

А.Л. ГРИГОРЬЕВ, д-р техн. наук, проф. НТУ «ХПИ», Харьков
И.В. ТЮПА, канд. техн. наук, доц. НТУ «ХПИ», Харьков
Л.В. ГЛЕБОВА, аспирант, НТУ «ХПИ», Харьков

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЕМКОСТНОГО МЕТОДА ВОЗБУЖДЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В УПРУГИХ СРЕДАХ

Запропоновано теоретичну модель збудження акустичних коливань за допомогою ємнісного перетворювача. Отримано основні співвідношення для розрахунку акустичних коливань зміщення на поверхні металевого зразка. Побудовано графічні залежності розподілу амплітуди акустичних коливань від амплітуди збуджувального тиску та геометричних розмірів ємнісного перетворювача.

In this work the theoretical model of excitation of acoustic vibrations is offered by a capacity transformer. The main calculations for displacement of longitudinal acoustic rippling on the surface of metal sample are received. Graphic dependences of damps of acoustic rippling from damps of stimulation pressure and geometrical parameters of capacitor transmitter are built.

Введение и постановка задачи. В статье рассматриваются теоретические основы нового метода неразрушающего контроля поверхности детали, изготовленной из металла или другого токопроводящего материала. При этом методе в детали возбуждаются акустические колебания высокой частоты, и измеряется их амплитуда на поверхности детали, что, в частности, позволяет оценить качество обработки этой поверхности. Способ возбуждения акустических колебаний в упругой среде использует эффект воздействия на объект контроля электрическим полем [1,2]. В качестве источника поля выступает емкостный преобразователь, конструкция которого показана на рис. 1.

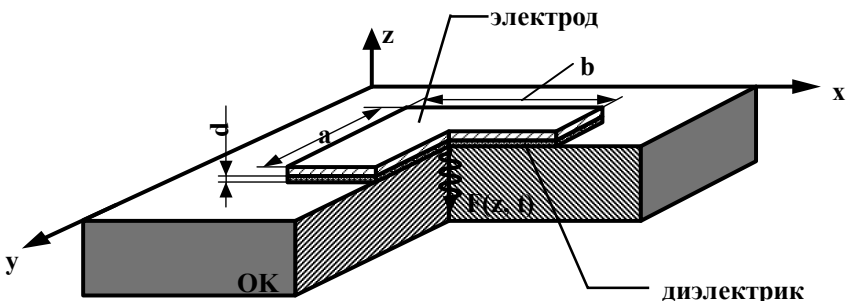


Рисунок 1 – Модель ультразвукового емкостного преобразователя.

При практической реализации способа параллельно одной из торцевых проводящих поверхностей объекта располагается электропроводящая пластина D (электрод); на рис.1 электрод имеет прямоугольную форму, но в

общем случае его форма может быть произвольной.

Акустические колебания в упругом объёме возбуждаются силами взаимодействия электрических зарядов, приходящих на электропроводящую поверхность после подачи поляризующего напряжения. При этом электрод и объект контроля будут представлять собой плоский конденсатор, на нижней обкладке которого возникает и изменяется по определённому закону избыточный электрический заряд. Этот заряд взаимодействует с ионами кристаллической решётки, пытаясь расширить или сжать материал. В результате в тонком поверхностном слое образца, контактирующем с диэлектриком, создаётся упругое давление, распространяющееся внутрь тела.

Размеры пластины малы по сравнению с размерами образца, поэтому в этой задаче тело допустимо считать неограниченным упругим полупространством. В пределах пластины упругое давление, возбуждающее колебания, принимается равномерно распределённым; за пределами пластины упругое давление на поверхности образца считается равным нулю.

Возбуждение колебаний производится по некоторому периодическому закону, причём указанное давление представляется суммой двух – трёх гармоник, имеющих кратные частоты. Процесс колебаний считается установившимся; при этом силой вязкого (или гистерезисного) трения в колеблющемся материале пренебрегаем.

Известный ёмкостный способ приёма акустической волны [1] позволяет зарегистрировать перемещение поверхности образца, происходящее в направлении её нормали. Исходя из этого, необходимо получить расчётный метод определения амплитуды указанных колебаний поверхности.

