УДК 629.7.05:531.1

***Ю.А.ПЛАКСИЙ***, канд.техн.наук, доц., НТУ «ХПИ»

# РАЗЛОЖЕНИЕ 5-ГО ПОРЯДКА ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В КВАТЕРНИОНАХ В РЯД ПО СТЕПЕНЯМ КАЖУЩИХСЯ ПОВОРОТОВ

За допомогою методу обернення степеневих рядів для компонент вектору лінійного повороту на інтервалі $[0,\Delta t]$ отримане розкладання часткового рішення кінематичного рівняння в кватерніонах у степеневий ряд по позірним поворотам. Цей ряд для векторної частини кавтерніона повороту містить члени, що залежать від динамічних характеристик твердого тіла у вигляді співвідношень головних моментів інерції. Приведене розкладання може бути застосоване для отримання алгоритмів визначення орієнтації твердого тіла по позірним поворотам до четвертого порядку включно.

By means of a method of the inversion of degree series for a components of the vector of linear turn on an interval $[0,\Delta t]$ decomposition of the particular solution of the kinematic equation in quaternions in the degree series of seeming turns is received. The degree series for a vector part quaternion turn contains members who depend on dynamic characteristics of a rigid body in the form of correlations of the main moments of inertia. The obtained decomposition can be used for construction of algorithms of definition of a rigid body orientation to the fourth order inclusive.

Решение задачи определения ориентации в бесплатформенных инерциальных навигационных системах (БИНС) основано на применении алгоритмов определения поворота, использующих первичную информацию о вращении твердого тела на такте $[t_{n-1},t_n]$ в виде приращений интегралов от проекций вектора абсолютной угловой скорости $\vec{\omega}$ на связанные оси (кажущихся поворотов) [1]

$$\theta^*_{n,i} = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_i dt, \qquad i = 1,2,3. \tag{1}$$

При этом общее решение кинематического уравнения

$$\dot{\Lambda} = 0{,}5\Lambda \circ \vec{\omega} \tag{2}$$

представляется в виде формулы сложения поворотов

$$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \Delta\Lambda_n , \tag{3}$$

где $\Lambda = (\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)^{\mathrm{T}}$ – кватернион ориентации, $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\Lambda_n = \Lambda(t_n)$, $\Lambda_{n-1} = \Lambda(t_{n-1})$, $\Delta\Lambda_n$ – частное решение уравнения (2) с начальным условием $\Lambda(0) = (1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\circ$ – знак кватернионного умножения.

Существующие алгоритмы определения поворота, как правило, являются результатом формальных разложений частного решения $\Delta\Lambda_n$ в ряд, содержащий конечные разности «назад» вектора кажущегося поворота $\vec{\theta}^*_n = (\theta^*_{n1}, \theta^*_{n2}, \theta^*_{n3})^{\mathrm{T}}$ различного порядка [1]. При этом не учитывается тот факт, что $\omega_i$ являются решениями соответствующих динамических уравнений.

Получим разложение частного решения $\Delta\Lambda$ кинематического уравнения (2) на интервале $[0,\Delta t]$ в виде степенного ряда в терминах кажущихся поворотов (1) с учетом динамических уравнений Эйлера

$$\dot{\omega}_1 = a_1\omega_2\omega_3 + m_1 , \ (1,2,3) \tag{4}$$

с начальными условиями

$$\omega_i(0) = \omega_{i0}, \quad i = 1,2,3, \tag{5}$$

где $a_1 = (I_2 - I_3)/I_1$ – динамический коэффициент, $I_1$, $I_2$, $I_3$ – главные моменты инерции твердого тела ($I_1 \ge I_2 \ge I_3$), $m_1 = M_1/I_1$, $M_1$, $M_2$, $M_3$ – проекции вектора главного момента $\vec{M}$ на связанные оси, (1,2,3) – символ круговой перестановки индексов.

Примем, что на такте съема первичной информации (1) приведенные моменты $m_i$ постоянны $m_i = m_i(t_{n-1})$ и ограничены по величине:

$$|m_i| = O(\omega^2), \quad i = 1,2,3, \tag{6}$$

где $\omega = \max\limits_{t \in [t_{n-1}, t_n]} |\vec{\omega}(t)|$.

