -3 < 0$; це точка перетину прямих $x_1 = 0$ та $x_4 = 0$, вона не вмістилася на рисунку.

Табл. 3.8. Перша симплекс-таблиця в прикладі 3.4

c_k		3	-4	1	1	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
c_{B_i}	x_{B_i}	x_1	x_2	x_3	x_4		
1	x_3	-2	1	1	0	4	4 →
1	x_4	3	-8	0	1	24	-3
Δz_k		2	3 ↑	×	×	$z = 28$	

Виконуємо операцію однократного заміщення базису: $e_2 + 8e_1$, та отримуємо другу симплекс-таблицю (табл. 3.9), що відповідає знайденій точці $B(0, 4)$.

Табл. 3.9. Друга симплекс-таблиця в прикладі 3.4

c_k		3	-4	1	1	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
c_{B_i}	x_{B_i}	x_1	x_2	x_3	x_4		
-4	x_2	-2	1	1	0	4	-2
1	x_4	-13	0	8	1	56	$-\frac{56}{13}$
Δz_k		8 ↑	×	-3	×	$z = 40$	

Максимум ще не досягнутий: можна вводити в базис змінну x_1 . Але її можна збільшувати необмежено: в лінії $x_3 = 0$ попереду немає жодних обмежень. Усі відношення від'ємні, тому точки перетину з лініями $x_2 = 0$ та $x_4 = 0$ знаходяться позаду напрямку нашого руху. Відповідь: $z_{\max} \rightarrow +\infty$. Точок, де досягається (як границя) цей максимум, безліч. Наприклад, підходять будь-які точки на прямій $x_3 = 0$, коли $x_1 \rightarrow +\infty$; $x_2 = 4 + 2x_1$; $x_4 = 24 - 3x_1 + 8x_2 = 56 + 13x_1$. □

3.4.2. Неєдиний розв'язок

Нехай у якійсь симплекс-таблиці немає додатних приростів, але є нульові, і для них існують додатні відношення. Це означає, що ми можемо перейти до іншої точки з таким самим значенням цільової функції. Але ми йдемо вздовж відрізка, і цільова функція лінійна, тому й в усіх проміжних точках цього відрізка значення z залишається незмінним. Якщо кількість вільних змінних $f = 2$, то таких кутових точок з z_{\max} може бути не більше двох. Але вже при $f \geq 3$ може бути скільки завгодно кутових точок з z_{\max} . Наприклад, на рис. 3.1 є плоскі чотирикутники в E_3 , і, якщо в усіх кутах

такого чотирикутника цільова функція приймає однакове значення, то вона буде набувати такого самого значення і в їхній внутрішній лінійній комбінації, тобто в усіх точках чотирикутника.

Правило 3.5. Якщо в симплекс-таблиці $\forall \Delta z_k \leq 0$, але $\exists \Delta z_k = 0$, і для цієї $x_k: \exists \frac{b_i}{a_{ik}} > 0$, то точка максимуму неєдина. Треба знайти всі такі кутові точки, і взяти їхню внутрішню лінійну комбінацію. \square

Приклад 3.5. Розв'язати графічним та симплекс-методами задачу лінійного програмування:

$$z = 11x_1 + 10x_2 + 13x_3 - x_4 + x_5 + 3x_6 + x_7 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 5; \\ -x_1 + 5x_2 + x_4 = 41; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_5 = 77; \\ 5x_1 - x_2 + x_6 = 63; \\ 2x_1 - 5x_2 + x_7 = 16; \\ \forall x_k \geq 0. \end{cases}$$

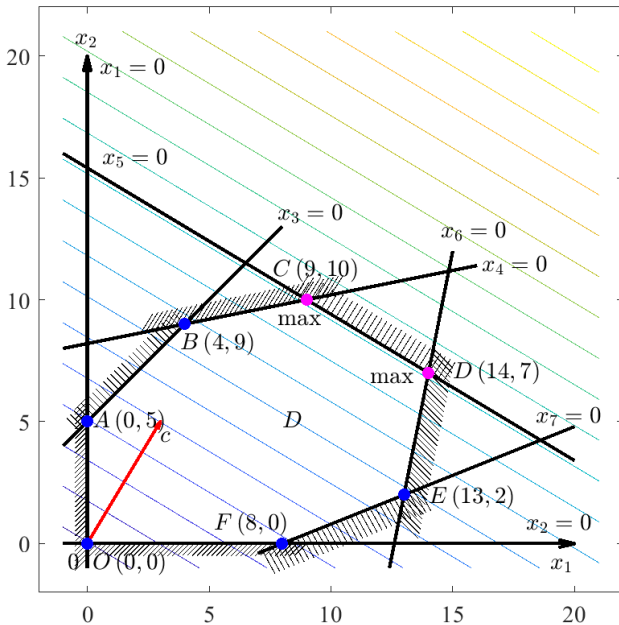


Рис. 3.5. Розв'язання прикладу 3.5

Розв'язання. Задача записана в канонічній формі, причому СЛАР розв'язана: базисні змінні x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 , а вільні — x_1, x_2 . Для розв'язання графічним методом виключимо базисні змінні:

$$\begin{aligned}x_3 &= 5 + x_1 - x_2; \\x_4 &= 41 + x_1 - 5x_2; \\x_5 &= 77 - 3x_1 - 5x_2; \\x_6 &= 63 - 5x_1 + x_2; \\x_7 &= 16 - 2x_1 + 5x_2.\end{aligned}$$

Підставимо їх у цільову функцію: $z = 3x_1 + 5x_2 + 306$.

Маємо задачу лінійного програмування в стандартній формі:

$$z = 3x_1 + 5x_2 + 306 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 5; \\ -x_1 + 5x_2 \leq 41; \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 77; \\ 5x_1 - x_2 \leq 63; \\ 2x_1 - 5x_2 \leq 16; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Її графічний розв'язок показаний на рис. 3.5. Лінії рівня цільової функції z паралельні до лінії обмеження $x_5 = 0$, тобто до лінії $3x_1 + 5x_2 = 77$. Самі на цій лінії й досягається $z_{\max} = 3x_1 + 5x_2 + 306 = 77 + 306 = 383$. В області D знаходиться відрізок цієї лінії між точками $C(9, 10)$ та $D(14, 7)$. Тому $\mathbf{x}_{\max} = \theta_1 \{9; 10\} + \theta_2 \{14; 7\}$, де $\theta_1 \geq 0; \theta_2 \geq 0; \theta_1 + \theta_2 = 1$.

Розв'яжемо тепер задачу симплекс-методом. Перша таблиця, якій відповідає точка $O(0, 0)$ на рис. 3.5, це табл. 3.10.

Табл. 3.10. Перша симплекс-таблиця в прикладі 3.5

c_k		11	10	13	-1	1	3	1	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
c_{Bi}	x_{Bi}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
13	x_3	-1	1	1	0	0	0	0	5	$5 \rightarrow$
-1	x_4	-1	5	0	1	0	0	0	41	8.2
1	x_5	3	5	0	0	1	0	0	77	15.4
3	x_6	5	-1	0	0	0	1	0	63	-63
1	x_7	2	-5	0	0	0	0	1	16	-3.2
Δz_k		3	$5 \uparrow$	\times	\times	\times	\times	\times	$z = 306$	

Беремо найбільше з $\Delta z_k > 0$: це $\Delta z_2 = 5$; вводимо в базис змінну x_2 . Для неї мінімальне додатне відношення — це $\frac{b_1}{a_{12}} = 5$, тому звільняємо базисну змінну першого рівняння x_3 . Після однократного заміщення базису отримуємо другу симплекс-таблицю, що відповідає точці $A(0, 5)$ на рис. 3.5. Вона показана в табл. 3.11.

Табл. 3.11. Друга симплекс-таблиця в прикладі 3.5

c_k		11	10	13	-1	1	3	1	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
c_{Bi}	x_{Bi}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
10	x_2	-1	1	1	0	0	0	0	5	-5
-1	x_4	4	0	-5	1	0	0	0	16	4 \rightarrow
1	x_5	8	0	-5	0	1	0	0	52	$\frac{13}{2}$
3	x_6	4	0	1	0	0	1	0	68	17
1	x_7	-3	0	5	0	0	0	1	41	$-\frac{41}{3}$
Δz_k		8 \uparrow	\times	-5	\times	\times	\times	\times	$z = 331$	

Можна ввести в базис змінну x_1 , бо для неї $\Delta z_1 = 8 > 0$. Для неї мінімальне додатне відношення — це $\frac{b_2}{a_{21}} = 4$, тому звільняємо базисну змінну другого рівняння x_4 . Після операції однократного заміщення базису отримуємо третю симплекс-таблицю (табл. 3.12), якій відповідає точка $B(4, 9)$ на рис. 3.5.

Табл. 3.12. Третя симплекс-таблиця в прикладі 3.5

c_k		11	10	13	-1	1	3	1	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
c_{Bi}	x_{Bi}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
10	x_2	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	9	-36
11	x_1	1	0	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	4	-3.2
1	x_5	0	0	5	-2	1	0	0	20	4 \rightarrow
3	x_6	0	0	6	-1	0	1	0	52	$\frac{26}{3}$
1	x_7	0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0	1	53	42.4
Δz_k		\times	\times	5 \uparrow	-2	\times	\times	\times	$z = 363$	

Є можливість далі збільшити цільову функцію, ввівши в базис x_3 , бо для неї $\Delta z_3 = 5 > 0$. Найменше додатне відношення для x_3 — це $\frac{b_3}{a_{33}} = 4$, тому виводимо з базису змінну x_5 з третього рівняння. Після цього однократного заміщення базису маємо четверту симплекс-таблицю (табл. 3.13), якій відповідає точка $C(9, 10)$ на рис. 3.5.

У цій таблиці немає додатних приростів: $\forall \Delta z_k \leq 0$. Отже, точка максимуму досягнута. Але $\epsilon \Delta z_4 = 0$, і для змінної x_4 є мінімальне додатне

Табл. 3.13. Четверта симплекс-таблиця в прикладі 3.5

c_k		11	10	13	-1	1	3	1	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
c_{Bi}	x_{Bi}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
10	x_2	0	1	0	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	0	0	10	$66\frac{2}{3}$
11	x_1	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	9	-36
13	x_3	0	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	4	-10
3	x_6	0	0	0	$\frac{7}{5}$	$-\frac{6}{5}$	1	0	28	20 →
1	x_7	0	0	0	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	48	38.4
Δz_k		×	×	×	0 ↑	-1	×	×	$z = 383$	

відношення $\frac{b_4}{a_{43}} = 20$. Це свідчить про те, що максимальне значення цільової функції $z_{\max} = 383$ досягається не в одній точці. Можна зробити ще один крок симплекс-методу: ввести в базис x_4 та звільнити x_6 з четвертого рівняння. Проводимо цю операцію однократного заміщення базису та отримуємо наступну, п'яту таблицю (табл. 3.14), якій на рис. 3.5 відповідає точка $D(14, 7)$.

Табл. 3.14. П'ята симплекс-таблиця в прикладі 3.5

c_k		11	10	13	-1	1	3	1	b_i	
c_{Bi}	x_{Bi}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
10	x_2	0	1	0	0	$\frac{5}{28}$	$-\frac{3}{28}$	0	7	
11	x_1	1	0	0	0	$\frac{1}{28}$	$\frac{5}{28}$	0	14	
13	x_3	0	0	1	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	12	
-1	x_4	0	0	0	1	$-\frac{6}{7}$	$\frac{5}{7}$	0	20	
1	x_7	0	0	0	0	$\frac{23}{28}$	$-\frac{25}{28}$	1	23	
Δz_k		×	×	×	×	-1	0	×	$z = 383$	

Звідсіля ми можемо тільки повернутися назад: ввести в базис змінну x_6 , яку ми звільнили на попередньому кроці. Отже, знайдені всі (обидві) кутові точки області максимуму — це дані з двох останніх таблиць: $\mathbf{x}_1 = \{9; 10; 4; 0; 0; 28; 48\}$ та $\mathbf{x}_2 = \{14; 7; 12; 20; 0; 0; 23\}$. В усіх точках відрізка $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ досягається $z_{\max} = 383$. Координати точок цього відрізка

такі:

$$\begin{cases} x_1 = 9\theta_1 + 14\theta_2; \\ x_2 = 10\theta_1 + 7\theta_2; \\ x_3 = 4\theta_1 + 12\theta_2; \\ x_4 = 20\theta_2; \\ x_5 = 0; \\ x_6 = 28\theta_1; \\ x_7 = 48\theta_1 + 23\theta_2; \end{cases}$$

де $\theta_1 \geq 0; \theta_2 \geq 0; \theta_1 + \theta_2 = 1$. \square

3.4.3. Вироджені розв'язки

Якщо в симплекс-таблиці якась права частина дорівнює нулю: $\exists b_i = 0$, то не тільки всі вільні змінні дорівнюють нулю, а й базисна змінна з i -го рівняння буде нульовою.

Означення 3.6. Допустимий опорний розв'язок називається *виродженим*, якщо в ньому деякі базисні змінні дорівнюють нулю. \square

Про появу виродженого розв'язку можна дізнатися заздалегідь: в попередній симплекс-таблиці є кілька однакових мінімальних додатних відношень $\min \frac{b_i}{a_{ik}} > 0$. І постає питання: яку саме базисну змінну треба звільнити? Невдалий вибір може призвести до зациклювання симплекс-методу: ми будемо весь час залишатися в одній і тій самій точці, змінюючи тільки набір базисних змінних у ній. Щоб уникнути зациклювання, використовуємо наступне правило.

Правило 3.6. Якщо в симплекс-таблиці є кілька однакових мінімальних *додатних* відношень $\min \frac{b_i}{a_{ik}} > 0$, то *серед них* обираємо той рядок, в якому мінімальним є відношення іншого вільного j -го стовпця до k -го: $\min \frac{a_{ij}}{a_{ik}}$, причому тут можна розглядати й від'ємні відношення $\frac{a_{ij}}{a_{ik}}$. Якщо й тут будуть однакові числа, то *серед них* обираємо рядок з мінімальним відношенням іншого l -го рядка до k -го: $\min \frac{a_{il}}{a_{ik}}$, і тут можна розглядати й від'ємні відношення $\frac{a_{il}}{a_{ik}}$. І так далі. При цьому, якщо мінімальне відношення дорівнює нулю: $\min \frac{b_i}{a_{ik}} = 0$, то треба враховувати знак цього нуля: $+0$ чи -0 , і обирати тільки $+0$. \square

Приклад 3.6. Розв'язати графічним та симплекс-методами задачу лінійного програмування:

$$\begin{cases} z = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ -x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_4 = 9; \\ -x_1 + 5x_2 + x_5 = 30; \\ x_1 + x_2 + x_6 = 12; \\ \forall x_k \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Задача записана в канонічній формі, і СЛАР розв'язана: базисні змінні x_3, x_4, x_5, x_6 , вільні — x_1, x_2 . Перейдемо до стандартної форми:

$$\begin{aligned} x_3 &= 6 + 2x_1 - x_2; \\ x_4 &= 9 + x_1 - \frac{3}{2}x_2; \\ x_5 &= 30 + x_1 - 5x_2; \\ x_6 &= 12 - x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Цільова функція залишається без змін, оскільки x_3, x_4, x_5, x_6 до неї не входять. Маємо задачу лінійного програмування в стандартній формі:

$$z = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 6; \\ -x_1 + \frac{3}{2}x_2 \leq 9; \\ -x_1 + 5x_2 \leq 30; \\ x_1 + x_2 \leq 12; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

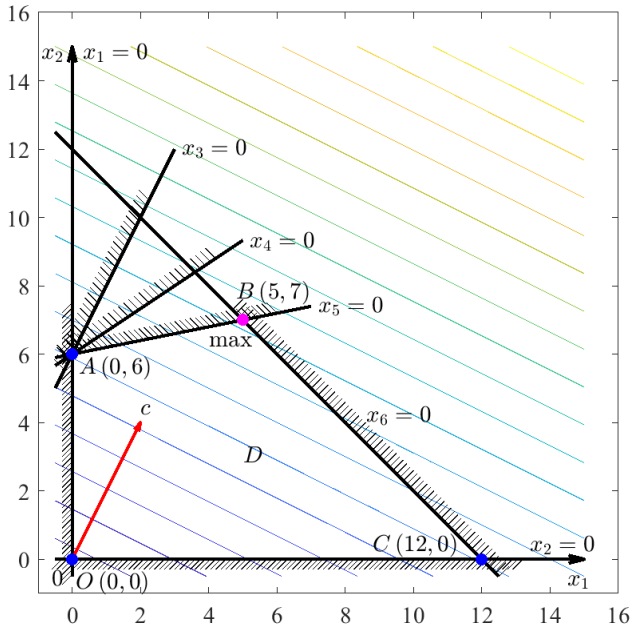


Рис. 3.6. Розв'язання прикладу 3.6

Графічний розв'язок показаний на рис. 3.6. Максимум досягається на перетині обмежень $x_5 = 0$ та $x_6 = 0$; у точці $B(5, 7)$; $z_{\max} = 2 \cdot 5 + 4 \cdot 7 = 38$. І ми бачимо, як графічно виглядає вироджений розв'язок: у E_2 в одній точці перетинаються не дві, а більше прямих. У E_3 вироджений розв'язок

буде тоді, коли в одній точці перетинаються більше трьох площин, в E_4 — коли в одній точці перетинаються більше чотирьох чотиривимірних площин тощо.

Розв'яжемо тепер цю задачу симплекс-методом. Перша симплекс-таблиця — це табл. 3.15. Вона відповідає точці $O(0, 0)$ на рис. 3.6. У ній є два додатні прирости: $\Delta z_1 = 2$ та $\Delta z_2 = 4$. Друге число більше, тому обираємо для введення в базис змінну x_2 . Для неї є три однакових мінімальних додатних відношення $\min \frac{b_i}{a_{ik}} = 6$. Яку змінну обрати для виведення з базису?

Табл. 3.15. Перша симплекс-таблиця в прикладі 3.6

c_k		2	4	0	0	0	0	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}$	$\frac{a_{ij}}{a_{ik}}$
сБ _i	хБ _i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6			
0	x_3	-2	1	0	0	0	0	6	6	-2 →
0	x_4	-1	$\frac{3}{2}$	0	1	0	0	9	6	$-\frac{2}{3}$
0	x_5	-1	5	0	0	1	0	30	6	$-\frac{1}{5}$
0	x_6	1	1	0	0	0	1	12	12	×
Δz_k		2	4 ↑	×	×	×	×	$z = 0$		

Для вирішення цього питання додамо до симплекс-таблиці ще один стовпчик, і заповнимо його відношеннями іншого вільного стовпця (у нас це x_1) до того, що вводиться в базис. Робимо це не для всіх рядків, а тільки для тих трьох, у яких $\min \frac{b_i}{a_{ik}} = 6$. Це будуть числа: $-2/1 = -2$; $-1/\frac{3}{2} = -\frac{2}{3}$; $-1/5 = -\frac{1}{5}$. Найменше з цих чисел -2 у першому рядку, тому звільняємо базисну змінну x_3 з першого рівняння. Після операції однократного заміщення базису отримуємо другу симплекс-таблицю (табл. 3.16), що відповідає точці $A(0, 6)$ на рис. 3.6.

Тут з'явилися два нульові додатні мінімальні відношення: $\frac{0}{2} = +0$; $\frac{0}{9} = +0$. У цих рядках шукаємо додаткові відношення елементів іншого вільного стовпця (тут це x_3) до елементів стовпця x_1 : $-\frac{3}{2}/2 = -\frac{3}{4}$; $-5/9 = -\frac{5}{9}$. Оскільки $-\frac{3}{4} < -\frac{5}{9}$, звільняємо змінну x_4 з другого рівняння — маємо третю симплекс-таблицю (табл. 3.17), знову в точці $A(0, 6)$.

У цій таблиці лише одне мінімальне додатне відношення: $\frac{b_3}{a_{33}} = 0/\frac{7}{4} = +0$. У другому рядку відношення від'ємне: $\frac{b_2}{a_{23}} = 0/(-\frac{3}{4}) = -0$. Тому ніяких невизначеностей немає: треба виводити з базису змінну x_5 з третього рівняння. Отримуємо четверту симплекс-таблицю (табл. 3.18), це теж точка $A(0, 6)$.

