

Г.И.ЛЬВОВ, докт.техн.наук, проф., НТУ «ХПИ»;
А.Н.ТКАЧУК, асп., НТУ «ХПИ»

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ТЕРМОУПРУГОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С БАНДАЖОМ

Розв'язується задача про термопружний контакт циліндричної оболонки з бандажем. У статті наведені сумісні рівняння згину, теплопровідності та термопружного контакту, одержані для різних випадків контактних умов. Описані аналітичні розв'язки термопружної контактної задачі. Проведено аналіз особливостей одержаних полів переміщень, контактних тисків та внутрішніх силових факторів, а також температури вздовж оболонки і за товщиною.

The task is solved about the thermoelastic contact of cylinder shell with a band. In the paper resulted joint equations of bend, thermoconduction and thermoelastic contact are got for the different cases of contact terms. The analytical solutions of thermoelastic contact task are described. The analysis of features of got fields of movings, contact pressures and internal power factors, and also temperature along a shell and along a thickness, is conducted.

Введение. Как известно, на качественное поведение в контакте тонкостенных элементов влияют 2 основных фактора. Первый – гипотезы распределения искомых величин по толщине. Так, решение, полученное в рамках кинематических гипотез Кирхгофа-Лява, приводит к сосредоточенным по линии реакциям на границах зон контакта [1]. Вопрос о влиянии типа теории упругих оболочек на характер контактных давлений хорошо изучен и представлен в литературе [1-6]. Второй фактор – способ учета контактных условий на лицевых поверхностях и приведение их к срединной поверхности оболочки. Этот фактор также использует приближенное распределение величин по толщине, но выделяется отдельно, потому что влияет на определяющие уравнения только в области контакта. Например, учет деформаций обжатия по теории Рейсснера-Власова исключает сосредоточенные контактные давления, а для гладких оболочек обнуляет контактные давления на границе зон контакта [5].

Во многих машинах и сооружениях тонкостенные конструкции работают при термомеханическом нагружении (цистерны, трубопроводы, камеры сгорания и т. д.). Ключевым при этом является задача построения адекватных моделей термомеханического контакта, адаптированных для тонкостенных элементов конструкций. В зависимости от типа принятой модели решение может обладать теми или иными особенностями. Однако эти вопросы изучены недостаточно. В связи с этим актуальным является исследование качественного поведения решения термоупругих связанных контактных задач оболочек. В данной статье оно проведено на примере цилиндрической оболочки при термоупругом контактном взаимодействии с жестким бандажом.

Постановка задачи. Целью данной работы является изучение качественных особенностей напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки при термоупругом контакте с бандажом, а также особенностей тепловых потоков в зависимости от условий термического контакта. Кроме того, была поставлена задача получения аналитических решений, которые могли бы использоваться для сравнения с другими моделями и результатами численного моделирования.

Модельная задача. В качестве модельной была выбрана задача об осесимметричном термоупругом контакте цилиндрической оболочки конечной длины с жестким бандажом (рис. 1). Обозначим радиус срединной поверхности оболочки R , толщину h , ширину расположенного по центру бандажа $-2a$, длину оболочки $2(b+a)$, где b – длина свободного участка оболочки. Зададим температуру бандажа как T_k , а температуру торцевых поверхностей оболочки – T_0 .

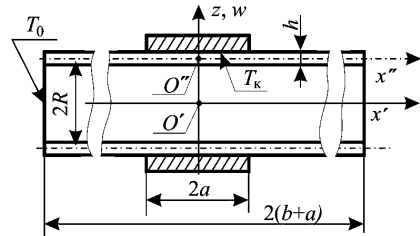


Рисунок 1 – Расчетная схема задачи о термоупругом контакте цилиндрической оболочки с бандажом

Для описания изгиба оболочки будем использовать уточненную теорию оболочек [7], использующую линейную аппроксимацию деформаций $\epsilon_x = \epsilon_{x0} + z\kappa_1$; $\epsilon_y = \epsilon_{y0} + z\kappa_2$; $\gamma_{xy} = \gamma_{xy0} + z\kappa_{12}$, где ϵ, γ – деформации в слое на расстоянии z от срединной поверхности; индекс «0» относится к компонентам деформации срединной поверхности, а κ – изменения соответствующих кривизн срединной поверхности, и квадратичную – температуры $T = T_1 + zT_2 + \left\{ 2[z^3 - (h/2)^2] / hk \right\} (q^+ - q^-)$, где T_1 – температура срединной поверхности; T_2 – градиент температуры по толщине; k – коэффициент теплопроводности; q^+ и q^- – тепловые потоки на лицевых поверхностях, а также кубическое распределение для деформации ϵ_z . Данные представления, будучи подставлены в трехмерные уравнения термоупругости, удовлетворяют их интегрально до четвертой степени. По этой модели осесимметричный изгиб цилиндрической оболочки описывается уравнением относительно прогиба $w(x)$ срединной поверхности

$$Dw'''' + Kw = p - D\alpha(1-\nu)(T_2)'' + K\alpha T_1 R, \quad (1)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость; $K = Eh/R^2$ – окружная

жесткость; α – коэффициент линейного расширения; p – давление, приведенное к срединной поверхности; E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки.

