

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
"ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ФАРМАЦЕВТИЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

І.Л. Красніков, А.К. Бабіченко, В.І. Вельма,  
М.О. Подустов, О.І. Зайцев, Ю.А. Бабіченко

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОБ'ЄКТІВ КЕРУВАННЯ  
ХІМІЧНИХ І ФАРМАЦЕВТИЧНИХ ВИРОБНИЦТВ**

**За редакцією А.К. Бабіченка**

*Рекомендовано центральною методичною радою  
Національного фармацевтичного університету  
як навчальний посібник для студентів вищих  
навчальних закладів*

ХАРКІВ 2015

ББК 32.98:35  
УДК 66.012-52  
МЗЗ

### **Рецензенти:**

*В.О. Панасенко, начальник науково-технічного відділу ДУ «Державного науково-дослідного і проектного інституту основної хімії», доктор технічних наук, професор*

*М.І. Лазарєв, проректор Української інженерно - педагогічної академії, зав. каф. креативної педагогіки і інтелектуальної власності, доктор педагогічних наук, професор*

*Затверджено ЦМР НФаУ, протокол № 3 від 04.06.2014 р.*

У навчальному посібнику висвітлені основні принципи математичного моделювання та його застосування щодо визначення динамічних характеристик об'єктів хімічної і фармацевтичної технології. Розглядаються аналітичні, експериментальні і експериментально-аналітичні методи визначення математичних моделей для найбільш розповсюджених типових об'єктів. Викладено навчальний матеріал загальнотеоретичного характеру, який ілюструється великою кількістю прикладів.

Посібник призначено для студентів спеціальності "Комп'ютерно-інтегровані технологічні процеси і виробництва". Може бути корисним для студентів хіміко-технологічного напрямку підготовки, а також фахівцям, що спеціалізуються в галузі автоматизації.

Математичне моделювання об'єктів керування хімічних і фармацевтичних виробництв: навч.посібник / Красніков І. Л., Бабіченко А. К., Вельма В. І., Подустов М. О., Зайцев О. І., Бабіченко Ю. А.; за ред. А.К. Бабіченко. – Х. : Вид-во ТОВ "С.А.М.", 2015 р. – 224 с.

© І.Л. Красніков  
А.К. Бабіченко  
В.І. Вельма  
М.О. Подустов  
О.І. Зайцев  
Ю.А. Бабіченко

© ТОВ "С.А.М."

ISBN 978-617-7044-79-5

## ПЕРЕДМОВА

Сучасні підприємства хімічної та фармацевтичної галузі становлять собою високотехнологічні складні комплекси, ефективна експлуатація яких вимагає і достатньо високого рівня автоматизації. Такий рівень може бути досягнуто із застосуванням автоматизованих систем керування технологічних процесів (АСКТП) на всіх стадіях виробництва тих чи інших продуктів, або окремих субстанцій.

В процесі створення АСКТП має бути виконаним цілий комплекс робіт по вивченню технологічного процесу як об'єкта керування. При цьому з'ясовують ціль і критерії якості функціонування технологічної системи та її структуру, тобто вхідні впливи (контрольовані і неконтрольовані збуджуючі, керуючі впливи), вихідні (що регулюються) параметри і зв'язки поміж ними, структуру математичних моделей статички і динаміки, значення параметрів (норм технологічного режиму) та їх стабільність. Отримані результати дозволяють здійснити розробку АСКТП і вирішити такі задачі: вибір критерію керування і здійснити математичну постановку для оптимального керування; вибір методів глобальної і локальних задач оптимального керування; розробки функціональної і алгоритмічної структури АСКТП; визначення об'єму інформації (переліку параметрів) про стан технологічної системи і ресурсів мікропроцесорних і обчислювальних комплексів (смуга пропускання і період квантування вимірювань, швидкодія, обсяг запам'ятовуючих пристроїв), необхідних для реалізації усіх функцій АСКТП; вибір комплексу технічних засобів автоматизації; розрахунок техніко-економічних показників і надійності системи в цілому. У зв'язку із сказаним однією з актуальних задач в процесі проектування системи керування є побудова математичної моделі промислового процесу. Останні, незважаючи на складність і різноманітність, можна представляти у вигляді низки типових процесів як об'єктів керування (гідромеханічні, теплові, масообмінні, дифузійні, хімічні, механічні). Проте алгоритми функціонування систем керування, отримані на стадії проектування по математичній моделі об'єкта, в значній мірі можуть відрізнятися від дійсно оптимальних, особливо в частині числових значень їх параметрів настройки. Пояснюється це насамперед як недосконалістю

апріорної моделі на стадії проектування, так і можливою зміною динамічних властивостей об'єкта керування у часі, що вимагає в процесі експлуатації відповідної адаптації системи до цих змін. Така адаптація вимагає безперервної ідентифікації об'єкта, тобто отримання його реальних динамічних властивостей (передатної функції). Тому в процесі викладання матеріалу у даному виданні зосереджена увага не тільки на аналітичних моделях, але і на експериментальних методах визначення динамічних властивостей об'єктів керування хіміко-фармацевтичних виробництв.

Посібник виконаний на підставі досвіду викладання на кафедрі "Процеси і апарати хіміко-фармацевтичних виробництв» Національного фармацевтичного університету, кафедрі «Автоматизації хіміко-технологічних систем та екологічного моніторингу» Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», а також на кафедрі «Теплотехніки і теплових двигунів» Української державної академії залізничного транспорту таких дисциплін як "Математичне моделювання хіміко-технологічних процесів", "Ідентифікація і моделювання технологічних процесів", "Процеси і апарати хіміко-фармацевтичних виробництв" та "Математичне моделювання та застосування ЕОМ".

Автори висловлюють вдячність рецензентам В.О. Панасенко і М.І. Лазареву за цінні зауваження, які сприяли покращенню якості начального посібника.

# 1. МЕТОД МОДЕЛЮВАННЯ І ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

## 1.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

Моделі і моделювання досить поширені поняття в науці, техніці та побуті.

*Модель* – це деякий матеріал чи описово представлений об'єкт або явище, що є спрощеною версією модельованого об'єкта або явища і в достатній мірі повторює властивості, суттєві для цілей конкретного моделювання.

Процес побудови моделі називається моделюванням. Іншими словами, моделювання – це процес вивчення будови і властивостей оригіналу за допомогою моделі.

Моделі застосовуються в тих випадках, коли використання самого об'єкта моделювання нераціонально, не вигідно або неможливо. Об'єктом моделювання може бути всяке явище, пристосування, творіння, побудова.

Модель має бути побудована так, щоб вона найбільш повно відтворювала ті якості об'єкта, які необхідно вивчити у відповідності з поставленою метою. В усіх відносинах модель повинна бути простіше об'єкту та зручніше для його вивчення.

Під час розробки і проектування автоматичних систем керування або оцінки якісних взаємозв'язків між її елементами, систему моделюють структурними або функціональними схемами, а для дослідження стійкості або перехідних процесів систему моделюють математичними виразами, алгоритмами, програмами, які відображають кількісні залежності між вхідними і вихідними змінними.

Модель повинна весь час відтворювати властивості об'єкта та змінування цих властивостей. Якщо результати моделювання співпадають з характеристиками та реакціями об'єкта, то кажуть, що модель є адекватною об'єкту. Тобто *адекватність* – це міра відповідності моделі оригіналу. Адекватність моделювання залежить від його мети та прийнятих критеріїв адекватності.

*Критерій адекватності* – це показники або сукупність показників, які дають можливість здійснити кількісну або якісну оцінку міри відповідності моделі оригіналу (наприклад точність, динаміку, надійність).

Узагальнено моделювання можна визначити як метод наукового пізнання, за якого об'єкт-оригінал, що вивчається, знаходиться у деякій відповідності з іншим об'єктом-моделлю. При цьому, модель здатна в тій чи іншій мірі замінювати оригінал на деяких стадіях процесу пізнання.

Разом з тим моделювання як метод пізнання є обмеженим, тому що модель описує лише певні сторони об'єкта, а не відображає всього спектру властивостей станів об'єкту в цілому. Крім того при отриманні моделі приймається система припущень, яка спрощує чи ідеалізує загальну картину характеристик об'єкта.

У залежності від ознаки класифікації, моделі можна розділити на уявні і матеріальні, формалізовані і неформалізовані, просторово подібні, фізично подібні, математично подібні, експериментальні та інші.

Поклавши за основу ознаку матеріальності всі моделі можна розділити на уявні і матеріальні.

*Уявні або нематеріальні моделі* – це певне відображення в свідомості людини (моделі, які існують в уяві людини), або викладені певним чином на папері або інших носіях інформації. Уявні моделі, виходячи з останнього, можна назвати ще й інформаційними.

*Матеріальні моделі* – це моделі, виконані у вигляді певних фізичних пристроїв, які виконують функції моделей.

Уявні та матеріальні моделі, у свою чергу, залежно від ступеня формалізації, призначення та форми подання можна розділити на ряд підкласів (видів). Уявні моделі поділяють на образні, образно-знакові і знакові або формалізовані.