Интегрируя уравнение (4) на такте $[0,t]$, получим интегральное уравнение

$$\omega_1(t) = \omega_{10} + \int_0^t (a_1\omega_2\omega_3 + m_1)d\tau, \quad (1,2,3), \tag{7}$$

решение которого $\omega_1(t)$ удовлетворяет динамическому уравнению (4) с начальным условием (5). Применим к уравнению (7) метод последовательных приближений Пикара, получим:

$$\omega_1 = \omega_{10} + (a_1\omega_{20}\omega_{30} + m_1)t + \frac{1}{2}a_1(\omega_{10}(a_2\omega_{30}^2 + a_3\omega_{20}^2) + m_2\omega_{30} + m_3\omega_{20})t^2 +$$

$$+\frac{1}{6}a_1(4a_2a_3\omega_{10}^2\omega_{20}^2 + (a_1\omega_{20}\omega_{30} + m_1)(a_2\omega_{30}^2 + a_3\omega_{20}^2) + 3\omega_{10}(a_2m_3\omega_{30} +$$

$$+ a_3m_2\omega_{20}) + 2m_2m_3)t^3 + O(t^4). \tag{8}$$

Введем вектор линейного поворота на интервале $[0,\Delta t]$:

$$\vec{\theta}_0 = (\omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30})^T \Delta t = (\theta_{01}, \theta_{02}, \theta_{03})^T. \tag{9}$$

Проинтегрируем выражение (8) на промежутке $[0,\Delta t]$, получим

$$\theta_1^* = \int_0^{\Delta t} \omega_1(t)d\tau = \theta_{01} + \frac{1}{2}(a_1\theta_{02}\theta_{03} + \mu_1) + \frac{1}{6}a_1(\theta_{03}(a_2\theta_{01}\theta_{03} + \mu_2) +$$

$$+\theta_{02}(a_3\theta_{01}\theta_{03} + \mu_3)) + \frac{1}{24}a_1(4a_2a_3\theta_{01}^2\theta_{02}\theta_{03} + (a_1\theta_{02}\theta_{03} + \mu_1)(a_2\theta_{03}^2 + a_3\theta_{02}^2) +$$

$$+3\theta_{01}(a_2\mu_3\theta_{030} + a_3\mu_2\theta_{02}) + 2\mu_2\mu_3) + O(\theta_0^5), \tag{10}$$

где обозначено $\mu_i = m_i(\Delta t)^2$, $i = 1,2,3$.

Нетрудно видеть, что в условиях дополнительных ограничений на $\mu_i$

$$\mu_1 \le \theta_0^2 - a_1\theta_{02}\theta_{03}, \quad (1,2,3) \tag{11}$$

ряд (10) мажорируется рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\theta_0^k}{k}$, который сходится при $\theta_0 \le 1$, где $\theta_0 = |\vec{\theta}_0| = (\theta_{01}^2 + \theta_{02}^2 + \theta_{03}^2)^{1/2}$.

Перепишем ряд (10) в виде

$$\theta_{01}=\theta_{01}^{*}-\frac{1}{2}(a_1\theta_{02}\theta_{03}+\mu_1)-\frac{1}{6}a_1(\theta_{01}(a_2\theta_{03}^2+a_3\theta_{02}^2)+(\mu_2\theta_{03}+\mu_3\theta_{02}))-$$
$$-\frac{1}{24}a_1(4a_2a_3\theta_{01}^2\theta_{02}\theta_{03}+(a_1\theta_{02}\theta_{03}+\mu_1)(a_2\theta_{03}^2+a_3\theta_{02}^2)+3\theta_{01}(a_2\mu_3\theta_{03}+$$
$$+a_3\mu_2\theta_{02})+2\mu_2\mu_3)+O(\theta_0^5)\qquad(1,2,3)$$

и применим к нему процедуру метода последовательных приближений, полагая в качестве начального приближения $\theta_{01}=\theta^*_{01}$, получим:

$$\theta_{01}=\theta_{01}^{*}-\frac{1}{2}(a_1\theta_2^*\theta_3^*+\mu_1)+\frac{1}{12}a_1(\theta_1^*(a_2\theta_3^{*2}+a_3\theta_2^*)+(\mu_2\theta_3^*+\mu_3\theta_2^*))-$$
$$-\frac{1}{24}a_1(\theta_1^*(a_2a_3\theta_1^*\theta_2^*\theta_3^*+a_2\mu_3\theta_3^*+a_3\mu_2\theta_2^*)+\mu_2\mu_3)+O(\theta^{*5}),\qquad(1,2,3)\qquad(12)$$

В условиях принятых допущений (6), (11) ряд (12) сходится при любых $\theta^*_i$, поскольку сходится его мажорантный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta^{*k}}{k!}$.