Тут взагалі обидва нульові відношення від'ємні: $i\ 0/(-\frac{10}{7}) = -0$; i

Табл. 3.16. Друга симплекс-таблиця в прикладі 3.6

c_k		2	4	0	0	0	0	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}$	$\frac{a_{ij}}{a_{ik}}$
c_{B_i}	x_{B_i}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6			
4	x_2	-2	1	1	0	0	0	6	-3	×
0	x_4	2	0	$-\frac{3}{2}$	1	0	0	0	+0	$-\frac{3}{4} \rightarrow$
0	x_5	9	0	-5	0	1	0	0	+0	$-\frac{5}{9}$
0	x_6	3	0	-1	0	0	1	6	2	×
Δz_k		10 ↑	×	-4	×	×	×	$z = 24$		

Табл. 3.17. Третя симплекс-таблиця в прикладі 3.6

c_k		2	4	0	0	0	0	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
c_{B_i}	x_{B_i}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
4	x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	6	-12
2	x_1	1	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	-0
0	x_5	0	0	$\frac{7}{4}$	$-\frac{9}{2}$	1	0	0	+0 →
0	x_6	0	0	$\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{2}$	0	1	6	4.8
Δz_k		×	×	3.5 ↑	-5	×	×	$z = 24$	

$0 / (-\frac{18}{7}) = -0$. Мінімальне додатне відношення — в четвертому рядку, тому виводимо з базису змінну x_6 з четвертого рівняння. П'ята симплекс-таблиця — це табл. 3.19.

Всі прирости від'ємні, тому ми досягли точки максимуму, і цей максимум єдиний. Йому відповідає точка $B(5, 7)$ на рис. 3.6. Вектор $\mathbf{x}_{\max} = \{5; 7; 9; \frac{7}{2}; 0; 0\}$; $z_{\max} = 38$.

Цікаво подивитися, які вільні змінні відповідають симплекс-таблицям:

1. (x_1, x_2) ; точка $O(0, 0)$;
2. (x_1, x_3) ; точка $A(0, 6)$;
3. (x_3, x_4) ; точка $A(0, 6)$;
4. (x_4, x_5) ; точка $A(0, 6)$;
5. (x_5, x_6) ; точка $B(5, 7)$.

На рис. 3.6 це відповідає поступовому наближенню до точки максимуму. □

Мабуть, вироджені розв'язки — це найскладніший елемент при роз-

Табл. 3.18. Четверта симплекс-таблиця в прикладі 3.6

c_k		2	4	0	0	0	0	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
c_{B_i}	x_{B_i}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
4	x_2	0	1	0	$-\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	6	-21
2	x_1	1	0	0	$-\frac{10}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	0	-0
0	x_3	0	0	1	$-\frac{18}{7}$	$\frac{4}{7}$	0	0	-0
0	x_6	0	0	0	$\frac{12}{7}$	$-\frac{5}{7}$	1	6	$\frac{7}{2} \rightarrow$
Δz_k		×	×	×	4 ↑	-2	×	$z = 24$	

Табл. 3.19. П'ята симплекс-таблиця в прикладі 3.6

c_k		2	4	0	0	0	0	b_i
c_{B_i}	x_{B_i}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
4	x_2	0	1	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	7
2	x_1	1	0	0	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	5
0	x_3	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	9
0	x_4	0	0	0	1	$-\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{2}$
Δz_k		×	×	×	×	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$z = 38$

в'язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом. Щоб уникнути вироджених розв'язків, можна скористатися такими методами.

1. Якщо умови задачі дозволяють, можна трошки змінити обмеження. Наприклад, замість 6 взяти 6.01; а замість 9 — 8.99. Прямі лінійні обмежень змістяться, і виродженість зникне.
2. Можна підійти до точки максимуму з іншого боку. Наприклад, якщо в прикладі 3.6 на першому кроці ввести в базис не x_2 , а x_1 , то виродженості не буде.

3.5. Двохетапний симплекс-метод, або метод штучного базису

Щоб запустити симплекс-метод, треба мати допустимий опорний розв'язок: такий розв'язок СЛАР $Ax = b$ методом Жордана-Гауса, в якому всі праві частини невід'ємні. Цього не завжди просто домогтися. Інколи,

як не обирай вільні змінні, все одно виникне якість $b_i < 0$. Двохетапний симплекс-метод, або метод штучного базису, як раз і призначений для того, щоб відшукати початковий допустимий опорний розв'язок.

Ідея методу полягає в тому, що, якщо в якомусь рівнянні немає базисної змінної, ми її додаємо самі, і при цьому в цільовій функції коефіцієнт при цій новій базисній змінній беремо $-\infty$ або якість велике за модулем від'ємне число $-M$, де $M > 0$. Симплекс-метод буде в першу чергу намагатися звільнити саме ці штучні змінні. Після того, як ці змінні звільняться, їх можна далі або взагалі відкинути (це називається двохетапний симплекс-метод), або працювати далі з ними, бо вони ніколи знову до базису не потраплять (це називається метод штучного базису).

Приклад 3.7. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування:

$$z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ x_1 + x_2 \leq 10; \\ 3x_1 + x_2 \geq 9; \\ x_1 - 3x_2 \leq -3; \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Щоб звести задачу до канонічного вигляду, помножимо спочатку останню нерівність на -1 , щоб у правій частині було додатне число. Потім додамо та віднімемо балансні змінні в нерівності:

$$z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ x_1 + x_2 + x_4 = 10; \\ 3x_1 + x_2 - x_5 = 9; \\ -x_1 + 3x_2 - x_6 = 3; \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0. \end{cases}$$

У двох останніх рівняннях базисних змінних немає. Якщо їх помножити на -1 , вони з'являться, але праві частини стануть від'ємними, що нам не підходить. Можна спробувати якість розв'язати цю СЛАР методом Жордана-Гауса, але де гарантія, що ми отримаємо допустимий опорний розв'язок? Тому тут зручніше скористатися двохетапним симплекс-методом. Додамо в двох останніх рівняннях штучні базисні змінні x_7, x_8 , а в цільову функцію включимо їх з коефіцієнтами $-M$, де $M > 0$ — велике число:

$$z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 - Mx_7 - Mx_8 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ x_1 + x_2 + x_4 = 10; \\ 3x_1 + x_2 - x_5 + x_7 = 9; \\ -x_1 + 3x_2 - x_6 + x_8 = 3; \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0. \end{cases}$$

Табл. 3.20. Перша симплекс-таблиця в прикладі 3.7

c_k		3	2	-1	0	0	0	-M	-M	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
c_{Bi}	x_{Bi}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8		
-1	x_3	-1	1	1	0	0	0	0	0	4	4
0	x_4	1	1	0	1	0	0	0	0	10	10
-M	x_7	3	1	0	0	-1	0	1	0	9	9
-M	x_8	-1	3	0	0	0	-1	0	1	3	1 →
Δz_k		$2M + 2$	$4M + 4 \uparrow$	×	×	-M	-M	×	×	$z = -12M + 4$	

Табл. 3.21. Друга симплекс-таблиця в прикладі 3.7

c_k		3	2	-1	0	0	0	-M	-M	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
c_{B_i}	x_{B_i}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8		
-1	x_3	$-\frac{2}{3}$	0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	3	-4.5
0	x_4	$\frac{4}{3}$	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	9	6.75
-M	x_7	$\frac{10}{3}$	0	0	0	-1	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	8	2.4 \rightarrow
2	x_2	$-\frac{1}{3}$	1	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	-3
Δz_k		$\frac{10M}{3} + 3 \uparrow$	\times	\times	\times	-M	$\frac{M}{3} + 1$	\times	$-\frac{4M}{3} - 1$	$z = -8M - 1$	

Табл. 3.22. Третя симплекс-таблиця в прикладі 3.7

c_k		3	2	-1	0	0	0	$-M$	$-M$	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
c_{Bi}	x_{Bi}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8		
-1	x_3	0	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{23}{5}$	-23
0	x_4	0	0	0	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{29}{5}$	14.5 →
3	x_1	1	0	0	0	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{12}{5}$	-8
2	x_2	0	1	0	0	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{9}{5}$	-18
Δz_k		×	×	×	×	$\frac{9}{10} \uparrow$	$\frac{7}{10}$	$-M - \frac{9}{10}$	$-M - \frac{7}{10}$	$z = 6.2$	

Тепер можна застосовувати симплекс-метод. Перша симплекс-таблиця — це табл. 3.20.

Найбільший додатний приріст у ній $\Delta z_2 = 4M + 4$, тому вводимо в базис x_2 . Найменше додатне відношення для неї в четвертому рівнянні, тому звільняємо x_8 з нього. Друга симплекс-таблиця — табл. 3.21.

Вводимо в базис x_1 , і, як і очікувалося, звільняємо x_7 — отримуємо третю симплекс-таблицю: це табл. 3.22.

Отримали допустимий опорний розв'язок початкової задачі: $\mathbf{x} = \{\frac{12}{5}; \frac{9}{5}; \frac{23}{5}; \frac{29}{5}; 0; 0\}$. Якщо на цьому етапі відкинути стовпчики з x_7 та x_8 , то це буде двоетапний симплекс-метод (кінець першого етапу і початок другого). А якщо залишити — то це буде метод штучного базису. Давайте, наприклад, залишимо. Це не впливає на подальші розрахунки. Наступна, четверта симплекс-таблиця — це табл. 3.23.

Табл. 3.23. Четверта симплекс-таблиця в прикладі 3.7

c_k		3	2	-1	0	0	0	-M	-M	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
c_{B_i}	x_{B_i}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8		
-1	x_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{15}{2}$	15 →
0	x_5	0	0	0	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{29}{2}$	29
3	x_1	1	0	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{27}{4}$	27
2	x_2	0	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{13}{4}$	-13
Δz_k		×	×	×	$-\frac{9}{4}$	×	$\frac{1}{4} \uparrow$	-M	$-M - \frac{1}{4}$	$z = 19.25$	

Як бачимо, x_7 та x_8 ніколи більше не будуть вводитися в базис. Робимо наступний крок (табл. 3.24).

Табл. 3.24. П'ята симплекс-таблиця в прикладі 3.7

c_k		3	2	-1	0	0	0	-M	-M	b_i	
c_{B_i}	x_{B_i}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8		
0	x_6	0	0	2	1	0	1	0	-1	15	
0	x_5	0	0	-1	2	1	0	-1	0	7	
3	x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	3	
2	x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	7	
Δz_k		×	×	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	×	×	-M	-M	$z = 23$	

Всі прирости від'ємні — досягнутий єдиний максимум. Точка максимуму початкової задачі: $x_1 = 3$; $x_2 = 7$; $x_3 = 0$. Балансні змінні: $x_4 = 0$; $x_5 = 7$; $x_6 = 15$. А нові базисні змінні стали вільними, вони нульові: $x_7 = x_8 = 0$. Максимальне значення цільової функції $z_{\max} = 23$. \square

3.6. Запитання для перевірки

1. Де може досягатися максимум лінійної функції в симплексі?
2. Як визначаються кутові точки симплексу?
3. Що таке допустимі опорні розв'язки? Як вони пов'язані з кутовими точками?
4. Що таке симплексне перетворення?
5. Як обчислюється значення цільової функції в симплекс-таблиці?
6. Як у симплекс-таблиці обрати змінну для введення в базис?
7. Як у симплекс-таблиці обрати змінну для виведення з базису?
8. Як у симплекс-таблиці обрати змінну для виведення з базису, якщо є кілька однакових мінімальних додатних відношень?
9. Які є ознаки того, що область допустимих розв'язків необмежена? Що робити в цьому випадку?
10. Які є ознаки того, що максимум досягається не в одній точці? Що робити в цьому випадку?
11. Що робити, якщо не вдається побудувати допустимий опорний розв'язок?

4. Елементи теорії двоїстості

Майже до кожної задачі оптимізації можна створити двоїсту до неї. Наприклад, якщо в задачах механіки треба мінімізувати масу деталі при обмеженні знизу на її міцність, то двоїстою буде задача максимізації міцності при обмеженні зверху на масу. В економіці, якщо є задача максимізації прибутку при обмеженні зверху на ресурси, то двоїстою буде задача мінімізації використання ресурсів при обмеженні знизу на прибуток. Деякі такі постановки й розглядаються в цьому розділі.

4.1. Симетричні двоїсті задачі

Нехай задача лінійного програмування записана в стандартній формі (2.11). Запишемо її в матрично-векторній формі, причому будемо вважати, що цільова функція максимізується:

$$\begin{aligned} z &= (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \rightarrow \max; \\ \mathbf{Ax} &\leq \mathbf{b}; \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Тут:

- \mathbf{x} — вектор-стовпчик невідомих довжиною n ;
 - \mathbf{c} — вектор-стовпчик коефіцієнтів при невідомих у цільовій функції довжиною n ;
 - z — цільова функція (скаляр);
 - \mathbf{b} — вектор-стовпчик правих частин обмежень-нерівностей довжиною m (m може бути й більше, ніж n);
 - \mathbf{A} — матриця коефіцієнтів обмежень-нерівностей розміром $m \times n$;
 - $\mathbf{0}$ — вектор-стовпчик нулів потрібної довжини;
 - векторні нерівності — це нерівності за всіма координатами водночас.
- Побудуємо за заданими $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ таку задачу:

$$\begin{aligned} \omega &= (\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \min; \\ \mathbf{A}^T \mathbf{y} &\geq \mathbf{c}; \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Невідомими тут є координати вектора-стовпчика \mathbf{y} довжиною m .

Означення 4.1. Задача (4.2) називається *двоїстою* по відношенню до задачі (4.1). \square

Для побудови двоїстої задачі треба зробити такі дії.

1. Поміняти місцями вектори \mathbf{b} та \mathbf{c} .
2. Транспонувати матрицю \mathbf{A} .
3. Замінити в обмеженнях нерівність " \leq " на " \geq ".
4. Змінити максимізацію цільової функції на мінімізацію.

З'ясуємо економічний сенс двоїстої задачі. Нехай початкова задача (4.1) є задачею максимізації прибутку від випуску продукції при обмеженні на ресурси. Будемо позначати розмірності такими літерами:

- g — умовні грошові одиниці;
- p — умовні одиниці продукції;
- r — умовні одиниці ресурсів.

Розмірності всіх параметрів початкової задачі (4.1) є такими:

- координати вектора \mathbf{x} — це одиниці продукції: $[x_k] = p$;
- цільова функція z — це прибуток (гроші), тому $[z] = g$;
- звідсіля слідує, що координати вектора \mathbf{c} мають розмірність: $[c_k] = \frac{g}{p}$; це прибуток (g) від виробництва одиниці продукції (p) k -го типу;
- координати вектора \mathbf{b} — це одиниці ресурсів: $[b_i] = r$;
- звідсіля слідує, що компоненти матриці \mathbf{A} мають розмірність: $[a_{ik}] = \frac{p}{r}$; це кількість ресурсів (r) i -го типу, потрібних для виробництва одиниці продукції (p) k -го типу.

Перейдемо тепер до двоїстої задачі (4.2). В обмеженнях-нерівностях $[a_{ki}^T] = [a_{ik}] = \frac{p}{r}$; $[c_k] = \frac{g}{p}$; тому $[y_i] = \frac{[c_k]}{[a_{ik}]} = \frac{g}{r}$. Отже, економічний сенс кожної змінної y_i — це вартість (g) одиниці ресурсу (r) i -го типу. Розмірність цільової функції двоїстої задачі: $[\omega] = [b_i] \cdot [y_i] = r \cdot \frac{g}{r} = g$. Таким чином, ω — це загальна вартість всіх ресурсів, яку треба мінімізувати за умови, що на виготовлення продукції їх треба використати не менше, ніж потрібно за технологічними умовами.

4.2. Теореми двоїстості

Теорема 4.1. Принцип взаємної двоїстості. Задача, двоїста до двоїстої (4.2), співпадає з початковою (4.1). \square

Доведення. Запишемо задачу (4.2) у такому самому вигляді, як і (4.1): щоб цільова функція максимізувалася, а нерівності були " \leq ":

$$\begin{aligned} -\omega &= (-\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \max; \\ -\mathbf{A}^T \mathbf{y} &\leq -\mathbf{c}; \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Тепер перейдемо до двоїстої задачі: поміняємо місцями вектори $-\mathbf{c}$ та $-\mathbf{b}$; транспонуємо матрицю $-\mathbf{A}^T$; замінимо в обмеженнях нерівність " \leq " на " \geq " та змінимо максимізацію цільової функції на мінімізацію:

$$\begin{aligned} -z &= (-\mathbf{c}, \mathbf{x}) \rightarrow \min; \\ -\mathbf{A} \mathbf{x} &\geq -\mathbf{b}; \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Після множення обмежень-нерівностей на -1 отримаємо початкову задачу (4.1). \square

Наслідок 4.1. Ми можемо казати про пару взаємно двоїстих задач лінійного програмування. \square

Приклад 4.1. Розв'язати графічним методом задачу лінійного програмування:

$$z = 11x_1 + 13x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 7x_2 \leq 14; \\ 5x_1 - 2x_2 \leq 25; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Побудувати двоїсту задачу і також розв'язати її графічним методом.

Розв'язання. Графічне розв'язання початкової задачі наведено на рис. 4.1. Результат: $\mathbf{x}_{\max} = \{7; 5\}$; $z_{\max} = 11 \cdot 7 + 13 \cdot 5 = 142$.

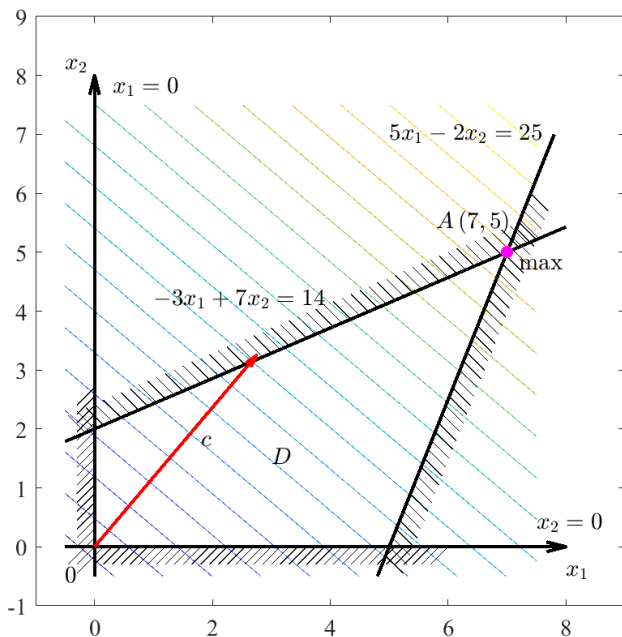


Рис. 4.1. Розв'язання початкової задачі в прикладі 4.1

Побудуємо тепер двоїсту задачу:

$$\omega = 14y_1 + 25y_2 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} -3y_1 + 5y_2 \geq 11; \\ 7y_1 - 2y_2 \geq 13; \\ y_1, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Її графічний розв'язок показаний на рис. 4.2. Тут $\mathbf{y}_{\min} = \{3; 4\}$; $\omega_{\min} = 14 \cdot 3 + 25 \cdot 4 = 142$. \square

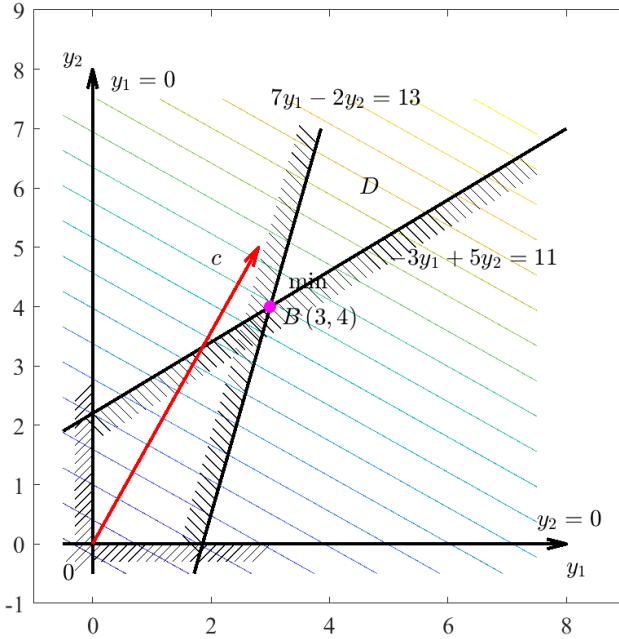


Рис. 4.2. Розв'язання двоїстої задачі в прикладі 4.1

У цьому прикладі ми бачимо, що $z_{\max} = \omega_{\min}$. Це не випадково.