В зоне контакта перемещение на внешней поверхности должно соответствовать зазору в контакте: $w^+ = w_k$. Интегрируя ε_z по z от срединной до внешней поверхности, получим выражение для w^+ :

$$w^+ = w + \frac{vh^2}{8} \left(\frac{d^2w}{dx^2} + \alpha T_2 \right) - \frac{13hp^+}{32E} + \alpha \left(\frac{3h}{8} T_1 + \frac{23}{96} h^2 T_2 \right), \quad (2)$$

где p^+ – контактное давление на внешней поверхности.

Подстановка p^+ в уравнение (1) приводит к уравнению изгиба в контакте

$$Dw^{IV} + Kw + C(-w_k + w) + Bw'' = p - D\alpha(1 - \nu)(T_2)'' + \\ + K\alpha T_1 R + C\alpha \left[\frac{h}{8} T_1 + \left(\frac{23}{96} + \frac{\nu}{8} \right) h^2 T_2 \right],$$

или

$$Dw^{IV} + Bw'' + (K + C)w = C \left\{ w_k - \alpha h \left[\frac{3}{8} T_1 + \left(\frac{23}{96} + \frac{\nu}{8} \right) h^2 T_2 \right] \right\} - \\ - D\alpha(1 - \nu)(T_2)'' + K\alpha T_1 R. \quad (3)$$

Здесь $C = 32E/13h$ – жесткость на обжатие; $B = 4Eh\nu/13$ – коэффициент распределительной способности [5].

Температурное поле также описывается системой дифференциальных уравнений. В области, свободной от контакта, они имеют вид [8]:

$$\begin{cases} kh(T_1)'' + q^+ + q^- = 0; \\ \frac{kh^2}{12}(T_2)'' - kT_2 + \frac{q^+ - q^-}{2} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где через q^+ , q^- обозначены тепловые потоки на верхней и нижней лицевых поверхностях соответственно.

В области контакта дополнительно должны быть выполнены условия идеального теплового контакта

$$T^+ = T_1 + (h/2)T_2 = T_k \quad (5)$$

или неидеального

$$(h_c)^{-1} q^+ = T_k - [T_1 + (h/2)T_2], \quad (6)$$

где h_c – контактная температурная проводимость.

В общем случае контакт цилиндрической оболочки с жестким бандажом может быть множественным, то есть могут чередоваться зоны прилипания и отрыва от бандажа. Последовательность этих зон определяет конфигурацию контакта. Выше рассмотрены дифференциальные уравнения внутри отдельных зон.

Теперь рассмотрим условия сопряжения на границах зон контакта с номерами i , $i + 1$. Для механических переменных необходимо выполнение условий:

$$w^{(i)} = w^{(i+1)}; \quad (w^{(i)})' = (w^{(i+1)})'; \quad M^{(i)} = M^{(i+1)}; \quad Q^{(i)} = Q^{(i+1)}. \quad (7)$$

Использование различных условий температурного контакта приводит к различным условиям сопряжения. Для идеального теплового контакта цилиндрической оболочки и бандажа они имеют вид:

$$T_1^{(i)} = T_1^{(i+1)}; \quad T_2^{(i)} = T_2^{(i+1)}; \quad kh(T_1^{(i+1)} - T_1^{(i)})' = H^{(i)}; \\ \frac{kh^2}{6} \left[(T_2^{(i+1)})' - (T_2^{(i)})' \right] = H^{(i)}, \quad (8)$$

где $H^{(i)}$ – сосредоточенный на границе контакта тепловой поток.

Для условий неидеального контакта достаточно только непрерывности T_1 и T_2 и их производных:

$$T_1^{(i)} = T_1^{(i+1)}; \quad (T_1^{(i)})' = (T_1^{(i+1)})'; \quad T_2^{(i)} = T_2^{(i+1)}; \quad (T_2^{(i)})' = (T_2^{(i+1)})'. \quad (9)$$

Таким образом, модель идеального термоупругого контакта приводит в общем случае к сосредоточенным тепловым потокам на границе зон контакта.