*Образні моделі* – це те неформалізоване уявне представлення, яке ми отримуємо під час знайомства або вивчення якогось явища чи іншого об'єкта.

*Образно-знакові моделі* – це є, в деякій мірі, формалізовані уявлення з використанням умовних зображень для користування широкої аудиторії або фахівців. Вони несуть об'єктивну інформацію в частково формалізованому вигляді. Однак це не зовсім формалізовані моделі, бо основним елементом їх є уява людини, яка користується цими моделями. Прикла-

дами таких моделей є географічні карти, структурні схеми процесів і систем; технологічні, функціональні, принципів та інші схеми; креслення пристроїв; структурні формули хімічних сполук; розрахункові схеми та інше. Образно-знакові моделі широко використовуються в різних сферах діяльності людей, починаючи від навчання в школах до виробничої і наукової роботи. Хоча образно-знакові моделі не є повністю формалізованими, вони однозначно відображають об'єкт моделювання, можуть давати кількісні дані про об'єкт моделювання в рамках, звичайно, тієї інформації, яку несе модель. Наприклад, за географічною картою можна визначити відстань між пунктами або висоту даної місцевості над рівнем океану, але не можна визначити наявність і вид трав'яного покриву та інше. Креслення деталі дає можливість визначити її розміри і конструктивні особливості, але, звичайно, не дає інформації про вагу і ціну.

Хоча образно-знакові моделі несуть і неповну інформацію про об'єкт моделювання, вони широко використовуються в практичній діяльності та представляють важливий фонд інформації людства.

*Знакові моделі* – це цілком формалізовані моделі, виражені математичними залежностями, формулами, алгоритмами, що відображають залежність одних кількісних величин від інших. Ці моделі також називають математичними. Під час їх застосування не потрібно оперувати уявою, вони несуть інформацію про кількісні взаємозв'язки в самому об'єкті моделювання. За такими моделями важко або зовсім неможливо уявити технологію, призначення, зовнішній вигляд об'єкта. Інформаційна область, яку відображає математична модель, є найбільш завершеною, оскільки дозволяє не розбираючись в особливостях об'єкта моделювання, давати числові залежності між її параметрами. Ця особливість математичних моделей використовується для узагальнення, отримання фундаментальних залежностей у природі і в техніці. Фізико-математичні та технічні галузі науки пов'язані з розробкою і використанням математичних моделей відповідних явищ. Всі фундаментальні закони електротехніки, гідравліки, теплопередачі, хімічної кінетики та інших галузей науки і техніки є математичними моделями відповідних явищ природи.

Математичні моделі широко застосовуються в наукових дослідженнях, в проектних розробках, комп'ютерно-інтегрованих системах управління і т.п.

## 1.2. ФІЗИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

*Фізичне моделювання* – це засіб дослідження на моделях, що мають однакову фізичну природу з об'єктом моделювання, тобто, становлять деякий макет об'єкту, що вивчається. Фізичні моделі відтворюють увесь комплекс властивостей явищ об'єкту.

В фізичному моделюванні важливу роль відіграє теорія подібності. Її основне положення: необхідна фізична подібність моделі та об'єкту забезпечується лише за рівності всіх однотипних безрозмірних комплексів (критеріїв подібності), що визначаються у східних точках моделі та об'єкту. При фізичному моделюванні в додаток до геометричної подібності передбачається подібність швидкостей, сил, матеріальних середовищ і т.п.

При моделюванні на основі теорії подібності безрозмірні комплекси грають двояку роль. По-перше, на їх основі визначають, коли модель подібна оригіналу, при цьому комплекси служать власно критеріями подібності. По-друге, значення цих же комплексів у подібних точках і є тією кількісною мірою, що і переноситься з моделі на об'єкт. Наведемо кілька прикладів критеріїв подібності.

*Рейнольдса* число, для течій в'язких рідин і газів, що характеризує співвідношення між інерційними силами і силами в'язкості:

$$Re = \frac{u\rho l}{\mu}, \quad (1.1)$$

де  $u$  – швидкість потоку;  $\rho$  – густина;  $l$  – характерний лінійний розмір;  $\mu$  – динамічний коефіцієнт в'язкості рідини чи газу.

Так, при течії в круглих циліндричних трубах зазвичай приймають  $l = d$ , де  $d$  – діаметр труби. Від числа Рейнольдса залежить також режим течії рідини (ламінальний або турбулентний).

*Фруда* число, що застосовується у випадках, коли є суттєвим вплив сили тяжіння. Число Фруда характеризує співвідношення між інерційної силою і силою тяжіння, що діють на елементарний об'єм рідини чи газу:

$$Fr = \frac{u^2}{gl}, \quad (1.2)$$

де  $u$  – швидкість;  $g$  – прискорення сили тяжіння;  $l$  – характерний розмір потоку або тіла.

*Нуссельта* число, безрозмірний параметр, що характеризує інтенсивність конвективного теплообміну між поверхнею тіла і потоком газу (рідини):

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda}, \quad (1.3)$$

де  $\alpha = Q/(\Delta\theta \cdot S)$  – коефіцієнт теплообміну;  $Q$  – кількість теплоти, що віддається (одержується) поверхнею тіла;  $\Delta\theta$  – різниця температур між поверхнею тіла і рідиною;  $l$  – характерний розмір,  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності.

*Фур'є* число застосовується для нестационарних теплових процесів, характеризує співвідношення між швидкістю зміни теплових умов у навколишньому середовищі і швидкістю перебудови поля температури всередині аналізованої системи (тіла). Воно залежить від розмірів тіла і коефіцієнта його температуропровідності.

$$Fo = \frac{\lambda t}{\rho c l^2}, \quad (1.4)$$

де  $t$  – час зміни зовнішніх умов,  $c$  – питома теплоємність.

Фізичне моделювання більш повно порівняно з математичним моделюванням відтворює властивості досліджуваного процесу, системи або об'єкта. Недоліком фізичного моделювання є висока вартість моделей складних об'єктів, менша універсальність методу, тому при зміні параметрів досліджуваного процесу необхідно переробляти або створювати заново модель, що знову-таки пов'язано з великими матеріальними і часовими витратами.

Фізичне моделювання є одним із перших видів моделювання, має обмежене використання в теорії та практиці управління, найбільш розповсюджене в теплоенергетиці, механіці, гідравліці і технологічних процесах.

### 1.3. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Математичне моделювання це найважливіший метод сучасного наукового дослідження, який є базовим апаратом для системного аналізу.

*Математична модель технологічного об'єкта* – це сукупність математичних залежностей, що відображають взаємозв'язок вихідних та вхідних величин об'єкта, з обмеженнями, які накладаються на ці величини, умовами їх фізичної реалізації та безпечної експлуатації.

Математичні моделі – універсальні, відносно дешеві, зручні в застосуванні. Дослідження математичних моделей доцільно виконувати на ЕОМ, що дає значний виграш у часі і коштах.

Зараз математичні моделі знаходять більш широке застосування ніж фізичні моделі. Вони застосовуються в системах автоматизації проектування (САПР) технологічних процесів, в автоматизованих системах керування технологічними процесами (АСКТП) і в автоматизованих системах наукових досліджень (АСНД). Найчастіше метою дослідження об'єкта і системи управління є їх математичні моделі.

Математичне моделювання включає в себе отримання, дослідження та його застосування. Методи використання та застосування математичних моделей в значній мірі визначають метод отримання, вид, складність, точність та інші показники моделей. Універсальних на всі випадки життя математичних моделей бути не може. Вони розробляються для конкретного застосування.

Розглянемо для прикладу порівняльні характеристики математичних моделей, які використовуються в САПР і в алгоритмах управління технологічних процесів. Математичні моделі для САПР технологічних процесів повинні пов'язувати визначальні характеристики та особливості процесу, який моделюється, з конструктивними і технологічними його параметрами. У цьому випадку час обчислення моделей на ЕОМ, і складність мають другорядне значення і на них рідко звертають увагу. В рамках САПР розрахунки складних об'єктів і технологічних процесів на ЕОМ за їх моделями можуть продовжуватися протягом багатьох годин і це не вважається недоліком таких моделей.

До математичних моделей, які застосовуються в алгоритмах керування, висувають вимоги простоти, і можливості працювати в реальному

масштабі часу. Якщо модель об'єкта керування не забезпечує випередження процесу в самому об'єкті, то її застосування в алгоритмі керування немає сенсу.

Такі математичні моделі повинні пов'язувати вихідні визначальні параметри об'єкта з вхідними керуючими і збурюючими. Вплив конструктивних, а в деяких випадках і технологічних параметрів на визначальні параметри процесу для таких моделей є несуттєвим. Це пов'язано з їх застосуванням. Математична модель об'єкта керування і алгоритм керування повинні випереджати хід процесу через те, що модель повинна прогнозувати ситуацію, щоб можна було виробляти і реалізувати керуючий вплив на нього.