Основные уравнения модели и общая схема их решения. Обычно (смотри, например, [3]), при решении сходных проблем методами теории упругости рассматривается *контактная задача* для уравнения

$$\lambda \cdot \partial^2 \vec{u} / \partial t^2 = K_0 \cdot \text{div grad } \vec{u} - G \cdot \text{rot rot } \vec{A},$$

и поле упругих смещений $\vec{u}(M, t)$ описывается в виде суммы двух слагаемых – потенциального и вихревого:

$$\vec{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{A}, \quad (1)$$

где $\varphi(M, t)$ – скалярный потенциал, $\vec{A}(M, t)$ – векторный потенциал поля; λ, G – плотность материала и его модуль упругости; K_0 – модуль всестороннего сжатия,

$$K_0 = (2 + 2\mu / (1 - 2\mu))G;$$

μ – коэффициент Пуассона.

При этом на свободной поверхности полупространства (когда координа-

та $z = 0$) рассматривается однородная система граничных условий:

$$\text{def } u_{xz} = 0, \text{ def } u_{yz} = 0, \text{ def } u_{zz} + (2\mu/(1-2\mu)) \text{div} u = 0,$$

где x, y, z – декартовы координаты точки. Здесь первые два условия означают отсутствие касательных напряжений, а третье – нормального давления. На нагруженной части поверхности последнее условие заменяют равенством

$$\text{def } u_{zz} + (2\mu/(1-2\mu)) \text{div} u = p/G,$$

где $p(x, y, t)$ – контактное давление, G – модуль сдвига.

В исследуемом случае, в силу особенностей возбуждения колебаний, девиаторная составляющая поля отсутствует не только в граничных условиях, но и во всём объёме исследуемого образца, и равенство (1) принимает вид:

$$\bar{u} = \text{grad } \varphi. \quad (2)$$

Уравнению (2) отвечает граничное условие для упругого давления

$$P(x, y, 0, t) = \begin{cases} p(t), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \in D, \end{cases}$$

где $p(t)$ – давление на поверхности пластины, причём скалярное поле давления и векторное поле смещений связаны известным равенством:

$$P = -K_0 \cdot \text{div} \bar{u}. \quad (3)$$

Распределение давления в упругой среде описывается волновым уравнением:

$$\Delta P = a^{-2} \cdot \partial^2 P / \partial t^2, \quad (4)$$

где a – скорость звука для продольных колебаний среды, $a^2 = \lambda / K_0$, Δ – оператор Лапласа.

Известно, что плотность λ и модуль K_0 зависят от давления, но при моделировании акустических колебаний, имеющих малую амплитуду, этой зависимостью пренебрегают. В результате все уравнения модели становятся линейными, и это позволяет предложить эффективный метод их решения.

Описанный ниже метод включает следующие основные этапы:

- находится статическое распределение давления, отвечающее точечному стационарному источнику на поверхности детали;
- находится аналитическая зависимость амплитуды колебаний давления от частоты и амплитуды колебаний точечного моногармонического источника на поверхности детали;

- по известному распределению давления восстанавливается поле смещения точек поверхности; эта задача, как и задачи двух предыдущих этапов, получает аналитическое решение;
- используется принцип линейной суперпозиции, и результаты предыдущего этапа обобщаются на случай распределённого источника моногармонических колебаний;
- при использовании известного принципа наложения решений производится суммирование волновых полей, отвечающих различным гармоникам.

Для пластины сложной (несимметричной) формы последние два этапа выполняются численно при использовании методов визуализации решения на дисплее компьютера.

Статическое поле упругого давления в объёме образца. Заметим, что искомое давление зависит от времени t и характера изменения прикладываемого напряжения, то есть является решением некоторой динамической задачи, связанной с интегрированием уравнений в частных производных. Однако, в соответствии с известным подходом к решению подобных задач (смотри, например, [4]), сначала рассматривается и решается **вспомогательная статическая задача**.