Система уравнений (1), (3)-(5) с условиями сопряжения (7)-(9) и граничными условиями составляют замкнутую систему уравнений.

Далее получим аналитическое решение для фиксированной конфигурации контакта при идеальном термоупругом контакте (рис. 2).

Общее решение в области 1 (см. рис. 2) имеет вид:

$$T_1^{(1)} = C_1 + C_2x; \quad T_2^{(1)} = C_3 \operatorname{sh} \beta_{r_0} x + C_4 \operatorname{ch} \beta_{r_0} x;$$

$$w^{(1)} = C_5 \operatorname{ch} \beta x \cos \beta x + C_6 \operatorname{ch} \beta x \sin \beta x + C_7 \operatorname{sh} \beta x \cos \beta x + C_8 \operatorname{sh} \beta x \sin \beta x + w_{i1}^{(1)} + w_{i2}^{(1)};$$

где $w_{i1}^{(1)} = \alpha R (C_1 + C_2 x)$ – частное решение для температурной нагрузки $T_1^{(1)}$;

$$\beta_{r_0} = (2\sqrt{3})/h; \quad \beta = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)/R^2 h^2};$$

$$w_{i2}^{(1)} = -[(C_3 \operatorname{sh} \beta_{r_0} x + C_4 \operatorname{ch} \beta_{r_0} x) \alpha (1-\nu)] (\beta_{r_0})^2 / [(\beta_{r_0})^4 + 4\beta^4].$$

Примечание: $w_{i2}^{(1)}$ дает быстро затухающее решение вида $e^{-\beta_{r_0} x}$ с характерным размером h ; $w_{i1}^{(1)}$ меняется с характерным расстоянием примерно b ; а

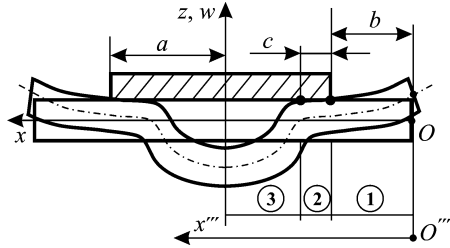


Рисунок 2 – Характерная картина распределения прогибов оболочки и контактных зон на фиксированной конфигурации контакта с одной зоной отрыва: 1 – свободный участок оболочки; 2 – зона термоупругого контакта цилиндрической оболочки с бандажом; 3 – зона отрыва

общее решение имеет характерный размер осцилляции \sqrt{Rh} . Таким образом, в общем решении сочетаются 3 слагаемых с резко отличающимися масштабами $b \gg \sqrt{Rh} \gg h$, что усложняет численное моделирование решения подобных задач.

Общее решение на интервале 2 (см. рис.2):

$$T_1^{(2)} = T_k + C_9 \operatorname{sh} \beta_{rk} x + C_{10} \operatorname{ch} \beta_{rk} x; \quad T_2^{(2)} = -\frac{2}{h} (C_9 \operatorname{sh} \beta_{rk} x + C_{10} \operatorname{ch} \beta_{rk} x);$$

$$w^{(2)} = C_{11} \operatorname{chr} x \cos sx + C_{12} \operatorname{chr} x \sin sx + C_{13} \operatorname{shr} x \cos sx + C_{14} \operatorname{shr} x \sin sx + w_t^{(2)};$$

$$w_t^{(2)} = (C_9 \operatorname{sh} \beta_{rk} x + C_{10} \operatorname{ch} \beta_{rk} x) \frac{\alpha \left[-\frac{3}{8} Ch + KR - 2D(1-\nu)(\beta_{rk})^2 + 2C \left(\frac{23}{96} + \frac{\nu}{8} \right) h \right]}{D(\beta_{rk})^4 + B(\beta_{rk})^2 + (K+C)} +$$

$$+ \left[\alpha T_k \left(KR - \frac{3}{8} CR \right) \right] / (K+C),$$

где $\beta_{rk} = \sqrt{3}/h$, а r, s – соответственно вещественная и мнимая часть корней уравнения $D\lambda^4 + B\lambda^2 + (C+K) = 0$.

Характерный размер осцилляции $1/r \sim h$.

Решение на участке 3 имеет вид, аналогичный виду на 1-ом, и включает в себя постоянные интегрирования $C_{15} - C_{22}$. В условия сопряжения входят также сосредоточенные потоки H^1 и H^2 . Кроме того, на границе контакта при $x = b + c$ (см. рис. 2) контактное давление равно нулю.

Таким образом, для определения 22-х постоянных интегрирования C_i , двух тепловых потоков H^1 и H^2 , а также ширины зоны контакта c имеется 8 граничных условий, 16 условий сопряжения и условие обнуления контактного давления.