В процесі експлуатації, з часом, об'єкти керування часто змінюють свої властивості. Для вирішення завдань керування, математична модель, яка замінює в них об'єкт, повинна бути досить точною. Оскільки застосувати складні і громіздкі моделі, які відображають зміни властивостей об'єкта моделювання, немає можливості, то використовують процедуру адаптації моделі. Отримані таким чином моделі називають адаптивними. У них періодично проводиться підстроювання коефіцієнтів або структури для того, щоб їх властивості відповідали властивостям об'єкта моделювання, які змінюються в процесі його експлуатації.

**Різноманіття математичних моделей** можна поділити на класи за кількома ознаками в залежності від конкретної реалізації процесу, що досліджується, та його апаратного оформлення.

*а) У залежності від характеру зміни вхідних та вихідних величин об'єкта – моделі статичні і динамічні.*

Статичні моделі відображають співвідношення між вхідними та вихідними параметрами об'єкта в усталеному режимі його роботи. Математичні моделі статички являють собою системи алгебраїчних рівнянь, які можуть бути лінійними алгебраїчними рівняннями, нелінійними у вигляді степеневих поліномів чи трансцендентними рівняннями.

Динамічні моделі відображають зміни вхідних та вихідних величин об'єкта в часі. Математичні моделі динамічних об'єктів являють собою системи диференціальних лінійних чи нелінійних рівнянь, інтегральних рівнянь, функціоналів, частотних характеристик, передатних функцій, тощо.

б) *За видом зв'язків між вхідними та вихідними змінними об'єкта – моделі лінійні та нелінійні.*

Для лінійних моделей використовується принцип суперпозиції – реакція системи на сукупність вхідних дій дорівнює сумі реакцій на кожну дію окремо.

Математичні моделі промислових об'єктів найчастіше нелінійні. Тому їх лінеаризують в деякій області зміни вхідних координат. Лінеаризовані моделі зовні не відрізняються від лінійних моделей. Однак область їхнього застосування обмежена областю, на якій вони лінеаризовані.

в) *За просторовими ознаками – моделі з розподіленими та із зосередженими параметрами.*

Якщо координати об'єкта розподілені по просторових координатах, і якщо об'єкт розвивається не тільки в часі, а й в просторі, то моделі, що відображають цей розвиток чи характер координат називаються математичними моделями із розподіленими параметрами. Такі моделі являють собою системи диференціальних рівнянь з частковими похідними, і з просторовими координатами.

Якщо основні параметри об'єкта не змінюються в просторі, то математичні моделі, що відображають роботу таких об'єктів називаються математичними моделями із зосередженими параметрами.

г) *У залежності від фізичної суті процесів, що відбуваються в об'єкті – моделі детерміновані та статистичні.*

Детерміновані моделі відображають детерміновану (причинну) сутність взаємозв'язку явищ, коли можна теоретично обґрунтувати причину, через яку сталася зміна поведінки системи, пояснюють сутність взаємозв'язку явищ, що протікають в системі моделювання. В детермінованих математичних моделях певній сукупності вхідних змінних відповідає конкретне одне значення вихідної величини. У детермінованих об'єктах вихідна величина не залежить від неконтрольованих зовнішніх факторів.

Статистичні моделі відображають імовірнісний (стохастичний) характер явищ, коли розраховується не справжнє значення параметрів процесу, а ймовірність їх розрахунку в певному інтервалі значень. Статистичні моделі, на відміну від детермінованих, не несуть, як правило, інформації про фізичну сутність розв'язуваної задачі, проте їх простота дозво-

ляє використовувати їх досить ефективно при виконанні моделювання хіміко-технологічних процесів.

д) *У залежності від внутрішніх властивостей об'єкта математичні моделі розділяють на стаціонарні та нестаціонарні.*

Стаціонарні математичні моделі описують об'єкти з незмінними в часі внутрішніми властивостями.

Нестационарні математичні моделі описують об'єкти з властивостями, що змінюються у часі.

Прикладом нестаціонарного об'єкта є паровий котел, на стінках якого з часом відкладається шар накипу, що погіршує теплопровідність через стінку (зміна статичної характеристики) і збільшує інерційність об'єкта (зміна динамічної характеристики).

**Методи побудови математичних моделей** у залежності від наявності відомостей про фізичну природу об'єкта моделювання та відомих теоретичних закономірностей процесів, що відбуваються у ньому, можуть бути аналітичні, експериментальні та експериментально-аналітичні.

*Аналітичні математичні моделі* хіміко-технологічного об'єкта будуються на основі теоретичного аналізу фізичних і хімічних процесів, що протікають в досліджуваному об'єкті з урахуванням конструкцій апаратів і характеристик речовин, що переробляються. При виведенні цих рівнянь використовуються фундаментальні закони збереження речовини і енергії (тобто рівняння матеріальних і енергетичних балансів), а також гідродинамічні та кінетичні закономірності процесів хімічних перетворень, перенесення теплоти і маси.

Основою для одержання аналітичних математичних моделей є рівняння матеріальних і енергетичних балансів, фазових перетворень та ін. Коефіцієнти рівнянь аналітичних моделей мають фізичний смисл. В такі моделі у явному вигляді входять конструктивні особливості об'єкта (поверхні теплообміну, діаметр і довжина труб, об'єми робочих зон і т.п.), режимні параметри та константи (температура, рівень, константи дифузії, тепловіддачі тощо), а також характеристики речовини (теплоємність, густина та ін.).

Аналітичний метод застосовується на стадії проектування нових технологічних об'єктів, фізико-хімічні процеси яких добре вивчені. Точність аналітичних математичних моделей визначається прийнятими при її

побудові припущеннями. Залежно від прийнятих припущень математична модель одного і того ж об'єкту може мати істотно різний вигляд. Аналітичні математичні моделі як правило нелінійні.

Основна перевага аналітичних (неформальних) математичних моделей – можливість одержання загальних результатів, перенесення останніх на клас об'єктів, багаторазове використання, розкриття механізму процесів і втручання в їх перебіг. У той же час одержання аналітичних математичних моделей потребує багато часу, не завжди існують необхідні математичні залежності, а для складних об'єктів вони громіздкі й незручні для використання.

*Експериментальний метод* побудови математичних моделей передбачає вирішення задачі ідентифікації (визначення характеристик) реального об'єкта керування за експериментальними даними, а також на основі апріорної інформації з точністю, яка задовольняє обраному критерію ідентифікації.

Цей метод, в основному, використовується, коли процес мало вивчений або нічого невідомо про його природу. Експериментальний метод також дозволяє отримати математичну модель діючого об'єкта без дослідження його внутрішньої структури. Цей метод менш трудомісткий, ніж аналітичний, не вимагає детального вивчення фізико-хімічних закономірностей, що визначають роботу об'єкту, і може бути здійснений персоналом відносно невисокої кваліфікації. Недолік цього методу полягає в тому, що математична модель, отримана експериментально, справедлива тільки для обстеженого об'єкту і не може бути використана при вивченні інших об'єктів, навіть близьких до нього за технологією і апаратурним оформленням.

В процесі ідентифікації визначається структура і параметри математичної моделі, які за однакових сигналах на вході динамічного об'єкту та моделі забезпечують близькість виходу моделі та виходу об'єкта при наявності деякого критерію якості (адекватності).

Звідси випливає, що процедура ідентифікації складається з наступних етапів:

- вибір структури моделі на підставі наявної апріорній інформації про досліджуваний процес і деяких евристичних міркувань;

- вибір критерію близькості об'єкта і моделі, заснований на специфіці завдання;
- визначення параметрів моделі, оптимальних з точки зору обраного критерію адекватності.

У залежності від наявності апріорної інформації про об'єкт управління розрізняють задачі ідентифікації у вузькому і широкому сенсі.

При вирішенні задачі ідентифікації в широкому сенсі початкова інформація про об'єкт відсутня і система представляється у вигляді «чорного ящика». Така ідентифікація називається структурною.

Якщо структура об'єкта і, отже, його модель відома, а за результатами експерименту визначаються параметри моделі, то такий підхід називається ідентифікацією у вузькому сенсі. Цей підхід називають також параметричною ідентифікацією.

Задача ідентифікації характеризується в загальному вигляді таким чином, що за результатами спостережень за вхідними та вихідними змінними об'єкта необхідно побудувати оптимальну у деякому розумінні модель об'єкта.

За способом отримання експериментальних даних розрізняють активні і пасивні методи ідентифікації.

Перевагами пасивних методів є відсутність необхідності проводити спеціальні дослідження об'єкта, достатньо лише інформації, яка отримана в режимі робочого функціонування об'єкта з подальшим розрахунком параметрів моделі. Недоліками такого підходу є значні витрати часу на збір і необхідну статистичну обробку даних і жорсткі вимоги до частотного спектру вхідного впливу. Пасивні методи ідентифікації використовуються для побудови стохастичних математичних моделей.