Найдем величину давления P в произвольной точке $M(x_0, y_0, z_0)$ полупространства $R^3, z \geq 0$, на поверхности которого действует известное постоянное давление P_0 , сосредоточенное в пределах малой площадки ΔD поверхности, которая расположена вблизи начала системы координат.

Воспользовавшись результатами работы [5], запишем **функцию источника** для искомого давления в точке $M(x_0, y_0, z_0)$:

$$P(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_0}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2)^{3/2}} f(x, y) dx dy. \quad (5)$$

где функция $f(x, y)$ описывает распределение возбуждающего давления P_0 на поверхности полупространства (то есть, при условии $z = 0$).

Используем граничное условие

$$f(x, y) = \begin{cases} P_0, & (x, y) \in \Delta D, \\ 0, & (x, y) \notin \Delta D, \end{cases}$$

и, проинтегрировав правую часть равенства (5), получим следующее выражение для искомого давления:

$$P(x_0, y_0, z_0) = \frac{z_0}{2\pi[(x_0)^2 + (y_0)^2 + z_0^2]^{3/2}} \cdot (P_0 \cdot \Delta S),$$

где ΔS – площадь фигуры ΔD .

Амплитуда волнового поля давления. Перейдём к решению динамической задачи. Пусть возбуждающее давление P_0 изменяется по закону

$$P_0 = A \sin \omega t,$$

где A – амплитуда давления на площади ΔS , ω – круговая частота.

Поскольку возбуждающее давление имеет гармонический характер, в полупространстве $z \geq 0$ будут присутствовать как вынужденные, так и сопровождающие гармонические колебания одинаковой частоты и фазы; появление сопровождающих колебаний связано с необходимостью удовлетворения сформулированного выше граничного условия

$$P(x_0, y_0, 0) = 0 \quad \text{при} \quad P(x_0, y_0, 0) \notin \Delta D.$$

В таком случае, выражение для искомого давления можно представить в виде:

$$P(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{z}{2\pi(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} \cdot A \sin \omega t + W(x_0, y_0, z_0) \sin \omega t, \quad (6)$$

где $W(x_0, y_0, z_0)$ – неизвестная амплитудная функция, описывающая сопровождающие колебания.

Подставим выражение для искомого давления $P(M)$ в формулу (4) и получим следующее уравнение для функции $W(M)$:

$$\Delta W + \frac{1}{a^2} W = -\frac{\omega^2}{a^2} \frac{1}{2\pi} \frac{z \cdot A}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}}. \quad (7)$$

Равенство (7) является *неоднородным уравнением Гельмгольца*.

В нашей задаче это уравнение решается при однородном граничном условии $W(x, y, 0) \equiv 0$, которое должно выполняться на всей плоскости $z = 0$, в том числе, и для точки $O(0, 0, 0)$ начала координат.

Уравнение (7) имеет очевидное частное решение вида:

$$W_{\text{ч}} = -\frac{1}{2\pi} \frac{z A}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}},$$

или, в сферических координатах ρ, θ, φ ,

$$W_u(\rho, \theta) = -\frac{A \cos \theta}{2\pi \rho^2}. \quad (8)$$

Решение (8) при $\rho \rightarrow 0$ стремится к ∞ . При нахождении окончательного решения **необходимо устранить указанную особенность**.

Для этого рассмотрим *однородное уравнение Гельмгольца*

$$\Delta W + \frac{\omega^2}{a^2} W = 0.$$

После учёта цилиндрической симметрии решаемой задачи, в сферической системе координат данное уравнение будет иметь следующий вид:

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial W}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) + \frac{\omega^2}{a^2} W = 0. \quad (9)$$

Применив метод Фурье [4,5], выполним разделение переменных и найдем решение уравнения (9) в виде:

$$W = R(\rho) \cdot \Psi(\theta),$$

где функции $R(\rho)$ и $\Psi(\theta)$ зависят только от одной указанной координаты.