Теорема 4.2. Достатня ознака оптимальності. Якщо є якісь допустимі розв'язки обох взаємно-двоїстих задач: \mathbf{x}_0 та \mathbf{y}_0 , і на цих розв'язках значення цільових функцій однакові: $z(\mathbf{x}_0) = \omega(\mathbf{y}_0)$, то ці розв'язки оптимальні: $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{\max}$ та $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_{\min}$. \square

Доведення. Точка \mathbf{x}_0 — допустима, тому $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 \leq \mathbf{b}$. Точка \mathbf{y}_0 теж допустима: її координати невід'ємні. Тому при скалярному множенні нерівності $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 \leq \mathbf{b}$ на \mathbf{y}_0 вона не зміниться: $(\mathbf{A}\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \leq (\mathbf{b}, \mathbf{y}_0) = \omega(\mathbf{y}_0)$. З іншого боку, має місце нерівність $\mathbf{A}^T \mathbf{y}_0 \geq \mathbf{c}$; і всі координати \mathbf{x}_0 теж невід'ємні, тому й тут при скалярному множенні нерівність зберігається: $(\mathbf{A}^T \mathbf{y}_0, \mathbf{x}_0) \geq (\mathbf{c}, \mathbf{x}_0) = z(\mathbf{x}_0)$. Але скаляр $(\mathbf{A}^T \mathbf{y}_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0^T \mathbf{A}^T \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_0^T \mathbf{A} \mathbf{x}_0 = (\mathbf{A}\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, тому для будь-яких допустимих $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$ має місце нерівність: $z(\mathbf{x}_0) \leq \omega(\mathbf{y}_0)$. Якщо ж ця нерівність обертається на рівність, то це свідчить про те, що z досягла свого максимуму, а ω — мінімуму. \square

Для двох наступних теорем ми дамо лише формулювання. Доведення можна знайти, наприклад, в [1].

Теорема 4.3. Перша теорема двоїстості. Ця теорема є зворотною до теореми 4.2. Якщо одна з пари взаємно-двоїстих задач має роз-

в'язок x_{\max} , z_{\max} , то й друга теж має розв'язок y_{\min} , ω_{\min} , і при цьому $z_{\max} = \omega_{\min}$. Якщо ж одна з пари взаємно-двоїстих задач має необмежену область допустимих розв'язків, і $z \rightarrow +\infty$, то друга має пусту область (обмеження-нерівності несумісні), і навпаки. \square

Теорема 4.4. Друга теорема двоїстості. Для того, щоб вектори x_0 та y_0 були розв'язками пари взаємно-двоїстих задач (4.1, 4.2), необхідно та достатньо, щоб для їхніх координат виконувалися рівності:

$$\begin{cases} \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k^{(0)} - b_i \right) y_i^{(0)} = 0; \\ i = \overline{1, m}; \end{cases} \quad (4.5)$$

та

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^m a_{ik} y_i^{(0)} - c_k \right) x_k^{(0)} = 0; \\ k = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (4.6) \quad \square$$

Сенс цих рівностей є таким. Якщо якийсь обмеження виконується як строга нерівність (дужка не дорівнює нулю), то відповідна двоїста змінна повинна дорівнювати нулю. І навпаки, якщо якась змінна строго додатна, то відповідне обмеження двоїстої задачі повинно виконуватися як строга рівність. Можливі випадки, коли обидва множники у формулах (4.5–4.6) дорівнюють нулю. Це свідчить про виродженість розв'язку (залишимо цей факт без доведення).

Існує певний зв'язок між формулами (4.5–4.6) з одного боку та невизначеними множниками Лагранжа і штрафними коефіцієнтами з іншого. Дослідження цього зв'язку виходить за межі нашого курсу.

Теорема двоїстості зручно застосовувати для знаходження розв'язку двоїстої задачі без її безпосереднього розв'язання. Для цього достатньо мати розв'язок початкової задачі.

Приклад 4.2. Для задачі з прикладу 3.3 знайти розв'язок двоїстої задачі.

Розв'язання. В прикладі 3.3 задача була записана в стандартній формі:

$$\begin{cases} z = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \max; \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 35; \\ 2x_1 + x_2 \leq 18; \\ x_1 + x_2 \leq 10; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Графічним методом (див. рис. 3.3) був знайдений її єдиний розв'язок: $x_{\max} = \{5; 5\}$; $z_{\max} = 40$. Тому за першою теоремою двоїстості можна

стверджувати, що розв'язок двоїстої задачі існує. Запишемо двоїсту задачу:

$$\omega = 35y_1 + 18y_2 + 10y_3 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3; \\ 5y_1 + y_2 + y_3 \geq 5; \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Застосуємо другу теорему двоїстості. В початковій задачі друге обмеження виконується як строга нерівність: $2x_1 + x_2 = 2 \cdot 5 + 5 = 15 < 18$; тому за (4.5) у двоїстій задачі повинно бути $y_2 = 0$. А перше та третє обмеження початкової задачі виконуються як рівності, тому y_1, y_3 можуть бути й додатними (ненульовими).

З іншого боку, в початковій задачі $x_1 = 5 > 0$ та $x_2 = 5 > 0$. Тому за (4.6) у двоїстій задачі обидва обмеження повинні виконуватися як рівності. Отже, маємо таку СЛАР:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_3 = 3; \\ 5y_1 + y_3 = 5. \end{cases}$$

Вона розв'язується усно: $y_1 = \frac{2}{3}; y_3 = \frac{5}{3}$. Маємо розв'язок двоїстої задачі: $\mathbf{y}_{\min} = \{\frac{2}{3}; 0; \frac{5}{3}\}$; $\omega_{\min} = 35 \cdot \frac{2}{3} + 18 \cdot 0 + 10 \cdot \frac{5}{3} = \frac{70}{3} + \frac{50}{3} = \frac{120}{3} = 40 = z_{\max}$. \square

4.3. Несиметричні двоїсті задачі

У симетричному випадку двоїста задача записувалася в такій самій формі, як і початкова, тільки максимум мінявся на мінімум, а нерівність " \leq " на " \geq ". Симетричний запис підходить для задачі лінійного програмування в стандартній формі.

Для задач лінійного програмування в канонічній та загальній формах двоїста задача має несиметричний вигляд. Запишемо їх без виведення.

Нехай початкова задача записана в канонічній формі (2.10, 2.12). Для неї двоїста задача має вигляд:

$$\begin{aligned} \omega &= (\mathbf{b}, \mathbf{y}) \rightarrow \min; \\ \mathbf{A}^T \mathbf{y} &\geq \mathbf{c}; \\ \forall y_i &- \text{довільного знаку.} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Для задачі лінійного програмування в загальній формі (2.8), якщо $z \rightarrow \max$, двоїста до неї записується так:

$$\begin{aligned}
& \omega = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m \rightarrow \min; \\
& \left\{ \begin{array}{l}
a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \dots + a_{l1} y_l + a_{l+1,1} y_{l+1} + \dots + \\
\quad + a_{l+m,1} y_{l+m} \geq c_1; \\
a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{l2} y_l + a_{l+1,2} y_{l+1} + \dots + \\
\quad + a_{l+m,2} y_{l+m} \geq c_2; \\
\dots \\
a_{1s} y_1 + a_{2s} y_2 + \dots + a_{ls} y_l + a_{l+1,s} y_{l+1} + \dots + \\
\quad + a_{l+m,s} y_{l+m} \geq c_s; \\
a_{1,s+1} y_1 + a_{2,s+1} y_2 + \dots + a_{l,s+1} y_l + a_{l+1,s+1} y_{l+1} + \dots + \\
\quad + a_{l+m,s+1} y_{l+m} \geq c_{s+1}; \\
\dots \\
a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \dots + a_{ln} y_l + a_{l+1,n} y_{l+1} + \dots + \\
\quad + a_{l+m,n} y_{l+m} \geq c_n; \\
y_1, y_2, \dots, y_l - \text{довільного знаку}; \\
y_{l+1}, y_{l+2}, \dots, y_{l+m} \geq 0.
\end{array} \right. \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Правило запису двоїстої задачі.

1. Поміняти місцями вектори \mathbf{b} та \mathbf{c} .
2. Транспонувати матрицю \mathbf{A} .
3. Замінити в обмеженнях і рівність "=", і нерівність " \leq " на " \geq ".
4. Змінити максимізацію цільової функції на мінімізацію.
5. Для обмежень-рівностей початкової задачі відповідні двоїсті змінні можуть бути довільного знаку, а для обмежень-нерівностей — невід'ємні.

Приклад 4.3. При розв'язанні задачі з прикладу 3.3 симплекс-методом ми зводили її до канонічної форми. Записати для неї двоїсту задачу, розв'язати її за допомогою теорем двоїстості та порівняти з розв'язком прикладу 4.2.

Розв'язання. Канонічна форма задачі з прикладу 4.2 є такою:

$$\begin{aligned}
z &= 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \max; \\
\left\{ \begin{array}{l}
2x_1 + 5x_2 + x_3 = 35; \\
2x_1 + x_2 + x_4 = 18; \\
x_1 + x_2 + x_5 = 10; \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.
\end{array} \right.
\end{aligned}$$

Запишемо несиметричну двоїсту задачу в формі (4.7):

$$\omega = 35y_1 + 18y_2 + 10y_3 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3; \\ 5y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 5; \\ y_1 \geq 0; \\ y_2 \geq 0; \\ y_3 \geq 0; \\ y_1, y_2, y_3 - \text{довільного знаку.} \end{cases}$$

Бачимо, що додавання балансних змінних у початковій задачі призводить до умов невід'ємності у двоїстій. Тому розв'язання двоїстої задачі буде таким самим, як і в прикладі 4.2, і відповідь буде такою самою: $\mathbf{y}_{\min} = \{\frac{2}{3}; 0; \frac{5}{3}\}$; $\omega_{\min} = 40$. \square

Приклад 4.4. За допомогою переходу до двоїстої задачі та графічного методу розв'язати таку задачу лінійного програмування:

$$\begin{cases} z = -4x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 \rightarrow \max; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 8; \\ -4x_1 + 7x_2 - x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7; \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

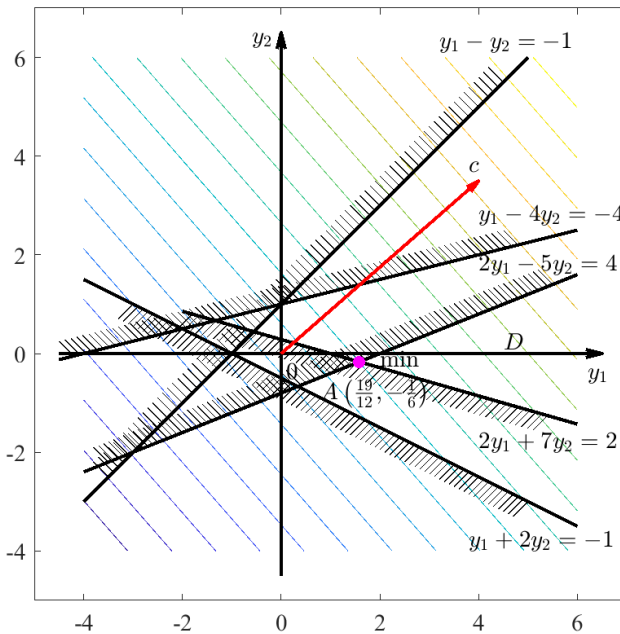


Рис. 4.3. Розв'язання двоїстої задачі в прикладі 4.4

Розв'язання. Задача записана в канонічній формі. Двоїста задача має вигляд:

$$\omega = 8y_1 + 7y_2 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} y_1 - 4y_2 \geq -4; \\ 2y_1 + 7y_2 \geq 2; \\ y_1 - y_2 \geq -1; \\ 2y_1 - 5y_2 \geq 4; \\ y_1 + 2y_2 \geq -1; \\ y_1, y_2 - \text{довільного знаку.} \end{cases}$$

Розв'язуємо її графічним методом (рис. 4.3). Точка мінімуму знаходиться на перетині ліній другого та четвертого обмежень:

$$\begin{cases} 2y_1 + 7y_2 = 2; \\ 2y_1 - 5y_2 = 4. \end{cases}$$

Ця СЛАР розв'язується усно та дає: $y_1 = \frac{19}{12}$; $y_2 = -\frac{1}{6}$. Мінімальне значення цільової функції $\omega_{\min} = 8 \cdot \frac{19}{12} + 7 \cdot (-\frac{1}{6}) = \frac{76}{6} - \frac{7}{6} = \frac{69}{6} = 11.5$.

Розв'язок двоїстої задачі існує, тому за першою теоремою двоїстості існує й розв'язок початкової задачі. Перше, третє та п'яте обмеження двоїстої задачі виконуються як строгі нерівності, тому за другою теоремою двоїстості в початковій задачі $x_1 = x_3 = x_5 = 0$. Дві інші змінні знаходимо з розв'язання СЛАР обмежень:

$$\begin{cases} 2x_2 + 2x_4 = 8; \\ 7x_2 - 5x_4 = 7. \end{cases}$$

І ця СЛАР розв'язується усно: $x_2 = \frac{9}{4}$; $x_4 = \frac{7}{4}$. Маємо таку відповідь: вектор розв'язку $\mathbf{x}_{\max} = \{0; \frac{9}{4}; 0; \frac{7}{4}; 0\}$; $z_{\max} = -4 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{9}{4} - 1 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{7}{4} - 1 \cdot 0 = \frac{18}{4} + \frac{28}{4} = \frac{46}{4} = 11.5 = \omega_{\min}$.

Перевіримо цей розв'язок за допомогою симплекс-методу. Спочатку знайдемо допустимий опорний розв'язок СЛАР обмежень:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 8 \\ -4 & 7 & -1 & -5 & 2 & 7 \end{array} \right) e_2 + 4e_1 \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 15 & 3 & 3 & 6 & 39 \end{array} \right) e_2/6 \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{13}{2} \end{array} \right) e_1 - e_2 \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{13}{2} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Отримали допустимий опорний розв'язок: базисні змінні x_1, x_5 ; всі праві частини невід'ємні. Заповнюємо симплекс-таблиці. Перша з них — це табл. 4.1. Далі — друга та третя.

Отримали той самий розв'язок: $\mathbf{x}_{\max} = \{0; \frac{9}{4}; 0; \frac{7}{4}; 0\}$; $z_{\max} = 11.5$. \square

4.4. Запитання для перевірки

1. Як записується симетрична двоїста задача?
2. Як записується несиметрична двоїста задача?
3. Як формуються та доводяться теореми двоїстості?

4. Як використовуються теореми двоїстості для розв'язання задачі лінійного програмування?

Табл. 4.1. Перша симплекс-таблиця в прикладі 4.4

c_k		-4	2	-1	4	-1	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
c_{Bi}	x_{Bi}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
-4	x_1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$1 \rightarrow$
-1	x_5	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{13}{2}$	13
Δz_k		\times	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{21}{2} \uparrow$	\times	$z = -12.5$	

Табл. 4.2. Друга симплекс-таблиця в прикладі 4.4

c_k		-4	2	-1	4	-1	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
c_{Bi}	x_{Bi}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
4	x_4	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	1	-3
-1	x_5	$-\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	6	$\frac{9}{4} \rightarrow$
Δz_k		-7	$6 \uparrow$	-2	\times	\times	$z = -2$	

Табл. 4.3. Третя симплекс-таблиця в прикладі 4.4

c_k		-4	2	-1	4	-1	b_i
c_{Bi}	x_{Bi}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
4	x_4	$\frac{5}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{4}$
2	x_2	$-\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{4}$
Δz_k		$-\frac{25}{4}$	\times	$-\frac{11}{4}$	\times	$-\frac{9}{4}$	$z = 11.5$

5. Транспортна задача лінійного програмування

Приклад транспортної задачі — це 2.2. У цьому розділі розглядаються методи її розв'язання.

5.1. Постановка задачі

Означення 5.1. Є m постачальників продукції (наприклад, складів) з запасами продукції $a_1, a_2, \dots, a_m; \forall a_i \geq 0$. Є n споживачів цієї продукції (наприклад, магазинів) з потребами $b_1, b_2, \dots, b_n; \forall b_j \geq 0$. Відома також матриця вартостей перевезень C розміром $m \times n$, кожен компонент якої $c_{ij} \geq 0$ — вартість перевезення одиниці продукції від i -го постачальника до j -го споживача. Треба розвезти максимально можливу кількість продукції за мінімальну вартість. \square

Позначимо весь запас продукції:

$$\sum_{i=1}^m a_i = A \quad (5.1)$$

та всі потреби в ній:

$$\sum_{j=1}^n b_j = B. \quad (5.2)$$

Означення 5.2. Транспортна задача називається *закритою*, якщо $A = B$, і *відкритою*, якщо $A \neq B$. \square

У закритій транспортній задачі треба перевезти весь вантаж, а у відкритій — його максимально можливу кількість, яка дорівнює $\min(A, B)$.

Відкриту транспортну задачу завжди можна звести до закритої.

Правило 5.1. Правило закриття транспортної задачі. Якщо $A > B$, то додаємо додаткового фіктивного споживача з потребою $A - B$ та нульовими вартостями перевезень до нього. Якщо ж $A < B$, то додаємо додаткового фіктивного постачальника з запасом $B - A$ та нульовими вартостями перевезень від нього. \square

Отже, надалі будемо закривати відкриті транспортні задачі та розглядати лише закриті, де треба перевезти весь вантаж.

Надамо математичне формулювання закритої транспортної задачі. Позначимо невідомі x_{ij} — кількість вантажу, яку треба перевезти від i -го постачальника до j -го споживача. Ці змінні утворюють матрицю X розміром $m \times n$:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Компоненти матриці \mathbf{X} можуть бути й дрібними, але вони невід'ємні:

$$\forall x_{ij} \geq 0. \quad (5.4)$$

Оскільки треба вивезти всю продукцію, то й від кожного постачальника треба вивезти весь його запас:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i; \\ i = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (5.5)$$

Розвозиться вся продукція, тому й кожен споживач отримує потрібну кількість товару:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j; \\ j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (5.6)$$

Цільова функція в транспортній задачі — це загальна вартість перевезень, яку треба мінімізувати:

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min. \quad (5.7)$$

Є лінійна цільова функція (5.7), лінійні обмеження-рівності (5.5–5.6) та умови невід'ємності змінних (5.4). Отже, маємо задачу лінійного програмування в канонічній формі (якщо змінити знак у цільової функції).

Зазвичай всі дані транспортної задачі записують у таблицю за наступними правилами:

- лівий стовпчик — запаси a_i ;
- верхній рядок — потреби b_j ;
- в інших комірках — об'єми перевезень x_{ij} , і додатково в верхньому правому кутку — вартості перевезень c_{ij} , відділені дужкою.

Далі ми побачимо, що таблиця транспортної задачі — це фактично симплекс-таблиця: ми будемо в ній вводити якусь змінну в базис та звільняти якусь базисну.

Приклад 5.1. Є два склади з запасами 40 та 60 одиниць товару. Товар треба розвезти в три магазини, потреби яких складають 20, 30 та 50 одиниць товару відповідно. Матриця вартостей перевезень:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Записати таблицю транспортної задачі.

Розв'язання. Загальні запаси дорівнюють загальним потребам — це замкнута транспортна задача. Фіктивних постачальників і споживачів вводити не треба. Маємо табл. 5.1.

Табл. 5.1. Таблиця транспортної задачі в прикладі 5.1

$a_i \backslash b_j$	20	30	50
40	$x_{11}^{(2)}$	$x_{12}^{(4)}$	$x_{13}^{(5)}$
60	$x_{21}^{(3)}$	$x_{22}^{(5)}$	$x_{23}^{(8)}$

За (5.4–5.7) математична постановка задачі є такою:

$$z = 2x_{12} + 4x_{12} + 5x_{13} + 3x_{21} + 5x_{22} + 8x_{23} \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 60; \\ x_{11} + x_{21} = 20; \\ x_{12} + x_{22} = 30; \\ x_{13} + x_{23} = 50; \\ \forall x_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

Цю задачу можна розв'язати, наприклад, симплекс методом. Зробіть це самостійно. Її розв'язок:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 40 \\ 20 & 30 & 10 \end{pmatrix}; \quad z_{\min} = 490. \quad \square$$

5.2. Особливості транспортної задачі

Розглянемо деякі теореми для транспортних задач. Будемо вважати задачу закритою ($A = B$).

Теорема 5.1. Область допустимих розв'язків (5.4–5.6) обмежена. \square

Доведення. За (5.4) всі змінні обмежені знизу: $\forall x_{ij} \geq 0$. З іншого боку, ми не можемо взяти від постачальника більше продукції, ніж у нього є, і надати споживачу більше, ніж йому треба. Тому кожна змінна обмежена й зверху: $\forall x_{ij} \leq \min(a_i, b_j)$. \square

Теорема 5.2. Область допустимих розв'язків (5.4–5.6) непуста. \square

Доведення. Розглянемо такі значення змінних: $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A}$. Ці значення невід'ємні: (5.4) виконується. Перевіримо (5.5):

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \frac{a_i}{A} \sum_{j=1}^n b_j = \frac{a_i}{A} \cdot B = a_i.$$

Тепер перевіряємо (5.6):

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = \frac{b_j}{A} \sum_{i=1}^m a_i = \frac{b_j}{A} \cdot A = b_j.$$

Всі обмеження (5.4–5.6) виконуються, тому значення $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A}$ є допустимими розв'язками. Оскільки допустимі розв'язки існують, то їхня область є не пустою. \square

Зауваження. Допустимі розв'язки $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A}$ не є допустимими *опорними* розв'язками: це не кутова точка симплексу, а якась його внутрішня точка. Знаходження допустимого опорного розв'язку буде розглянуте далі, в підрозділі 5.3.

