

УДК 517.95

**А. Я. БОМБА, Ю. Є. КЛИМЮК****ПРОГНОЗУВАННЯ ЗМІНИ ХАРАКТЕРИСТИК КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ПОРИСТИХ ЗАВАНТАЖЕНЬ ШВИДКИХ БАГАТОШАРОВИХ ФІЛЬТРІВ**

Сформовано математичну модель прогнозування процесу доочистки води від домішок у швидких багатошарових фільтрах при додержанні сталої швидкості фільтрації, що враховує дослідження зміни характеристик кусково-однорідних пористих завантажень. Запропонована модель дозволяє шляхом проведення комп'ютерних експериментів спрогнозувати зміну характеристик кусково-однорідних пористих завантажень, визначити оптимальні варіанти їх використання і збільшення тривалості роботи фільтрів за рахунок вибору їх форми та висоти шарів.

**Ключові слова:** математична модель, прогнозування, процес доочистки води, швидкий багатошаровий фільтр, кусково-однорідне пористе завантаження.

**А. Я. БОМБА, Ю. Е. КЛИМЮК****ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ ПОРИСТЫХ ЗАГРУЗОК БЫСТРЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ ФИЛЬТРОВ**

Сформирована математическая модель прогнозирования процесса доочистки воды от примесей в быстрых многослойных фильтрах при соблюдении постоянной скорости фильтрации, которая учитывает исследования изменения характеристик кусочно-однородных пористых загрузок. Предложенная модель позволяет путем проведения компьютерных экспериментов спрогнозировать изменение характеристик кусочно-однородных пористых загрузок, определить оптимальные варианты их использования и увеличение продолжительности работы фильтров за счет выбора их формы и высоты слоев.

**Ключевые слова:** математическая модель, прогнозирование, процесс доочистки воды, быстрый многослойный фильтр, кусочно-однородная пористая загрузка.

**А. YA. BOMBA, YU. YE. KLYMYUK****PREDICTION OF CHANGES IN THE CHARACTERISTICS OF PIECEWISE HOMOGENEOUS POROUS LOADS OF RAPID MULTILAYER FILTERS**

A mathematical model for predicting the process of water purification from impurities in rapid multilayer filters with the constant rate of filtration, which takes into account the changes in the characteristics of piecewise-homogeneous porous load, is formulated. Each layer of the load is characterized by its own coefficients of filtration, active porosity and diffusion of impurities in the filtration flow, and the sediment adsorbed on the grains of the load. An algorithm for numerically-asymptotic approximation of solution of the model problem for a filter that has the shape of a curvilinear parallelepiped, bounded by two equipotential surfaces and four flow surfaces, separated by given equipotential surfaces into several subdomains, is developed. The proposed model allows to predict by computer experiments the change in the characteristics of piecewise-homogeneous porous loads, to determine the optimal variants of their use, and to increase the durability of the filters by choosing their shape and height of the layers.

**Key words:** mathematical model, prediction, process of water purification, rapid multilayer filter, piecewise-homogeneous porous load.

**Вступ.** На сьогоднішній день прісні поверхневі та підземні води потребують покращання їх якості перед використанням для водопостачання, зрошення земельних угідь та інших видів господарської діяльності. Це досягається шляхом їх очистки від різних домішок (газів, мінеральних й органічних речовин, що знаходяться в розчиненому, колоїдному і завислому станах, а також мікроорганізмів) за допомогою механічних, хімічних, фізичних та біологічних методів. Для видалення з води нерозчинених і колоїдно-розчинених домішок зазвичай послідовно застосовується її відстоювання і фільтрування. Для доочистки води від домішок досить часто використовуються швидкі фільтри із багатошаровими пористими завантаженнями з піску і гравію або інших фільтруючих матеріалів завдяки більш високій швидкості фільтрування [1 – 4]. Постійно зростаючі об'єми використовуваної у господарстві води також вимагають проведення досліджень по збільшенню часу захисної дії швидких багатошарових фільтрів та більш якісного використання їх пористих завантажень.

**Аналіз останніх досліджень.** До 50-х років ХХ ст. основними фільтруючими зернистими завантаженнями для очищення води були кварцові піски, які важчі за воду і тонули в ній. Ці їхні властивості визначали типи й умови роботи фільтрів. Останнім часом на додачу до традиційно використовуваного кварцового піску з'явилося багато нових матеріалів: керамзит, аглопорит, шлакова пемза, погорілі породи, вулканічні шлаки, базальтові та мармурові піски і таке інше. Різноманітні природні властивості нових фільтруючих завантажень фільтрів впливають на ефективність їхньої роботи, розміри споруд, продуктивність і т. п. У ХХІ ст. йде пошук нових фільтруючих матеріалів. У двошарових фільтрах використовують усілякі зернисті інертні матеріали, шари яких компонується так, щоб верхній складався з більш легких і великих часток. Вдається підібрати навіть тришарові завантаження (наприклад, керамічна крихта – аглопоритовий пісок – антрацит), які складаються із шарів по 0,5 м і мають сорбційну ємність кращу, ніж двошарові [1].

Розробкою теоретичних основ очистки рідин від домішок шляхом їх фільтрування через пористі завантаження та подальшим її вдосконаленням займався чимало вітчизняних і зарубіжних вчених [5–10]. В якості математичної моделі процесу фільтрування води через пористі завантаження більшістю дослідників використовується модель Д. М. Мінца [11] при сталій швидкості фільтрації або деяка її модифікація (вдосконалена модель).

**Постановка задачі.** У [12] запропоновано просторове узагальнення моделі Д. М. Мінца для багатошарового фільтра при сталій швидкості фільтрації, яка є більш ефективною для проведення теоретичних досліджень,

© А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк, 2018

націлених на оптимізацію параметрів процесу фільтрування (часу захисної дії, розмірів фільтра тощо) за рахунок введення додаткового рівняння для визначення зміни активної пористості завантаження вздовж висоти фільтру, врахування дифузії домішок не лише у фільтраційній течії, а й в осаді, адсорбованому на зернах завантаження. Актуальною задачею є введення ще одного додаткового рівняння для дослідження зміни коефіцієнта фільтрації вздовж висоти багат шарового фільтра.

**Математична модель.** Для області  $G = G_z \times (0, \infty)$  ( $z = (x, y, z)$ ),  $G_z = ABCDA_*B_*C_*D_*$  – однозв’язний криволінійний паралелепіпед, обмежений гладкими, ортогональними між собою в кутових точках та по ребрах, двома екіпотенціальними поверхнями  $ABB_*A_* = \{z: f_1(x, y, z) = 0\}$ ,  $CDD_*C_* = \{z: f_2(x, y, z) = 0\}$  і чотирма поверхнями течії  $ADD_*A_* = \{z: f_3(x, y, z) = 0\}$ ,  $BCC_*B_* = \{z: f_4(x, y, z) = 0\}$ ,  $ABCD = \{z: f_5(x, y, z) = 0\}$ ,  $A_*B_*C_*D_* = \{z: f_6(x, y, z) = 0\}$  та розділений заданими екіпотенціальними поверхнями  $E_s F_s F_{*s} E_{*s} = \{z: f_{*s}^*(x, y, z) = 0\}$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ) на деякі  $p$  підобластей  $G_z^1 = ABF_1E_1A_*B_*F_{*1}E_{*1}$ ,  $G_z^s = E_s F_s F_{s+1} E_{s+1} E_{*s} F_{*s} F_{*s+1} E_{*s+1}$  ( $s = \overline{2, p-2}$ ),  $G_z^p = E_{p-1} F_{p-1} CDE_{*p-1} F_{*p-1} C_*D_*$  (рис. 1, а), сформовано модельну задачу, що описується системою рівнянь:

$$\left\{ \vec{v} = \kappa_0^0 \cdot \text{grad } \varphi, \text{div } \vec{v} = 0, (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p}; \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} (\sigma \cdot C)'_t &= \text{div}(D \cdot \text{grad } C) - \vec{v} \cdot \text{grad } C - \alpha \cdot C + \beta \cdot U; \\ (\sigma \cdot U)'_t &= \text{div}(D^* \cdot \text{grad } U) + \alpha \cdot C - \beta \cdot U; \\ \kappa'_t &= -\mu \cdot U, \sigma'_t = -\gamma \cdot U, (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p} \end{aligned} \right. \quad (2)$$