Активний експеримент полягає в тому, що поряд із вимірюванням змінних об'єкта на нього наносять сплановані дії. В активних методах на вхід об'єкту подаються спеціально сформовані тестові сигнали детермінованого або випадкового характеру. Перевагами цього підходу є мінімальні вимоги до апріорної інформації про об'єкт, цілеспрямований характер ідентифікації, і, як наслідок, зменшення часових та матеріальних витрат на проведення експерименту. Активний експеримент дозволяє за рахунок цілеспрямованої зміни вхідних параметрів отримувати необхідний

обсяг інформації при істотно меншій кількості дослідів, ніж за пасивного експерименту.

Активні методи ідентифікації використовуються для побудови як стохастичних так і детермінованих математичних моделей.

Динамічні властивості більшості типових об'єктів керування (хімічні реактори, теплообмінники, абсорбери, трубопроводи та таке ін.), де існує однозначна залежність між виходами і входами, з достатньою для практичних розрахунків точністю можна описати лінійними диференціальними рівняннями з постійними коефіцієнтами загального виду

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

де  $a_i, b_j, i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m$  – параметри моделі, що підлягають ідентифікації.

Для більшості фізично реалізованих систем  $m \leq n$ . Якщо об'єкт має запізнювання, то рівняння прийме вигляд

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t-\tau)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t-\tau)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t-\tau) = \\ = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t), \end{aligned} \quad (1.6)$$

Для ідентифікації таких об'єктів використовують детерміновані активні методи ідентифікації при яких на вхід подають спеціальні сигнали у вигляді східчастого стрибка, одиничного імпульсу, або синусоїдального вхідного сигналу (рис.1.1). Експериментальні дані фільтрують від перешкод і апроксимують математичними виразами.

Така структура математичної моделі, що отримана детермінованим методом, дозволяє за допомогою перетворення Лапласу від диференціального рівняння перейти до алгебраїчного рівняння. В результаті детермінованих активних методів ідентифікації отримуємо дискретні значення динамічних характеристики об'єкту в кінцевому числі точок. Такі методи також називають прямими методами ідентифікації.

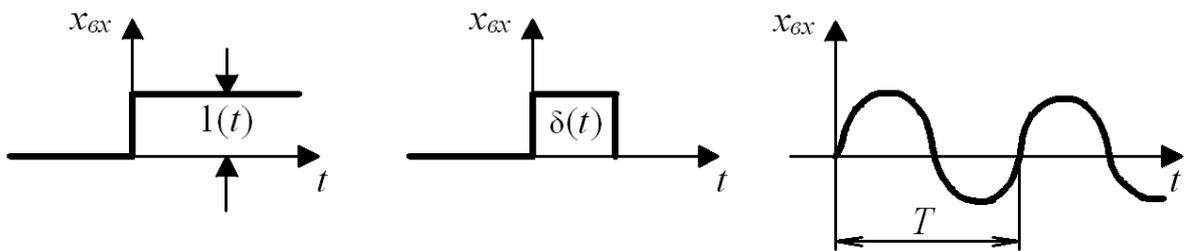


Рис.1.1. Вхідні сигнали активних методів ідентифікації.

Прямими методами визначаються наступні характеристики: в частотній області – амплітудно-фазова характеристика  $W(j\omega)$ , в часовій області – перехідна характеристика  $h(t)$  та імпульсна перехідна характеристика  $w(t)$ .

Структурна схема параметричної схеми ідентифікації детермінованих об'єктів керування хімічної промисловості наведена на рис.1.2.

Критерії ідентифікації – це показники які оцінюють за різними ознаками близькість об'єкта і моделі. Конкретний вигляд критерію ідентифікації залежить від задачі моделювання, від використання конкретної моделі, від вимог до точності і т.п. Найчастіше застосовують інтегральний середньоквадратичний критерій:

$$I = \int_0^T [y^E(t) - y^M(t)]^2 dt \rightarrow \min, \quad (1.7)$$

де  $I$  – критерій ідентифікації;  $y^E(t)$  – експериментальні дані;  $y^M(t)$  – дані, розраховані по моделі.



Рис.1.2. Структурна схема процесу ідентифікації.

Для дискретних сигналів формула (1.7) приймає вигляд

$$I = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (y_i^E - y_i^M)^2 \rightarrow \min. \quad (1.8)$$

Експериментально-статистичний метод використовують, якщо існує випадковий зв'язок між виходами і входами об'єкта, або якщо вихідні та вхідні величини спотворені перешкодами (шумами). Метод базується на поняттях випадкової величини і випадкової функції. Для об'єктів хімічної технології такий зв'язок часто описують методами кореляційного і регресійного аналізу. Математична модель в цьому випадку називається рівнянням регресії.

*Експериментально-аналітичний* метод полягає у складанні рівнянь шляхом аналізу явищ, що відбуваються в об'єкті. Використовується декомпозиція складного явища, тобто на основі аналізу визначаються більш прості, елементарні процеси, які можна досліджувати більш доступними способами. Після аналізу впливу елементарних процесів на процес в цілому несуттєві фактори відкидаються і обирається той елементарний процес, який надає найбільш істотний вплив, при цьому чисельні значення коефіцієнтів отриманих рівнянь визначаються експериментально на реальному об'єкті. Будучи комбінацією аналітичного і експериментального способів визначення властивостей об'єктів, цей метод успадковує як їх переваги, так і недоліки. Особливу ефективність цей метод набуває в процесі створення адаптивних і супервизорних систем керування.

Вибір того чи іншого методу залежить від важливості і ступеня складності процесу. Для великих діючих багатотоннажних виробництв як правило застосовують експериментально-аналітичний метод. Аналітичним методом користуються при створенні принципово нових технологічних процесів. Для дрібних виробництв зі складним характером процесу використовують експериментальний метод. На практиці, як правило, використовується розумне поєднання всіх методів.

## 2. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ЯК ОБ'ЄКТІВ КЕРУВАННЯ

### 2.1. ЗАГАЛЬНА СТРУКТУРА ОБ'ЄКТУ КЕРУВАННЯ

*Об'єкт керування* – це технологічний процес або апарат, режим роботи якого залежить від зовнішніх впливів і може підтримуватися на заданому рівні автоматичною системою керування.

Об'єкти керування, з якими доводиться мати справу при автоматизації виробництв, вельми різноманітні. Це можуть бути окремі апарати, в яких виконується яка-небудь технологічна операція. В хімічній і фармацевтичній галузях об'єктами є реактори, абсорбери, екстрактори, ректифікаційні колони, теплообмінники, насоси, компресори та інші апарати технологічних установок, а також ділянки трубопроводів.

Об'єкт керування досить часто не збігається з окремими технологічними апаратами, машинами або механізмами. Це може бути окрема частина складного технологічного апарата. Прикладом подібного об'єкта може служити куб ректифікаційної колони, в якому необхідно підтримувати постійний рівень компонента суміші (кубового залишку).

З іншого боку, об'єкт може складатися з декількох технологічних апаратів. В якості прикладу можна навести ланцюжок послідовно працюючих хімічних реакторів, на виході якого необхідно підтримувати заданий склад продукту, або керування процесом горіння в топці шляхом зміни розрідження у димовій трубі.

Об'єктом керування може бути елемент або ланка системи автоматичного керування, тому властивості системи керування залежать насамперед від властивостей такого об'єкта. Отже для створення працездатної системи, що забезпечує необхідну якість керування, необхідно насамперед знати властивості об'єкта, як статичні, так і динамічні.

Будь який технологічний процес як об'єкт керування (рис. 2.1) характеризується наступними основними групами змінних:

а) *Змінні, які описують стан технологічного процесу* (позначимо вектором  $y$ ). Ці змінні в процесі керування необхідно підтримувати на заданому рівні або змінювати за заданим законом.

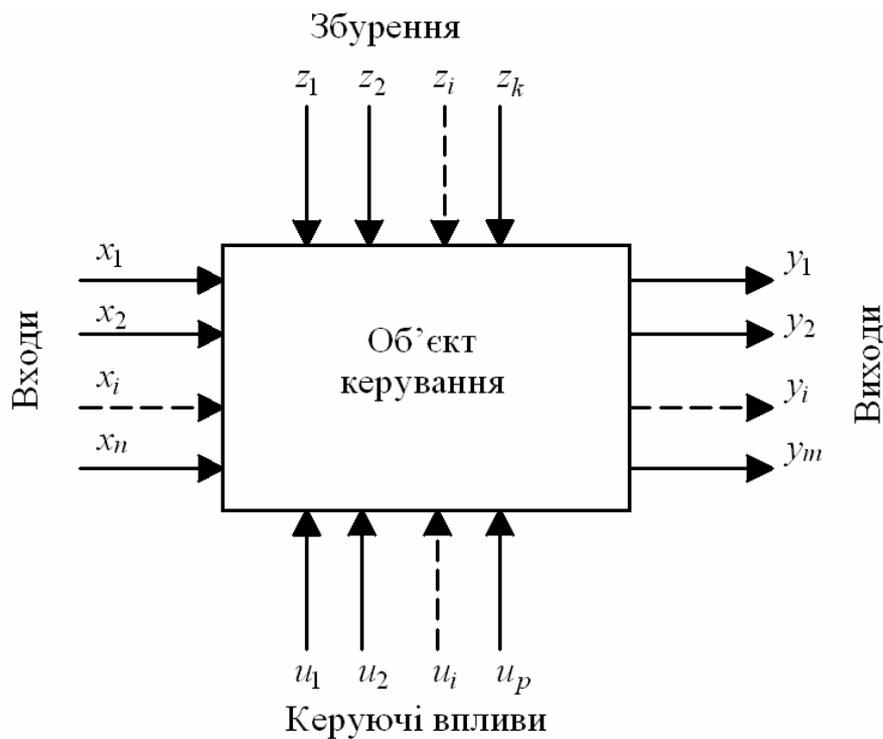


Рис. 2.1. Структура об'єкту керування.