Висновок з теорем 5.1 та 5.2. Оптимальний план перевезень завжди існує!

Для подальших теорем нам треба записати в матричному вигляді систему рівнянь-обмежень (5.5–5.6). Будемо нумерувати змінні x_{ij} за рядками: $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}$. Система рівнянь-обмежень тоді може бути записана як $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. У прикладі 5.1 матриця \mathbf{A} виглядає так:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

В загальному випадку це буде матриця розміром $(m+n) \times (mn)$. У кожному її стовпчику рівно дві одиниці: одна — у перших m рядках, друга — в останніх n рядках. У перших m рядках одиниці йдуть підряд, порціями по n штук. А останні n рядків утворені з m блоків — одиничних матриць розміром $n \times n$. Загальний вигляд матриці \mathbf{A} — це (5.9).

Для цієї СЛАР вектор-стовпчик правих частин довжини $m+n$ буде мати вигляд: $\mathbf{b} = \{a_1; a_2; \dots; a_m; b_1; b_2; \dots; b_n\}$.

Теорема 5.3. $\text{rg} \mathbf{A} = m + n - 1$. \square

Доведення. Для $m \geq 2$; $n \geq 2$; але для $m+n > 4$ добуток завжди буде більше суми: $mn > m+n$. Тому ранг матриці \mathbf{A} визначається меншим з цих чисел — кількістю лінійно-незалежних рядків.

Сума перших m рядків матриці \mathbf{A} — це рядок з одиниць довжини mn . Сума останніх n рядків — такий самий. Отже, між рядками матриці \mathbf{A} є принаймні один лінійний зв'язок. Наприклад, можна вважати, що останній рядок \mathbf{A} дорівнює сумі перших m рядків мінус сума всіх наступних, крім останнього. Як наслідок, $\text{rg} \mathbf{A}$ не може дорівнювати $m+n$: цей ранг принаймні на одиницю менше.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Доведемо тепер, що ранг матриці \mathbf{A} в точності дорівнює $m+n-1$. Для цього побудуємо з компонентів матриці \mathbf{A} мінор порядку $m+n-1$, відмінний від нуля. Візьмемо рядки з першого по передостанній (їх як раз буде $m+n-1$), і стовпці з такими номерами: $n, 2n, 3n, \dots, mn, 1, 2, 3, \dots, n-1$; усього $m+n-1$ стовпців. Отримаємо такий мінор порядку $m+n-1$:

$$M_{m+n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}. \quad (5.10)$$

Це визначник верхньо-правої трикутної матриці, він дорівнює добутку елементів головної діагоналі, тобто одиниці. Оскільки у матриці \mathbf{A} існує мінор порядку $m+n-1$, який не дорівнює нулю, то $\text{rg } \mathbf{A} = m+n-1$. \square

Теорема 5.4. Будь-який мінор матриці \mathbf{A} може дорівнювати тільки одному з трьох значень: або 0, або 1, або -1 . \square

Доведення будуємо за індукцією. Усі мінори першого порядку — це компоненти матриці \mathbf{A} . Всі вони дорівнюють або 0, або 1.

Припустимо, що всі мінори порядку l дорівнюють або 0, або 1, або -1 . Розглянемо мінор порядку $l+1$. У кожному його стовпчику може бути не більше двох одиниць (стільки їх є в матриці \mathbf{A}), а решта нулі.

Якщо в M_{l+1} є стовпчик, у якому лише нулі, то $M_{l+1} = 0$.

Якщо в M_{l+1} є стовпчик, у якому лише одна одиниця, то його можна розкрити за елементами цього стовпчика: $M_{l+1} = \pm 1 \cdot M_l$, що за нашим припущенням дорівнює або 0, або 1, або -1 .

Якщо в M_{l+1} в усіх стовпчиках по дві одиниці, то такий визначник завжди можна розділити горизонтальною лінією на дві частини так, що у верхній частині буде по одній одиниці в кожному стовпчику, і в нижній по одній. Дійсно: верхні r рядків вибрані з перших m рядків матриці \mathbf{A} , де міститься по одній одиниці в кожному стовпчику, а нижні $s-3$ з останніх n рядків матриці \mathbf{A} , де теж міститься по одній одиниці. Тоді в M_{l+1} сума перших r рядків дає рядок з усіх одиниць, і сума останніх r рядків дає те ж саме. Рядки M_{l+1} лінійно-залежні, отже $M_{l+1} = 0$. \square

Висновок з теореми 5.4. Якщо всі запаси a_i та всі потреби b_j цілочисельні, то оптимальний план перевезень теж буде цілочисельним. \square

Доведення. У будь-якому розв'язку СЛАР $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, у тому числі й допустимому опорному, координати можна обчислити за формулами Крамера як $\frac{\Delta_i}{\Delta}$. Головний визначник Δ — це один з ненульових мінорів

матриці \mathbf{A} ; він дорівнює ± 1 . Допоміжні визначники Δ_i утворюються з головного заміною одного стовпчика на праві частини. Праві частини — це числа a_i, b_j , які є цілими. Алгебраїчні доповнення для них — це мінори матриці \mathbf{A} , які дорівнюють або 0, або 1, або -1 . Отже, всі Δ_i будуть цілочисельними, і всі $\frac{\Delta_i}{\Delta}$ також. \square

Зауваження. Для звичайної задачі лінійного програмування цілочисельність компонент матриці \mathbf{A} та координат вектора \mathbf{b} не гарантує цілочисельність розв'язку, як ми бачили в прикладі 4.4. Щоб отримати цілочисельний розв'язок, треба застосовувати спеціальні прийоми, які ми розглянемо в розділі 6. А в транспортній задачі в силу специфіки структури матриці (5.9) цілочисельність a_i, b_j призводить до цілочисельності x_{ij} .

5.3. Допустимі опорні розв'язки в транспортній задачі

Щоб запустити симплекс-метод, треба мати якийсь допустимий опорний розв'язок СЛАР $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, у якому f вільних змінних нульові, а r базисних дорівнюють невід'ємним правим частинам. З огляду на структуру матриці \mathbf{A} (5.9) такий розв'язок отримати неважко. Принцип заповнення таблиці транспортної задачі потрібними значеннями x_{ij} є таким. Комірки заповнюються поступово. На кожному кроці комірка для заповнення обирається за певними правилами, в залежності від методу, які ми розглянемо далі. Коли комірка обрана, її змінна x_{ij} заповнюється за максимумом. Ми дивимось, скільки вантажу ще залишилося у i -го постачальника з тих a_i , що в нього були спочатку. І дивимось, скільки ще потрібно надати j -му споживачу, щоб досягнути потрібної величини b_j . Найменше з цих двох чисел — це й буде значення x_{ij} . Після такого заповнення x_{ij} або у i -го постачальника нічого не залишиться, або j -му споживачу вже нічого не буде потрібно. В першому випадку всі інші комірки i -го рядку звільняються, тобто змінні в них будуть вільними: $x_{ik} = 0$. В другому звільняються всі інші комірки j -го стовпчика: в них буде $x_{kj} = 0$. Отже, на кожному кроці, крім останнього, заповнюється одна базисна змінна, а звільняється або рядок, або стовпчик. Тільки на останньому кроці заповнюється остання базисна клітинка, а звільняти вже нічого. Усього кроків буде $m - 1 + n - 1 + 1 = m + n - 1$. Як раз стільки базисних змінних буде заповнено невід'ємними числами.

Може так статися, що на якомусь кроці залишок a_i буде дорівнювати залишку b_j , і при заповненні цим числом комірки x_{ij} звільняються водночас і рядок, і стовпчик. Це свідчить про виродженість розв'язку (див. підрозділ 3.4.3). В цьому випадку звільняємо або тільки рядок, або тільки стовпчик, а на наступному кроці отримуємо нульову базисну змінну. Щоб розрізнити в таблиці транспортної задачі базисні нулі та вільні змінні (вони теж нульові), базисні нулі позначають нулем: 0, а вільні —

хрестиком: \times .

Приклад 5.2. Є чотири постачальника з запасами вантажу

$$a = \{40; 90; 90; 40\}.$$

У цього товару є п'ять споживачів з потребами

$$b = \{80; 50; 60; 20; 50\}.$$

Матриця вартостей перевезень є такою:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 & 10 & 4 \\ 10 & 7 & 9 & 6 & 5 \\ 7 & 3 & 6 & 4 & 12 \\ 6 & 3 & 11 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Створити початкові допустимі опорні розв'язки (плани перевезень) різними методами.

Розв'язання. Перевіримо транспортну задачу на відкритість:

$$m = 4; n = 5;$$

$$\sum_{i=1}^m a_i = 40 + 90 + 90 + 40 = 260; \quad \sum_{j=1}^n b_j = 80 + 50 + 60 + 20 + 50 = 260.$$

Транспортна задача замкнута, додавати фіктивних постачальників або споживачів не треба.

Створимо шаблон для таблиці цієї транспортної задачі (табл. 5.2).

Далі будемо заповнювати цю таблицю різними методами.

Табл. 5.2. Шаблон таблиці транспортної задачі в прикладі 5.2

$a_i \backslash b_j$	80	50	60	20	50
40	(5)	(8)	(3)	(10)	(4)
90	(10)	(7)	(9)	(6)	(5)
90	(7)	(3)	(6)	(4)	(12)
40	(6)	(3)	(11)	(5)	(4)

5.3.1. Метод північно-західного кута

В цьому методі комірка для заповнення на черговому кроці обирається дуже просто: це ліва верхня комірка серед ще не заповнених. Заповнимо цим методом табл. 5.2.

Крок 1. Ще нічого не заповнено. Тому ліва верхня комірка серед ще не заповнених — це x_{11} . У першого постачальника є 40 одиниць вантажу, і в нього ще нічого не взято. Першому споживачу потрібно 80 одиниць, і йому ще нічого не надано. Мінімальне з цих чисел це 40. Отже, $x_{11} = 40$. У

першого постачальника весь товар закінчився, тому інші змінні першого рядка звільняються (табл. 5.3)

Табл. 5.3. Метод північно-західного кута, крок 1

$a_i \backslash b_j$	80	50	60	20	50
40	$40^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	(10)	(7)	(9)	(6)	(5)
90	(7)	(3)	(6)	(4)	(12)
40	(6)	(3)	(11)	(5)	(4)

Крок 2. Серед незаповнених комірок ліва верхня — це x_{21} . У другого постачальника є 90 одиниць товару, але першому споживачу потрібно лише 40 одиниць, бо інші 40 він вже отримав. Надаємо $x_{21} = 40$. Після цього перший споживач отримав необхідну кількість товару, тому перший стовпчик звільняємо (табл. 5.4).

Табл. 5.4. Метод північно-західного кута, крок 2

$a_i \backslash b_j$	80	50	60	20	50
40	$40^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	$40^{(10)}$	(7)	(9)	(6)	(5)
90	$\times^{(7)}$	(3)	(6)	(4)	(12)
40	$\times^{(6)}$	(3)	(11)	(5)	(4)

Крок 3. Ліва верхня незаповнена комірка — це x_{22} . У другого постачальника залишилося $90 - 40 = 50$ одиниць товару, і стільки ж потрібно другому споживачу. Надаємо $x_{22} = 50$. Доступні для звільнення і рядок, і стовпчик, але ми можемо звільнити тільки щось одне. Звільнимо, наприклад, другий рядок (табл. 5.5).

Крок 4. Ліва верхня незаповнена комірка — це x_{32} . У третього постачальника залишилося 90 одиниць товару, а другому споживачу вже нічого не потрібно. Тому надаємо $x_{32} = 0$. Це базисний нуль, тому отриманий розв'язок буде виродженим. Другий споживач повністю забезпечений, тому звільняємо другий стовпчик (табл. 5.6).

Крок 5. Заповнюємо x_{33} . Залишок ресурсу у третього постачальника 90, залишок потреба у третього споживача 60. Надаємо $x_{33} = 60$ та звільняємо третій стовпчик (табл. 5.7).

Табл. 5.5. Метод північно-західного кута, крок 3

$a_i \setminus b_j$	80	50	60	20	50
40	$40^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	$40^{(10)}$	$50^{(7)}$	$\times^{(9)}$	$\times^{(6)}$	$\times^{(5)}$
90	$\times^{(7)}$	(3)	(6)	(4)	(12)
40	$\times^{(6)}$	(3)	(11)	(5)	(4)

Табл. 5.6. Метод північно-західного кута, крок 4

$a_i \setminus b_j$	80	50	60	20	50
40	$40^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	$40^{(10)}$	$50^{(7)}$	$\times^{(9)}$	$\times^{(6)}$	$\times^{(5)}$
90	$\times^{(7)}$	0 ⁽³⁾	(6)	(4)	(12)
40	$\times^{(6)}$	$\times^{(3)}$	(11)	(5)	(4)

Крок 6. Заповнюємо x_{34} . Залишок ресурсу у третього постачальника $90 - 60 = 30$, залишок потреб у четвертого споживача 20. Надаємо $x_{34} = 20$. Звільняємо четвертий стовпчик (табл. 5.8).

Крок 7. Заповнюємо x_{35} . Залишок ресурсу у третього постачальника $90 - 60 - 20 = 10$, залишок потреб у четвертого споживача 50. Надаємо $x_{35} = 10$. Звільняємо третій рядок, але вже нема чого звільняти (табл. 5.9).

Крок 8, останній. Залишилося заповнити $x_{45} = 40$. Звільняти вже нема чого (табл. 5.10).

Таблиця заповнена. Сума значень x_{ij} у будь-якому i -му рядку до-

Табл. 5.7. Метод північно-західного кута, крок 5

$a_i \setminus b_j$	80	50	60	20	50
40	$40^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	$40^{(10)}$	$50^{(7)}$	$\times^{(9)}$	$\times^{(6)}$	$\times^{(5)}$
90	$\times^{(7)}$	0 ⁽³⁾	$60^{(6)}$	(4)	(12)
40	$\times^{(6)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(11)}$	(5)	(4)

Табл. 5.8. Метод північно-західного кута, крок 6

$a_i \backslash b_j$	80	50	60	20	50
40	$40^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	$40^{(10)}$	$50^{(7)}$	$\times^{(9)}$	$\times^{(6)}$	$\times^{(5)}$
90	$\times^{(7)}$	$0^{(3)}$	$60^{(6)}$	$20^{(4)}$	(12)
40	$\times^{(6)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(11)}$	$\times^{(5)}$	(4)

Табл. 5.9. Метод північно-західного кута, крок 7

$a_i \backslash b_j$	80	50	60	20	50
40	$40^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	$40^{(10)}$	$50^{(7)}$	$\times^{(9)}$	$\times^{(6)}$	$\times^{(5)}$
90	$\times^{(7)}$	$0^{(3)}$	$60^{(6)}$	$20^{(4)}$	$10^{(12)}$
40	$\times^{(6)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(11)}$	$\times^{(5)}$	(4)

рівнює a_i ; у будь-якому j -му стовпчику b_j . Усього маємо $r = m + n - 1 = 8$ базисних комірок (у тому числі один базисний нуль). Решта змінних — вільні, тобто теж нульові. Отже, отримали допустимий опорний розв'язок транспортної задачі. Його можна використовувати як початковий у симплекс-методі. Значення цільової функції в цій таблиці обчислюється за базисними комірками: $z = 40 \cdot 5 + 40 \cdot 10 + 50 \cdot 7 + 0 \cdot 3 + 60 \cdot 6 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 12 + 40 \cdot 4 = 200 + 400 + 350 + 0 + 360 + 80 + 120 + 160 = 1670$.

Табл. 5.10. Метод північно-західного кута, крок 8

$a_i \backslash b_j$	80	50	60	20	50
40	$40^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	$40^{(10)}$	$50^{(7)}$	$\times^{(9)}$	$\times^{(6)}$	$\times^{(5)}$
90	$\times^{(7)}$	$0^{(3)}$	$60^{(6)}$	$20^{(4)}$	$10^{(12)}$
40	$\times^{(6)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(11)}$	$\times^{(5)}$	$40^{(4)}$

5.3.2. Метод мінімальної вартості

Цей метод є реалізацією жадібно-го алгоритму. Комірка для заповнення x_{ij} обирається з умови, що в ній вартість перевезень c_{ij} найменша серед ще не заповнених. Якщо таких комірок кілька, обирається та, куди можна вмістити найбільшу кількість вантажу.

Відразу зауважимо, що в транспортній задачі застосування жадібно-го алгоритму не гарантує отримання відразу оптимального розв'язку!

Заповнимо методом мінімальної вартості табл. 5.2.

Крок 1. Найменша вартість $c_{13} = c_{32} = c_{42} = 3$. В комірку x_{13} можна внести $\min(40, 60) = 40$ одиниць вантажу, в $x_{32} - \min(90, 50) = 50$, і в $x_{42} - \min(40, 50) = 40$. Найбільше з цих чисел 50, тому заповнюємо $x_{32} = 50$ і звільняємо другий стовпчик (табл. 5.11).

Табл. 5.11. Метод мінімальної вартості, крок 1

$a_i \backslash b_j$	80	50	60	20	50
40	(5)	$\times(8)$	(3)	(10)	(4)
90	(10)	$\times(7)$	(9)	(6)	(5)
90	(7)	$50^{(3)}$	(6)	(4)	(12)
40	(6)	$\times(3)$	(11)	(5)	(4)

Крок 2. Серед ще не заповнених комірок найменша вартість $c_{13} = 3$. В комірку x_{13} можна внести $\min(40, 60) = 40$ одиниць вантажу. Заповнюємо $x_{13} = 40$ і звільняємо перший рядок (табл. 5.12).

Табл. 5.12. Метод мінімальної вартості, крок 2

$a_i \backslash b_j$	80	50	60	20	50
40	$\times(5)$	$\times(8)$	$40^{(3)}$	$\times(10)$	$\times(4)$
90	(10)	$\times(7)$	(9)	(6)	(5)
90	(7)	$50^{(3)}$	(6)	(4)	(12)
40	(6)	$\times(3)$	(11)	(5)	(4)

Крок 3. Серед ще не заповнених комірок найменша вартість $c_{34} = c_{45} = 4$. В комірку x_{34} можна внести $\min(90 - 50, 20) = 20$ одиниць вантажу, а в комірку $x_{45} - \min(40, 50) = 40$. Заповнюємо $x_{45} = 40$ і звільняємо четвертий рядок (табл. 5.13).

Табл. 5.13. Метод мінімальної вартості, крок 3

$a_i \backslash b_j$	80	50	60	20	50
40	$\times^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$40^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	(10)	$\times^{(7)}$	(9)	(6)	(5)
90	(7)	$50^{(3)}$	(6)	(4)	(12)
40	$\times^{(6)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(11)}$	$\times^{(5)}$	$40^{(4)}$

Крок 4. Серед ще не заповнених комірок найменша вартість $c_{34} = 4$. В комірку x_{34} можна внести $\min(90 - 50, 20) = 20$ одиниць вантажу. Вносимо їх: $x_{34} = 20$. Звільняємо четвертий стовпчик (табл. 5.14).

Табл. 5.14. Метод мінімальної вартості, крок 4

$a_i \backslash b_j$	80	50	60	20	50
40	$\times^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$40^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	(10)	$\times^{(7)}$	(9)	$\times^{(6)}$	(5)
90	(7)	$50^{(3)}$	(6)	$20^{(4)}$	(12)
40	$\times^{(6)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(11)}$	$\times^{(5)}$	$40^{(4)}$

Крок 5. Серед ще не заповнених комірок найменша вартість $c_{25} = 5$. В комірку x_{25} можна внести $\min(90, 50 - 40) = 10$ одиниць вантажу. Вносимо їх: $x_{25} = 10$. Звільняємо п'ятий стовпчик (табл. 5.15).