Подставим такое решение в выражение (9):

$$\frac{(\rho^2 \cdot R'(\rho))'}{\rho^2} \Psi(\theta) + \frac{(\sin \theta \cdot \Psi'(\theta))'}{\sin \theta} \cdot \frac{R(\rho)}{\rho^2} + \frac{\omega^2}{a^2} \cdot \Psi(\theta) \cdot R(\rho) = 0.$$

и разделим левую и правую часть равенства на произведение $\Psi(\theta) \cdot R(\rho)$:

$$\frac{(\rho^2 R'(\rho))'}{\rho^2 R(\rho)} + \frac{\omega^2}{a^2} + \frac{(\sin \theta \cdot \Psi'(\theta))'}{\rho^2 \sin \theta \cdot \Psi(\theta)} = 0. \quad (10)$$

Пусть функция $\Psi(\theta) = \cos \theta$, что отвечает частному решению (8). Тогда последнее слагаемое левой части можно вычислить:

$$\frac{(\sin \theta \cdot \Psi'(\theta))'}{\rho^2 \sin \theta \cdot \Psi(\theta)} = \frac{(\sin \theta \cdot (\cos \theta)')'}{\rho^2 \sin \theta \cdot \cos \theta} = -\frac{2}{\rho^2}.$$

Подставим полученное значение в равенство (10) и, после очевидных преобразований, получим:

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \left(\frac{\omega^2}{a^2} - \frac{2}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0,$$

то есть,

$$R'' + \frac{2}{\rho} R' + \left(\frac{\omega^2}{a^2} - \frac{2}{\rho^2} \right) R = 0.$$

Приведем данное уравнение к стандартному виду, выполнив замену $\rho \cdot \omega / a = \alpha$ и помножив левую и правую части на выражение $a/(\omega\rho)$:

$$R''_{\alpha\alpha} + \frac{2}{\alpha} R'_{\alpha} + \left(1 - \frac{2}{\alpha^2} \right) R = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) часто встречается в математической физике; его фундаментальные решения имеют вид

$$R_1(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\alpha^2}, \quad R_2(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Потребуем, чтобы решение имело необходимое асимптотическое поведение при условии $\rho \rightarrow 0$, и получим:

$$R(\rho) = \frac{\cos(\rho \cdot \omega / a)}{(\rho \cdot \omega / a)^2} + \frac{\sin(\rho \cdot \omega / a)}{\rho \cdot \omega / a}.$$

Следовательно, искомая функция W имеет следующий вид:

$$W = \frac{\cos \theta}{\rho^2} \cdot [\cos(\rho \cdot \omega / a) + (\rho \cdot \omega / a) \cdot \sin(\rho \cdot \omega / a)] \cdot C, \quad (12)$$

где C – произвольная константа.

Таким образом, имея частное решение (8) и общее решение (12), можно представить решение неоднородного уравнения Гельмгольца (7) в виде:

$$W = -\frac{A \cos \theta}{2\pi \rho^2} + \frac{\cos \theta}{\rho^2} \cdot [\cos(\omega \cdot \rho / a) + (\omega \cdot \rho / a) \sin(\omega \cdot \rho / a)] \cdot C.$$

Приравняв правую часть данного выражения нулю при условии $\rho \rightarrow 0$,

найдем значение константы $C = A/(2\pi)$. В результате искомая функция, опи-

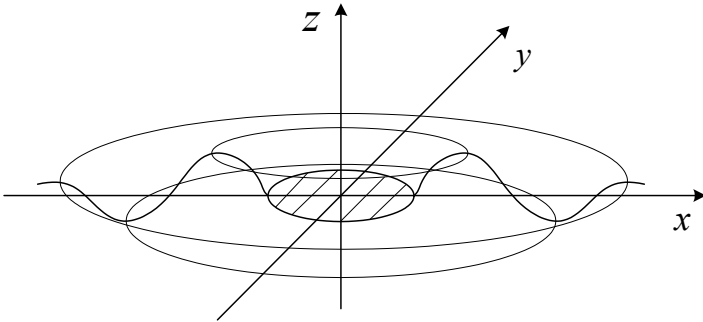


Рисунок 2 – Симметричное поле смещений поверхности.