за крайових умов:

$$\left\{ \varphi \Big|_{ABB_*A_*} = \varphi_*, \varphi \Big|_{CDD_*C_*} = \varphi^*, \varphi'_n \Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0; \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} C \Big|_{ABB_*A_*} = c^*, C'_n \Big|_{CDD_*C_*} = 0, C'_n \Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0; \\ U \Big|_{ABB_*A_*} = u^*, U'_n \Big|_{CDD_*C_*} = 0, U'_n \Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0, \end{aligned} \right. \quad (4)$$

початкових умов:

$$\left\{ C \Big|_{t=0} = c_0^0, U \Big|_{t=0} = u_0^0, \kappa \Big|_{t=0} = \kappa_0^0, \sigma \Big|_{t=0} = \sigma_0^0 \right. \quad (5)$$

та умов узгодженості на поверхнях розділу  $E_s F_s F_{*s} E_{*s}$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ):

$$\left\{ \varphi \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s-}} = \varphi \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s+}} = \varphi_{*s}^*, \kappa_0^0 \cdot \varphi'_n \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s-}} = \kappa_{s+1}^0 \cdot \varphi'_n \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s+}}, s = \overline{1, p-1}; \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} C \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s-}} = C \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s+}}, D_s \cdot C'_n - v_{sn}^0 \cdot C \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s-}} = D_{s+1} \cdot C'_n - v_{sn}^0 \cdot C \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s+}}; \\ U \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s-}} = U \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s+}}, D_s^* \cdot U'_n \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s-}} = D_{s+1}^* \cdot U'_n \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s+}}; \\ D_s \cdot C'_n + D_s^* \cdot U'_n - v_{sn} \cdot C \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s-}} = D_{s+1} \cdot C'_n + D_{s+1}^* \cdot U'_n - v_{sn} \cdot C \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s+}}; \\ (\sigma \cdot (C+U))'_t \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s-}} = (\sigma \cdot (C+U))'_t \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s+}}, s = \overline{1, p-1}, \end{aligned} \right. \quad (7)$$

де  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  і  $\vec{v} = \vec{v}(v_x, v_y, v_z)$  – відповідно потенціал і вектор швидкості фільтрації,  $\varphi_* < \varphi < \varphi^*$ ,  $0 < \varphi_* = \varphi_{*0}^0 < \varphi_{*1}^0 < \varphi_{*2}^0 < \dots < \varphi_{*p-1}^0 < \varphi_{*p}^0 = \varphi^* < \infty$ ,  $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2(x, y, z) + v_y^2(x, y, z) + v_z^2(x, y, z)} > 0$ ,  $\kappa_0^0$  – початковий коефіцієнт фільтрації,  $\kappa_0^0 = \left\{ \kappa_s^0, (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p} \right\}$ ,  $\kappa_s^0 > 0$  ( $s = \overline{1, p}$ ),  $\vec{n}$  – зовнішня нормаль до відповідної поверхні,  $C = C(x, y, z, t)$  і  $U = U(x, y, z, t)$  – відповідно концентрації домішок у фільтраційній течії і осаді, адсорбованому на зернах завантаження,  $\sigma = \sigma(x, y, z, t)$  – активна пористість,  $\kappa = \kappa(x, y, z, t)$  – коефіцієнт фільтрації,  $D$  – коефіцієнт дифузії домішок у фільтраційній течії,  $D = \left\{ D_s, (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p} \right\}$ ,  $D_s = \varepsilon \cdot d_s$ ,  $d_s > 0$  ( $s = \overline{1, p}$ ),  $D^*$  – коефіцієнт дифузії домішок в осаді,  $D^* = \left\{ D_s^*, (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p} \right\}$ ,  $D_s^* = \varepsilon \cdot d_s^*$ ,  $d_s^* > 0$  ( $s = \overline{1, p}$ ),  $\alpha$  і  $\beta$  – коефіцієнти, що характеризують обсяги адсорбованих і десорбованих за одиницю часу домішок,  $\alpha = \left\{ \alpha_s, (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p} \right\}$ ,  $\beta = \left\{ \beta_s, (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p} \right\}$ ,  $\beta_s = \varepsilon \cdot \bar{\beta}_s$  ( $s = \overline{1, p}$ ),  $\mu$  – коефіцієнт, що характеризує швидкість зміни коефіцієнта фільтрації,  $\mu = \left\{ \mu_s, (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p} \right\}$ ,  $\mu_s = \varepsilon \cdot \bar{\mu}_s$  ( $s = \overline{1, p}$ ),  $\gamma$  –

коефіцієнт, що характеризує швидкість зміни активної пористості завантаження,  $\gamma = \{\gamma_s, (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p}\}$ ,  $\gamma_s = \varepsilon \cdot \bar{\gamma}_s$  ( $s = \overline{1, p}$ ),  $\alpha_s = \alpha_s(x, y, z, t)$ ,  $\bar{\beta}_s = \bar{\beta}_s(x, y, z, t)$ ,  $\bar{\mu}_s = \bar{\mu}_s(x, y, z, t)$  і  $\bar{\gamma}_s = \bar{\gamma}_s(x, y, z, t)$  ( $s = \overline{1, p}$ ) – неперервні обмежені функції,  $\varepsilon$  – малий параметр ( $\varepsilon > 0$ ),  $c_0^0 = \{c_s^0, (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p}\}$ ,  $u_0^0 = \{u_s^0, (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p}\}$ ,  $\sigma_0^0 = \{\sigma_s^0, (x, y, z) \in G_z^s, s = \overline{1, p}\}$ ,  $c_* = c_*(M, t)$ ,  $c_s^0 = c_s^0(x, y, z)$ ,  $u_* = u_*(M, t)$ ,  $u_s^0 = u_s^0(x, y, z)$  і  $\sigma_s^0 = \sigma_s^0(x, y, z)$  ( $s = \overline{1, p}$ ) – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області  $G$  [16],  $M \in ABB_*A_*$ ,  $v_{sn}^0$  і  $v_{sn}$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ) – відповідно початкові і поточні нормальні складові швидкості на поверхнях  $E_s F_s F'_s E_{*s}$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ).

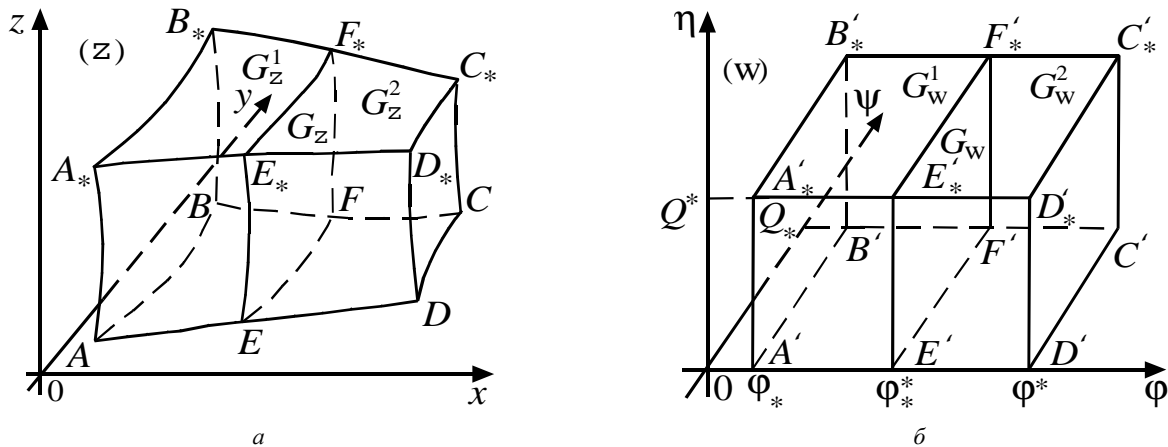


Рис. 1 – Двошарова просторова область: а – область фільтрації  $G_z$ ; б – область комплексного потенціалу  $G_w$ .