Воспользуемся полученными разложениями для $\omega_i$(8), $\theta^*_i$(10) и $\theta_{0i}$ (12) и представлением частного решения кинематического уравнения (2) в виде ряда Пеано [1]:

$$\Delta\Lambda=1+\frac{1}{2}\vec{\theta}^*+\frac{1}{4}\int_0^{\Delta t}A_1dt+\frac{1}{8}\int_0^{\Delta t}A_2dt+\frac{1}{16}\int_0^{\Delta t}A_3dt+...+\frac{1}{2^{k+1}}\int_0^{\Delta t}A_kdt+...,\qquad(13)$$

где $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ – кватернионы, для которых, начиная с $k = 2$ имеет место рекуррентная формула $A_{k+1}=\int_0^{\Delta t}A_kdt\circ\vec{\omega}$, $A_1=\vec{\theta}^*\times\vec{\omega}-\vec{\theta}^*\vec{\omega}$.

Подстановка в формулу (13) выражений для $\theta^*_i$ и $\omega_i$ в виде рядов (8), (10) позволяет представить подынтегральные выражения в виде функций от времени, что дает возможность взять аналитически все интегралы и получить представление частного решения уравнения (2) на интервале $[0,\Delta t]$ в виде ряда по степеням компонент вектора линейного поворота $\vec{\theta}_0$ (9):

$$\Delta\lambda_0=1-\tfrac{1}{8}\theta_0^2-\frac{1}{8}(a_1+a_2+a_3)\theta_{01}\theta_{02}\theta_{03}-\frac{1}{8}(\mu_1\theta_{01}+\mu_2\theta_{02}+\mu_3\theta_{03})-$$
$$-\frac{1}{24}(a_1+a_2+a_3)(a_1\theta_{02}^2\theta_{03}^2+a_2\theta_{01}^2\theta_{03}^2+a_3\theta_{01}^2\theta_{02}^2+\mu_1\theta_{02}\theta_{03}+\mu_2\theta_{01}\theta_{03}+$$
$$+\mu_3\theta_{01}\theta_{02})+\frac{1}{96}(a_1^2\theta_{02}^2\theta_{03}^2+a_2^2\theta_{01}^2\theta_{03}^2+a_3^2\theta_{01}^2\theta_{02}^2)-\frac{1}{48}(a_1\mu_1\theta_{02}\theta_{03}+$$
$$+a_2\mu_2\theta_{01}\theta_{03}+a_3\mu_3\theta_{01}\theta_{02})-\frac{1}{32}(\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2)-\frac{1}{32}\theta_{01}\theta_{02}\theta_{03}\theta_0^2(a_1+a_2+a_3+$$
$$+\frac{1}{3}a_1a_2a_3)-\frac{1}{96}a_1\theta_{02}\theta_{03}(2a_1+3a_2+3a_3)(\mu_2\theta_{03}+\mu_3\theta_{02})-\frac{1}{96}a_2\theta_{01}\theta_{03}(3a_1+$$

$$
+2a_2+3a_3)(\mu_1\theta_{03}+\mu_3\theta_{01})-\frac{1}{96}a_3\theta_{01}\theta_{02}(3a_1+3a_2+2a_3)(\mu_1\theta_{02}+\mu_2\theta_{01})-
$$

$$
-\frac{1}{48}(a_1+a_2+a_3)(\mu_2\mu_3\theta_{01}+\mu_1\mu_2\theta_{03}+\mu_1\mu_3\theta_{02})+\frac{1}{384}\theta_0^4+\frac{1}{192}\theta_0^2(\mu_1\theta_{01}+
$$

$$
+\mu_2\theta_{02}+\mu_3\theta_{03})+\frac{1}{192}(a_1+a_2+a_3)\theta_{01}\theta_{02}\theta_{03}\theta_0^2+O(\theta_0^5);
$$

$$
\Delta\lambda_1=\frac{1}{2}\theta_1^*+\frac{1}{24}(\mu_3\theta_{02}-\mu_2\theta_{03})+\frac{1}{24}\theta_{01}(\mathrm{a}_3\theta_{02}^2-\mathrm{a}_2\theta_{03}^2)-\frac{1}{48}\theta_{01}\theta_0^2+
$$

$$
+\frac{1}{48}a_1\theta_{02}\theta_{03}(\mathrm{a}_3\theta_{02}^2-\mathrm{a}_2\theta_{03}^2)-\frac{1}{64}\theta_{02}\theta_{03}(\theta_{01}^2(a_1+a_2+a_3)+\theta_0^2)-
$$