Табл. 5.15. Метод мінімальної вартості, крок 5

$a_i \backslash b_j$	80	50	60	20	50
40	$\times^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$40^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	(10)	$\times^{(7)}$	(9)	$\times^{(6)}$	$10^{(5)}$
90	(7)	$50^{(3)}$	(6)	$20^{(4)}$	$\times^{(12)}$
40	$\times^{(6)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(11)}$	$\times^{(5)}$	$40^{(4)}$

Крок 6. Серед ще не заповнених комірок найменша вартість $c_{33} = 6$. В комірку x_{33} можна внести $\min(90 - 50 - 20, 60 - 40) = \min(20, 20) = 20$ одиниць вантажу. Вносимо їх: $x_{33} = 20$. Можна звільнити і третій рядок,

і третій стовпчик (розв'язок буде виродженим). Звільнятимемо там, де більше вартість. У третьому рядку залишиться $c_{31} = 7$, а в третьому стовпчику $c_{23} = 9$. Звільняємо третій стовпчик, тому що там більша вартість перевезень (табл. 5.16).

Табл. 5.16. Метод мінімальної вартості, крок 6

$a_i \backslash b_j$	80	50	60	20	50
40	$\times^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$40^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	$^{(10)}$	$\times^{(7)}$	$\times^{(9)}$	$\times^{(6)}$	$10^{(5)}$
90	$^{(7)}$	$50^{(3)}$	$20^{(6)}$	$20^{(4)}$	$\times^{(12)}$
40	$\times^{(6)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(11)}$	$\times^{(5)}$	$40^{(4)}$

Крок 7. Серед ще не заповнених комірок найменша вартість $c_{31} = 7$. В комірку x_{31} можна внести $\min(90 - 50 - 20 - 20, 80) = 0$ одиниць вантажу (базисний нуль). Вносимо їх: $x_{31} = 0$. Звільняємо третій рядок (власне, там нічого звільняти) — табл. 5.17.

Табл. 5.17. Метод мінімальної вартості, крок 7

$a_i \backslash b_j$	80	50	60	20	50
40	$\times^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$40^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	$^{(10)}$	$\times^{(7)}$	$\times^{(9)}$	$\times^{(6)}$	$10^{(5)}$
90	$0^{(7)}$	$50^{(3)}$	$20^{(6)}$	$20^{(4)}$	$\times^{(12)}$
40	$\times^{(6)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(11)}$	$\times^{(5)}$	$40^{(4)}$

Крок 8, останній. Підводимо баланс: $x_{21} = 80$ (табл. 5.18).

Табл. 5.18. Метод мінімальної вартості, крок 8

$a_i \backslash b_j$	80	50	60	20	50
40	$\times^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$40^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	$80^{(10)}$	$\times^{(7)}$	$\times^{(9)}$	$\times^{(6)}$	$10^{(5)}$
90	$0^{(7)}$	$50^{(3)}$	$20^{(6)}$	$20^{(4)}$	$\times^{(12)}$
40	$\times^{(6)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(11)}$	$\times^{(5)}$	$40^{(4)}$

Таблицю заповнено. Маємо $m+n-1 = 8$ базисних комірок, включаючи базисний нуль, баланс відправлень та отримань вантажу виконується. Значення цільової функції: $z = 40 \cdot 3 + 80 \cdot 10 + 10 \cdot 5 + 0 \cdot 7 + 50 \cdot 3 + 20 \cdot 6 + 20 \cdot 4 + 40 \cdot 4 = 120 + 800 + 50 + 0 + 150 + 120 + 80 + 160 = 1480$. Це краще, ніж у методі північно-західного кута.

5.3.3. Метод подвійної переваги

Цей метод є покращеною модифікацією методу мінімальної вартості. На поточному кроці спочатку позначаємо комірки, що містять найменшу вартість перевезень у рядках, а потім — у стовпчиках. Якщо є комірка з двома позначками, заповнюємо в першу чергу її. На наступних кроках заповнюємо комірки, позначені однією міткою (вони містять мінімальну вартість або в рядку, або в стовпчику). Далі переходимо до наступних ітерацій.

Заповнимо цим методом табл. 5.2.

Крок 1. Мінімальні вартості в рядках:

- | | |
|-------------------|-------------------|
| 1. $c_{13} = 3$; | 3. $c_{32} = 3$; |
| 2. $c_{25} = 5$; | 4. $c_{42} = 3$. |

Мінімальні вартості в стовпчиках:

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| 1. $c_{11} = 5$; | 4. $c_{34} = 4$; |
| 2. $c_{32} = c_{42} = 3$; | 5. $c_{15} = c_{45} = 4$. |
| 3. $c_{13} = 3$; | |

Є подвійна перевага в комірках x_{13} та x_{32} . В першу можна помістити 40 одиниць вантажу, а в другу 50. Обираємо $x_{32} = 50$ та звільняємо другий стовпчик (табл. 5.19).

Табл. 5.19. Метод подвійної переваги, крок 1

$a_i \backslash b_j$	80	50	60	20	50
40	(5)	$\times(8)$	(3)	(10)	(4)
90	(10)	$\times(7)$	(9)	(6)	(5)
90	(7)	$50(3)$	(6)	(4)	(12)
40	(6)	$\times(3)$	(11)	(5)	(4)

Крок 2. Комірка x_{13} залишилася незаповненою, і в ній є подвійна перевага. Заповнюємо її: $x_{13} = 40$ та звільняємо перший рядок (табл. 5.20).

Табл. 5.20. Метод подвійної переваги, крок 2

$a_i \backslash b_j$	80	50	60	20	50
40	$\times^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$40^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	(10)	$\times^{(7)}$	(9)	(6)	(5)
90	(7)	$50^{(3)}$	(6)	(4)	(12)
40	(6)	$\times^{(3)}$	(11)	(5)	(4)

Крок 3. Комірки з мінімальною вартістю $c_{ij} = 3$ вичерпані. Знову шукаємо мінімальні вартості в рядках:

1. вичерпаний;
2. $c_{25} = 5$;
3. $c_{34} = 4$;
4. $c_{45} = 4$;

і стовпчиках:

1. $c_{41} = 6$;
2. вичерпаний;
3. $c_{33} = 6$;
4. $c_{34} = 4$;
5. $c_{45} = 4$.

Є подвійна перевага в комірках x_{34} та x_{45} . В x_{34} можна помістити 20 одиниць вантажу, а в x_{45} — 40. Заповнюємо найбільшим числом: $x_{45} = 40$. Звільняємо четвертий рядок (табл. 5.21).

Табл. 5.21. Метод подвійної переваги, крок 3

$a_i \backslash b_j$	80	50	60	20	50
40	$\times^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$40^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	(10)	$\times^{(7)}$	(9)	(6)	(5)
90	(7)	$50^{(3)}$	(6)	(4)	(12)
40	$\times^{(6)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(11)}$	$\times^{(5)}$	$40^{(4)}$

Крок 4. Комірка x_{34} залишилася незаповненою, і в ній є подвійна перевага. Заповнюємо її: $x_{34} = 20$. Звільняємо четвертий стовпчик (табл. 5.22).

Крок 5. Комірки з мінімальною вартістю $c_{ij} = 4$ вичерпані. Продовжуємо шукати мінімальні вартості. В рядках:

Табл. 5.22. Метод подвійної переваги, крок 4

$a_i \backslash b_j$	80	50	60	20	50
40	$\times^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$40^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	(10)	$\times^{(7)}$	(9)	$\times^{(6)}$	(5)
90	(7)	$50^{(3)}$	(6)	$20^{(4)}$	(12)
40	$\times^{(6)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(11)}$	$\times^{(5)}$	$40^{(4)}$

1. вичерпаний;
2. $c_{25} = 5$;
3. $c_{33} = 6$;
4. вичерпаний.

У стовпчиках:

1. $c_{31} = 7$;
2. вичерпаний;
3. $c_{33} = 6$;
4. вичерпаний;
5. $c_{25} = 5$.

Подвійна перевага — в комірках x_{25} та x_{33} , при цьому менша вартість $c_{25} = 5$. Заповнюємо $x_{25} = 10$; звільняється п'ятий стовпчик (табл. 5.23).

Табл. 5.23. Метод подвійної переваги, крок 5

$a_i \backslash b_j$	80	50	60	20	50
40	$\times^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$40^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	(10)	$\times^{(7)}$	(9)	$\times^{(6)}$	$10^{(5)}$
90	(7)	$50^{(3)}$	(6)	$20^{(4)}$	$\times^{(12)}$
40	$\times^{(6)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(11)}$	$\times^{(5)}$	$40^{(4)}$

Крок 6. Оскільки залишилося всього чотири комірки, то тут подвійна перевага очевидна: це $c_{33} = 6$. Заповнюємо $x_{33} = 20$. Можна звільнити і рядок, і стовпчик. Звільняємо третій стовпчик, тому що там більша вартість $c_{23} = 9$ (табл. 5.24).

Крок 7. Вибір невеликий: в комірку x_{31} можна внести нуль одиниць вантажу (базисний нуль). Вносимо їх: $x_{31} = 0$. Звільняємо третій рядок, в якому нічого звільняти (табл. 5.25).

Крок 8, останній. Підводимо баланс: $x_{21} = 80$ (табл. 5.26).

У цьому прикладі результат виявився таким самим, як і в методі мінімальної вартості: $z = 1480$. Але так буває не завжди.

Табл. 5.24. Метод подвійної переваги, крок 6

$a_i \setminus b_j$	80	50	60	20	50
40	$\times^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$40^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	$^{(10)}$	$\times^{(7)}$	$\times^{(9)}$	$\times^{(6)}$	$10^{(5)}$
90	$^{(7)}$	$50^{(3)}$	$20^{(6)}$	$20^{(4)}$	$\times^{(12)}$
40	$\times^{(6)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(11)}$	$\times^{(5)}$	$40^{(4)}$

Табл. 5.25. Метод подвійної переваги, крок 7

$a_i \setminus b_j$	80	50	60	20	50
40	$\times^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$40^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	$^{(10)}$	$\times^{(7)}$	$\times^{(9)}$	$\times^{(6)}$	$10^{(5)}$
90	$0^{(7)}$	$50^{(3)}$	$20^{(6)}$	$20^{(4)}$	$\times^{(12)}$
40	$\times^{(6)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(11)}$	$\times^{(5)}$	$40^{(4)}$

5.3.4. Метод Фогеля

Можливо, це найкращий метод серед усіх розглянутих. Він враховує не тільки вартості, а й дискретні похідні матриці вартостей C . За цим методом на кожному кроці визначають різницю між двома найменшими вартостями в кожному рядку і стовпчику транспортної таблиці. З усіх цих різниць вибирають найбільшу і у відповідному рядку чи стовпчику заповнюють комірку з найменшою вартістю. Якщо однакових найбільших різниць кілька, то обирають рядок або стовпчик з мінімальною вартістю.

Заповнимо методом Фогеля табл. 5.2.

Табл. 5.26. Метод подвійної переваги, крок 8

$a_i \setminus b_j$	80	50	60	20	50
40	$\times^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$40^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	$80^{(10)}$	$\times^{(7)}$	$\times^{(9)}$	$\times^{(6)}$	$10^{(5)}$
90	$0^{(7)}$	$50^{(3)}$	$20^{(6)}$	$20^{(4)}$	$\times^{(12)}$
40	$\times^{(6)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(11)}$	$\times^{(5)}$	$40^{(4)}$

Крок 1. Різниці між двома мінімальними вартостями в рядках:

1. $|c_{13} - c_{15}| = |3 - 4| = 1;$
2. $|c_{24} - c_{25}| = |6 - 5| = 1;$
3. $|c_{32} - c_{34}| = |3 - 4| = 1;$
4. $|c_{42} - c_{45}| = |3 - 4| = 1.$

У стовпчиках:

1. $|c_{11} - c_{41}| = |5 - 6| = 1;$
2. $|c_{32} - c_{42}| = |3 - 3| = 0;$
3. $|c_{13} - c_{33}| = |3 - 6| = 3;$
4. $|c_{34} - c_{44}| = |4 - 5| = 1;$
5. $|c_{15} - c_{45}| = |4 - 4| = 0.$

Найбільша різниця 3 у третьому стовпчику. В ньому мінімальна вартість $c_{13} = 3$, тому заповнюємо $x_{13} = \min(40, 60) = 40$ та звільняємо перший рядок (табл. 5.27).

Табл. 5.27. Метод Фогеля, крок 1

$a_i \backslash b_j$	80	50	60	20	50
40	$\times^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$40^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	$(^{10})$	$(^7)$	$(^9)$	$(^6)$	$(^5)$
90	$(^7)$	$(^3)$	$(^6)$	$(^4)$	$(^{12})$
40	$(^6)$	$(^3)$	$(^{11})$	$(^5)$	$(^4)$

Крок 2. Різниці між двома мінімальними вартостями в рядках:

1. вичерпаний;
2. $|c_{24} - c_{25}| = |6 - 5| = 1;$
3. $|c_{32} - c_{34}| = |3 - 4| = 1;$
4. $|c_{42} - c_{45}| = |3 - 4| = 1.$

У стовпчиках:

1. $|c_{31} - c_{41}| = |7 - 6| = 1;$
2. $|c_{32} - c_{42}| = |3 - 3| = 0;$
3. $|c_{23} - c_{33}| = |9 - 6| = 3;$
4. $|c_{34} - c_{44}| = |4 - 5| = 1;$
5. $|c_{25} - c_{45}| = |5 - 4| = 1.$

Найбільша різниця 3 у третьому стовпчику. В ньому мінімальна вартість $c_{33} = 6$, тому заповнюємо $x_{33} = \min(90, 60 - 40) = 20$ та звільняємо третій стовпчик (табл. 5.28).

Крок 3. Знову обчислюємо різниці між двома мінімальними тарифами. В рядках:

Табл. 5.28. Метод Фогеля, крок 2

$a_i \setminus b_j$	80	50	60	20	50
40	$\times^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$40^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	(10)	(7)	$\times^{(9)}$	(6)	(5)
90	(7)	(3)	$20^{(6)}$	(4)	(12)
40	(6)	(3)	$\times^{(11)}$	(5)	(4)

1. вичерпаний;
2. $|c_{24} - c_{25}| = |6 - 5| = 1$;
3. $|c_{32} - c_{34}| = |3 - 4| = 1$;
4. $|c_{42} - c_{45}| = |3 - 4| = 1$.

У стовпчиках:

1. $|c_{31} - c_{41}| = |7 - 6| = 1$;
2. $|c_{32} - c_{42}| = |3 - 3| = 0$;
3. вичерпаний;
4. $|c_{34} - c_{44}| = |4 - 5| = 1$;
5. $|c_{25} - c_{45}| = |5 - 4| = 1$.

Найбільших різниць між двома мінімальними тарифами багато (майже всі), тому обираємо комірку з мінімальним тарифом, але тільки не в другому стовпчику. Це x_{45} з вартістю $c_{45} = 4$. Надаємо $x_{45} = 40$; звільняється четвертий рядок (табл. 5.29).

Табл. 5.29. Метод Фогеля, крок 3

$a_i \setminus b_j$	80	50	60	20	50
40	$\times^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$40^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	(10)	(7)	$\times^{(9)}$	(6)	(5)
90	(7)	(3)	$20^{(6)}$	(4)	(12)
40	$\times^{(6)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(11)}$	$\times^{(5)}$	$40^{(4)}$

Крок 4. Продовжуємо. Різниці між двома мінімальними тарифами в рядках:

1. вичерпаний;
2. $|c_{24} - c_{25}| = |6 - 5| = 1$;
3. $|c_{32} - c_{34}| = |3 - 4| = 1$;
4. вичерпаний;

У стовпчиках:

1. $|c_{21} - c_{31}| = |10 - 7| = 3;$
2. $|c_{22} - c_{32}| = |7 - 3| = 4;$
3. вичерпаний;
4. $|c_{24} - c_{34}| = |6 - 4| = 2;$
5. $|c_{25} - c_{35}| = |5 - 12| = 7.$

Найбільша різниця 7 — у п'ятому стовпчику. Заповнюємо там комірку з мінімальною вартістю: $x_{25} = \min(90, 50 - 40) = 10$. Звільняємо п'ятий стовпчик (табл. 5.30).

Табл. 5.30. Метод Фогеля, крок 4

$a_i \backslash b_j$	80	50	60	20	50
40	$\times^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$40^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	$(^{10})$	$(^7)$	$\times^{(9)}$	$(^6)$	$10^{(5)}$
90	$(^7)$	$(^3)$	$20^{(6)}$	$(^4)$	$\times^{(12)}$
40	$\times^{(6)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(11)}$	$\times^{(5)}$	$40^{(4)}$

Крок 5. Продовжуємо. Різниці між двома мінімальними тарифами в рядках:

1. вичерпаний;
2. $|c_{22} - c_{24}| = |7 - 6| = 1;$
3. $|c_{32} - c_{34}| = |3 - 4| = 1;$
4. вичерпаний;

У стовпчиках:

1. $|c_{21} - c_{31}| = |10 - 7| = 3;$
2. $|c_{22} - c_{32}| = |7 - 3| = 4;$
3. вичерпаний;
4. $|c_{24} - c_{34}| = |6 - 4| = 2;$
5. вичерпаний.

Максимальна різниця 4 — у другому стовпчику. Заповнюємо там комірку з мінімальною вартістю: $x_{32} = \min(90 - 20, 50) = 50$. Звільняється другий стовпчик (табл. 5.31).

Крок 6. Різниці між двома мінімальними тарифами в рядках:

1. вичерпаний;
2. $|c_{21} - c_{24}| = |10 - 6| = 4;$
3. $|c_{31} - c_{34}| = |7 - 4| = 3;$
4. вичерпаний;

У стовпчиках:

Табл. 5.31. Метод Фогеля, крок 5

$a_i \backslash b_j$	80	50	60	20	50
40	$\times^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$40^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	$^{(10)}$	$\times^{(7)}$	$\times^{(9)}$	$^{(6)}$	$10^{(5)}$
90	$^{(7)}$	$50^{(3)}$	$20^{(6)}$	$^{(4)}$	$\times^{(12)}$
40	$\times^{(6)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(11)}$	$\times^{(5)}$	$40^{(4)}$

1. $|c_{21} - c_{31}| = |10 - 7| = 3$;
2. вичерпаний;
3. вичерпаний;
4. $|c_{24} - c_{34}| = |6 - 4| = 2$;
5. вичерпаний.

Максимальна різниця 4 — у другому рядку. Заповнюємо там комірку з мінімальною вартістю: $x_{24} = \min(90, 20) = 20$. Звільняється четвертий стовпчик (табл. 5.32).

Табл. 5.32. Метод Фогеля, крок 6

$a_i \backslash b_j$	80	50	60	20	50
40	$\times^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$40^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	$^{(10)}$	$\times^{(7)}$	$\times^{(9)}$	$20^{(6)}$	$10^{(5)}$
90	$^{(7)}$	$50^{(3)}$	$20^{(6)}$	$\times^{(4)}$	$\times^{(12)}$
40	$\times^{(6)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(11)}$	$\times^{(5)}$	$40^{(4)}$

Крок 7. У методі Фогеля залишився лише перший стовпчик. Заповнюємо комірку з мінімальною вартістю: $x_{31} = \min(90 - 50 - 20, 80) = 20$. Звільняється третій рядок, в якому нічого не треба звільняти (табл. 5.33).

Крок 8, останній. Підводимо баланс: $x_{21} = 60$ (табл. 5.34).

Обчислюємо значення цільової функції на знайденому допустимому опорному розв'язку: $z = 40 \cdot 3 + 60 \cdot 10 + 20 \cdot 6 + 10 \cdot 5 + 20 \cdot 7 + 50 \cdot 3 + 20 \cdot 6 + 40 \cdot 4 = 120 + 600 + 120 + 50 + 140 + 150 + 120 + 160 = 1460$. Це краще, ніж в інших методах.

5.4. Симплексні перетворення в транспортній задачі

Для симплексного перетворення треба обрати змінну для введення в базис, а потім для неї знайти базисну змінну, яка першою звільниться (тобто має мінімальне додатне відношення). Матриця коефіцієнтів СЛАР

Табл. 5.33. Метод Фогеля, крок 7

$a_i \setminus b_j$	80	50	60	20	50
40	$\times^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$40^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	$^{(10)}$	$\times^{(7)}$	$\times^{(9)}$	$20^{(6)}$	$10^{(5)}$
90	$20^{(7)}$	$50^{(3)}$	$20^{(6)}$	$\times^{(4)}$	$\times^{(12)}$
40	$\times^{(6)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(11)}$	$\times^{(5)}$	$40^{(4)}$

Табл. 5.34. Метод Фогеля, крок 8

$a_i \setminus b_j$	80	50	60	20	50
40	$\times^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$40^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	$60^{(10)}$	$\times^{(7)}$	$\times^{(9)}$	$20^{(6)}$	$10^{(5)}$
90	$20^{(7)}$	$50^{(3)}$	$20^{(6)}$	$\times^{(4)}$	$\times^{(12)}$
40	$\times^{(6)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(11)}$	$\times^{(5)}$	$40^{(4)}$

обмежень \mathbf{A} (5.9) містить лише нулі та одиниці. Така її структура дозволяє легко проводити операцію однократного заміщення базису.