сывающая сопровождающие колебания давления упругой среды, примет вид:

$$W = -\frac{A \cos \theta}{2\pi \rho^2} \left[1 - \cos\left(\frac{\omega}{a} \rho\right) - \frac{\omega}{a} \rho \sin\left(\frac{\omega}{a} \rho\right) \right].$$

Подставив полученный результат в формулу (6), запишем выражения для давления $P(\rho, \theta, t)$:

$$P(\rho, \theta, t) = \frac{A \cos \theta}{2\pi \rho^2} \left[\cos\left(\frac{\omega}{a} \rho\right) - \frac{\omega}{a} \rho \cdot \sin\left(\frac{\omega}{a} \rho\right) \right] \cdot \sin \omega t. \quad (13)$$

Восстановление поля смещения по его дивергенции. Перейдем от полученного поля давлений $P(\rho, \theta, t)$ к интересующему нас полю смещений $\vec{u}(M, t)$, воспользовавшись известным соотношением (3):

$$P = -K_0 \cdot \text{div} \vec{u}.$$

Подставив в равенство (3) выражение (13) для давления, получим формулу для дивергенции:

$$-\text{div} \vec{u} = \frac{1}{K_0} P = \frac{A \cos \theta}{2\pi K_0 \rho^2} \left[\cos \frac{\omega}{a} \rho - \frac{\omega}{a} \rho \sin\left(\frac{\omega}{a} \rho\right) \right] \sin \omega t.$$

Известно [6], что скалярное потенциальное поле восстанавливается по своей дивергенции соотношением

$$\bar{u}(M) = \iiint_R \frac{-\operatorname{div} \bar{u}(P)}{4\pi |\overline{PM}|^3} \overline{PM} dV,$$

где вектор \overline{PM} соединяет произвольную точку среды с точкой наблюдения $M(x_0, y_0, z_0)$. Учитывая (3), получаем:

$$\bar{u}(M) = -\frac{1}{4\pi K_0} \iiint_{z \geq 0} \frac{P(x, y, z, t)}{\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}\right)^3} dx dy dz.$$

В настоящей работе мы ограничились исследованиями колебаний поверхности детали, то есть интересующая нас точка M будет иметь координату $z_0 = 0$. Кроме того, примем, что и координата $y_0 = 0$, то есть будем рассматривать акустическую волну, распространяющуюся от центра электрода вдоль координаты x . Тогда выражение для смещения точек поверхности по направлению оси Oz примет вид:

$$U_z(x_0, 0, 0, t) = \frac{-1}{4\pi K_0} \iiint_{z \geq 0} \frac{z \cdot P(x, y, z, t)}{\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2 + z^2}\right)^3} dx dy dz, \quad (14)$$

где $P(x, y, z, t)$ – распределение давления в объеме образца.

Воспользуемся симметрией задачи (рис.2) и перейдем в интеграле (14) к сферическим координатам:

$$U_z(x_0, t) = -\frac{1}{4\pi K_0} \int_0^\infty d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} \frac{\rho \cos \theta \cdot P(\rho, \theta, t) \cdot \rho^2 \sin \theta}{\left(\rho^2 + x_0^2 - 2\rho x_0 \sin \theta \cos \varphi\right)^{3/2}} d\varphi.$$

Далее, используя формулу (13), получим:

$$U_z(x_0, t) = -\frac{A \sin \omega t}{8\pi^2 K_0} \int_0^\infty \left[\cos \frac{\omega \rho}{a} + \frac{\omega \rho}{a} \sin \frac{\omega \rho}{a} \right] \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{\rho \cos^2 \theta \sin \theta d\varphi d\theta d\rho}{\left(\rho^2 + x_0^2 - 2\rho x_0 \sin \theta \cos \varphi\right)^{3/2}}$$

Чтобы облегчить дальнейшие преобразования, выполним замену пере-

менных $\rho = x_0 \cdot \xi$ и представим это равенство в следующем виде:

$$U_z(x_0) = -\frac{A \sin \omega t}{16\pi^2 K_0 x_0} \int_0^\infty \left[\cos\left(\frac{\omega}{a} x_0 \xi\right) + \left(\frac{\omega}{a} x_0 \xi\right) \sin\left(\frac{\omega}{a} x_0 \xi\right) \right] \cdot f(\xi) \cdot \xi d\xi, \quad (15)$$