Шляхом введення пари функцій  $\psi = \psi(x, y, z)$ ,  $\eta = \eta(x, y, z)$  (просторово комплексно спряжених із функцією  $\varphi(x, y, z)$ ) таких, що  $\kappa_0^0 \cdot \text{grad } \varphi = \text{grad } \psi \times \text{grad } \eta$  [14] і заміни останніх чотирьох з граничних умов (3) на умови:  $\psi|_{ADD_*A_*} = 0$ ,  $\psi|_{BCC_*B_*} = Q_*$ ,  $\eta|_{ABCD} = 0$ ,  $\eta|_{A_*B_*C_*D_*} = Q^*$ , задача (1), (3), (6) замінюється більш загальною прямою задачею на знаходження просторового аналогу кусково-конформного відображення області  $G_z$  на відповідну область комплексного потенціалу – прямокутний паралелепіпед  $G_w = A'B'C'D'A_*B_*C_*D_*$ , який розділений заданими поверхнями  $E'_s F'_s E'_{*s} F'_{*s}$  ( $s = \overline{1, p}$ ) на деякі  $p$  підобластей:

$$G_w^1 = A'B'E'_1 A'_* B'_* E'_{*1} F'_{*1}, \quad G_w^s = E'_s F'_s F'_{s+1} E'_{s+1} E'_{*s} F'_{*s} F'_{*s+1} E'_{*s+1} \quad (s = \overline{2, p-2}),$$

$$G_w^p = E'_{p-1} F'_{p-1} C'D'E'_{*p-1} F'_{*p-1} C'_* D'_* \quad (\text{рис. 1, б}),$$

де  $G_w^s = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_{*(s-1)}^* < \varphi < \varphi_{*s}^*, 0 < \psi < Q_*, 0 < \eta < Q^*\}$  ( $s = \overline{1, p}$ ),  $\varphi_{*s}^*$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ),  $Q_*$ ,  $Q^*$  – невідомі параметри,  $Q = Q_* \cdot Q^*$  – повна фільтраційна витрата. Алгоритм розв'язання цієї задачі отримано в [13], зокрема, в роботі наведені формули для знаходження поля швидкостей  $\vec{v}$ , параметрів  $\varphi_{*s}^*$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ),  $Q_*$ ,  $Q^*$ ,  $Q$  та ряду інших величин. Здійснивши заміну змінних  $x = x(\varphi, \psi, \eta)$ ,  $y = y(\varphi, \psi, \eta)$ ,  $z = z(\varphi, \psi, \eta)$  у рівнянні (2) та умовах (4), (5), (7), отримуємо відповідну «дифузійну задачу» для області  $G_w \times (0, \infty)$ :

$$\begin{cases} (\tilde{\sigma} \cdot c)'_t = D \cdot (b_1 \cdot c''_{\varphi\varphi} + b_2 \cdot c''_{\psi\psi} + b_3 \cdot c''_{\eta\eta} + b_4 \cdot c'_{\psi} + b_5 \cdot c'_{\eta}) - \frac{\tilde{v}^2}{\kappa_0^0} \cdot c'_{\varphi} - \tilde{\alpha} \cdot c + \tilde{\beta} \cdot u, & (\tilde{\sigma} \cdot u)'_t = D^* \cdot (b_1 \cdot u''_{\varphi\varphi} + \\ + b_2 \cdot u''_{\psi\psi} + b_3 \cdot u''_{\eta\eta} + b_4 \cdot u'_{\psi} + b_5 \cdot u'_{\eta}) + \tilde{\alpha} \cdot c - \tilde{\beta} \cdot u, & \tilde{\kappa}'_t = -\tilde{\mu} \cdot u, \tilde{\sigma}'_t = -\tilde{\gamma} \cdot u, \end{cases} \quad (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p}; \quad (8)$$

$$\begin{cases} c|_{\varphi=\varphi_*} = \tilde{c}_*, c'_{\varphi}|_{\varphi=\varphi_*} = 0, c'_{\psi}|_{\psi=0} = c'_{\psi}|_{\psi=Q_*} = c'_{\eta}|_{\eta=0} = c'_{\eta}|_{\eta=Q^*} = 0, \\ u|_{\varphi=\varphi_*} = \tilde{u}_*, u'_{\varphi}|_{\varphi=\varphi_*} = 0, u'_{\psi}|_{\psi=0} = u'_{\psi}|_{\psi=Q_*} = u'_{\eta}|_{\eta=0} = u'_{\eta}|_{\eta=Q^*} = 0; \end{cases} \quad (9)$$

$$\{c|_{t=0} = \tilde{c}_0^0, u|_{t=0} = \tilde{u}_0^0, \tilde{\kappa}|_{t=0} = \kappa_0^0, \tilde{\sigma}|_{t=0} = \tilde{\sigma}_0^0; \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s-0}^*} c = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s+0}^*} c, \quad \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s-0}^*} (D_s \cdot c'_\varphi - \kappa_s^0 \cdot c) = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s+0}^*} (D_{s+1} \cdot c'_\varphi - \kappa_{s+1}^0 \cdot c), \\ \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s-0}^*} u = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s+0}^*} u, \quad \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s-0}^*} D_s^* \cdot u'_\varphi = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s+0}^*} D_{s+1}^* \cdot u'_\varphi, \\ \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s-0}^*} (D_s \cdot c'_\varphi + D_s^* \cdot u'_\varphi - \tilde{\kappa}_s \cdot c) = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s+0}^*} (D_{s+1} \cdot c'_\varphi + D_{s+1}^* \cdot u'_\varphi - \tilde{\kappa}_{s+1} \cdot c), \\ \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s-0}^*} (\tilde{\sigma} \cdot (c+u))'_t = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s+0}^*} (\tilde{\sigma} \cdot (c+u))'_t, \quad s = \overline{1, p-1}, \end{array} \right. \quad (11)$$

