УДК 539.3:621.313:511.3

Э.С.ОСТЕРНИК, канд. техн. наук, ст. науч. сотр.,
ГП завод «Электротяжмаш», Харьков

МОДЕЛИРУЮЩИЕ ПОЛИНОМЫ ОТ *N*-ПЕРЕМЕННЫХ В МАШИНОСТРОЕНИИ

Розглянуто квадратичну апроксимацію дискретно заданої функції *n*-змінних за допомогою алгебраїчних поліномів. Доведено існування та єдиність найкращого у середньому квадратичному полінома. При постійному кроку аргументів матрицю системи нормальних рівнянь можна зробити квазідіагональною. Для ряду задач статики та динаміки, включаючи вібрацію турбогенератора, алгоритм реалізовано на ЕОМ.

The quadratic approximation of the discretely designed function of n-variables is analyzed using algebraic polynomials. The existence and uniqueness of the best polynomial in the quadratic mean has been proved. The matrix of the standard equations system may be made quasi-diagonal at the constant step of arguments. The algorithm used in a number of tasks of the statics and dynamics, including vibration of the turbogenerator, has been implemented on the basis of the electronic computer.

Постановка задачи. Эффективность таких средств конструктивной математики, как сплайны [1], атомарные [2] и целые функции экспоненциального типа [3], не снимает потребности в алгебраических полиномах, хорошо приближающих достаточно гладкие функции. В работе [4] дан алгоритм и описано применение аппроксимации эмпирических данных многомерными алгебраическими полиномами.

Аппроксимирующая функция отыскивалась в виде алгебраического полинома, наилучшего в среднем квадратичном, так как:

– интерполирование при том же уровне точности дает полином более высокой степени;
– минимизация по среднему квадратичному оправдывается теоретико-вероятностными соображениями [5];
– система нормальных уравнений для нахождения коэффициентов аппроксимирующего полинома – линейная;
– выбор алгебраических полиномов связан с предварительным исследованием однопараметрических зависимостей.

В этой статье подробно описан алгоритм, дано обоснование метода и приведены его обобщения.

Алгоритм моделирования. Ограниченная функция n переменных $\left\{x_j\right\}_1^n$, заданная значениями $\left\{y_i^{(0)}\right\}_1^m$, аппроксимируется полиномом одинаковой для всех переменных степени r

$$y_i = \sum_{S=1}^{\lambda} b_S \prod_{j=1}^{n} x_{ij}^{s_j}\ , \quad S = \left\| s_j \right\|_1^n . \tag{1}$$

При $s_j \in [0, r]$

$$\sum_{j=1}^{n} s_j \le r, \qquad (2)$$

число членов полинома $\lambda_{rn} = C_{r+n}^{n}$ [6]. Чтобы построить полином по (1), (2), последовательность десятичных чисел $\psi_{10} = 0,1\ldots\psi_{\max}$, где $\psi_{\max} = r\,(r+1)^{n-1}$, преобразуется в последовательность n-разрядных чисел ψ_{r+1}. Их можно рассматривать как матрицы $S' = \left\| s'_j \right\|_1^n$. Отбросив S', не подчиняющиеся условию (2), получаем множество H матриц S.

Обобщим формулы (1), (2). Если снять ограничение (2), то число членов дополненного таким образом полинома $\lambda'_{rn} = (r+1)^n$.

Зачастую однопараметрические зависимости $y^{(0)}(x_j)$ характеризуются различными степенями r_j. Тогда при $s_j \in [0, r_j]$ получаем $\lambda^*_{rn} = \prod_{j=1}^{n} (r_j + 1)$.

При высоких значениях λ_{rn} резко растут вычислительные трудности. После их преодоления оказывается, что некоторые члены полинома малы. Учитывая физику явления, иногда удается априорно определить множество H и соответствующее λ.

В дальнейшем рассмотрении обобщены некоторые результаты для $n = 1$ [5, 7, 8]. Условие экстремальности квадратичной погрешности $E_\lambda = \sum_{i=1}^{m} \left[y_i^{(0)} - y_i \right]^2$ приводит к системе нормальных уравнений

$$DB = F \qquad (3)$$

с симметричной матрицей $D = \left\| d_{ST} \right\|$,

$$d_{ST} = \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} x_{ij}^{\beta_j}; \quad f_T = \sum_{i=1}^{m} y_i^{(0)} \prod_{j=1}^{n} x_{ij}^{t_j}; \quad \beta_j = s_j + t_j. \qquad (4)$$

Из экстремальности E_λ следует аналогично [5] контрольное соотношение $E_\lambda = E_\lambda^{(\bar{1})}$; $E_\lambda^{(\bar{1})} = \sum_{i=1}^{m} \left[y_i^{(0)} \right]^2 - \sum_{i=1}^{m} y_i^2$.