$$
-\frac{1}{192}\theta_{02}\theta_{03}(\theta_{01}^2(a_1+a_2+a_3)-a_1\theta_0^2)+\frac{1}{48}\mu_1(\mathrm{a}_3\theta_{02}^2-\mathrm{a}_2\theta_{03}^2)-\frac{1}{96}\mu_1\theta_0^2+
$$

$$
+\frac{1}{48}\theta_{01}(a_3\mu_2\theta_{02}-a_2\mu_3\theta_{03})-\frac{1}{48}\mu_1\theta_{01}^2-\frac{1}{48}\theta_{01}(\mu_2\theta_{02}+\mu_3\theta_{03})+
$$

$$
+\frac{1}{160}a_1\theta_{01}(a_3^2\theta_{02}^4-a_2^2\theta_{03}^4)-\frac{1}{240}a_1\theta_{01}(a_3\theta_{02}^4+a_2\theta_{03}^4)+\frac{1}{960}\theta_{01}(a_2\theta_{03}^4-
$$

$$
-a_3\theta_{02}^4)+\frac{1}{480}a_2a_3\theta_{01}^3(\mathrm{a}_3\theta_{02}^2-\mathrm{a}_2\theta_{03}^2)+\frac{1}{960}a_1\theta_{01}^3(a_2\theta_{03}^2+a_3\theta_{02}^2)-
$$

$$
-\frac{7}{960}a_3\theta_{01}^3(a_2\theta_{03}^2+a_3\theta_{02}^2)-\frac{1}{160}a_2a_3\theta_{01}^3\theta_0^2+\frac{1}{160}a_2a_3\theta_{01}^5+\frac{1}{960}\theta_{01}^3(a_2\theta_{03}^2-
$$

$$
-a_3\theta_{02}^2)-\frac{1}{64}a_1^2\theta_{01}\theta_{02}^2\theta_{03}^2-\frac{3}{160}a_1(a_2+a_3)\theta_{01}\theta_{02}^2\theta_{03}^2+\frac{1}{960}(a_2-a_3)\times
$$

$$
\times\theta_{01}\theta_{02}^2\theta_{03}^2+\frac{1}{3840}\theta_{01}\theta_0^4-\frac{1}{32}a_1\mu_1\theta_{01}\theta_{02}\theta_{03}+\frac{7}{480}(a_2+a_3)\mu_1\theta_{01}\theta_{02}\theta_{03}+
$$

$$
+\frac{11}{480}a_1\theta_{02}\theta_{03}(a_3\mu_2\theta_{02}-a_2\mu_3\theta_{03})-\frac{1}{160}a_1(a_2\mu_2\theta_{03}^2-a_3\mu_3\theta_{02}^2)+\frac{1}{480}a_2a_3\theta_{01}^3\times
$$

$$
\times(\mu_3\theta_{02}-\mu_2\theta_{03})-\frac{1}{80}a_1\theta_{02}\theta_{03}(\mu_2\theta_{02}+\mu_3\theta_{03})-\frac{1}{240}a_1(\mu_2\theta_{03}^3+\mu_3\theta_{02}^3)-
$$

$$
-\frac{1}{96}a_1\theta_{01}^2(\mu_2\theta_{02}+\mu_3\theta_{03})-\frac{1}{48}\theta_{01}^2(a_3\mu_2\theta_{02}+a_2\mu_3\theta_{03})-\frac{1}{960}\theta_0^2(\mu_3\theta_{02}-
$$

$$
-\mu_2\theta_{03})+\frac{1}{60}\mu_1(a_3\mu_2\theta_{02}-a_2\mu_3\theta_{03})-\frac{1}{120}\mu_1(\mu_2\theta_{02}+\mu_3\theta_{03})-\frac{1}{64}\mu_1^2\theta_{01}^2+
$$

$$
+\frac{1}{240}\theta_{01}(a_2\mu_3^2-a_3\mu_2^2)-\frac{7}{960}\theta_{01}(\mu_2^2+\mu_3^2)+O(\theta_0^6),\ (1,2,3) \qquad (14)
$$