Совокупность дифференциальных уравнений, граничных условий и условий сопряжения образуют замкнутую систему разрешающих уравнений. В статье она получена для фиксированной конфигурации контактных зон. Однако данная постановка не снижает общности подхода, так как обладает всеми качественными особенностями для случая множественного контакта. При этом разрешающая система уравнений для общего случая образуется прибавлением блоков уравнений и условий сопряжения в соответствии с числом зон контакта – отрыва.

Результаты исследований. На рис. 3-8 представлены результаты исследований для $R = 1$ м; $a = 0,25$ м; $h = 0,1$ м; $b = 5$ м; $k = 1$ Вт/К·м; $T_0 = 100$ °С; $\nu = 0,3$; $E = 1$ МПа; $\alpha = 10^{-4}$ К⁻¹. Рассматривается случай единичной пары «зона контакта – зона отрыва» (см. рис. 2).

Анализ представленных распределений прогибов, температур, изгибаю-

шего момента дает возможность отметить следующие характерные особенности полученного решения.

1. Прогиб срединной линии вне и в зоне контакта соответствует конфигурации контакта.
2. Зона контакта составляет $c = 0,016$ м, это меньше толщины цилиндрической оболочки.
3. Контактные давления распределены на локальном участке с максимумом значений на кромке и нулевым – на границе контакта.
4. В зоне контакта с кромкой бандажа происходит всплеск градиентов температур по толщине оболочки. В данной области присутствует локально сосредоточенный тепловой поток, который и приводит к появлению данного эффекта.
5. Изгибающий момент имеет резкие всплески с осцилляцией в районе контакта оболочки с бандажом

Таким образом, напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки, а также распределение контактных давлений и температур, как и прогнозировалось по виду общего аналитического решения, имеет несколько областей, в которых характер распределения компонент решения резко изменяется. Это является существенным обстоятельством, предопределяющим выбор методов и параметров моделей при численном решении подобных задач, которое, в отличие от рассматриваемой, не имеют решения в аналитическом виде.

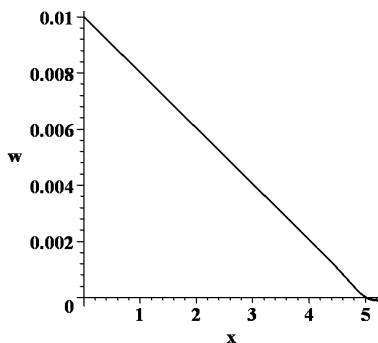


Рисунок 3 – Распределение прогиба (м) цилиндрической оболочки вдоль оси x (м)

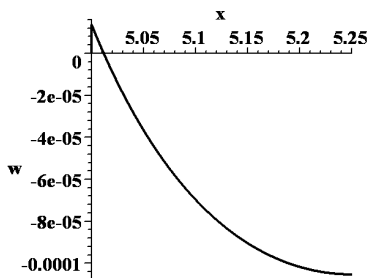


Рисунок 4 – Прогиб цилиндрической оболочки (м) в области контакта вдоль оси x (м)

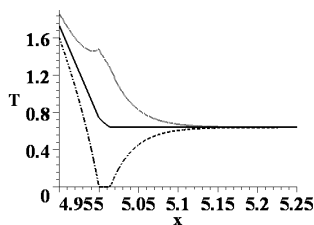


Рисунок 5 – Распределение температуры ($^{\circ}\text{C}$) в оболочке в области контакта вдоль оси x (м): серая линия (верхняя) – внутренняя поверхность, черная линия (средняя) – срединная поверхность, пунктирная линия (нижняя) – внешняя поверхность

Результаты параллельно проведенного численного моделирования в ANSYS с помощью четырехугольных элементов PLANG223 и аналитическое решение качественно полностью совпадают, а количественно отличаются не более чем 5-10 %, что достаточно хорошо для данной задачи. При этом очень важно, что соответствие распределений наблюдается не только вдоль срединной поверхности, но и по всему объему оболочки.

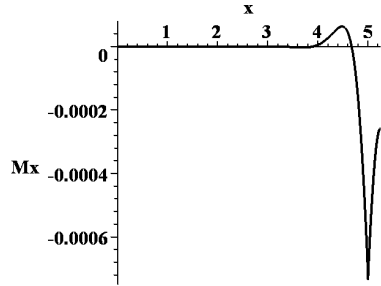


Рисунок 6 – Распределение изгибающего момента в цилиндрической оболочке ($H \cdot м/м$) вдоль оси x (м)

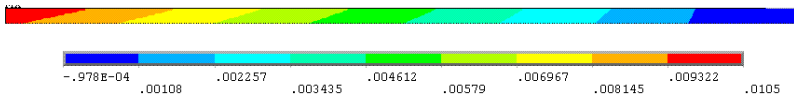


Рисунок 7 – Распределение прогибов точек оболочки (м), полученное в программном комплексе ANSYS при решении контактной термоупругой связанной задачи

Выводы. По результатам проведенных исследований можно сделать следующие выводы.