Оценка средней квадратичной погрешности:

$$\Delta = \sqrt{E_\lambda / (m - \lambda)}, \qquad (5)$$

контрольная оценка $\delta_E = \left| E_\lambda - \left| E_\lambda^{(\bar{1})} \right| \right| / E_\lambda$.

Если экспериментальные данные в разных точках x_{ij} обладают различным весом p_i, то квадратичная погрешность определяется по формуле

$$\widetilde{E}_\lambda = \sum_{i=1}^{m} p_i \left[y_i^{(0)} - y_i \right]^2.$$

Действуя аналогично (3), (4), получим

$$\widetilde{d}_{ST}=\sum_{i=1}^{m}p_i\prod_{j=1}^{n}x_{ij}^{\beta_j}\ ;\qquad \widetilde{f}_T=\sum_{i=1}^{m}p_i y_i^{(0)}\prod_{j=1}^{n}x_{ij}^{t_j}\ .$$

При постоянном шаге Δx_j аргументов, заданных a_j раз, преобразуем их аналогично [7]:

$$X_{ij}^{(+)}=2\frac{x_{ij}-\overline{x}_j}{\Delta x_j}\ ;\quad a_j=2\omega;\qquad \omega=0,1\ldots$$

$$X_{ij}^{(-)}=2\frac{x_{ij}-\overline{x}_j}{\Delta x_j}\ ;\quad a_j=2\omega+1;\quad \overline{x}_j=\left(x_{1j}+x_{aj}\right)/2\ .$$

Тогда (при $p_i\equiv 1$)

$$d_{ST}=2^n\prod_{j=1}^{n}\delta_j\sum_{X_j=1}^{A_j}X_{ij}^{\beta_j}\ , \tag{6}$$

$$\delta_j=\begin{cases}1 & \beta_j=2\omega; \qquad A_j^{(+)}=a_j-1;\\ 0 & \beta_j=2\omega+1; \quad A_j^{(-)}=\left(a_j-1\right)/2.\end{cases}$$

Ввиду (6) матрицы D и следовательно D^{-1} всегда можно сделать квазидиагональными, соответственно расположив члены в (1). Сопоставим множеству H той же мощности множеству G матриц $h=\left\|h_j\right\|_1^n$ так, что

$$h_j=\begin{cases}1 & s_j=2\omega+1;\\ 0 & s_j=2\omega.\end{cases}$$

Если рассмотреть h как n-разрядные двоичные числа, то соответствующие h_{10} будут номерами подмножеств G_h и H_h, которыми генерируются диагональные блоки матрицы D.

Легко показать, что диагональные блоки матрицы D^{-1} обратны соответствующим блокам матрицы D. Например, при $n=r=$; $\lambda=20$;

$$\left|D\right|=\Delta_1\cdot\Delta_2^3\cdot d_{022}^3\cdot d_{222}\ ,$$

где

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}d_{000} & d_{002} & d_{002} & d_{002}\\ d_{002} & d_{004} & d_{022} & d_{022}\\ d_{002} & d_{022} & d_{004} & d_{022}\\ d_{002} & d_{022} & d_{022} & d_{004}\end{vmatrix};\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}d_{002} & d_{004} & d_{022} & d_{022}\\ d_{004} & d_{006} & d_{024} & d_{024}\\ d_{022} & d_{024} & d_{024} & d_{222}\\ d_{022} & d_{024} & d_{222} & d_{024}\end{vmatrix}.$$

Система 20-ти нормальных уравнений (3) распадается на независимые подсистемы не более, чем 4-х уравнений.

Обоснование метода. Докажем существование и единственность наилучшего в среднем квадратичном полинома (1). Рассмотрим, когда выполняется соответствующее (3) условие

$$\left|D\right|\neq 0\ . \tag{7}$$

Введем понятие обобщенного определителя Вандермонда

$$W_\lambda=\left(\xi_1\ldots\xi_\tau\ldots\xi_n\right)=\left|z_{\tau S}\right|_1^\lambda , \qquad z_{\tau S}=\prod_{j=1}^{n}\xi_{\tau j}^{S_j} . \tag{8}$$

Докажем, что

$$\left|D\right|=\frac{1}{\lambda!}\sum_{i=1}^{m}\left[W_i\left(\xi_{\tau j}\right)\right]^2 ; \qquad \xi_{\tau j}=x_{1j}\ldots x_{ij}\ldots x_{mj} . \tag{9}$$

По известному свойству определителей

$$\left[W_i\left(\xi_{\tau j}\right)\right]^2=W_i\left(\xi_{\tau j}\right)\sum_{\nu=1}^{\lambda!}\left(-1\right)^l\prod_{S=1}^{\lambda}z_{\tau S}^{Q_\nu} . \tag{10}$$

Здесь Q_ν – строчная матрица с номером ν, состоящая из λ чисел, значения которых принимает τ при изменении S от 1 до λ; l – число инверсий в Q_ν. При инверсии большое число стоит перед меньшим.