где функция $f(\xi)$ – это значение двойного интеграла,

$$f(\xi) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{(1 + \xi^2 - 2\xi \sin \theta \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi d\theta, \quad (16)$$

Проведем исследование интеграла (16). Заметим, что сходные интегралы возникают при описании решения волнового уравнения для внутренности сферы, где их называют *интегралами Пуассона* [5,7].

$$\text{Найдем значение } f(0) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{1} d\varphi d\theta = -2\pi \frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^\pi = \frac{4}{3} \cdot \pi.$$

Несложно проверить, что $f'(0) = 0$ и $f''(0) = 0$. Численное исследование этого интеграла показало, что на интервале $0 \leq \xi \leq 1$ значение функции $f(\xi)$ остаётся постоянным, $f(\xi) = 4\pi/3$.

Найдем значение функции $f(\xi)$ для интервала $\xi > 1$:

$$f(\xi) = \frac{1}{\xi^3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta d\varphi d\theta}{(\xi^{-2} + 1 - 2\xi^{-1} \sin \theta \cos \varphi)^{3/2}} = \frac{1}{\xi^3} \cdot \frac{4}{3} \pi.$$

Таким образом, исследуемый интеграл принимает следующие значения:

$$f(\xi) = \begin{cases} (4\pi/3), & 0 \leq \xi \leq 1, \\ 4\pi/(3\xi^3), & 0 > \xi > 1. \end{cases}$$

Подставим полученные значения функции $f(\xi)$ в выражение (15):

$$U_z(x_0) = -\frac{A \sin \omega t}{12\pi^2 k_0 x_0} \int_0^1 \xi \left[\cos\left(\frac{\omega}{a} x_0 \xi\right) + \left(\frac{\omega}{a} x_0 \xi\right) \sin\left(\frac{\omega}{a} x_0 \xi\right) \right] d\xi - \\ - \frac{A \sin \omega t}{12\pi^2 k_0 x_0} \int_1^\infty \frac{1}{\xi^2} \left[\cos\left(\frac{\omega}{a} x_0 \xi\right) + \left(\frac{\omega}{a} x_0 \xi\right) \sin\left(\frac{\omega}{a} x_0 \xi\right) \right] d\xi.$$

Введем безразмерный коэффициент $k = \omega \cdot x_0 / a$ и, интегрируя по частям, найдем значения интегралов из правой части полученного равенства:

$$\int_0^1 x(\cos kx + xk \sin kx) dx = 3 \frac{\sin k}{k} - \frac{3}{k^2}(1 - \cos k) - \cos k,$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}(\cos kx + xk \sin kx) dx = \cos k.$$

Следовательно,
$$U_z(x_0) = -\frac{A \sin \omega t}{4\pi k_0 x_0} \left[\frac{\sin k}{k} - \frac{1 - \cos k}{k^2} \right].$$

Подставив вместо коэффициента k физические параметры среды и частоту возбуждающего давления, получим:

$$U_z(x_0) = -\frac{A \sin \omega t}{4\pi k_0 x_0} \left[\frac{\sin(\omega \cdot x_0 / a)}{(\omega \cdot x_0 / a)} - \frac{1 - \cos(\omega \cdot x_0 / a)}{(\omega \cdot x_0 / a)^2} \right].$$

Смещение поверхности при распределённом давлении. Пусть зондирующее давление имеет круговую частоту ω , амплитуду P_0 и действует на фигуру D произвольной формы. Тогда, в точке $M(x_0, y_0)$ искомого смещение поверхности в направлении её нормали будет определяться равенством:

$$U_z(M, t) = -\frac{P_0 \sin \omega t}{4\pi K_0} \iint_D \frac{\sin \left[\frac{\omega}{a} \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \right]}{\frac{\omega}{a} \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} dx dy +$$

$$+ \frac{P_0 \sin \omega t}{4\pi K_0} \iint_D \frac{1 - \cos \left[\frac{\omega}{a} \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \right]}{\frac{\omega}{a} \left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \right)} dx dy. \quad (17)$$

При стремлении точки M к границе области D интегралы (17) становятся несобственными интегралами второго рода, и, как показал опыт использования этой формулы, численное интегрирование средствами диалогового пакета MathCAD приводит к существенной погрешности. Этой проблемы удалось избежать после перехода в формуле (17) от двойных интегралов к повторным. Пример такого перехода будет показан далее в этой статье.