1. Решение термоупругих контактных задач для тонкостенных элементов содержит краевые эффекты двух масштабов: первый – с характерным размером h – отвечает за быстрозатухающий градиент температур по толщине T_2 ; второй – изгибный краевой эффект с характерным размером \sqrt{Rh} . Кроме того, в общем решении содержится безмоментная составляющая с характерным размером $b \gg \sqrt{Rh} \gg h$ (для длинных оболочек).
2. При условии идеального термического контакта цилиндрической оболочки с жестким бандажом на границах зон контакта возникают сосредоточенные по линии тепловые потоки.
3. Получено аналитическое решение термоупругой контактной задачи, которое может служить эталоном для верификации численных схем и других моделей оболочек.

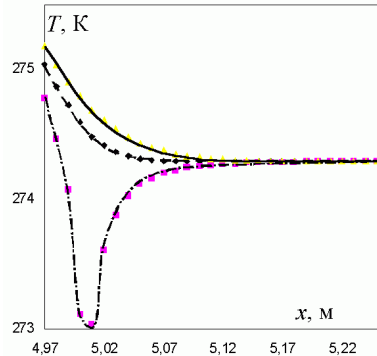


Рисунок 8 – Распределение температуры по длине цилиндрической оболочки: — — внутренняя поверхность; - - - срединная поверхность; - · - · - внешняя поверхность

4. Полученные в работе совместные уравнения изгиба оболочек, термопроводности и термоупругого контакта могут служить основой для формирования термоупругого осесимметричного конечного элемента для решения контактных задач.

Остается открытым вопрос оптимальности (адекватности) степеней аппроксимаций $\epsilon_x/T/\epsilon_z$ как 1/2/3 по нормальной координате оболочки, что является объектом дальнейших исследований.

Список литературы: 1. *Пелех Б.Л., Сухорольский Н.А.* Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. – Киев: Наукова думка, 1980. – 216 с. 2. *Григолоук Э.И., Толкачев В.М.* Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М.: Машиностроение, 1980. – 411 с. 3. *Детинко Ф.М., Фастовский В.М.* О посадке бандажа на цилиндрическую оболочку // Прикладная механика. – 1975. – Том. II. – Вып. 2. 4. *Львов Г.И.* Взаимодействие упругопластической оболочки с жестким штампом // Прикладная механика. – 1980. – Том. 16. – № 11. 5. *Блох М.Б.* К вопросу модели в задачах о контакте тонкостенных тел // Прикладная механика. – 1977. – Том. XIII. – Вып. 5. – С. 34-42. 6. *Львов Г.И., Ткачук А.Н.* О влиянии параметров и гипотез деформирования цилиндрической оболочки на зоны контакта с бандажом // Вестник НТУ «ХПИ». Тем. вып.: Динамика и прочность машин. – 2006. – № 32. – С.98-104. 7. *Галиньш А.К.* Уточненные уравнения движения термоупругих ортотропных оболочек // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1972. – Вып. 8. – С. 365-392. 8. *Григолоук Э.И., Подстригач Я.С., Бурак Я.И.* Оптимизация нагрева оболочек и пластин. – Киев: Наукова думка, 1979. – 364 с.

Поступила в редколлегию 29.05.2009

УДК 531.382:621.822.527

Г.Ю.МАРТЫНЕНКО, канд.техн.наук, доц., НТУ «ХПИ»

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ РОТОРА В МАГНИТНЫХ ПОДШИПНИКАХ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПРИНЯТЫХ УПРОЩЕНИЙ. ЧАСТЬ 1. ЖЕСТКИЙ РОТОР

У роботі запропоновано формування математичної моделі ротора в магнітних підшипниках різних типів. Моделювання проводиться на основі диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду і рівнянь Максвелла, наведено і обґрунтовано варіанти математичних моделей, які записані при різних припущеннях і обмеженнях.

In work, forming of mathematical model of rotor on magnetic bearings of different types is offered. The design on the basis of Lagrange differential equations the second kind and equations of Maxwell is performed. There are represented and grounded variants of mathematical models in the work. The models are written down for different suppositions and limitations.

Введение. Магнитный подвес роторов является все чаще применяемым