де  $c = c(\varphi, \psi, \eta, t) = C(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t)$ ,  $u = u(\varphi, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{\kappa} = \tilde{\kappa}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{c}_* = \tilde{c}_*(\varphi, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{u}_* = \tilde{u}_*(\varphi, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{c}_0^0 = \{\tilde{c}_s^0, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p}\}$ ,  $\tilde{u}_0^0 = \{\tilde{u}_s^0, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p}\}$ ,  $\tilde{\sigma}_0^0 = \{\tilde{\sigma}_s^0, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p}\}$ ,  $\tilde{\alpha} = \{\tilde{\alpha}_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p}\}$ ,  $\tilde{\beta} = \{\tilde{\beta}_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p}\}$ ,  $\tilde{\beta}_s = \varepsilon \cdot \tilde{\beta}_s$  ( $s = \overline{1, p}$ ),  $\tilde{\gamma} = \{\tilde{\gamma}_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p}\}$ ,  $\tilde{\gamma}_s = \varepsilon \cdot \tilde{\gamma}_s$  ( $s = \overline{1, p}$ ),  $\tilde{\mu} = \{\tilde{\mu}_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p}\}$ ,  $\tilde{\mu}_s = \varepsilon \cdot \tilde{\mu}_s$  ( $s = \overline{1, p}$ ),  $\tilde{c}_s^0 = \tilde{c}_s^0(\varphi, \psi, \eta)$ ,  $\tilde{u}_s^0 = \tilde{u}_s^0(\varphi, \psi, \eta)$ ,  $\tilde{\sigma}_s^0 = \tilde{\sigma}_s^0(\varphi, \psi, \eta)$ ,  $\tilde{\alpha}_s = \tilde{\alpha}_s(\varphi, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{\beta}_s = \tilde{\beta}_s(\varphi, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{\gamma}_s = \tilde{\gamma}_s(\varphi, \psi, \eta, t)$  ( $s = \overline{1, p}$ ),  $\tilde{v} = \{\tilde{v}_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p}\}$ ,  $\tilde{v}_s = \tilde{v}_s(\varphi, \psi, \eta)$ ,  $b_r = \{b_{r,s}, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p}\}$ ,  $b_{r,s} = b_{r,s}(\varphi, \psi, \eta)$  ( $r = \overline{1, 5}$ ,  $s = \overline{1, p}$ ),  $b_{1,s} = \varphi_x'^2 + \varphi_y'^2 + \varphi_z'^2 = \tilde{v}_s^2 / (\kappa_s^0)^2$ ,  $b_{2,s} = \psi_x'^2 + \psi_y'^2 + \psi_z'^2$ ,  $b_{3,s} = \eta_x'^2 + \eta_y'^2 + \eta_z'^2$ ,  $b_{4,s} = \psi_{xx}'' + \psi_{yy}'' + \psi_{zz}''$ ,  $b_{5,s} = \eta_{xx}'' + \eta_{yy}'' + \eta_{zz}''$  [12, 13].

**Розв'язання задачі.** Аналогічно до [12, 13] знайдено чисельно-асимптотичне наближення  $c = \{c_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p}\}$ ,  $u = \{u_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p}\}$ ,  $\tilde{\sigma} = \{\tilde{\sigma}_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p}\}$  розв'язку задачі (8) – (11) з точністю  $O(\varepsilon^{n+1})$  у вигляді таких рядів:

$$\begin{aligned} c_s &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot c_{s,i} + \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot \tilde{P}_{s,i} + \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot \tilde{\tilde{P}}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{P}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \hat{\tilde{P}}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{P}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{\tilde{P}}_{s,i} + R_{s,n+1} \quad (s = \overline{1, p}); \\ u_s &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot u_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{H}_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{\tilde{H}}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \hat{H}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \hat{\tilde{H}}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{H}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{\tilde{H}}_{s,i} + \tilde{R}_{s,n+1} \\ &\quad (s = \overline{1, p}); \\ \tilde{\kappa}_s &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot \tilde{\kappa}_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{q}_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{\tilde{q}}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \hat{q}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \hat{\tilde{q}}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{q}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{\tilde{q}}_{s,i} + \tilde{R}_{s,n+1} \quad (s = \overline{1, p}); \\ \tilde{\sigma}_s &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot \tilde{\sigma}_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{h}_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{\tilde{h}}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \hat{h}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \hat{\tilde{h}}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{h}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{\tilde{h}}_{s,i} + \tilde{R}_{s,n+1} \quad (s = \overline{1, p}), \end{aligned}$$

де  $c_{s,i} = c_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ,  $u_{s,i} = u_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{\kappa}_{s,i} = \tilde{\kappa}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{\sigma}_{s,i} = \tilde{\sigma}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$  ( $s = \overline{1, p}$ ,  $i = \overline{0, n}$ ) – члени регулярних частин асимптотик,  $\tilde{P}_{s,i} = \tilde{P}_{s,i}(\tilde{\varphi}_{s-1}, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{\tilde{P}}_{s,i} = \tilde{\tilde{P}}_{s,i}(\tilde{\varphi}_{s-1}, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{H}_{s,i} = \tilde{H}_{s,i}(\tilde{\varphi}_{s-1}, \psi, \eta, t)$ ,  $\hat{\tilde{H}}_{s,i} = \hat{\tilde{H}}_{s,i}(\tilde{\varphi}_s, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{H}_{s,i} = \tilde{H}_{s,i}(\tilde{\varphi}_s, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{\tilde{H}}_{s,i} = \tilde{\tilde{H}}_{s,i}(\tilde{\varphi}_s, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{q}_{s,i} = \tilde{q}_{s,i}(\tilde{\varphi}_{s-1}, \psi, \eta, t)$ ,  $\hat{\tilde{q}}_{s,i} = \hat{\tilde{q}}_{s,i}(\tilde{\varphi}_s, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{q}_{s,i} = \tilde{q}_{s,i}(\tilde{\varphi}_s, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{\tilde{q}}_{s,i} = \tilde{\tilde{q}}_{s,i}(\tilde{\varphi}_s, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{h}_{s,i} = \tilde{h}_{s,i}(\tilde{\varphi}_{s-1}, \psi, \eta, t)$  ( $s = \overline{1, p}$ ,  $i = \overline{0, n+1}$ ),  $\tilde{h}_{s,i} = \tilde{h}_{s,i}(\tilde{\varphi}_s, \psi, \eta, t)$ ,  $\hat{\tilde{h}}_{s,i} = \hat{\tilde{h}}_{s,i}(\tilde{\varphi}_s, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{h}_{s,i} = \tilde{h}_{s,i}(\tilde{\varphi}_s, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{\tilde{h}}_{s,i} = \tilde{\tilde{h}}_{s,i}(\tilde{\varphi}_s, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{P}_{s,i} = \tilde{P}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\hat{\tilde{P}}_{s,i} = \hat{\tilde{P}}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{P}_{s,i} = \tilde{P}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{\tilde{P}}_{s,i} = \tilde{\tilde{P}}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{H}_{s,i} = \tilde{H}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\hat{\tilde{H}}_{s,i} = \hat{\tilde{H}}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{H}_{s,i} = \tilde{H}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{\tilde{H}}_{s,i} = \tilde{\tilde{H}}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{q}_{s,i} = \tilde{q}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\hat{\tilde{q}}_{s,i} = \hat{\tilde{q}}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{q}_{s,i} = \tilde{q}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{\tilde{q}}_{s,i} = \tilde{\tilde{q}}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{h}_{s,i} = \tilde{h}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\hat{\tilde{h}}_{s,i} = \hat{\tilde{h}}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{h}_{s,i} = \tilde{h}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{\tilde{h}}_{s,i} = \tilde{\tilde{h}}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{P}_{s,i} = \tilde{P}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\hat{\tilde{P}}_{s,i} = \hat{\tilde{P}}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{P}_{s,i} = \tilde{P}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{\tilde{P}}_{s,i} = \tilde{\tilde{P}}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{H}_{s,i} = \tilde{H}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\hat{\tilde{H}}_{s,i} = \hat{\tilde{H}}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{H}_{s,i} = \tilde{H}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{\tilde{H}}_{s,i} = \tilde{\tilde{H}}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{q}_{s,i} = \tilde{q}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\hat{\tilde{q}}_{s,i} = \hat{\tilde{q}}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{q}_{s,i} = \tilde{q}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{\tilde{q}}_{s,i} = \tilde{\tilde{q}}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{h}_{s,i} = \tilde{h}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\hat{\tilde{h}}_{s,i} = \hat{\tilde{h}}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{h}_{s,i} = \tilde{h}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{\tilde{h}}_{s,i} = \tilde{\tilde{h}}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ , ( $s = \overline{1, p}$ ,  $i = \overline{0, 2n+1}$ ) – функції типу примежового шару в околах  $\varphi = \varphi_{*s}^*$  ( $s = \overline{0, p}$ ) (поправки на вході, виході і в околі меж шарів фільтру),  $\tilde{P}_{s,i} = \tilde{P}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\hat{\tilde{P}}_{s,i} = \hat{\tilde{P}}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{P}_{s,i} = \tilde{P}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{\tilde{P}}_{s,i} = \tilde{\tilde{P}}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{H}_{s,i} = \tilde{H}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\hat{\tilde{H}}_{s,i} = \hat{\tilde{H}}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{H}_{s,i} = \tilde{H}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{\tilde{H}}_{s,i} = \tilde{\tilde{H}}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{q}_{s,i} = \tilde{q}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\hat{\tilde{q}}_{s,i} = \hat{\tilde{q}}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{q}_{s,i} = \tilde{q}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{\tilde{q}}_{s,i} = \tilde{\tilde{q}}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{h}_{s,i} = \tilde{h}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\hat{\tilde{h}}_{s,i} = \hat{\tilde{h}}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{h}_{s,i} = \tilde{h}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{\tilde{h}}_{s,i} = \tilde{\tilde{h}}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\tilde{P}_{s,i} = \tilde{P}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\hat{\tilde{P}}_{s,i} = \hat{\tilde{P}}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{P}_{s,i} = \tilde{P}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{\tilde{P}}_{s,i} = \tilde{\tilde{P}}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{H}_{s,i} = \tilde{H}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\hat{\tilde{H}}_{s,i} = \hat{\tilde{H}}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{H}_{s,i} = \tilde{H}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{\tilde{H}}_{s,i} = \tilde{\tilde{H}}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{q}_{s,i} = \tilde{q}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\hat{\tilde{q}}_{s,i} = \hat{\tilde{q}}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{q}_{s,i} = \tilde{q}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{\tilde{q}}_{s,i} = \tilde{\tilde{q}}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{h}_{s,i} = \tilde{h}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\hat{\tilde{h}}_{s,i} = \hat{\tilde{h}}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{h}_{s,i} = \tilde{h}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\tilde{\tilde{h}}_{s,i} = \tilde{\tilde{h}}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ , ( $s = \overline{1, p}$ ,  $i = \overline{0, 2n+1}$ ) – функції типу примежового шару відповідно в околах  $\psi = 0$ ,  $\psi = Q_*$ ,  $\eta = 0$ ,  $\eta = Q^*$  (поправки на бічних стінках фільтру),  $\tilde{\varphi}_s = \frac{\varphi - \varphi_{*s}^*}{\varepsilon}$