Теперь можно сделать обратный переход к величинам $\theta^*_i$, используя полученный ряд (12). В результате найдем выражения для компонент кватерниона поворота $\Delta\Lambda = (\Delta\lambda_0,\Delta\lambda_1,\Delta\lambda_2,\Delta\lambda_3)^{\mathrm{T}}$ на интервале $[0,\Delta t]$:

$$
\Delta\lambda_0=1-\frac{1}{8}\theta^{*2}+\frac{1}{384}\theta^{*4}+O(\theta^{*5});
$$

$$\Delta\lambda_1 = \frac{1}{2}\theta_1^*(1-\frac{1}{24}\theta^{*2}-\frac{1}{12}b_1)-\frac{1}{24}\eta_1+\frac{1}{3840}\theta_1^*\theta^{*4}+\frac{1}{1440}\theta_1^*(a_1 b_1(a_2\theta_3^{*2}+$$

$$a_3\theta_2^{*2})+a_2 b_2\theta_3^{*2}-a_3 b_3\theta_2^{*2})+\frac{1}{720}a_2 a_3 b_1\theta_1^{*3}+\frac{1}{480}\theta_1^*(a_2 b_3\theta_3^{*2}-a_3 b_2\theta_2^{*2})+$$

$$+\frac{1}{960}b_1\theta_1^*\theta^{*2}+\frac{1}{1440}(b_2\mu_2\theta_3^*-b_3\mu_3\theta_2^*+\theta_1^*(a_3\mu_2^2-a_2\mu_3^2)+a_1(a_2\mu_2\theta_3^{*2}-$$

$$-a_3\mu_3\theta_2^{*2}))+\frac{1}{960}\eta_1\theta^{*2}+\frac{1}{720}a_1\rho_1\theta_2^*\theta_3^*+\frac{1}{480}(\mu_1\rho_1-a_1\gamma_1-a_2 a_3\eta_1-\theta_1^*(\mu_2^2+$$

$$+\mu_3^2))+\frac{1}{360}\mu_1((a_2+a_3)\theta_1^*\theta_2^*\theta_3^*-\gamma_1)-\frac{1}{240}\theta_1^{*2}(a_2\mu_2\theta_3^*+a_3\mu_2\theta_2^*)+O(\theta^{*6}),$$

$$(1,2,3) \qquad (15)$$

где обозначено $\theta^{*2}=\theta_1^{*2}+\theta_2^{*2}+\theta_3^{*2}$,

$$b_1=a_2\theta_3^{*2}-a_3\theta_2^{*2},\ \eta_1=\mu_2\theta_3^*-\mu_3\theta_2^*,\ \gamma_1=a_2\mu_3\theta_3^*-a_3\mu_2\theta_2^*,$$

$$\rho_1=\mu_2\theta_2^*+\mu_3\theta_3^*,\quad (1,2,3). \qquad (16)$$

Полученное разложение частного решения кинематического уравнения (2) имеет пятый порядок по $\theta^*$ и представлено в виде степенного ряда в терминах кажущихся поворотов (1), относящихся только к одному такту измерений, и содержит члены, зависящие от динамических коэффициентов $a_1$, $a_2$, $a_3$, причем минимальный порядок этих членов по $\theta^*$ равен трем. В практическом плане это решение может быть использовано для исследования влияния динамических характеристик на процессы ориентации твердого тела и полагаться в основу построения алгоритмов определения поворота, имеющих порядок до четвертого включительно, а также для получения аналитических локальных оценок точности.

Сравнение формул (15) с разложениями компонент кватерниона поворота $\Delta\Lambda$ в ряды по степеням компонент вектора истинного поворота $\vec{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ на интервале $[0,\Delta t]$

$$\Delta\lambda_0=\cos(\theta/2)=1-\tfrac{1}{8}\theta^2+\tfrac{1}{384}\theta^4+O(\theta^5),$$

$$\Delta\lambda_1=\tfrac{\theta_1}{\theta}\sin(\tfrac{\theta}{2})=\tfrac{1}{2}\theta_1(1-\tfrac{1}{24}\theta^2+\tfrac{1}{1920}\theta^4)+O(\theta^6),\quad (1,2,3), \qquad (17)$$

где $\theta=(\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2)^{1/2}$, позволяет сделать вывод, что соответствующие кватернионы поворота (15) и (17) в пределах рассматриваемого пятого порядка имеют сходную структуру для скалярной части и отличаются только векторными частями. В силу этого механическая подстановка в (17) вместо $\theta_i$ значений кажущихся поворотов $\theta^*_i$ приводит прежде всего к искажению векторной части кватерниона поворота.

**Список литературы:** **1.** *В.Н.Бранец, И.П.Шмыглевский* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М. Наука, 1973. – 320 с.

*Поступила в редколлегию 12.11.2009*