Точність стабілізації змінних стану технологічного процесу може бути різною, залежно від вимог, які встановлюються регламентом, і можливостей системи керування. Як правило, ці змінні вимірюють безпосередньо, але інколи їх обчислюють, використовуючи математичну модель об'єкта, за відомими іншими технологічними параметрами. Вектор  $y$  часто називають вектором регульованих величин.

б) *Змінні, за допомогою котрих можна впливати на об'єкт з метою керування.* Сукупність таких змінних становить собою вектор регулюючих величин  $u$ , якими є витрати матеріальних потоків або потоків енергії.

в) *Вхідними змінними  $x$  прийнято називати параметри, значення яких можуть бути виміряні, але можливість впливу на них відсутня.* Передбачається також, що ці параметри не залежать від режиму процесу. Вхідними параметрами є, наприклад, контрольований склад вихідної сировини, теплоносії, що надходять в апарат, кількість і якість яких можуть бути визначені, але не підлягають зміні (потокі з попередніх стадій або вихідних ємностей).

г) *Внутрішні і зовнішні збурення (вектор  $z$ ), під впливом яких знаходиться об'єкт.* Збурюючими називають параметри, значення яких випа-

дковим чином змінюються з часом і які недоступні для вимірювання. Це можуть бути, наприклад, різні домішки у вихідній сировині, поступова зміна активності каталізатора, зміна температури процесу за рахунок реакції, а також збурення будь-якого іншого характеру.

Впливи можуть як залежати від процесу в об'єкті, так і не залежати від нього і, отже, бувають відповідно внутрішніми і зовнішніми. До числа незалежних від процесу збурень можна віднести неконтрольовані домішки у складі живлення (зовнішні впливи). Залежними від процесу збурень можуть бути, наприклад, зміни активності каталізатора (внутрішні впливи).

При всьому розмаїтті об'єктів керування в хімічній та фармацевтичній технологіях, що найбільш часто зустрічаються, всі вони можуть бути розділені на порівняно невелике число типів, що мають схожі динамічні характеристики і основні властивості: ємність, здатність до самовирівнювання, запізнювання.

## 2.2. КЛАСИФІКАЦІЯ ОБ'ЄКТІВ КЕРУВАННЯ

Класифікація об'єктів проводиться за низкою ознак. Розрізняють одномірні та багатомірні об'єкти.

*Одномірні* об'єкти мають одну вихідну величину і описуються одним рівнянням статички і одним рівнянням динаміки. Прикладом одномірного об'єкта може служити резервуар для рідини (рис. 2.2), вхідними величинами якого є приток  $G_{\text{ВХ}}$  і витрата  $G_{\text{ВИХ}}$  рідини, а вихідною величиною – рівень рідини  $H$ . Збільшення (зменшення)  $G_{\text{ВХ}}$  або  $G_{\text{ВИХ}}$  викликає зміну рівня  $H$ .

*Багатомірні* об'єкти містять декілька вихідних величин. Число рівнянь статички і динаміки у цьому випадку повинне відповідати кількості вихідних величин. Вихідні величини багатомірних об'єктів можуть впливати або не впливати одна на іншу.

У багатомірних об'єктах з незалежними вихідними величинами зміна кожної із вхідних величин приводить до зміни тільки своєї вихідної величини. Такі об'єкти можна розбити на кілька одномірних об'єктів і розглядати їх незалежно один від іншого.

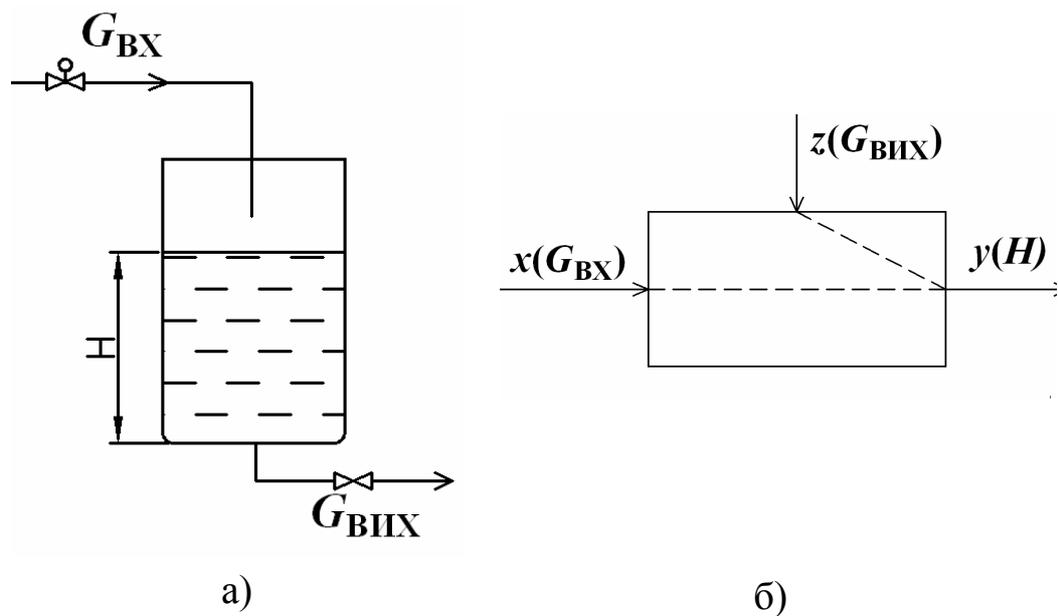


Рис. 2.2. Схема одномірного об'єкта керування: а – схема резервуару для рідини; б – структурна схема динамічних каналів.

У багатомірних об'єктах із взаємозалежними вихідними величинами зміна входних величин приводить до одночасної зміни декількох вихідних величин, що пояснюється наявністю в таких об'єктах каналів перехресних зв'язків.

Прикладом двомірного об'єкта з перехресними зв'язками є безперервно діючий екзотермічний реактор ідеального перемішування. Схеми реактора і його динамічних каналів наведена на рис. 2.3.

Реактор має п'ять входних величин (концентрація  $C_H$  і температура  $\theta_H$  реагентів на вході в реактор, витрата реагентів у реактор  $G_p$ , а також теплота, що відводиться з реактора системою охолодження й обумовлене витратою холодоагенту  $G_x$  і його температурою  $\theta_x$ ). Вихідними величинами є концентрація продуктів реакції  $C$  і температура в реакторі  $\theta$ .

Для стабілізації температури  $\theta$  у реакторі змінюють витрату холодоагенту  $G_x$ , а для забезпечення постійності складу продуктів реакції  $C$  – витрату реагентів  $G_p$ , що надходять у реактор. При цьому зміна витрати холодоагенту  $G_x$  викликає також зміну складу продуктів реакції  $C$ , а коливання витрати вихідних реагентів  $G_p$  призводить до зміни температури  $\theta$  реакційної маси в реакторі. Крім цього, вихідні величини реактора  $C$  і

$\theta$  залежать від концентрації  $C_H$  і температури  $\theta_H$  вхідного продукту, а також від температури холодоагенту  $\theta_X$ . Окрім прямих розглянутих об'єкт має і перехресні канали проходження сигналів.

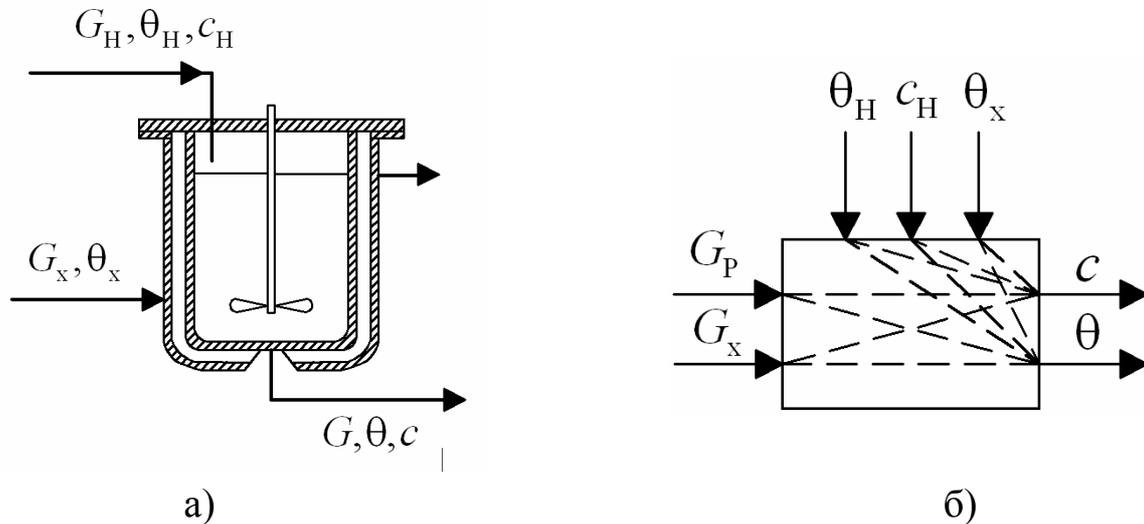


Рис.2.3. Схема хімічного реактора ідеального перемішування (а) і його динамічних каналів (б).