( $s = \overline{0, p-1}$ ),  $\tilde{\varphi}_s = \frac{\varphi_{*s}^* - \varphi}{\varepsilon}$  ( $s = \overline{1, p}$ ),  $\tilde{\psi} = \frac{\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$ ,  $\tilde{\tilde{\psi}} = \frac{Q_* - \psi}{\sqrt{\varepsilon}}$ ,  $\tilde{\eta} = \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}}$ ,  $\tilde{\tilde{\eta}} = \frac{Q^* - \eta}{\sqrt{\varepsilon}}$  – відповідні їм регуляризуючі

перетворення (розтяги),  $R_{s,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ ,  $\tilde{R}_{s,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ ,  $\hat{R}_{s,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ ,  $\tilde{\tilde{R}}_{s,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$  ( $s = \overline{1, p}$ ) – залишкові члени. Зокрема, для знаходження  $c_{s,i}$ ,  $u_{s,i}$ ,  $\tilde{\kappa}_{s,i}$ ,  $\tilde{\sigma}_{s,i}$  ( $s = \overline{1, p}$ ,  $i = 0, n$ ) одержано формули:

$$c_{s,0} = \begin{cases} e^{-\tilde{\lambda}_{s,1}(\varphi, \psi, \eta, t)} \cdot \tilde{c}_*(\psi, \eta, t - \tilde{f}_1(\varphi, \psi, \eta)), & t \geq \tilde{f}_1; \\ e^{-\tilde{\lambda}_{s,1}(\varphi, \psi, \eta, t)} \cdot c_{s-1,0}(\varphi_{*(s-1)}^*, \psi, \eta, t - \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta)), & t \geq \tilde{f}_s; \\ e^{-\tilde{\lambda}_{s,2}(\varphi, \psi, \eta, t)} \cdot \tilde{c}_s^0(\tilde{f}_s^{-1}(\tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta), & t < \tilde{f}_s, \end{cases}$$

$$u_{s,0} = \frac{1}{\tilde{\sigma}_s^0} \cdot \int_0^t \tilde{\alpha}_s(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) \cdot c_{s,0}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} + \tilde{u}_s^0; \quad \tilde{\kappa}_{s,0} = \kappa_s^0, \quad \tilde{\sigma}_{s,0} = \tilde{\sigma}_s^0 \quad (s = \overline{1, p});$$

$$c_{s,i} = \begin{cases} e^{-\tilde{\lambda}_{s,1}(\varphi, \psi, \eta, t)} \cdot \int_{\varphi_*}^{\varphi} \tilde{g}_{1,i}(\hat{\varphi}, \psi, \eta, t) \cdot e^{\tilde{\lambda}_{s,1}(\hat{\varphi}, \psi, \eta, t)} d\hat{\varphi}, & t \geq \tilde{f}_1; \\ e^{-\tilde{\lambda}_{s,1}(\varphi, \psi, \eta, t)} \cdot \int_{\varphi_{*(s-1)}^*}^{\varphi} \tilde{g}_{s,i}(\hat{\varphi}, \psi, \eta, t) \cdot e^{\tilde{\lambda}_{s,1}(\hat{\varphi}, \psi, \eta, t)} d\hat{\varphi} + \tilde{g}_{s,i}, & t \geq \tilde{f}_s; \\ e^{-\tilde{\lambda}_{s,2}(\varphi, \psi, \eta, t)} \cdot \int_0^t \tilde{g}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) \cdot e^{\tilde{\lambda}_{s,2}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t})} d\hat{t}, & t < \tilde{f}_s; \end{cases}$$

$$u_{s,i} = \frac{1}{\tilde{\sigma}_s^0} \cdot \int_0^t \tilde{g}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t}, \quad \tilde{\kappa}_{s,i} = \int_0^t \tilde{g}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t}, \quad \tilde{\sigma}_{s,i} = \int_0^t \tilde{g}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \quad (s = \overline{1, p}, i = \overline{1, n}),$$

де

$$\tilde{\lambda}_{s,1}(\varphi, \psi, \eta, t) = \kappa_s^0 \cdot \int_{\varphi_{*(s-1)}^*}^{\varphi} \frac{\tilde{\alpha}_s(\hat{\varphi}, \psi, \eta, \tilde{f}_s(\hat{\varphi}, \psi, \eta) + t - \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta))}{\tilde{v}_s^2(\hat{\varphi}, \psi, \eta)} d\hat{\varphi};$$

$$\tilde{\lambda}_{s,2}(\varphi, \psi, \eta, t) = \int_0^t \frac{\tilde{\alpha}_s(\tilde{f}_s^{-1}(\hat{t} + \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \hat{t})}{\tilde{\sigma}_s^0(\tilde{f}_s^{-1}(\hat{t} + \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} d\hat{t};$$

$$\tilde{g}_{s,i}(\hat{\varphi}, \psi, \eta, t) = \kappa_s^0 \cdot \frac{g_{s,i}(\hat{\varphi}, \psi, \eta, \tilde{f}_s(\hat{\varphi}, \psi, \eta) - \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) + t)}{\tilde{v}_s^2(\hat{\varphi}, \psi, \eta)}; \quad \tilde{g}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) = \frac{g_{s,i}(\tilde{f}_s^{-1}(\hat{t} + \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \hat{t})}{\tilde{\sigma}_s^0(\tilde{f}_s^{-1}(\hat{t} + \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)};$$