Розглянемо на прикладі 5.2, як це зробити. Для прикладу візьмемо початковий допустимий опорний розв'язок, побудований методом північно-західного кута (табл. 5.10). Повторимо його.

Табл. 5.35. Початковий допустимий опорний розв'язок

$a_i \setminus b_j$	80	50	60	20	50
40	$40^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	$40^{(10)}$	$50^{(7)}$	$\times^{(9)}$	$\times^{(6)}$	$\times^{(5)}$
90	$\times^{(7)}$	$0^{(3)}$	$60^{(6)}$	$20^{(4)}$	$10^{(12)}$
40	$\times^{(6)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(11)}$	$\times^{(5)}$	$40^{(4)}$

Нехай ми вирішили ввести в базис змінну x_{13} . Вартість перевезень у цій комірці невелика: $c_{13} = 3$; і можна сподіватися, що цей крок симплекс-методу буде вдалим і призведе до зменшення цільової функції z . Як насправді треба обирати змінну для введення в базис, ми розглянемо в наступному підрозділі 5.5. А зараз ми поки що просто будемо вводити в базис

змінну x_{13} . Її значення збільшиться з нуля до якоїсь величини λ , яку ще треба буде визначити: $x_{13} = \lambda$.

Щоб не порушився баланс у першому рядку, треба x_{11} зменшити на таку саму величину: $x_{11} = 40 - \lambda$.

Далі, щоб не порушився баланс у першому стовпчику, треба змінну x_{21} збільшити та таку саму величину: $x_{21} = 40 + \lambda$.

Продовжуємо зберігати баланс: для другого рядка зменшуємо на λ змінну $x_{22} = 50 - \lambda$.

Для балансу в другому стовпчику збільшуємо $x_{32} = 0 + \lambda$.

Тепер треба щось зменшити в третьому рядку. Оберемо для зменшення змінну $x_{33} = 60 - \lambda$, тому що саме в третьому стовпчику знаходиться та вільна змінна x_{13} , яку ми збільшили на величину λ .

Отже, цикл замкнувся:

$$\begin{cases} x_{13} = \lambda; \\ x_{11} = 40 - \lambda; \\ x_{21} = 40 + \lambda; \\ x_{22} = 50 - \lambda; \\ x_{32} = 0 + \lambda; \\ x_{33} = 60 - \lambda. \end{cases} \quad (5.11)$$

Щоб зберігся баланс $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, треба змінні в формулі (5.11) змінювати водночас і на одну й ту саму величину λ . Половина змінних збільшується, а половина — зменшується. Першою досягне нуля та змінна (серед тих, що зменшуються), значення якої найменше. В цьому прикладі це $x_{11} = 40$. При $\lambda = 40$ вона першою досягне нуля (звільниться), а інші залишаться додатними. Це й є найменше додатне відношення в транспортній задачі.

Будемо позначати x_{ij}^+ ті змінні, що збільшуються, а x_{ij}^- — ті, що зменшуються. І вартості перевезень у цих комірках теж будемо так позначати: c_{ij}^+ та c_{ij}^- . Ці плюси та мінуси зручно проставляти в самих комірках:

Табл. 5.36. Цикл транспортної задачі

$a_i \setminus b_j$	80	50	60	20	50
40	$40_{\ominus}^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$\times_{\oplus}^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	$40_{\oplus}^{(10)}$	$50_{\ominus}^{(7)}$	$\times^{(9)}$	$\times^{(6)}$	$\times^{(5)}$
90	$\times^{(7)}$	$0_{\oplus}^{(3)}$	$60_{\ominus}^{(6)}$	$20^{(4)}$	$10^{(12)}$
40	$\times^{(6)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(11)}$	$\times^{(5)}$	$40^{(4)}$

Можна також поєднати комірки циклу горизонтальними та вертикальними відрізками, тобто позначити не тільки вершини циклу, а й реб-

ра. Ми цього робити не будемо, щоб не затіняти таблицю.

Означення 5.3. *Цикл транспортної задачі* — це така підмножина комірок таблиці транспортної задачі, що в кожному рядку та в кожному стовпчику таблиці міститься або рівно дві, або жодної комірки циклу. \square

За такого означення можна стверджувати наступне:

- кількість вершин (комірок) у циклі парна: половина з них це комірки з x_{ij}^+ ; половина з x_{ij}^- ;
- до кожної вершини інцидентні два ребра: одне горизонтальне та одне вертикальне;
- кількість ребер у циклі парна: половина горизонтальні, половина вертикальні;
- цикл транспортної задачі неорієнтований: ми не можемо сказати, від кого кому перекидається однорідний вантаж; його кількість просто зменшується в комірках x_{ij}^- на величину λ , а в x_{ij}^+ збільшується таку саму величину.

Означення 5.4. Симплексне перетворення в транспортній задачі називається *перекиданням вантажу за циклом*. \square

Наступні властивості циклів транспортної задачі не такі очевидні, їх треба доводити.

Властивість 5.1. У таблиці транспортної задачі неможливо побудувати цикл, що містить тільки базисні комірки. \square

Доведення. Від протилежного: якщо б такий цикл існував, в ньому можна було б перекинути якусь кількість вантажу та змінити значення x_{ij} у базисних комірках. Але вільних змінних вже стільки, скільки треба: $f = mn - (m + n - 1)$, за ними базисні змінні знаходяться однозначно, і змінити їх неможливо. \square

Властивість 5.2. Для кожної вільної комірки таблиці транспортної задачі існує цикл, що містить цю вільну комірку та інші базисні. \square

Доведення. Будь-яку вільну змінну можна ввести в базис (інша справа, чи доцільно це). Тому цикл, за яким ця змінна вводиться в базис, існує. \square

Властивість 5.3. Для кожної вільної комірки таблиці транспортної задачі існує лише один цикл, що містить цю вільну комірку та інші базисні. \square

Доведення. Від протилежного: припустимо, що існують принаймні два різні цикли, що містять вільну комірку x_{ij} та інші базисні. Тоді можна ввести в базис вільну змінну x_{ij} вздовж одного циклу, і другий тоді буде містити лише базисні комірки, що неможливо. \square

Отже, те, що ми зробили в прикладі, є загальним правилом симплексного перетворення в транспортній задачі. Якщо ми обрали якусь

вільну змінну x_{ij} для введення в базис, треба знайти той єдиний цикл, що містить цю вільну змінну x_{ij} та інші базисні, і здійснити за ним перекидання вантажу. Кількість вантажу λ , що перекидається, визначається мінімальним значенням серед x_{ij}^- :

$$\lambda = \min(x_{ij}^-). \quad (5.12)$$

Зрозуміло, якщо таких мінімальних величин буде кілька, звільняти можна лише одну змінну, а всі інші робити базисними нулями (буде вироджений розв'язок).

Залишилося з'ясувати, чи доцільно вводити ту чи іншу вільну змінну в базис. Для цього треба знайти Δz_{ij} — відносний приріст цільової функції при збільшенні вільної змінної x_{ij} від нуля до одиниці, тобто при $\lambda = 1$. Якщо цільова функція зменшується ($\Delta z_{ij} < 0$), то є сенс це робити, а якщо збільшується — то немає.

При перекиданні вантажу за циклом (5.11) при $\lambda = 1$ значення x_{ij}^+ збільшуються на одиницю, а x_{ij}^- зменшуються на одиницю. Вартість перевезення одиниці товару в цих комірках відома: це c_{ij}^+ та c_{ij}^- . Тому відносний приріст можна обчислити за формулою:

$$\Delta z_{ij} = \sum c_{ij}^+ - \sum c_{ij}^-. \quad (5.13)$$

У прикладі з табл. 5.36: $\Delta z_{13} = (3 + 10 + 3) - (5 + 7 + 6) = 16 - 18 = -2 < 0$; тому є сенс вводити x_{13} в базис. Вартість перевезень при цьому зміниться на $\Delta z_{13} \cdot \lambda = -2 \cdot 40 = -80$, тобто зменшиться на 80 грошових одиниць. Здійснимо перекидання вантажу за цим циклом:

Табл. 5.37. Перекидання вантажу за циклом

$a_i \setminus b_j$	80	50	60	20	50
40	$\times^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$40^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	$80^{(10)}$	$10^{(7)}$	$\times^{(9)}$	$\times^{(6)}$	$\times^{(5)}$
90	$\times^{(7)}$	$40^{(3)}$	$20^{(6)}$	$20^{(4)}$	$10^{(12)}$
40	$\times^{(6)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(11)}$	$\times^{(5)}$	$40^{(4)}$

Перевіряємо: $z = 40 \cdot 3 + 80 \cdot 10 + 10 \cdot 7 + 40 \cdot 3 + 20 \cdot 6 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 12 + 40 \cdot 4 = 120 + 800 + 70 + 120 + 120 + 80 + 120 + 160 = 1590$, що на 80 одиниць менше, ніж ті 1670, що ми отримали методом північно-західного кута.

5.5. Метод потенціалів

Повернемося до питання: як визначити вільну змінну для введення в базис? Теоретично треба для кожної вільної комірки x_{ij} знайти її єдиний цикл і обчислити в ньому Δz_{ij} за формулою (5.13). Якщо виконується $\Delta z_{ij} < 0$, то є сенс вводити x_{ij} в базис, а ні — то ні. Як бачимо, задача досить громіздка.

Метод потенціалів дозволяє значно її спростити. Він спирається на наступну теорему.

Теорема 5.5. Величина оцінки Δz_{ij} не зміниться, якщо до будь-якого рядка або стовпчика матриці вартостей перевезень C додати одне й те саме число. \square

Доведення. Приріст Δz_{ij} обчислюється за формулою (5.13) для комірок з циклу. У циклі "додатні" та "від'ємні" комірки йдуть через одну: в кожному рядку та стовпчику є одна "додатна" та одна "від'ємна". Тому в формулі (5.13) одне й те саме число, додане до всіх компонентів рядка або стовпчика матриці C , взаємно знищується, і значення Δz_{ij} не змінюється. \square

Зробимо так. Віднімемо від кожного i -го рядка матриці вартостей C одне й те саме число u_i , а від кожного j -го стовпчика v_j . Компоненти нової матриці вартостей C^* будуть тоді такими:

$$\begin{cases} c_{ij}^* = c_{ij} - u_i - v_j; \\ i = \overline{1, m}; \\ j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (5.14)$$

Якими б ми не взяли u_i, v_j , значення Δz_{ij} не зміниться. Тому для спрощення обчислення Δz_{ij} за формулою (5.13) оберемо u_i, v_j так, щоб в усіх базисних комірках нові значення $c_{ij}^* = 0$; тобто з умови:

$$\begin{cases} u_i + v_j = c_{ij}; \\ i, j - \text{базисні}. \end{cases} \quad (5.15)$$

Базисні комірки не утворюють циклів, тому СЛАР (5.15) є сумісною: протиріччя у її рівняннях не буде. З іншого боку, загальна кількість чисел u_i, v_j дорівнює $m + n$, а базисних комірок лише $m + n - 1$, тобто на одну менше. Тому СЛАР (5.15) є невизначеною з однією вільною змінною. Можна, наприклад, покласти $u_1 = 0$, і розв'язувати (5.15) послідовно, рівняння за рівнянням. Це можна зробити знов-таки з-за відсутності циклів у базисних комірках.

Означення 5.5. Величини u_i, v_j називаються *потенціалами*. \square

Обчислювати потенціали зручно безпосередньо в таблиці транспортної задачі. Для них відводяться додатково ще один стовпчик правіше стовпчика a_i та ще один рядок нижче рядка b_j .

Приклад 5.3. Обчислити потенціали для таблиці транспортної задачі, заповненої методом Фогеля (табл. 5.34).

Розв'язання. Заповнюємо таблицю, додавши ще один рядок і один стовпчик. Верхня ліва комірка відводиться під значення цільової функції.

Табл. 5.38. Обчислення потенціалів

$z = 1460$	b_j	80	50	60	20	50
a_i	$u_i \setminus v_j$	4	0	3	0	-1
40	0	$\times^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$40^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	6	$60^{(10)}$	$\times^{(7)}$	$\times^{(9)}$	$20^{(6)}$	$10^{(5)}$
90	3	$20^{(7)}$	$50^{(3)}$	$20^{(6)}$	$\times^{(4)}$	$\times^{(12)}$
40	5	$\times^{(6)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(11)}$	$\times^{(5)}$	$40^{(4)}$

Обчислюємо потенціали пошуком "у ширину".

- Задаємо самі $u_1 = 0$.
- У першому рядку: $u_1 + v_3 = c_{13}$; $0 + v_3 = 3$; $v_3 = 3$.
- У третьому стовпчику: $u_3 + v_3 = c_{33}$; $u_3 + 3 = 6$; $u_3 = 3$.
- У третьому рядку: $u_3 + v_1 = c_{31}$; $3 + v_1 = 7$; $v_1 = 4$.
- У третьому рядку: $u_3 + v_2 = c_{32}$; $3 + v_2 = 2$; $v_2 = 0$.
- У першому стовпчику: $u_2 + v_1 = c_{21}$; $u_2 + 4 = 10$; $u_2 = 6$.
- У другому рядку: $u_2 + v_4 = c_{24}$; $6 + v_4 = 6$; $v_4 = 0$.
- У другому рядку: $u_2 + v_5 = c_{25}$; $6 + v_5 = 5$; $v_5 = -1$.
- У п'ятому стовпчику: $u_4 + v_5 = c_{45}$; $u_4 - 1 = 4$; $u_4 = 5$. \square

Потенціали значно спрощують пошук Δz_{ij} за формулою (5.13). У цій формулі беруть участь комірки циклу, в якому одна вільна комірка, а всі інші базисні. Значення Δz_{ij} не зміниться, якщо замінити всі c_{ij} на c_{ij}^* . Але в базисних комірках всі $c_{ij}^* = 0$. Тому з усієї суми в (5.13) залишиться лише один доданок: $c_{ij}^* = c_{ij} - u_i - v_j$ у тій вільній комірці, яка досліджується. Якщо ця величина від'ємна: $c_{ij} - u_i - v_j < 0$, то є сенс вводити в базис цю вільну змінну x_{ij} . Отже, критерієм того, що $\Delta z_{ij} < 0$, є:

$$\begin{cases} u_i + v_j > c_{ij}; \\ i, j - \text{вільні}. \end{cases} \quad (5.16)$$

Приклад 5.4. Перевірити план перевезень у табл. 5.38 на оптимальність. Якщо він не оптимальний, провести симплексні перетворення до досягнення оптимального плану.

Розв'язання. Перевіряємо вільні комірки за формулою (5.16):

- $u_1 + v_1 = 0 + 4 = 4 < 5$;

- $u_1 + v_2 = 0 + 0 = 0 < 8$;
- $u_1 + v_4 = 0 + 0 = 0 < 10$;
- $u_1 + v_5 = 0 - 1 = -1 < 4$;
- $u_2 + v_2 = 6 + 0 = 6 < 7$;
- $u_2 + v_3 = 6 + 3 = 9 = 9$; $\Delta z_{23} = 0$;
- $u_3 + v_4 = 3 + 0 = 3 < 4$;
- $u_3 + v_5 = 3 - 1 = 2 < 12$;
- $u_4 + v_1 = 5 + 4 = 9 > 6$; $\Delta z_{41} = 6 - 9 = -3$;
- $u_4 + v_2 = 5 + 0 = 5 > 3$; $\Delta z_{42} = 3 - 5 = -2$;
- $u_4 + v_3 = 5 + 3 = 8 < 11$;
- $u_5 + v_4 = 5 + 0 = 5 = 5$; $\Delta z_{54} = 0$.

Вводимо в базис змінну x_{41} : для неї приріст найменший (тобто від'ємний та найбільший за модулем). Знаходимо цикл для неї (табл. 5.39).

Табл. 5.39. Цикл для першого перекидання вантажу

$z = 1460$	b_j	80	50	60	20	50
a_i	$u_i \setminus v_j$	4	0	3	0	-1
40	0	$\times^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$40^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	6	$60^{(10)}$ \ominus	$\times^{(7)}$	$\times^{(9)}$	$20^{(6)}$	$10^{(5)}$ \oplus
90	3	$20^{(7)}$	$50^{(3)}$	$20^{(6)}$	$\times^{(4)}$	$\times^{(12)}$
40	5	$\times^{(6)}$ \oplus	$\times^{(3)}$	$\times^{(11)}$	$\times^{(5)}$	$40^{(4)}$ \ominus

За цим циклом можна перекинути $\lambda = \min(60, 40) = 40$ одиниць вантажу, і загальна вартість перевезення зміниться на $40 \cdot (6 + 5 - 10 - 4) = -120$ грошових одиниць. Нова таблиця транспортної задачі буде мати вигляд, показаний у табл. 5.40.

В жодній вільній комірці більше немає такого, щоб було $u_i + v_j > c_{ij}$. Отже, оптимальний план перевезень побудований. Але є $u_2 + v_3 = 6 + 3 = 9 = c_{23}$. Це означає, що оптимальний план перевезень не єдиний. Можна перекинути $\lambda = 20$ одиниць вантажу за циклом $x_{23} - x_{33} - x_{31} - x_{21}$. При цьому до нуля зменшаться x_{21} , і x_{33} . Звільнити можна лише одну з цих змінних, а друга буде базисним нулем, тобто отримаємо вироджений розв'язок. Можна досліджувати цю задачу й далі: шукати всі кутові точки області оптимальних розв'язків. Потім з них можна обирати найкращу за якимось додатковим критерієм. \square

Табл. 5.40. Таблиця транспортної задачі після першого перекидання вантажу

$z = 1340$	b_j	80	50	60	20	50
a_i	$u_i \setminus v_j$	4	0	3	0	-1
40	0	$\times^{(5)}$	$\times^{(8)}$	$40^{(3)}$	$\times^{(10)}$	$\times^{(4)}$
90	6	$20^{(10)}$	$\times^{(7)}$	$\times^{(9)}$	$20^{(6)}$	$50^{(5)}$
90	3	$20^{(7)}$	$50^{(3)}$	$20^{(6)}$	$\times^{(4)}$	$\times^{(12)}$
40	2	$40^{(6)}$	$\times^{(3)}$	$\times^{(11)}$	$\times^{(5)}$	$\times^{(4)}$

5.6. Задача про призначення

Постановка задачі про призначення наведена в прикладі 2.4. Якщо $m \neq n$, то це відкрита транспортна задача з одиничними запасами та потребами і максимізацією цільової функції (загальної продуктивності).

Змінити максимізацію на мінімізацію неважко: треба змінити знаки у компонентів матриці продуктивностей c_{ij} . Закрити відкриту транспортну задачу теж можна: треба додати фіктивного постачальника (робітника) або фіктивного споживача (роботу), тільки треба задати для них не нульову продуктивність, а меншу за найменше $-c_{ij}$. Але при побудові початкового розподілу працівників на роботи з-за одиничних запасів і потреб буде багато базисних нулів. Розв'язувати багато разів вироджену транспортну задачу методом потенціалів не дуже зручно.

Значно зручніше розглядати задачу про призначення як задачу про максимальне зважене паросполучення на повному дводоловому графі.

5.7. Запитання для перевірки

1. Як формулюється транспортна задача?
2. Як закрити відкриту транспортну задачу? Навіщо це робити?
3. Чи існує розв'язок транспортної задачі?
4. Скільки базисних і вільних змінних у транспортній задачі?
5. Якими є умови цілочисельності розв'язку транспортної задачі?
6. Які є методи побудови допустимого опорного розв'язку в транспортній задачі?
7. Як здійснюється симплексне перетворення в транспортній задачі?
8. Що таке цикл транспортної задачі? Які в нього властивості?
9. Як обирається змінна для виведення з базису в транспортній задачі?
10. Як обирається змінна для введення в базис у транспортній задачі?
11. В чому полягає метод потенціалів?

6. Цілочисельне лінійне програмування

У цьому розділі розглядаються задачі лінійного програмування з додатковими обмеженнями на цілочисельність усіх або деяких змінних.

Іноколи цілочисельний розв'язок отримується автоматично. Наприклад, у транспортній задачі з цілочисельними запасами та потребами. Але в загальному випадку додаткові обмеження цілочисельності ускладнюють розв'язання.

6.1. Графічний метод

Якщо в задачі лише дві вільні змінні, можна застосувати графічний метод, який є узагальненням методу, розглянутого в підрозділі 2.4. Після рисування області допустимих розв'язків, градієнту цільової функції та її ліній рівня позначаємо ще й точки з цілочисельними координатами та дивимося, де досягається потрібний екстремум цільової функції.