Рассмотрим член $\prod_{S=1}^{\lambda}z_{SS}$ из $\sum_{\nu=1}^{\lambda!}$, соответствующий матрице Q_1 с $l=0$. Умножим 1-й столбец определителя (8) на z_{11}, 2-й – на z_{22} и т.д. Суммируя по всем значениям $\xi_{\tau j}$ ($\tau, j = 1\ldots n$), получим $|D|$. Обратимся к ν-му члену суммы и выполним ν-ю перестановку столбцов в (8). При этом множитель $(-1)^l$ войдет в квадрате, определитель (8), как и при ν = 1, после суммирования по индексу i приведется к $|D|$. Отсюда следует (9) .

Докажем, что из (9)следует (7) и, более того, $|D| > 0$. Для возможности подсчета Δ по (5) требуется, чтобы

$$\lambda < m. \tag{11}$$

Значит, среди определителей W_i, входящих в (9), есть и такие, у которых среди аргументов нет равных:

$$x_{ij} \neq x_{i+\zeta,j}, \qquad j,\zeta = 1\ldots\text{n}. \tag{12}$$

Докажем, что такие

$$W_i \neq 0. \tag{13}$$

Раскрывая W_λ согласно (8) по последнему столбцу и отбрасывая первый индекс λ, придем к полиному

$$W_\lambda=\varphi\left(x_1\ldots x_n\right)=\sum_{S=1}^{\lambda}k_S\prod_{j=1}^{n}x_j^{s_j} ,$$

где $k_S=\left|z_{\kappa p}\right|$; κ=1,2…λ−1; $p = 1,2\ldots S-1, S+1\ldots\lambda$. Учитывая [7], получим формулу Лагранжа для интерполяции по n переменным

$$\varphi\left(x_1\ldots x_n\right)=\Phi\prod_{j=1}^{n}\prod_{q=1}^{a_j}\left(x_j-x_{qj}\right),$$

$$\Phi=\sum_{\beta_n=1}^{a_n}\cdots\sum_{\beta_1=1}^{a_1}\frac{y^{(0)}\left(x_{\beta_1 1}\ldots x_{\beta_n n}\right)}{\prod_{j=1}^{n}\left(x_j-x_{\beta_j j}\right)\prod_{j=1}^{n}\frac{\partial\left[\prod_{\beta_j=1}^{a_j}\left(x_j-x_{\beta_j j}\right)\right]}{\partial x_j}} .$$

Выведем (13) из этого разложения полинома. Ввиду нетривиальности задачи аппроксимации для некоторых i $y_i^{(0)} \neq 0$. Область задания $y^{(0)}$ конечна, так что

$$\prod_{j=1}^{n}\left(x_j - x_{\beta_j j}\right) \le K ;$$

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{\partial\left[\prod_{\beta_j=1}^{a_j}\left(x_j - x_{\beta_j j}\right)\right]}{\partial x_j} = \prod_{j=1}^{n}\sum_{\sigma_j=1}^{a_j}\prod_{\beta_j=1}^{a_j}\left(x_j - x_{\beta_j j}\right) \le L ,$$

где K, L – конечные величины. Отсюда $\Phi \neq 0$.

Ввиду ограниченности $y^{(0)}$ и (12)

$$\prod_{j=1}^{n}\left(x_j - x_{\beta_j j}\right) \neq 0 ; \qquad \prod_{j=1}^{n} \frac{\partial\left[\prod_{\beta_j=1}^{a_j}\left(x_j - x_{\beta_j j}\right)\right]}{\partial x_j} \neq 0 ;$$

$$\Phi \le M; \qquad \prod_{j=1}^{n}\prod_{q=1}^{a_j}\left(x_j - x_{qj}\right) \neq 0 ; \qquad \prod_{j=1}^{n}\prod_{q=1}^{a_j}\left(x_j - x_{qj}\right) \le N ,$$

где M, N – конечные величины. Поэтому $\varphi(x_1 \ldots x_n) = W_\lambda \neq 0$; $|D| > 0$, условие (7) выполнено. Доказано, что $W_\lambda \le R$; $R = MN$ – см. также (10).