Расчёт смещения для электрода прямоугольной формы. Рассмотрим в качестве электрода плоскую прямоугольную пластину размером $2a \times 2b$. Точка наблюдения акустического смещения расположена на оси Ox на рас-

стоянии R от начала координат. Воспользовавшись предыдущей формулой, запишем выражение для смещения в следующем виде:

$$U_z(R, t) = -\frac{P_0 \sin \omega t}{4\pi K_0} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{\sin \left[k\sqrt{(x-R)^2 + y^2} \right] - 1 - \cos \left[k\sqrt{(x-R)^2 + y^2} \right]}{k\sqrt{(x-R)^2 + y^2} \sqrt{(x-R)^2 + y^2}} dx dy,$$

где K_0 – модуль сжимаемости; $k = \omega / a$ – волновое число.

Заметим, что изменив пределы интегрирования и подынтегральную функцию, можно получить аналогичное выражение для точек, попадающих на ось Oy , поскольку задача симметрична относительно осей координат.

После перехода от двойного интеграла к повторному интегралу в полярных координатах и вычисления внутренних интегралов, получаем:

$$U_z(R, t) = \frac{P_0 \sin \omega t}{2\pi K_0 \cdot k^2} \cdot \left[\begin{aligned} & \frac{1}{a-R} \cdot \int_0^{\arctg(b/(a-R))} \left(1 - \cos \frac{k(a-R)}{\cos \psi} \right) \cos \psi d\psi + \\ & + \frac{1}{b} \cdot \int_{\arctg(b/(a-R))}^{\pi - \arctg(b/(a+R))} \left(1 - \cos \frac{kb}{\sin \psi} \right) \sin \psi d\psi - \\ & - \frac{1}{a+R} \cdot \int_{\pi - \arctg(b/(a+R))}^{\pi} \left(1 - \cos \frac{k(a+R)}{\cos \psi} \right) \cos \psi d\psi \end{aligned} \right], \quad (18)$$

где выполнены условия $b \leq a$, $R \leq a$, то есть здесь рассматриваются точки, находящиеся под пластиной конденсатора.

Аналогичный, но несколько другой по форме результат соответствует внешней по отношению к пластине части плоскости.

Дальнейшее интегрирование производится численно при использовании соответствующих программ комплекса MathCAD. Чтобы убедиться в правильности такого подхода был изменён порядок интегрирования; оказалось, что результаты интегрирования во всех точках поверхности, в том числе и в точках границы прямоугольника, от выбора порядка не зависят.

Квазистатический предел. Если в формуле (18) устремить волновое число $k \rightarrow 0$, то мы получим квазистатическое колебание поверхности детали, отвечающее малой частоте возбуждающего давления:

$$U_z(R, t) = \frac{P_0 \sin \omega t}{4\pi K_0} \cdot \left[\int_0^{\arctg(b/(a-R))} \frac{a-R}{\cos \psi} d\psi + \int_{\arctg(b/(a-R))}^{\pi - \arctg(b/(a+R))} \frac{b}{\sin \psi} d\psi - \int_{\pi - \arctg(b/(a+R))}^{\pi} \frac{a+R}{\cos \psi} d\psi \right]. \quad (19)$$

Анализ результатов показал, что можно пользоваться более простой формулой (19) вместо формулы (18) при выполнении условия

$$k \cdot a < 0.1,$$

где k – волновое число, a – размер конденсатора. С учётом характерных размеров конденсатора, расхождение между динамической и квазистатической моделью становится существенным только лишь для частот возбуждения из ультразвукового диапазона, а также из диапазона радиочастот.