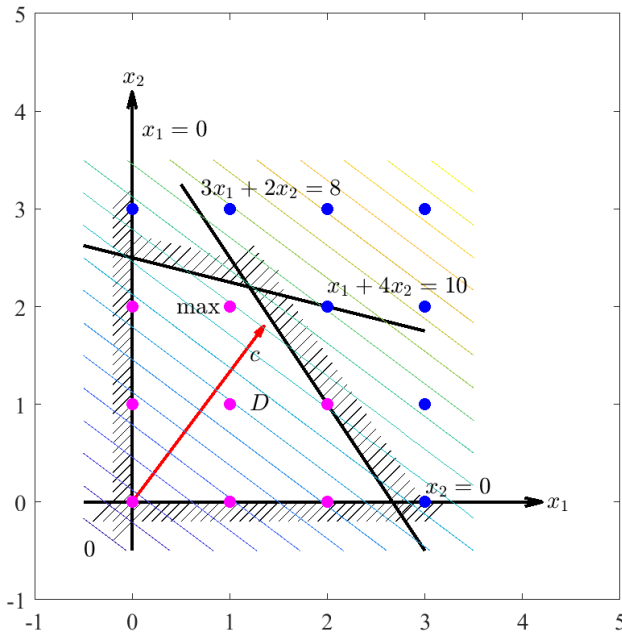


Рис. 6.1. Розв'язання прикладу 6.1

Приклад 6.1. Розв'язати графічним методом задачу з прикладу 2.6 з додатковими обмеженнями на цілочисельність змінних:

$$z = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 8; \\ x_1 + 4x_2 \leq 10; \\ x_1, x_2 \geq 0; \\ x_1, x_2 - \text{цїлочисельнї.} \end{cases}$$

Розв'язання. Повторюємо рис. 2.1 та додаємо на нього точки з цїлочисельними координатами.

На рис. 6.1 позначенї допустимї точки з цїлочисельними координатами (в області D) та недопустимї (поза областю). Найвище за лїніями рївня розташована допустима точка $\mathbf{x}_{\max} = \{1; 2\}$. Значення цїльової функції в нїй $z_{\max} = 11$. \square

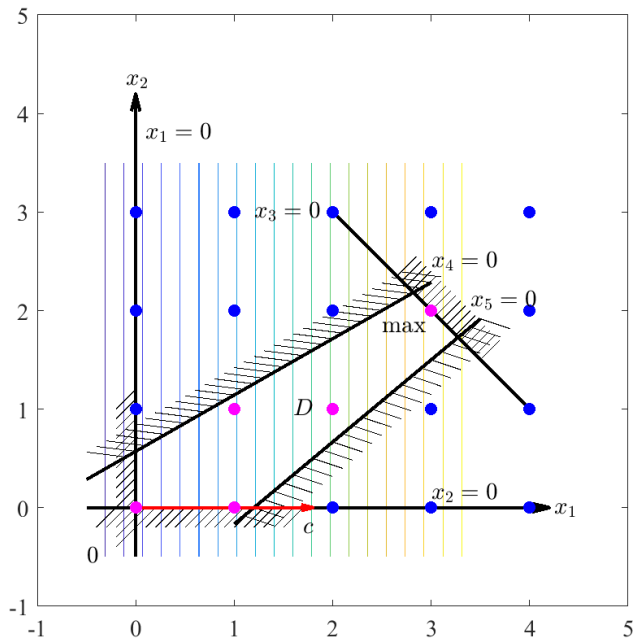


Рис. 6.2. Розв'язання прикладу 6.2

Приклад 6.2. Розв'язати графічним методом задачу з прикладу 2.7 з додатковими обмеженнями на цїлочисельнїсть змїнних:

$$z = x_1 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5; \\ -4x_1 + 7x_2 + x_4 = 4; \\ 5x_1 - 6x_2 + x_5 = 6; \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0; \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 - \text{цїлочисельнї.} \end{cases}$$

Розв'язання. Зводимо до стандартного вигляду:

$$\begin{cases} x_3 = 5 - x_1 - x_2 \geq 0; \\ x_4 = 4 + 4x_1 - 7x_2 \geq 0; \\ x_5 = 6 - 5x_1 + 6x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Якщо x_1, x_2 будуть цілочисельними, то x_3, x_4, x_5 також. Тому розв'язуємо задачу графічним методом. Додаємо на рис. 2.2 точки з цілочисельними координатами.

Як і на попередньому рисунку, тут зображені допустимі та недопустимі точки з цілочисельними координатами. Точці максимуму відповідає $x_1 = 3; x_2 = 2$. Обчислюємо інші координати: $x_3 = 0; x_4 = 2; x_5 = 3$. Отже, $\mathbf{x}_{\max} = \{3; 2; 0; 2; 3\}; z_{\max} = 3$. \square

6.2. Метод перерізів Гоморі

Будь-які методи перерізу засновані на розв'язанні послідовності задач лінійного програмування: P_0, P_1, \dots, P_N , де P_0 — початкова задача без урахування цілочисельності змінних. На кроці l , де $l > 0$, в першу чергу перевіряємо: чи є цілочисельним розв'язок задачі P_{l-1} ? Якщо так, то виходимо. Якщо ж ні, то будуємо задачу P_l з задачі P_{l-1} додаванням нового обмеження, яке повинно задовольняти вимогам:

- будь-який цілочисельний допустимий розв'язок задачі P_{l-1} йому задовольняє (не відсікається);
- нецілочисельний оптимальний розв'язок задачі P_{l-1} йому не задовольняє (відсікається).

Один з найпоширеніших методів перерізу — це метод перерізів Гоморі. Розглянемо його. Будемо позначати:

- $[a]$ — ціла частина числа a : найбільше ціле число, що не перевищує a ; так, наприклад, $[-3.2] = -4$;
- $\{a\} = a - [a]$ — дробова частина a ; наприклад, $\{-3.2\} = -3.2 - (-4) = 0.8$;
- k — номери вільних змінних у розв'язку задачі P_{l-1} ;
- s — номер рівняння з максимальною дробовою частиною в b_s , тобто з $\max\{x_{B_s}\}$, де B_s — номер базисної змінної в s -му рядку.

Метод перерізів Гоморі полягає в додаванні на кроці l такого додаткового обмеження:

$$\{b_s\} - \sum_k \{a_{sk}\} x_k \leq 0. \quad (6.1)$$

Приклад 6.3. Розв'язати методом перерізів Гоморі задачу цілочисельного лінійного програмування:

$$z = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 2; \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6; \\ x_1, x_2 \geq 0; \\ x_1, x_2 - \text{цілочисельні.} \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язуємо початкову задачу P_0 . Зводимо її до кано-
нічного вигляду:

$$z = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 6; \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо P_0 симплекс-методом: це табл. 6.1–6.3.

Табл. 6.1. Перша симплекс-таблиця
задачі P_0 прикладі 6.3

c_k		1	4	0	0	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
c_{Bi}	x_{Bi}	x_1	x_2	x_3	x_4		
0	x_3	-1	2	1	0	2	1 →
0	x_4	3	2	0	1	6	3
Δz_k		1	4 ↑	×	×	$z = 0$	

Табл. 6.2. Друга симплекс-таблиця
задачі P_0 прикладі 6.3

c_k		1	4	0	0	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
c_{Bi}	x_{Bi}	x_1	x_2	x_3	x_4		
4	x_2	-0.5	1	0.5	0	1	-2
0	x_4	4	0	-1	1	4	1 →
Δz_k		3 ↑	×	-2	×	$z = 4$	

Отримали нецілочисельний розв'язок задачі P_0 : $x_{\max} = \{1; 1.5; 0; 0\}$; $z_{\max} = 7$. Максимальна (вона ж єдина) дробова частина в стовпчику b_i — це $\{b_1\} = 0.5$. Вільні змінні в цій симплекс-таблиці — це x_3, x_4 . Коефіцієнти біля них у першому рівнянні мають такі дробові частини: $\{a_{13}\} = 0.375$; $\{a_{14}\} = 0.125$. Отже, додаткове обмеження (перший переріз Гоморі) є таким: $0.5 - 0.375x_3 - 0.125x_4 \leq 0$.

Переходимо до задачі P_1 . У додаткове обмеження введемо невід'ємну

Табл. 6.3. Третя симплекс-таблиця
задачі P_0 прикладі 6.3

c_k		1	4	0	0	b_i
c_{B_i}	x_{B_i}	x_1	x_2	x_3	x_4	
4	x_2	0	1	0.375	0.125	1.5
1	x_1	1	0	-0.25	0.25	1
Δz_k		×	×	-1.25	-0.75	$z = 7$

балансну змінну x_5 : $0.375x_3 + 0.125x_4 - x_5 = 0.5$. Перед нею стоїть знак "мінус", тому скористаємося методом штучного базису (див. підрозділ 3.5). Візьмемо розв'язок P_0 з табл. 6.3 та додамо нове обмеження:

$$z = x_1 + 4x_2 - Mx_6 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_2 + 0.375x_3 + 0.125x_4 = 1.5; \\ x_1 - 0.25x_3 + 0.25x_4 = 1; \\ 0.375x_3 + 0.125x_4 - x_5 + x_6 = 0.5; \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо задачу P_1 симплекс-методом — це табл. 6.4–6.5.

Табл. 6.4. Перша симплекс-таблиця
задачі P_1 прикладі 6.3

c_k		1	4	0	0	0	$-M$	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
c_{B_i}	x_{B_i}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
4	x_2	0	1	0.375	0.125	0	0	1.5	4
1	x_1	1	0	-0.25	0.25	0	0	1	-4
$-M$	x_6	0	0	0.375	0.125	-1	1	0.5	$\frac{4}{3} \rightarrow$
Δz_k		×	×	$0.375M$ $-1.25 \uparrow$	$0.125M$ -0.75	$-M$	×	$z = -0.5M + 7$	

Якщо відкинути штучну базисну змінну x_6 , то розв'язок задачі P_1 буде таким: $\mathbf{x}_{\max} = \left\{ \frac{4}{3}; 1; \frac{4}{3}; 0; 0 \right\}$; $z_{\max} = \frac{16}{3}$. Найбільші дробові частини у базисних змінних x_1 та x_3 : $\{x_1\} = \{x_3\} = \frac{1}{3}$. У методі Гоморі можна брати будь-яку. Візьмемо, наприклад, x_1 з другого рівняння. Вільні змінні в цій симплекс-таблиці x_4, x_5 . Коефіцієнти біля них у другому рівнянні мають такі дробові частини: $\{a_{24}\} = \left\{ \frac{1}{3} \right\} = \frac{1}{3}$; $\{a_{25}\} = \left\{ -\frac{2}{3} \right\} = \frac{1}{3}$. Додаткове обмеження (другий переріз Гоморі) буде таким: $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 \leq 0$; або

Табл. 6.5. Друга симплекс-таблиця
задачі P_1 прикладі 6.3

c_k		1	4	0	0	0	$-M$	b_i
c_{Bi}	x_{Bi}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
4	x_2	0	1	0	0	1	-1	1
1	x_1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
0	x_3	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{4}{3}$
Δz_k		\times	\times	\times	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$-M + \frac{10}{3}$	$z = \frac{16}{3}$

$$x_4 + x_5 \geq 1.$$

Створюємо задачу P_2 . Для цього беремо розв'язок P_1 з табл. 6.5 та додаємо нове обмеження, в якому віднімаємо балансну змінну x_6 та додаємо штучну базисну змінну x_7 :

$$z = x_1 + 4x_2 - Mx_7 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_2 + x_5 = 1; \\ x_1 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 = \frac{4}{3}; \\ x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{8}{3}x_5 = \frac{4}{3}; \\ x_4 + x_5 - x_6 + x_7 = 1; \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо задачу P_2 — це табл. 6.6-6.7.

Табл. 6.6. Перша симплекс-таблиця
задачі P_2 прикладі 6.3

c_k		1	4	0	0	0	0	$-M$	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
c_{Bi}	x_{Bi}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
4	x_2	0	1	0	0	1	0	0	1	$+\infty$
1	x_1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$	4
0	x_3	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$	4
$-M$	x_7	0	0	0	1	1	-1	1	1	$1 \rightarrow$
Δz_k		\times	\times	\times	$M - \frac{1}{3} \uparrow$	$M - \frac{1}{3}$	$-M$	\times	$z = -M + \frac{16}{3}$	

Всі b_i цілі. Повертаючись до початкової задачі, маємо такий цілочисельний розв'язок: $\mathbf{x}_{\max} = \{1; 1\}$; $z_{\max} = 5$.

Табл. 6.7. Друга симплекс-таблиця
задачі P_2 прикладі 6.3

c_k		1	4	0	0	0	0	$-M$	b_i
c_{B_i}	x_{B_i}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
4	x_2	0	1	0	0	1	0	0	1
1	x_1	1	0	0	0	-1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1
0	x_3	0	0	1	0	-3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1
0	x_4	0	0	0	1	1	-1	1	1
Δz_k		\times	\times	\times	\times	-3	$-\frac{1}{3}$	$-M + \frac{1}{3}$	$z = 5$

Проілюструємо метод перерізів Гоморі графічно. Для цього виразимо додаткові обмеження Гоморі через x_1, x_2 та нарисуємо їх на графічному розв'язку.

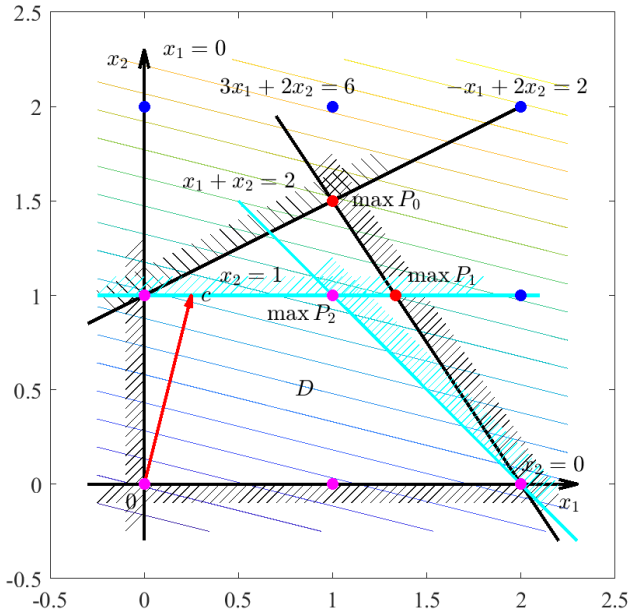


Рис. 6.3. Розв'язання прикладу 6.3

Перший переріз Гоморі:
 $0.5 - 0.375x_3 - 0.125x_4 \leq 0;$

$$\frac{3}{8}x_3 + \frac{1}{8}x_4 \geq \frac{1}{2}; \times 8;$$

$$3x_3 + x_4 \geq 4;$$

$$3 \cdot (2 + x_1 - 2x_2) + (6 - 3x_1 - 2x_2) \geq 4;$$

$$-8x_2 \geq -8;$$

$$x_2 \leq 1.$$

Другий переріз Гоморі:

$$x_4 + x_5 \geq 1;$$

$$6 - 3x_1 - 2x_2 + \frac{3}{8}x_3 + \frac{1}{8}x_4 - \frac{1}{2} \geq 1;$$

$$6 - 3x_1 - 2x_2 + \frac{3}{8}(2 + x_1 - 2x_2) + \frac{1}{8}(6 - 3x_1 - 2x_2) \geq \frac{3}{2}; \times 8;$$

$$48 - 24x_1 - 16x_2 + 6 + 3x_1 - 6x_2 + 6 - 3x_1 - 2x_2 \geq 12;$$

$$-24x_1 - 24x_2 \geq -48;$$

$$x_1 + x_2 \leq 2.$$

На рис. 6.3 чорні лінії — обмеження початкової задачі, а світлі — перерізи Гоморі. Бачимо, що перший переріз $x_2 = 1$ обертає пряму $-x_1 + 2x_2 = 2$ навколо точки $(0; 1)$ так, що обрізаються дробові розв'язки. Після цього другий переріз $x_1 + x_2 = 2$ обертає пряму $3x_1 + 2x_2 = 6$ навколо точки $(2; 0)$ і завершує видалення дробових розв'язків. \square

6.3. Запитання для перевірки

1. Додаткові умови цілочисельності полегшують чи ускладнюють розв'язання задачі лінійного програмування?
2. Яке значення z_{\max} більше: в задачі без умов цілочисельності чи в тій самій задачі з умовами цілочисельності?
3. Як будуються перерізи Гоморі?

7. Варіанти індивідуальних домашніх завдань

7.1. Графічний метод

1. Розв'язати задачу графічним методом. Якщо розв'язок неєдиний, знайти всі розв'язки.
2. Розв'язати цю ж задачу з додатковими умовами цілочисельності x_1, x_2 графічним методом.

Варіант 1

$$z = 6x_1 + 10x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 5; \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 6; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 6

$$z = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 10; \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 12; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 11

$$z = x_1 + x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1; \\ 5x_1 + x_2 \leq 1; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 2

$$z = x_1 + x_2 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 \geq 10; \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 8; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 7

$$z = 6x_1 + 5x_2 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 4; \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 18; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 12

$$z = x_1 - 2x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 8; \\ x_1 + x_2 \leq 12; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 3

$$z = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \leq 3; \\ x_2 \leq 4; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 8

$$z = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq 6; \\ x_1 + x_2 \geq 4; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 13

$$z = x_1 + 3x_2 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 2; \\ x_1 + x_2 \geq 4; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 4

$$z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 9; \\ x_1 + x_2 \geq 4; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 9

$$z = x_1 + 5x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3; \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 20; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 14

$$z = x_1 - x_2 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4; \\ x_1 - x_2 \leq 1; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 5

$$z = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 4; \\ 2x_1 - x_2 \leq 4; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 10

$$z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 15; \\ x_2 \leq 3; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 15

$$z = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4; \\ 2x_1 + x_2 \leq 6; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 16

$$z = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \geq 3; \\ 2x_1 - x_2 \geq 1; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 21

$$z = 4x_1 - x_2 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 1; \\ x_1 + x_2 \geq -1; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 26

$$z = x_1 + x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 16; \\ x_1 + 3x_2 \geq 9; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 17

$$z = -x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1; \\ -3x_1 + 2x_2 \geq 0; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 22

$$z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 5; \\ x_1 + 2x_2 \geq 10; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 27

$$z = -2x_1 + x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5; \\ x_1 - x_2 \leq 0; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 18

$$z = 4x_1 - 2x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2; \\ x_1 - 2x_2 \leq 0; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 23

$$z = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 11; \\ -2x_1 + x_2 \leq 2; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 28

$$z = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 16; \\ x_1 - x_2 \leq 3; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 19

$$z = 5x_1 + x_2 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0; \\ x_1 + x_2 \geq 1; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 24

$$z = -x_1 - x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6; \\ x_1 + 4x_2 \geq 4; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 29

$$z = x_1 - 3x_2 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 2; \\ -x_1 + x_2 \geq 0; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 20

$$z = 5x_1 - x_2 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 1; \\ x_1 + x_2 \geq 3; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 25

$$z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -4; \\ x_1 + x_2 \leq 8; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Варіант 30

$$z = -x_1 - x_2 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6; \\ -2x_1 + x_2 \leq 2; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

7.2. Симплекс-метод

При виготовленні двох видів продукції A та B використовують три види ресурсів. Для виготовлення одиниці продукції A треба витратити a_1 одиниць ресурсів першого виду, a_2 другого та a_3 третього. На виготовлення одиниці продукції B витрачається відповідно b_1 одиниць ресурсів першого виду, b_2 другого та b_3 третього. Усього в наявності є P_1 ресурсів першого виду, P_2 другого та P_3 третього. Прибуток від реалізації одиниці продукції A складає α грошових одиниць, а одиниці продукції B — β грошових одиниць. Скласти план виробництва продукції A та B , який забезпечує максимальний прибуток від їх реалізації.

1. Побудувати математичну модель задачі.
2. Розв'язати задачу графічним методом. Якщо розв'язок неєдиний, знайти всі розв'язки.

3. Розв'язати цю ж задачу симплекс-методом. Якщо розв'язок неєдиний, знайти всі розв'язки.
4. Сформулювати двоїсту задачу та знайти її розв'язок з розв'язку початкової задачі, використовуючи теореми двоїстості.
5. Розв'язати графічним методом цю ж задачу з додатковою умовою цілочисельності одиниць продукції A та B .