$$\tilde{g}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t) = e^{-\tilde{\lambda}_{s,1}(\varphi, \psi, \eta, t)} \cdot c_{s-1,i}(\varphi_{*(s-1)}^*, \psi, \eta, t - \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta)); \quad g_{s,i} = I(i, 1) \cdot \left( d_s \cdot (b_{1,s} \cdot c_{(s,i-1)}'' \varphi \varphi + b_{2,s} \cdot c_{(s,i-1)}'' \psi \psi + \right. \\ \left. + b_{3,s} \cdot c_{(s,i-1)}'' \eta \eta + b_{4,s} \cdot c'_{(s,i-1)} \psi + b_{5,s} \cdot c'_{(s,i-1)} \eta) + \tilde{\beta}_s \cdot u_{s,i-1} - \sum_{l=1}^i (\tilde{\sigma}_{s,l} \cdot c'_{(s,i-l)} + \tilde{\sigma}'_{(s,l)} \cdot c_{s,i-l}) \right);$$

$$\tilde{g}_{s,i} = \tilde{\alpha}_s \cdot c_{s,i} - I(i, 1) \cdot \left( d_s \cdot (b_{1,s} \cdot u_{(s,i-1)}'' \varphi \varphi + b_{2,s} \cdot u_{(s,i-1)}'' \psi \psi + b_{3,s} \cdot u_{(s,i-1)}'' \eta \eta + b_{4,s} \cdot u'_{(s,i-1)} \psi + b_{5,s} \cdot u'_{(s,i-1)} \eta) + \right. \\ \left. + \tilde{\beta}_s \cdot u_{s,i-1} + \sum_{l=1}^i (\tilde{\sigma}_{s,l} \cdot u'_{(s,i-l)} + \tilde{\sigma}'_{(s,l)} \cdot u_{s,i-l}) \right); \quad \tilde{g}_{s,i} = -I(i, 1) \cdot \tilde{\mu}_s \cdot u_{s,i-1}, \quad \tilde{g}_{s,i} = -I(i, 1) \cdot \tilde{\gamma}_s \cdot u_{s,i-1};$$

$$\tilde{f}_s = \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) = \kappa_s^0 \cdot \int_{\varphi_{*(s-1)}^*}^{\varphi} \frac{\tilde{\sigma}_s^0(\hat{\varphi}, \psi, \eta)}{\tilde{v}_s^2(\hat{\varphi}, \psi, \eta)} d\hat{\varphi} \quad - \text{ час проходження відповідною частинкою шляху від точки}$$

$(x(\varphi_{*(s-1)}^*), y(\varphi_{*(s-1)}^*), z(\varphi_{*(s-1)}^*)) \in G_z^{s-1}$  до точки  $(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) \in G_z^s$  вздовж відповідної лінії течії;  $\tilde{f}_s^{-1}$  – функція, обернена відповідно до  $\tilde{f}_s$  відносно змінної  $\varphi$ ,  $I(a, b) = \begin{cases} 1, & a \geq b; \\ 0, & a < b. \end{cases}$

**Результати чисельних розрахунків.** У ході комп'ютерного експерименту під час моделювання процесу доочистки води від домішок у швидкому двошаровому фільтрі довжиною 1,5 м проведено дослідження зміни середніх величин коефіцієнта фільтрації і активної пористості кусково-однорідного пористого завантаження фільтру. Форму модельного фільтру описано поверхнями:

$$f_1(x, y, z) = x - 2; \quad f_2(x, y, z) = (x - 4,0777343)^2 + y^2 + z^2 - 0,3169799,$$

$$f_3(x, y, z) = (x - 2)^2 + (y - 6,1553671)^2 + z^2 - 41,8885438; \quad f_4(x, y, z) = (x - 2)^2 + (y + 6,1553671)^2 +$$

$$+z^2 - 41,8885438; f_5(x, y, z) = f_6(x, y, z) = (x^2 - 4x + y^2 + z^2)^2 + 16y^2 - 93,2548340z^2$$

і вибрано положення поверхні розділу  $EFF_*E_*$ :  $f_*(x, y, z) = (x - 4,3073801)^2 + y^2 + z^2 - 1,3240030$ . Функції  $f_i(x, y, z)$  ( $i = \overline{1,6}$ ) підбрані так, щоб забезпечити «монотонне звуження» в напрямку від його входу до виходу та взаємну ортогональність граней уздовж ребер і в кутових точках. При цьому кожен шар фільтру характеризується різними початковими значеннями коефіцієнтів фільтрації  $\kappa_1^0 = 8,5$  м/добу,  $\kappa_2^0 = 5,6$  м/добу, активної пористості  $\tilde{\sigma}_1^0 = 0,41$ ,  $\tilde{\sigma}_2^0 = 0,38$  і дифузії домішок у фільтраційній течії і осаді  $D_1 = 0,0003$  м<sup>2</sup>/добу,  $D_2 = 0,0002$  м<sup>2</sup>/добу,  $D_1^* = 0,000005$  м<sup>2</sup>/добу,  $D_2^* = 0,000002$  м<sup>2</sup>/добу.

У результаті побудовано розрахункову сіткову область  $G_z$  (рис. 2, а) при  $n = n_1 + n_2 = 21$ ,  $n_1 = 14$ ,  $n_2 = 7$ ,  $m = 9$ ,  $l = 7$ ,  $\varphi_* = \varphi_0 = 0$ ,  $\varphi^* = \varphi_{21} = 24,23$ . Значення  $\varphi^*$  вибиралося так, щоб середня швидкість фільтрації вздовж двошарового пористого середовища  $v_{\text{сер}}$  становила 5 м/год. Для області  $G_z$  знайдено фільтраційну витрату  $Q = 1,78$  м<sup>3</sup>/год і значення потенціалу на поверхні розділу  $\varphi_*^* = \varphi_{14} = 13,67$  та обчислено величини швидкостей фільтрації (рис. 2, б) і функції  $b_i(\varphi, \psi, \eta)$  ( $i = \overline{1,5}$ ).

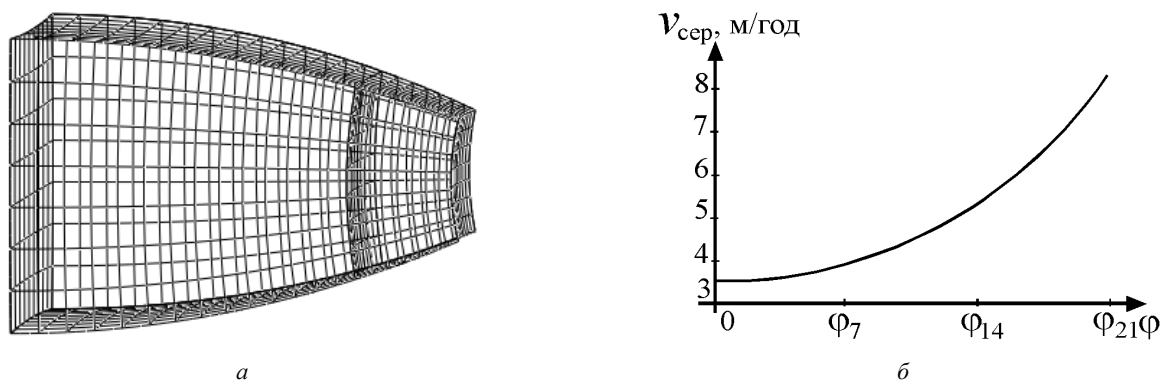


Рис. 2 – Результати побудови фільтраційного поля для криволінійного фільтра: а – розрахована сіткова область  $G_z$ ; б – розподіл  $v_{\text{сер}}(\varphi)$  вздовж області  $G_z$ .