Результаты расчёта и их обсуждение. В качестве конкретного примера на рис. 3 показан график амплитудной функции $U(R)$ колебаний поверхности для электрода размером 20x20 мм. Частота возбуждения $\nu = 2 \text{ МГц}$, длина волны – 2.5 мм. Образец – стальная плита квадратной формы, имеющая размер 500x500 мм, что значительно превосходит размер пластины.

Заметим, что при столь высокой частоте результат динамического расчёта коренным образом отличается от того, который предсказывает квазистатическая модель. Анализируя графическую зависимость, можно сделать вывод, что происходит вытеснение волны на край пластины.

Следует особо подчеркнуть, что наблюдаемая на графике «складка» – это не дефект метода расчёта, а следствие разрыва граничного условия.

Можно сохранить расчётную процедуру, разработанную для прямоугольной пластины, и сгладить разрыв давления, заменив один скачок на 5 – 10 одинаковых скачков, которые происходят в приграничном слое, ширина которого соизмерима с длиной волны. При этом граница пластины заменяется системой из 5 – 10 вложенных прямоугольников. Для учёта нового граничного условия описанная выше расчётная процедура используется для каждого прямоугольника, а получающиеся решения суммируются. В результате «складка» на графике амплитуды колебаний существенно сглаживается.

Как показало расчётное исследование, поверхность, размещённая под внутренней частью пластины, испытывает относительно низкие по амплитуде колебания, софазные возбуждающему давлению. Максимальная амплитуда наблюдается вблизи границы электрода, где фаза колебаний изменяется. На расстоянии a от края пластины происходит практически полное затухание колебаний, что создаёт существенные трудности для их приёма.

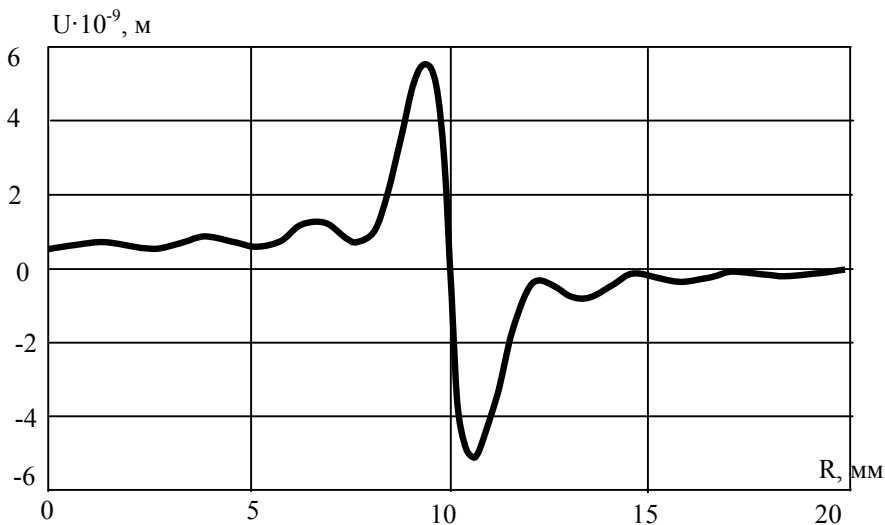


Рисунок 3 – Амплитуда упругой волны смещения на поверхности образца.

Выводы.

Составлена математическая модель для метода возбуждения акустических колебаний, основанного на использовании ёмкостного преобразователя.

Разработан метод расчёта акустических колебаний поверхности детали.

Список литературы: 1. Неразрушающий контроль: Справочник: В 7 т. Под общ. ред. В.В. Клюева. Т.3: Ультразвуковой контроль / И.Н. Ермолов, Ю.В. Ланге. – М.: Машиностроение, 2004. 2. Иоссель Ю.Я., Кочанов Э.С., Струнский М.Г. Расчет электрической емкости. – Л.: Энергия, 1969. 3. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. – М.: Наука, 1986. 4. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных сотрудников и инженеров. – М.: Мир, 1985. 5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Самарский. – М.: Наука, 1972. 6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных сотрудников и инженеров). – М.: Наука, 1972. 7. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1984.

Поступила в редколлегию 02.09.2010