Вихідні величини такого реактора знаходять із наступних рівнянь динаміки:

$$C = f_1(G_P, G_X, C_H, \theta_H, \theta_X, \theta, t), \quad (2.1)$$

$$\theta = f_2(G_P, G_X, C_H, \theta_H, \theta_X, \theta, t). \quad (2.2)$$

Отже, обидві вихідні величини об'єкта зазнають вплив від усіх вхідних величин, а взаємозв'язок поміж ними визначається різними рівняннями динаміки.

### 2.3. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ОБ'ЄКТІВ КЕРУВАННЯ

При проектуванні системи управління, що забезпечує необхідну якість перехідного процесу необхідно враховувати властивості об'єкта керування. Основними властивостями об'єктів керування є акумулююча здатність (ємність), самовирівнювання і швидкодія (інерційність і запізнювання).

**Акумулююча здатність (ємність).** Робота будь-якого керованого об'єкту пов'язана з притоком, витратою і перетворенням матеріальних та енергетичних потоків, тому ємність є властивістю, характерною для всіх об'єктів керування в хімічній технології.

Загальною властивістю об'єктів керування є здатність об'єкта в більшій чи меншій мірі накопичувати тепло, рідину, газ і т. п. Це накопичення можливо внаслідок того, що в кожному об'єкті є опори виходу теплоти, рідини, газу та ін. Якби цей опір дорівнював нулю, то вся кількість речовини та енергії, що надходить в об'єкт миттєво йшла б з нього і накопичення виявилось б неможливим. Ділянку об'єкта, в якому відбувається накопичення речовини або енергії, називають ємністю об'єкта керування. Таким чином, при моделюванні об'єктів під ємністю розуміють не тільки здатність до накопичення, а також і сам пристрій, в якому накопичується речовина, або енергія.

Кількість енергії або матерії, яку треба підвести до об'єкта або відвести від нього, щоб змінити величину регульованого параметра на одиницю виміру, називається коефіцієнтом ємності  $C$ .

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta y}, \quad (2.3)$$

де  $\Delta Q$  – різниця між притоком і витратою речовини або енергії;  $y$  – регульований параметр.

Наприклад, коефіцієнт ємності бака з рідиною

$$C = \frac{dV}{dH} = \frac{d(SH)}{dH}, \quad (2.4)$$

де  $S$  – площа поперечного перерізу резервуару;  $H$  – рівень рідини.

Якщо площа  $S$  не залежить від рівня  $H$  то

$$C = \frac{d(SH)}{dH} = S. \quad (2.5)$$

Ємність теплового об'єкту залежить від кількості тепла  $\Delta Q$ , яке приводить до зміни температури на величину  $\Delta t$ .

$$C = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(mc_p\theta)}{dt} = mc_p, \quad (2.6)$$

де  $m$  – маса речовини в апараті;  $c_p$  – питома теплоємність речовини.

Коефіцієнт ємності  $C$  об'єкту тісно пов'язаний зі сталою часу  $T$ . Чим більше  $C$ , тим більше  $T$ .

Об'єкти керування за кількістю ємностей поділяються на одноємнісні і багатоемнісні. Одноємнісний об'єкт керування складається з одного опору витраті речовини або енергії та однієї ємності. До одноємнісних об'єктів належать резервуари і апарати, в яких регулюється рівень рідини, апарати, в яких регулюється тиск газу або пари, теплообмінники змішувального типу з безпосереднім контактом теплоносіїв, ділянки трубопроводів, на яких регулюється тиск або витрата, та ін.

Багатоемнісні об'єкти складаються з двох або більше ємностей, послідовно з'єднаних і розділених опорами. Більшість промислових об'єктів керування (ректифікаційні та абсорбційні колони, теплообмінники, складні гідравлічні системи тощо) є багатоемнісними об'єктами.

На рис. 2.4 наведені приклади одноємнісних і багатоемнісних об'єктів.

В теплообміннику змішування (рис. 2.4, а) температура води  $\theta_{\text{ВЄХ}}$  регулюється зміною подачі водяної пари  $G_1$ . Теплообмінник змішування – це одноємнісний об'єкт. Тут ємністю є загальна теплоємність рідини в теплообміннику, а опір потоку теплоти, що забирається з теплообмінника нагрітою водою, залежить від гідравлічного опору труби на виході.

Кожухотрубний теплообмінник (рис. 2.4, б), де в трубах перебуває вода, а в міжтрубному просторі – пара, є двоємнісним об'єктом. Цей об'єкт має наступні теплові ємності: пара в міжтрубному просторі, рідина в трубах. Опором тут є термічний опір металу труб і трубчастих грат.

Багатоемнісним об'єктом є, наприклад, ректифікаційна колона (рис. 2.4, в). Число ємностей ректифікаційної колони визначається числом тарілок, а опорами є опори переливних труб для перетікання рідини з тарілки на тарілку.

**Самовирівнювання** – здатність об'єкта відновлювати рівновагу між припливом і стоком речовини (енергії) за рахунок зміни регульованої змінної внаслідок внутрішнього негативного зворотного зв'язку в об'єкті керування.

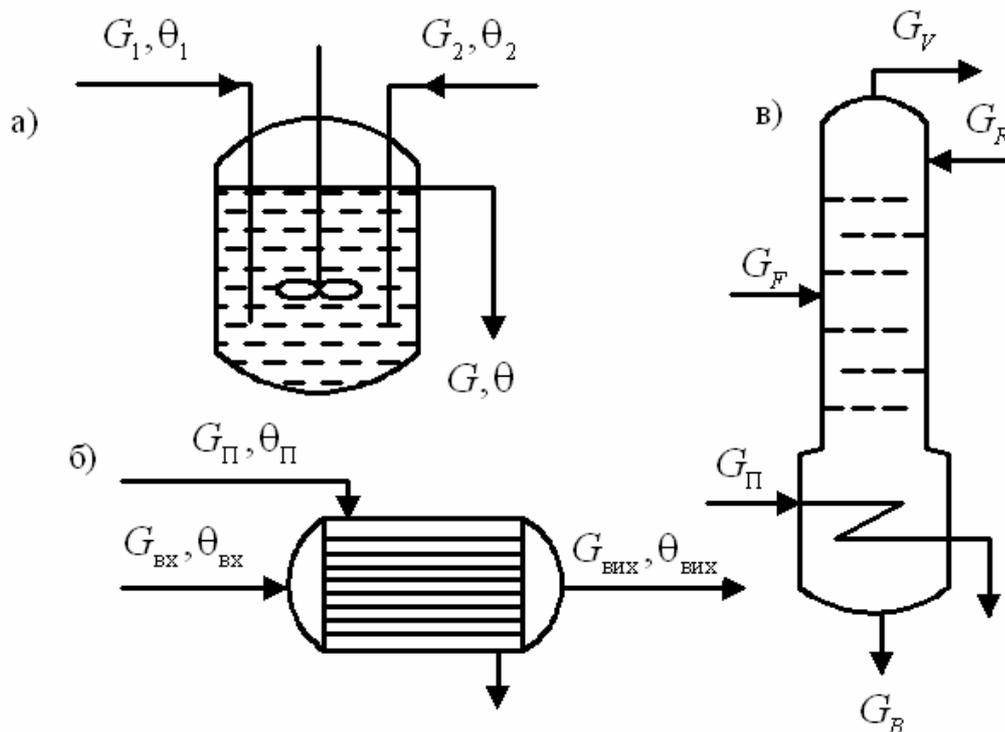


Рис. 2.4. Приклади одноємнісних (а), двоємнісних (б) і багатоемнісних (в) об'єктів.

За здатністю відновлювати рівноважний стан після внесення на об'єкт збурюючого впливу об'єкти керування можна розділити на об'єкти з позитивним, нульовим і негативним самовирівнюванням.

Перехідні характеристики таких об'єктів зображені на рис. 2.5.