Покажем минимизирующее свойство полинома (1). Решение системы (3) для $E_\lambda(B)$ соответствует единственной стационарной точке. Функция $E_\lambda(B)$ – неотрицательная, второй степени; при $\lambda = 1$ это эллипс, гипербола или парабола. Из-за однозначности $E_1(B)$ эллипс невозможен; ось симметрии параболы параллельна оси E_1, которая составляет острый и тупой углы с асимптотами гиперболы (только верхняя ветвь, что следует также из неотрицательности E_λ). Поэтому реализуется минимум E_1. Обобщение на $\lambda > 1$ выполняется по индукции [9].

Итерационный процесс аппроксимации $y^{(0)}$ ограничен по росту r неравенствами (11) и $\Delta^{(r)} \le \Delta_0$, где Δ_0 – средняя квадратичная погрешность $y^{(0)}$.

Объекты исследования. Путем многомерных аппроксимаций моделировался ряд задач динамики и прочности машин. Сюда относятся турбогенераторы (корпус, средняя и торцевая зоны сердечника статора, генераторная зона фундамента и валопровод турбоагрегата), полоса в стане горячего проката и лопасть гидротурбины. Исследовалась также зависимость стоимости турбогенератора от его мощности. В этих проблемах не всегда удается адекватно поставить краевые задачи математической физики. Дополнительно к аппроксимации проводились также прогнозирование для новых конструкторских разработок [4].

Тестовой задачей была аппроксимация вынужденных колебаний подкрепленной цилиндрической оболочки корпуса статора турбогенератора полиномом (1) при $m = 36$; $n = 2$; $y_0 = 22{,}0$ мкм.

Оценка аппроксимации колебаний турбогенератора с ростом степени полинома r

r	1	2	3	4	5	6
Δ, мкм	11,6	9,2	5,8	4,2	3,3	2,9

Итерации равномерно сходятся, оценка $\Delta^{(6)} = 2{,}9$ мкм ниже погрешности эксперимента.

Массив *YX* банка данных по вибрации лобовых частей обмотки (торцевой зоны статора) составлен по серийным турбогенераторам мощностью от 200 до 500 МВт. В него входят строки вида $y_i^{(0)} = y_i^{(0)}\left(x_{ij}\right); \;\; i \in [1{,}1493]$. Для моделирования этого массива достаточен квадратичный полином ($\lambda = 55;\; n = 9$). Девятимерная модель удовлетворяет физическим закономерностям. Прогнозные оценки вибрации торцевой зоны подтверждены экспериментально для головного образца турбогенератора нового типа мощностью 320 МВт [4].

Выводы. Получен алгоритм аппроксимации дискретно заданной функции n-переменных с помощью алгебраических полиномов различного типа. Доказано существование и единственность полинома, наилучшего в среднем квадратичном. При постоянном шаге аргументов матрицу системы можно сделать квазидиагональной. Алгоритм моделирования и последующего прогнозирования реализован для ряда задач динамики и прочности в машиностроении.

Перспективы данного направления распространяются на моделирование задач стохастического характера, включая социально-экономические. Полученные эмпирические зависимости могут быть использованы для выбора координатных функций при расчетах прямыми, в том числе энергетическими методами.

Список литературы: **1.** *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. – М., 1976. – 248 с. **2.** *Рвачев В.Л., Рвачев В.А.* Атомарные функции в математической физике. – В кн.: Математизация знаний и научно-технический прогресс. – К., 1975. **3.** *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М., 1977. – 456 с. **4.** *Остерник Э.С.* Моделирование деформационных полей в электромашиностроении с помощью функций *N*-переменных // Вестник НТУ «ХПИ». Сб. научных трудов. Тем. выпуск «Динамика и прочность машин». – 2003. – № 8, т. 3. – С. 29-42. **5.** *Микеладзе Ш.Е.* Численные методы математического анализа. – М., 1953. – 528 с. **6.** *Новоселов С.И.* Специальный курс элементарной алгебры. – М., 1965. – 552 с. **7.** *Уорсинг А., Геффнер Дж.* Методы обработки экспериментальных данных. – М., 1953. – 348 с. **8.** *Гончаров В.Л.* Теория интерполирования и приближения функций. – М., 1954. – 372 с. **9.** *Остерник Э.С.* Вопросы обоснования эмпирических функций, описывающих колебания электрических машин. – 14 с. Рукопись деп. в «Информэлектро» 11.09.91. – № 64. – эт. 91.

Поступила в редколлегию 20.01.2010