На рис. 3 представлено розподіли середніх величин концентрацій домішок  $c_{\text{сер}}(\varphi, t)$  і  $u_{\text{сер}}(\varphi, t)$  відповідно у фільтраційній течії і осаді, адсорбованому на зернах завантаження, а на рис. 4 – середніх величин коефіцієнта фільтрації  $\tilde{\kappa}_{\text{сер}}(\varphi, t)$  і активної пористості  $\tilde{\sigma}_{\text{сер}}(\varphi, t)$  завантаження фільтру у момент часу  $t_3$  при

$$c_{\text{кр}} = 0,00005 \text{ г/л}, \quad c_* = 0,0005 \text{ г/л}, \quad c_0^0 = 0, \quad u_0^0 = 0, \quad \tilde{\alpha}_1 = 0,43 - 0,05 \cdot \tilde{\nu} \text{ c}^{-1}, \quad \tilde{\alpha}_2 = 0,28 - 0,023 \cdot \tilde{\nu} \text{ c}^{-1}, \\ \tilde{\beta}_s = 0,00001 \cdot \tilde{\alpha}_s \text{ c}^{-1} \quad (s = 1, 2), \quad \tilde{\gamma}_1 = 0,000043 \text{ л}/(\text{г} \cdot \text{c}^{-1}), \quad \tilde{\gamma}_2 = 0,000036 \text{ л}/(\text{г} \cdot \text{c}^{-1}), \quad \tilde{\mu}_1 = 0,000025 \text{ л}/(\text{г} \cdot \text{c}^{-1}), \\ \tilde{\mu}_2 = 0,000023 \text{ л}/(\text{г} \cdot \text{c}^{-1}).$$

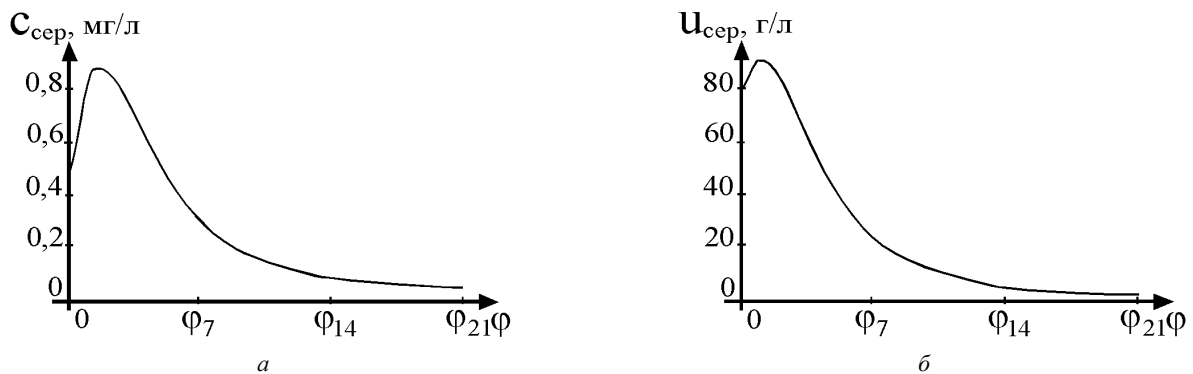


Рис. 3 – Розподіл забруднення вздовж висоти фільтру у момент часу  $t_3$ : а – середніх величин концентрацій домішок  $c_{\text{сер}}(\varphi, t)$  у фільтраційній течії; б – середніх величин концентрацій домішок  $u_{\text{сер}}(\varphi, t)$  у осаді, адсорбованому на зернах завантаження.

Згідно результатів експерименту [12] такий вибір поверхні розділу забезпечує найкращий час захисної дії фільтру  $t_3$ , який становить 36 год.

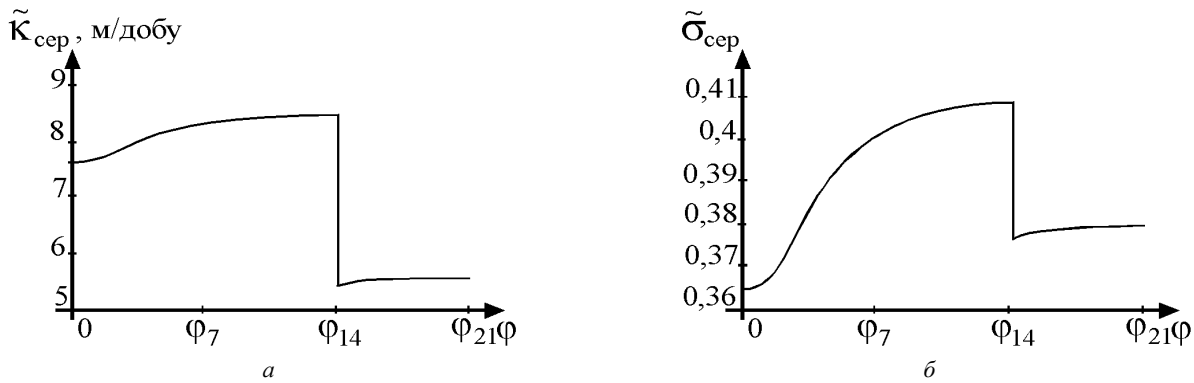


Рис. 4 – Розподіл характеристик пористого завантаження вздовж висоти фільтру у момент часу  $t_3$ :  
 а – середніх величин коефіцієнта фільтрації  $\tilde{k}_{cep}(\varphi, t)$ ; б – середніх величин коефіцієнта активної пористості  $\tilde{\sigma}_{cep}(\varphi, t)$ .

Таблиця 1 – Розподіл середніх величин коефіцієнта фільтрації  $\tilde{k}_{cep}(\varphi, t)$  і активної пористості  $\tilde{\sigma}_{cep}(\varphi, t)$  та їх відносних відхилень від початкових значень вздовж висоти фільтру у момент часу  $t_3$

$i$	$\tilde{k}_{cep}(\varphi_i, t_3)$ , м/добу	$\Delta\tilde{k}_{cep}(\varphi_i, t_3)$ , %	$\tilde{\sigma}_{cep}(\varphi_i, t_3)$	$\Delta\tilde{\sigma}_{cep}(\varphi_i, t_3)$ , %
0	7,6384	10,14	0,3655	10,86
1	7,6407	10,11	0,3656	10,83
2	7,7700	8,59	0,3723	9,20
3	7,9247	6,77	0,3803	7,25
4	8,0635	5,14	0,3875	5,50
5	8,1744	3,83	0,3932	4,10
6	8,2582	2,85	0,3975	3,05
7	8,3196	2,12	0,4007	2,27
8	8,3640	1,60	0,4030	1,71
9	8,3961	1,22	0,4046	1,31
10	8,4193	0,95	0,4058	1,02
11	8,4364	0,75	0,4067	0,80
12	8,4491	0,60	0,4074	0,64
13	8,4588	0,48	0,4079	0,52
14	8,4663	0,40	0,4083	0,42
15	5,5694	0,55	0,3785	0,41
16	5,5734	0,48	0,3787	0,36
17	5,5767	0,42	0,3788	0,31
18	5,5795	0,37	0,3790	0,27
19	5,5819	0,32	0,3791	0,24
20	5,5842	0,28	0,3792	0,21
21	5,5863	0,24	0,3793	0,18

Як показують результати проведеного чисельного експерименту (табл. 1), максимальні відносні відхилення середніх величин коефіцієнта фільтрації  $\tilde{k}_{cep}(\varphi, t)$  і активної пористості  $\tilde{\sigma}_{cep}(\varphi, t)$  завантаження фільтру від початкових у момент часу  $t_3$  в першому шарі у процентному відношенні не перевищують відповідно 10,14 % і 10,86 %, а в другому – відповідно 0,55 % і 0,41 %, що підтверджує необхідність врахування у моделях зміни характеристик кусково-однорідних пористих завантажень багат шарових фільтрів.