Рівняння динаміки об'єктів керування мають вигляд:

Для об'єкту з позитивним самовирівнюванням

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t). \quad (2.7)$$

Для об'єкту без самовирівнювання

$$T \frac{dy(t)}{dt} = kx(t). \quad (2.8)$$

Для об'єкту з негативним самовирівнюванням

$$T \frac{dy(t)}{dt} - y(t) = kx(t). \quad (2.9)$$

Об'єкти без самовирівнювання називають нейтральними, або астатичними. Вихідні величини нейтральних об'єктів не впливають на приток

або витрату речовини або енергії, тобто в нейтральних об'єктах відсутній внутрішній зворотній зв'язок.

Прикладом нейтрального об'єкту є ємкість з примусовим зливом (рис. 2.6, а). Рідина з резервуару відкачується насосом, продуктивність якого не залежить від рівня рідини в резервуарі. При порушенні рівноваги між притоком і витратою води з баку рівень в ньому буде або підвищуватися, доки бак не переповниться, або, навпаки, знизиться до нульового рівня.

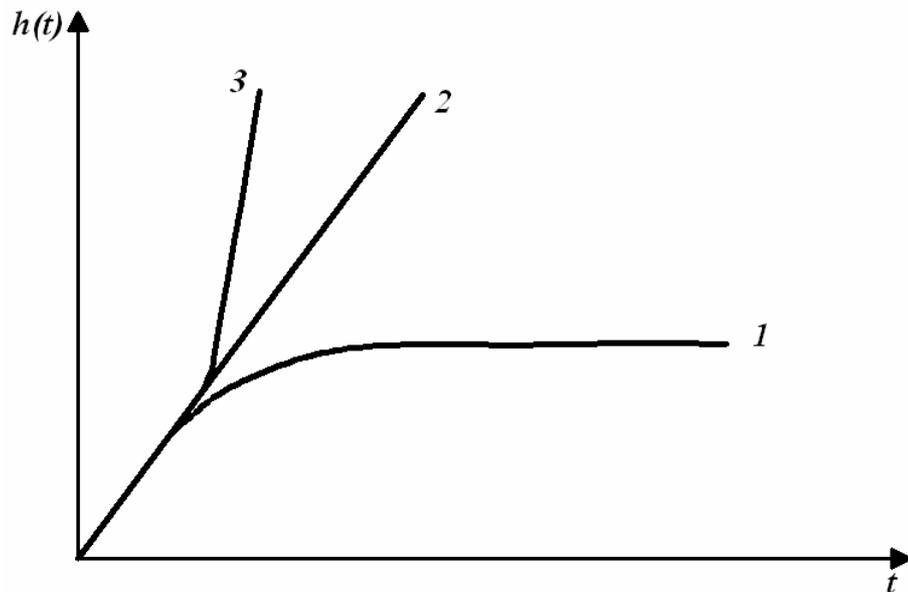


Рис.2.5. Перехідні характеристики  $h(t)$  об'єктів керування: 1 — об'єкт з самовирівнюванням; 2 — об'єкт без самовирівнювання; 3 — об'єкт з негативним самовирівнюванням.

*Об'єкти із самовирівнюванням називають статичними або стійкими.*

В об'єктах з самовирівнюванням ступінчастий вхідний вплив змінює вихідну величину зі швидкістю, що поступово зменшується до нуля. Самовирівнювання є результатом дії внутрішнього негативного зворотного зв'язку в об'єкті. Чим більше величина самовирівнювання, тим менше відхиляється керований параметр від стану рівноваги.

Прикладом об'єкту з самовирівнюванням є резервуар з вільним зливом рідини. При ступінчастому зростанні притоку рідини в резервуар (рис. 2.6, б) рівень в перший момент часу почне змінюватися з такою ж швидкістю, з якою він змінювався б в об'єкті без самовирівнювання, бо витрата рідини з резервуара ще не почала зростати.

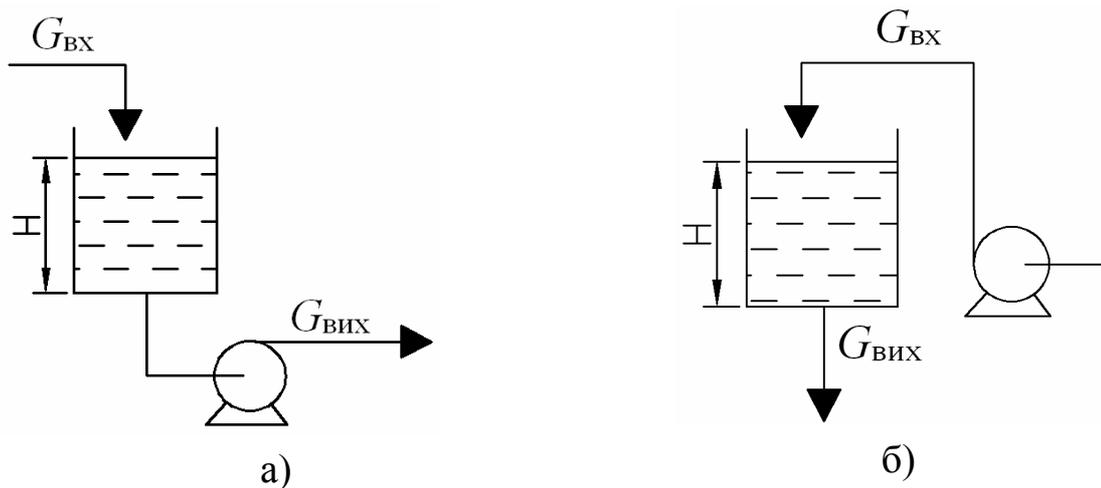


Рис.2.6. Приклад об'єктів без самовирівнювання (а) і з позитивним самовирівнюванням (б).

Якщо вода буде подаватися в бак насосом, а виливатися вона буде вільно через трубу, приєднану до дна бака, то при порушенні рівноваги притоку і витрати рівень води в баку зміниться. Якщо приток більше витрати, то рівень підвищиться, причому внаслідок збільшення гідростатичного напору збільшиться і кількість води, яка витікає з бака через зливну трубу. Через деякий час через підвищення рівня води знову настане рівновага, причому подальше підвищення рівня води в баку припиниться. При зменшенні притоку рівень буде знижуватися до тих пір, поки витрата внаслідок зменшення гідростатичного напору не стане дорівнювати притоку. Процес знову досягне стану рівноваги при новому, більш низькому рівні води в баку.

**Швидкодія об'єкту керування** – це швидкість появи реакції об'єкту на збурюючий вплив. Реакція об'єкту на збурення може бути миттєвою, чи з деякою затримкою. Об'єкти з миттєвою реакцією на ступінчате збурення називаються *безінерційними*. Об'єкти, що мають часову затримку реакції на ступінчате збурення, називаються *інерційними*. Проте часова затримка реакції об'єкту на ступінчате збурення може мати дві причини: інерційність об'єкту та наявність чистого або транспортного запізнювання. Інерційність об'єкту керування залежить від його акумулюючої здатності.

Інерційність одноємнісних об'єктів з позитивним самовирівнюванням кількісно можна оцінити за сталою часу  $T$ . Стала часу – це час, за

який вихідна величина досягне нового усталеного значення після нанесення збурення, за умови, що швидкодія її зміни дорівнювала б початковій. Однак цей критерій інерційності незручно, або навіть неможливо використовувати для багатомісних об'єктів, оскільки кожна акумулююча ємність має свою сталу часу, що може значно відрізнятись від інших. Також неможливо використовувати сталу часу для оцінки інерційності об'єктів з розподіленими параметрами.

У цьому випадку для оцінки інерційності об'єкту використовують критерій інерційності Б.М. Дев'ятова (рис.2.7).

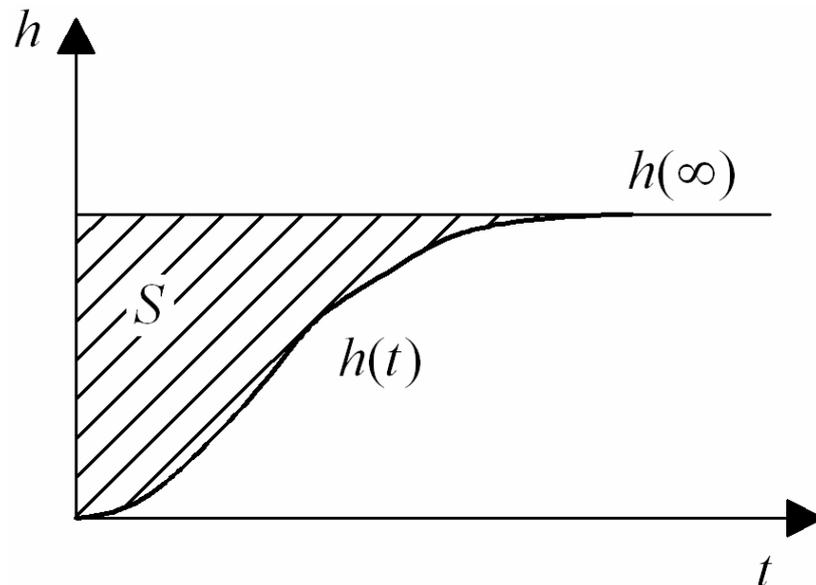


Рис. 2.7. Критерій інерційності об'єкту керування Б.М. Дев'ятова.

$$S = \int_0^{\infty} (h(\infty) - h(t)) dt, \quad (2.10)$$

де  $S$  – площа між перехідною характеристикою  $h(t)$  і лінією усталеного значення, яка є мірою інерційності об'єкту.