№ варіанту	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	P_1	P_2	P_3	α	β
1	16	8	5	4	7	9	784	552	567	4	4
2	9	7	4	5	8	16	1431	1224	1328	3	2
3	12	10	3	3	5	6	684	690	558	6	2
4	8	7	4	3	6	9	864	864	945	2	3
5	15	11	9	4	5	10	1095	865	1080	3	2
6	6	5	3	3	10	12	714	910	940	3	9
7	11	8	5	3	4	3	671	588	423	5	2
8	9	6	3	4	7	8	801	807	768	3	2
9	3	4	3	5	8	11	453	616	627	2	5
10	10	5	4	9	11	15	1870	1455	1815	7	9
11	8	6	3	2	4	3	830	860	900	5	3
12	3	6	8	2	3	2	560	870	840	3	2
13	2	3	3	5	2	3	380	273	300	2	5
14	1	7	6	3	3	3	650	1365	1245	6	5
15	4	3	3	3	4	5	700	630	750	6	6
16	6	3	2	2	3	3	505	393	348	7	6
17	7	6	1	3	3	2	1365	1245	650	6	2
18	5	4	3	3	3	4	750	630	700	5	4
19	6	4	3	2	3	4	600	520	600	6	5
20	8	6	3	2	3	2	840	870	500	6	5
21	3	3	2	2	3	5	273	300	380	4	3
22	2	3	3	1	6	7	438	747	812	7	5

№ варіанту	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	P_1	P_2	P_3	α	β
23	4	3	2	3	4	6	480	444	546	2	4
24	4	3	3	3	4	5	440	393	450	6	6
25	2	3	2	3	6	8	428	672	672	3	8
26	5	3	6	10	12	3	910	948	714	9	3
27	9	6	3	4	7	8	945	864	864	3	2
28	4	3	3	8	11	5	616	627	453	2	5
29	3	6	9	8	7	4	768	807	801	3	2
30	4	3	3	3	4	5	440	393	450	6	5

7.3. Транспортна задача

Треба розвезти однорідний товар з m складів в n магазинів. Запаси товару на складах — це координати вектору \mathbf{a} , потреби магазинів — координати вектору \mathbf{b} . Вартості перевезення одиниці товару з i -го складу в j -й магазин c_{ij} — це компоненти матриці тарифів перевезень \mathbf{C} . Спланувати перевезення таким чином, щоб транспортні витрати були мінімальними.

1. Побудувати математичну модель задачі.
2. Побудувати початковий допустимий опорний план за допомогою якогось методу (на вибір студента).
3. Розв'язати транспортну задачу. Якщо розв'язок неєдиний, знайти один будь-який розв'язок.

Варіант 1

$$\mathbf{a} = \{120; 150; 100\};$$

$$\mathbf{b} = \{80; 65; 90; 60; 70\};$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 15 & 9 & 14 \\ 11 & 2 & 7 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 12 & 8 & 17 \end{pmatrix}.$$

Варіант 3

$$\mathbf{a} = \{120; 180; 230\};$$

$$\mathbf{b} = \{70; 120; 105; 125; 110\};$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 14 & 8 & 17 & 5 & 3 \\ 21 & 10 & 7 & 11 & 6 \\ 3 & 5 & 8 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Варіант 2

$$\mathbf{a} = \{150; 170; 260\};$$

$$\mathbf{b} = \{100; 90; 160; 150; 80\};$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 15 & 14 & 4 \\ 3 & 7 & 12 & 5 & 8 \\ 1 & 18 & 6 & 13 & 16 \end{pmatrix}.$$

Варіант 4

$$\mathbf{a} = \{175; 165; 180\};$$

$$\mathbf{b} = \{90; 120; 110; 130; 70\};$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 7 & 11 & 6 \\ 4 & 3 & 12 & 2 & 8 \\ 5 & 17 & 9 & 4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Варіант 5

$$a = \{260; 400; 240\};$$

$$b = \{180; 200; 190; 230; 100\};$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 & 11 & 15 \\ 14 & 3 & 1 & 8 & 6 \\ 9 & 5 & 16 & 7 & 12 \end{pmatrix}.$$

Варіант 6

$$a = \{260; 300; 270\};$$

$$b = \{120; 230; 190; 160; 120\};$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 11 & 5 & 3 \\ 8 & 17 & 13 & 7 & 6 \\ 14 & 10 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Варіант 7

$$a = \{370; 450; 480\};$$

$$b = \{300; 280; 330; 290; 100\};$$

$$C = \begin{pmatrix} 21 & 18 & 14 & 3 & 6 \\ 7 & 11 & 10 & 5 & 12 \\ 4 & 8 & 16 & 9 & 13 \end{pmatrix}.$$

Варіант 8

$$a = \{560; 570; 620\};$$

$$b = \{300; 220; 230; 270; 100\};$$

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 15 & 7 & 2 \\ 20 & 9 & 7 & 14 & 5 \\ 18 & 10 & 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Варіант 9

$$a = \{350; 350; 300\};$$

$$b = \{180; 220; 230; 270; 100\};$$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 15 & 7 & 2 \\ 20 & 9 & 7 & 14 & 5 \\ 18 & 10 & 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Варіант 10

$$a = \{400; 370; 380\};$$

$$b = \{250; 200; 290; 260; 150\};$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 11 & 3 \\ 12 & 8 & 6 & 14 & 11 \\ 10 & 15 & 7 & 9 & 18 \end{pmatrix}.$$

Варіант 11

$$a = \{300; 150; 250\};$$

$$b = \{160; 120; 100; 140; 180\};$$

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 3 & 9 & 15 & 35 \\ 14 & 10 & 12 & 20 & 46 \\ 25 & 11 & 16 & 19 & 48 \end{pmatrix}.$$

Варіант 12

$$a = \{180; 100; 120\};$$

$$b = \{100; 60; 90; 70; 80\};$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 9 & 15 & 35 \\ 3 & 10 & 12 & 20 & 46 \\ 15 & 11 & 16 & 19 & 48 \end{pmatrix}.$$

Варіант 13

$$a = \{250; 125; 225\};$$

$$b = \{120; 110; 85; 135; 150\};$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 20 & 9 & 15 & 35 \\ 3 & 14 & 12 & 20 & 46 \\ 15 & 25 & 16 & 19 & 48 \end{pmatrix}.$$

Варіант 14

$$a = \{200; 100; 200\};$$

$$b = \{80; 100; 70; 130; 120\};$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 20 & 3 & 15 & 35 \\ 3 & 14 & 10 & 20 & 46 \\ 15 & 25 & 11 & 19 & 48 \end{pmatrix}.$$

Варіант 15

$$a = \{220; 120; 160\};$$

$$b = \{70; 110; 80; 100; 140\};$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 20 & 3 & 9 & 35 \\ 3 & 14 & 10 & 12 & 46 \\ 15 & 25 & 11 & 16 & 48 \end{pmatrix}.$$

Варіант 16

$$a = \{210; 140; 150\};$$

$$b = \{80; 120; 90; 110; 100\};$$

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 3 & 9 & 15 \\ 12 & 3 & 14 & 12 & 20 \\ 18 & 15 & 25 & 16 & 19 \end{pmatrix}.$$

Вариант 17

$$a = \{170; 120; 110\};$$

$$b = \{90; 70; 90; 80; 70\};$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 20 & 3 & 9 & 15 \\ 3 & 14 & 10 & 12 & 20 \\ 15 & 25 & 11 & 16 & 19 \end{pmatrix}.$$

Вариант 18

$$a = \{250; 300; 150\};$$

$$b = \{140; 160; 100; 120; 180\};$$

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 20 & 9 & 15 \\ 12 & 3 & 14 & 12 & 20 \\ 18 & 15 & 25 & 16 & 19 \end{pmatrix}.$$

Вариант 19

$$a = \{225; 250; 125\};$$

$$b = \{120; 150; 110; 135; 85\};$$

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 20 & 3 & 15 \\ 12 & 3 & 14 & 10 & 20 \\ 18 & 15 & 25 & 11 & 19 \end{pmatrix}.$$

Вариант 20

$$a = \{150; 200; 150\};$$

$$b = \{80; 110; 60; 140; 110\};$$

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 20 & 3 & 9 & 15 \\ 12 & 14 & 10 & 12 & 20 \\ 18 & 25 & 11 & 16 & 19 \end{pmatrix}.$$

Вариант 21

$$a = \{560; 570; 620\};$$

$$b = \{300; 220; 230; 270; 100\};$$

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 15 & 7 & 2 \\ 20 & 9 & 7 & 14 & 5 \\ 18 & 10 & 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Вариант 22

$$a = \{180; 160; 140; 220\};$$

$$b = \{150; 250; 120; 180\};$$

$$C = \begin{pmatrix} 18 & 2 & 3 & 12 \\ 3 & 4 & 8 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 12 \\ 7 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Вариант 23

$$a = \{120; 280; 160\};$$

$$b = \{130; 220; 140; 70\};$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 24

$$a = \{50; 30; 10\};$$

$$b = \{30; 30; 10; 40\};$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вариант 25

$$a = \{510; 90; 120\};$$

$$b = \{270; 140; 200; 110\};$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 3 \\ 5 & 6 & 8 & 9 \\ 7 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Вариант 26

$$a = \{280; 175; 125; 130\};$$

$$b = \{90; 180; 310; 130\};$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 2 & 9 \\ 1 & 3 & 9 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Вариант 27

$$a = \{200; 270; 130\};$$

$$b = \{120; 80; 240; 160\};$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 9 \\ 5 & 1 & 8 & 12 \\ 11 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вариант 28

$$a = \{115; 175; 130\};$$

$$b = \{70; 220; 40; 30; 60\};$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 9 & 7 & 3 \\ 9 & 6 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 29

$$a = \{180; 350; 20\};$$

$$b = \{110; 90; 120; 80; 150\};$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 8 & 6 & 5 & 3 \\ 6 & 13 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Варіант 30

$$a = \{140; 180; 160\};$$

$$b = \{60; 70; 120; 130; 100\};$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 4 \\ 8 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 9 & 7 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

7.4. Задача про призначення

1. Сформулювати задачу про призначення.
2. При вивченні теорії графів розв'язати її, звівши до задачі про максимальне зважене паросполучення на повному дводоловому графі.

Варіант 1

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 & 11 & 5 & 11 \\ 10 & 8 & 11 & 8 & 8 & 8 \\ 15 & 6 & 2 & 4 & 11 & 13 \\ 15 & 4 & 12 & 9 & 7 & 8 \\ 8 & 10 & 12 & 5 & 2 & 13 \end{pmatrix}.$$

Варіант 5

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 & 8 & 9 & 3 \\ 14 & 10 & 3 & 9 & 14 & 12 \\ 11 & 7 & 4 & 9 & 4 & 5 \\ 14 & 14 & 12 & 14 & 3 & 8 \\ 10 & 14 & 10 & 6 & 12 & 13 \end{pmatrix}.$$

Варіант 2

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 3 & 2 & 14 & 14 \\ 15 & 13 & 1 & 9 & 15 & 8 \\ 14 & 2 & 15 & 14 & 9 & 7 \\ 6 & 11 & 1 & 6 & 14 & 9 \\ 8 & 8 & 5 & 15 & 15 & 8 \end{pmatrix}.$$

Варіант 6

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 14 & 1 & 8 & 2 \\ 6 & 13 & 4 & 14 & 11 & 6 \\ 4 & 4 & 12 & 1 & 11 & 10 \\ 12 & 15 & 6 & 4 & 14 & 13 \\ 7 & 2 & 9 & 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Варіант 3

$$C = \begin{pmatrix} 15 & 7 & 7 & 4 & 3 & 13 \\ 11 & 8 & 13 & 8 & 9 & 4 \\ 9 & 3 & 1 & 11 & 10 & 4 \\ 7 & 10 & 9 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 3 & 11 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Варіант 7

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 11 & 8 & 12 & 4 & 11 \\ 1 & 13 & 11 & 15 & 2 & 14 \\ 8 & 10 & 5 & 2 & 13 & 3 \\ 6 & 10 & 15 & 8 & 15 & 4 \\ 6 & 11 & 1 & 12 & 7 & 13 \end{pmatrix}.$$

Варіант 4

$$C = \begin{pmatrix} 15 & 15 & 1 & 8 & 13 & 4 \\ 13 & 13 & 10 & 1 & 6 & 14 \\ 11 & 6 & 10 & 4 & 9 & 15 \\ 13 & 5 & 11 & 6 & 15 & 2 \\ 4 & 13 & 2 & 8 & 13 & 12 \end{pmatrix}.$$

Варіант 8

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 15 & 11 & 7 & 2 \\ 12 & 10 & 2 & 2 & 15 & 8 \\ 1 & 1 & 3 & 14 & 7 & 9 \\ 8 & 2 & 14 & 5 & 5 & 9 \\ 8 & 6 & 10 & 15 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вариант 9

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & 14 & 10 & 4 \\ 8 & 1 & 13 & 7 & 9 & 9 \\ 11 & 6 & 2 & 7 & 1 & 12 \\ 1 & 15 & 12 & 15 & 8 & 4 \\ 4 & 12 & 15 & 6 & 12 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 15

$$C = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 12 & 7 & 13 & 6 \\ 12 & 15 & 8 & 7 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 5 & 6 & 13 & 8 \\ 8 & 12 & 2 & 10 & 6 & 6 \\ 9 & 13 & 3 & 11 & 14 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вариант 10

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 11 & 4 & 2 & 7 \\ 10 & 2 & 7 & 10 & 13 & 5 \\ 7 & 14 & 11 & 4 & 12 & 5 \\ 5 & 1 & 6 & 7 & 5 & 5 \\ 4 & 15 & 13 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Вариант 16

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 14 & 8 & 5 & 9 \\ 9 & 7 & 1 & 11 & 8 & 6 \\ 1 & 6 & 4 & 4 & 13 & 6 \\ 1 & 6 & 12 & 3 & 14 & 5 \\ 5 & 4 & 12 & 2 & 15 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вариант 11

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 15 & 3 & 13 & 1 \\ 5 & 12 & 10 & 3 & 15 & 9 \\ 4 & 9 & 14 & 14 & 8 & 7 \\ 5 & 1 & 12 & 2 & 6 & 6 \\ 14 & 1 & 13 & 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Вариант 17

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 11 & 3 & 8 & 11 & 14 \\ 11 & 12 & 7 & 4 & 8 & 4 \\ 13 & 10 & 13 & 12 & 8 & 5 \\ 11 & 15 & 12 & 13 & 11 & 9 \\ 12 & 8 & 13 & 2 & 15 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 12

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 4 & 15 & 9 & 5 \\ 15 & 14 & 3 & 1 & 11 & 14 \\ 2 & 1 & 9 & 10 & 8 & 1 \\ 11 & 15 & 14 & 2 & 6 & 4 \\ 9 & 10 & 5 & 12 & 12 & 12 \end{pmatrix}.$$

Вариант 18

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 2 & 11 & 10 & 12 \\ 9 & 13 & 9 & 15 & 14 & 8 \\ 12 & 8 & 13 & 5 & 15 & 5 \\ 2 & 12 & 13 & 14 & 5 & 13 \\ 9 & 7 & 13 & 15 & 2 & 11 \end{pmatrix}.$$

Вариант 13

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 11 & 15 & 3 & 2 \\ 14 & 8 & 13 & 13 & 3 & 4 \\ 1 & 10 & 12 & 8 & 1 & 15 \\ 8 & 5 & 3 & 10 & 9 & 12 \\ 3 & 6 & 3 & 13 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вариант 19

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 13 & 15 & 10 \\ 11 & 14 & 11 & 9 & 6 & 10 \\ 6 & 7 & 6 & 8 & 8 & 14 \\ 4 & 6 & 9 & 8 & 4 & 9 \\ 14 & 1 & 7 & 2 & 9 & 9 \end{pmatrix}.$$

Вариант 14

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 13 & 8 & 9 & 14 & 11 \\ 11 & 3 & 9 & 15 & 9 & 13 \\ 15 & 14 & 4 & 1 & 7 & 1 \\ 8 & 15 & 4 & 6 & 7 & 13 \\ 13 & 7 & 6 & 14 & 12 & 12 \end{pmatrix}.$$

Вариант 20

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 9 & 7 & 13 & 10 \\ 6 & 6 & 4 & 15 & 5 & 3 \\ 6 & 12 & 11 & 11 & 1 & 6 \\ 14 & 5 & 9 & 5 & 2 & 6 \\ 13 & 15 & 13 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вариант 21

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 9 & 12 & 13 & 3 \\ 14 & 2 & 12 & 11 & 11 & 3 \\ 7 & 8 & 8 & 13 & 11 & 13 \\ 8 & 15 & 2 & 9 & 5 & 8 \\ 11 & 4 & 10 & 5 & 14 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вариант 26

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 7 & 13 & 14 & 12 \\ 5 & 12 & 3 & 8 & 10 & 11 \\ 6 & 11 & 14 & 1 & 3 & 13 \\ 7 & 7 & 15 & 12 & 15 & 4 \\ 2 & 6 & 8 & 9 & 15 & 8 \end{pmatrix}.$$

Вариант 22

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 15 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 7 & 11 & 13 & 12 & 11 & 8 \\ 11 & 15 & 8 & 5 & 12 & 4 \\ 4 & 7 & 10 & 10 & 2 & 2 \\ 5 & 12 & 7 & 13 & 15 & 6 \end{pmatrix}.$$

Вариант 27

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 15 & 4 & 10 & 15 & 11 \\ 5 & 8 & 1 & 14 & 7 & 5 \\ 15 & 7 & 5 & 2 & 9 & 3 \\ 2 & 9 & 5 & 6 & 11 & 13 \\ 6 & 15 & 15 & 4 & 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

Вариант 23

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 12 & 5 & 8 & 4 \\ 15 & 8 & 9 & 4 & 2 & 1 \\ 13 & 12 & 3 & 14 & 11 & 10 \\ 15 & 1 & 7 & 8 & 9 & 2 \\ 10 & 1 & 9 & 11 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Вариант 28

$$C = \begin{pmatrix} 14 & 10 & 11 & 12 & 6 & 4 \\ 1 & 8 & 10 & 5 & 8 & 4 \\ 5 & 10 & 14 & 13 & 4 & 6 \\ 14 & 4 & 15 & 10 & 3 & 13 \\ 10 & 9 & 4 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Вариант 24

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 6 & 2 & 6 & 4 \\ 4 & 10 & 8 & 7 & 4 & 13 \\ 13 & 5 & 10 & 12 & 15 & 14 \\ 6 & 3 & 12 & 2 & 3 & 6 \\ 13 & 9 & 9 & 14 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 29

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 4 & 12 & 14 & 8 \\ 3 & 13 & 8 & 2 & 14 & 10 \\ 2 & 14 & 1 & 1 & 15 & 11 \\ 6 & 8 & 12 & 1 & 11 & 11 \\ 7 & 9 & 6 & 3 & 6 & 14 \end{pmatrix}.$$

Вариант 25

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 10 & 8 & 5 & 4 & 8 \\ 4 & 1 & 3 & 4 & 3 & 10 \\ 13 & 13 & 13 & 11 & 13 & 12 \\ 4 & 15 & 2 & 10 & 4 & 4 \\ 6 & 3 & 8 & 15 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Вариант 30

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 2 & 8 & 13 \\ 14 & 11 & 6 & 5 & 11 & 14 \\ 14 & 2 & 8 & 2 & 4 & 14 \\ 3 & 2 & 9 & 5 & 6 & 12 \\ 13 & 11 & 7 & 10 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Література

1. Баргіш М. Я. Дослідження операцій. Частина 1. Лінійні моделі / М. Я. Баргіш, І. М. Дудзяний. — Львів : Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007. — 168 с.
2. Іглін С. П. Персональна сторінка. — <http://iglin.epizy.com>.
3. Сенчук Ю. Ф. Лінійна алгебра. Теорія лінійних просторів. Навчальний посібник / Ю. Ф. Сенчук. — Харків : НТУ "ХПІ", 2001. — 200 с.
4. Тимченко Л. С. Математичне програмування: Навч.-метод. посіб. / Л. С. Тимченко, Т. Л. Корніль, Н. О. Кириллова. — Харків : ХДПУ, 1998. — 36 с.
5. Dantzig G. B. Linear Programming, 1: Introduction / G. B. Dantzig, M. N. Thapa. — NY : Springer, 1997. — 474 p.

Навчальне видання

ІГЛІН Сергій Петрович
ЗАЙЦЕВ Юрій Іванович
РЕШЕТНЯК Юрій Борисович

ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Навчальний посібник
для студентів усіх спеціальностей
усіх форм навчання
вищих навчальних закладів

Відповідальний за випуск *О. Б. Азієзер*
В авторській редакції

План 2022 р., поз. 100

Підп. до друку 27.10.2022. Формат 60 × 90 ¹/₁₆. Папір офсетний.

Гарнітура Cambria. Ум. друк. арк. 7,5.

Наклад 100 прим. Зам. № 76 – 2022/2510. Ціна договірна.

Видавництво "НТМТ".

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавництв ДК № 1748 від 15.04.2004 р.

61072, м. Харків, вул. Дерев'янка, б. 6, к. 83. Тел. (095)249-39-96