**Висновки.** Сформовано просторову математичну модель для прогнозування процесу доочистки води від домішок у швидких багат шарових фільтрах при додержанні сталої швидкості фільтрації, що враховує зворотний вплив концентрацій домішок, адсорбованих на зернах завантаження, на характеристики середовища, зокрема, дозволяє проводити дослідження зміни коефіцієнтів фільтрації та активної пористості кусково-однорідних пористих завантажень вздовж висоти фільтру. Отримано алгоритм чисельно-асимптотичного наближення розв'язку відповідної модельної задачі для фільтру, який має форму криволінійного паралелепіпеда, обмеженого двома еквіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії та розділений деякими заданими еквіпотенціальними поверхнями на кілька підобластей. Запропонована модель аналогічно [12] для заданої сталої швидко-

сті фільтрації дозволяє шляхом проведення комп'ютерних експериментів спрогнозувати зміну характеристик фільтруючих матеріалів, визначити оптимальні варіанти їх використання і збільшення тривалості роботи фільтрів за рахунок вибору їх форми та висоти шарів.

#### Список літератури

1. Орлов В. О. Водочисні фільтри із зернистою засипкою. – Рівне : НУВГП, 2005. – 163 с.
2. Cheremisinoff N. P. *Handbook of water and wastewater treatment technologies*. – Boston : Butterworth-Heinemann, 2002. – 645 p.
3. Hendricks D. W. *Fundamentals of water treatment unit processes : physical, chemical, and biological*. – Boca Raton : CRC Press, 2011. – 883 p.
4. Quevauviller Ph., Thompson K. C. *Analytical methods for drinking water: advances in sampling and analysis*. – John Wiley & Sons Ltd, 2006. – 188 p.
5. Бомба А. Я., Сафоник А. П. Моделювання нелінійно-збурених процесів очищення рідин від багатоконпонентних забруднень : монографія. – Рівне : НУВГП, 2017. – 296 с.
6. Safonyk A. P. Modelling the filtration processes of liquids from multicomponent contamination in the conditions of authentication of mass transfer coefficient // *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. – 2015. – vol. 9. – P. 189 – 192.
7. Ives K. J. Deep-bed water filters // *New developments. Filtr. And Separ.* – 1969. – vol. 6. – № 1. – P. 42 – 48.
8. Kalteh A. M., Hjorth P., Berndtsson R. Review of the self-organizing map (SOM) approach in water resources: analysis, modelling and application // *Environmental Modelling and Software*. – 2008. – vol. 23. – № 7. – P. 835 – 845.
9. Maier H. R., Dandy G. C. Neural networks for the prediction and forecasting of water resources variables: a review of modelling issues and applications // *Environmental Modelling and Software*. – 2000. – vol. 15. – № 1. – P. 101 – 124.
10. Heikkinen M., Poutiainen H., Liukkonen M., Heikkinen T., Hiltunen Y. Self-organizing maps in the analysis of an industrial wastewater treatment process // *Mathematics and Computers in Simulation*. – 2011. – vol. 82. – № 3. – P. 450 – 459.
11. Минц Д. М. Теоретические основы технологии очистки воды. – М. : Стройиздат, 1964. – 156 с.
12. Бомба А. Я., Климык Ю. С. Прогнозування оптимального використання фільтруючих матеріалів у швидких багатосарових фільтрах із кусково-однорідними пористими завантаженнями // *Журнал обчислювальної та прикладної математики : наук. журн. Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка*. – Київ : ТВиМС, 2017. – Вип. 1 (124). – С. 3 – 14.
13. Бомба А. Я., Климык Ю. С. Математичне моделювання просторових сингулярно-збурених процесів типу фільтрація-конвекція-дифузія: монографія. – Рівне : ТзОВ фірма "Ассоль", 2014. – 273 с.
14. Рауз Х. Механика жидкости. – М. : Стройиздат, 1967. – 390 с.

#### References (transliterated)

1. Orlov V. O. *Vodochysni fil'try iz zemystoyu zasypkoyu* [Water-purifying filters with granular filler]. Rivne, NUVHP Publ., 2005. 163 p.
2. Cheremisinoff N. P. *Handbook of water and wastewater treatment technologies*. Boston, Butterworth-Heinemann Publ., 2002. 645 p.
3. Hendricks D. W. *Fundamentals of water treatment unit processes : physical, chemical, and biological*. Boca Raton, CRC Press Publ., 2011. 883 p.
4. Quevauviller Ph., Thompson K. C. *Analytical methods for drinking water : advances in sampling and analysis*. John Wiley & Sons Ltd Publ., 2006. 188 p.
5. Bomba A. Ya., Safonyk A. P. *Modelyuvannya nelinejno-zburenykh protsesiv ochyshchennya ridyn vid bagatokomponentnykh zabrudnen' : monografiya* [Modeling of nonlinearly perturbed processes of cleaning liquids from multicomponent contaminants : monograph]. Rivne, NUVHP Publ., 2017. 296 p.
6. Safonyk A. P. Modelling the filtration processes of liquids from multicomponent contamination in the conditions of authentication of mass transfer coefficient. *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2015, vol. 9, pp. 189–192.
7. Ives K. J. Deep-bed water filters. *New developments. Filtr. And Separ.* 1969, vol. 6, no. 1, pp. 42–48.
8. Kalteh A. M., Hjorth P., Berndtsson R. Review of the self-organizing map (SOM) approach in water resources: analysis, modelling and application. *Environmental Modelling and Software*. 2008, vol. 23, no. 7, pp. 835–845.
9. Maier H. R., Dandy G. C. Neural networks for the prediction and forecasting of water resources variables: a review of modelling issues and applications. *Environmental Modelling and Software*. 2000, vol. 15, no. 1, pp. 101–124.
10. Heikkinen M., Poutiainen H., Liukkonen M., Heikkinen T. and Hiltunen Y. Self-organizing maps in the analysis of an industrial wastewater treatment process. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2011, vol. 82, no. 3, pp. 450–459.
11. Mints D. M. *Teoreticheskie osnovy tekhnologii ochistki vody* [Theoretical basis of water purification technology]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1964. 156 p.
12. Bomba A. Ya., Klymyuk Yu. Ye. Prognozuvannya optymal'nogo vykorystannya fil'truyuchykh materialiv u shvydkykh bagatosarovykh fil'trah iz kuskovo-odnoridnymy porystymy zavantazhennyamy [Predicting filter materials optimal use in rapid multilayer filters with piecewise homogeneous porous loads]. *Zhurnal obchyslyval'noyi ta prykladnoyi matematyky* [Journal of Computational & Applied Mathematics], Kyiv, TViMS Publ., 2017, no. 1 (124), pp. 3–14.
13. Bomba A. Ya., Klymyuk Yu. Ye. *Matematychnе modelyuvannya prostorovykh syngulyarno-zburenykh protsesiv typu fil'tratsiya-konveksiya-dyfuzya : monografiya* [Mathematical modeling of spatial singularly perturbed processes of filtration-convection-diffusion type : monograph]. – Rivne, TzOV firma "Assol" Publ., 2014. 273 p.
14. Raуз Kh. *Mekhanika zhidkosti* [Fluid mechanics]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1967. 390 p.

Надійшла (received) 27.10.2018

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Бомба Андрій Ярославович (Бомба Андрей Ярославович, Bomba Andriy Yaroslavovych)** – доктор технічних наук, професор, Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне; тел.: (097) 346-18-90; e-mail: abomba@ukr.net.

**Климык Юрій Євгенійович (Климык Юрий Евгениевич, Klymyuk Yuriy Yevheniyovych)** – кандидат технічних наук, доцент, Міжнародний економіко-гуманітарний університет імені академіка Степана Дем'янчука, м. Рівне; тел.: (095) 540-95-40, (067) 279-17-41; e-mail: klimyuk@ukr.net.