Для об'єктів без самовирівнювання в якості критерію інерційності можна використовувати швидкість  $v$  зміни вихідної величини  $h(t)$  після нанесення ступінчастого збурення на вході:  $v = \frac{dh(t)}{dt}$ .

Інший чинник затримки реакції вихідної величини об'єкту на ступінчате збурення – запізнювання.

**Запізнювання** – проміжок часу від моменту нанесення збурення до початку зміни регульованої змінної. Розрізняють транспортне (чисте) і

емнісне запізнювання. Транспортне запізнювання спричиняється тільки швидкістю руху матеріального потоку. Транспортне запізнювання  $\tau_0$  – це час, який потік речовини (енергії) витрачає на проходження відстані від точки нанесення збурення до точки вимірювання регульованої змінної. Прикладом ланки з чистим запізнюванням є стрічковий транспортер (рис. 2.8). Час транспортного запізнювання дорівнює відношенню довжини ділянки конвеєрної стрічки  $l$  до лінійної швидкості стрічки  $u$ , тобто  $\tau_0 = l/u$ .

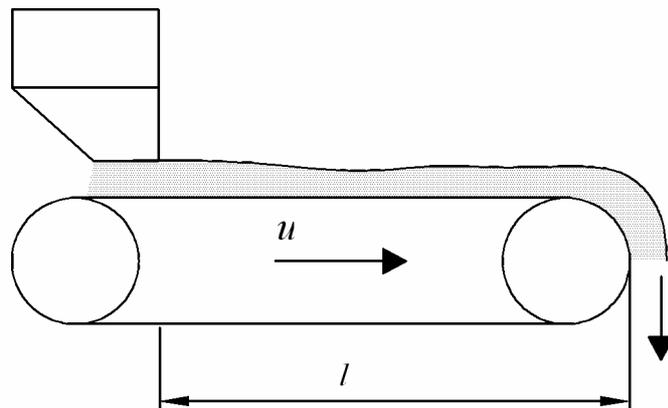


Рис. 2.8. Об'єкт керування з транспортним запізнюванням.

Багатоемнісні об'єкти складаються з кількох ємностей розділених між собою опорами. В таких об'єктах виникає перехідне запізнювання, яке залежить від кількості ємностей і величин гідравлічних і теплових опорів, що існують між ємностями.

Величина перехідного запізнювання визначається як самою конструкцією технологічної апаратури, так і умовами її експлуатації. Наприклад, в теплових апаратах перехідне запізнювання залежить від загального коефіцієнта теплопередачі, тобто від роду застосованих матеріалів, геометричних розмірів, наприклад діаметра і товщини трубок, характеру робочого середовища, що бере участь в процесі (газ, рідина), від швидкості омивання поверхонь нагріву тощо. В експлуатації перехідне запізнювання може значно збільшуватися внаслідок забруднення поверхні нагрівання шаром накипу, сажі, утворення коксу тощо.

Між транспортним та ємнісним запізнюваннями існує принципова відмінність. За наявності чистого запізнювання регульована змінна дорівнює нулю протягом усього часу запізнювання. За існування ємнісного

запізнювання вона змінюється, хоча і дуже мало. Реальні об'єкти звичайно містять обидва типи запізнювання, в результаті чого загальне запізнювання  $\tau$  дорівнює їх сумі:

$$\tau = \tau_0 + \tau_{II} . \quad (2.11)$$

Перехідна характеристика двоємнісного об'єкта з транспортним і перехідним запізнюванням представлена на рис.2.9.

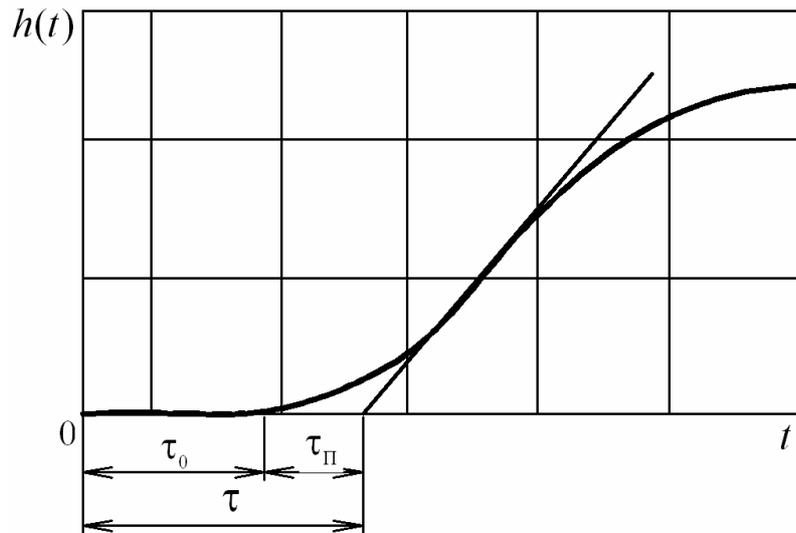


Рис. 2.9. Перехідна характеристика об'єкта з запізнюванням.

Величину перехідного запізнювання характеризує відрізок  $\tau_{II}$ , що відсікається на осі часу дотичною, проведеною в точці перегину.

Детальне вивчення перелічених вище властивостей дозволяє встановити приналежність об'єкту до того чи іншого типу. Вирішення цієї задачі в теорії автоматичного регулювання здійснюється із застосуванням методу математичного моделювання, що забезпечує можливість отримання динамічних характеристик, або передатних функцій об'єктів по каналах регулювання. Остання є основою для синтезу автоматичної системи регулювання.

**Передатна функція** описує в операторній формі залежність вихідної величини об'єкта керування від вхідної, а, отже, повністю характеризує їх динамічні властивості. Тому, поряд з диференціальним рівнянням, передатна функція є однією з форм динамічної характеристики будь-якого елемента автоматичної системи регулювання (АСР). Поняття передатної функції значно спрощує аналіз структурних

(алгоритмічних) схем. Передатні функції ланок чи окремих ділянок схеми дозволяють легко отримати загальне рівняння для всієї системи. При цьому, систему будь-якої складності можна розглядати як сукупність трьох видів з'єднання ланок: послідовного, паралельного і типу зворотного зв'язку.

*Послідовне з'єднання* – це з'єднання, за якого вихідна величина попередньої ланки є вхідною величиною для наступної. Наприклад, для двох послідовно з'єднаних ланок (див. рис. 2.10) з передатними функціями  $W_1(p) = Y_1/X_1$  і  $W_2(p) = Y_2/X_2$  загальна передатна функція може бути представлена у вигляді:

$$W(p) = Y_2/X_1 = W_2(p) \cdot X_2 \cdot W_1(p)/Y_1 = W_1(p) \cdot W_2(p). \quad (2.12)$$

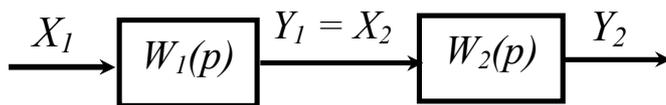


Рис. 2.10. Послідовне з'єднання ланок (елементів).

Отже, передатна функція послідовно з'єднаних елементів (ланок) дорівнює добутку передатних функцій елементів (ланок).

*Паралельне з'єднання* – це з'єднання, за якого на вхід ланок надходить одна й та ж величина, а вихідні величини ланок підсумовуються. На рис. 2.11 представлена система, що складається з трьох паралельно з'єднаних ланок. При цьому,  $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$ , а передатні функції цих трьох ланок дорівнюють:  $W_1(p) = Y_1/X_1$ ;  $W_2(p) = Y_2/X_2$ ;  $W_3(p) = Y_3/X_3$ . Виходячи із загального визначення передатної функції такого ланцюжка та враховуючи, що  $X_1 = X_2 = X_3$ , будемо мати:

$$\begin{aligned} W(p) = Y/X &= (Y_1 + Y_2 + Y_3)/X = Y_1/X + Y_2/X + Y_3/X = \\ &= W_1(p) + W_2(p) + W_3(p). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Таким чином, передатна функція паралельно з'єднаних ланок дорівнює сумі передатних функцій окремих ланок.

*З'єднання із зворотним зв'язком* передбачає, що на вхід ланки одночасно з вхідною величиною системи надходить її вихідна величина, яка пройшла крізь ланку зворотного зв'язку. На рис. 2.12 представлена

ланка, що охоплена зворотним зв'язком, де  $W_1(p)$  – передатна функція ланки, а  $W_{oc}(p)$  – передатна функція ланки зворотного зв'язку.

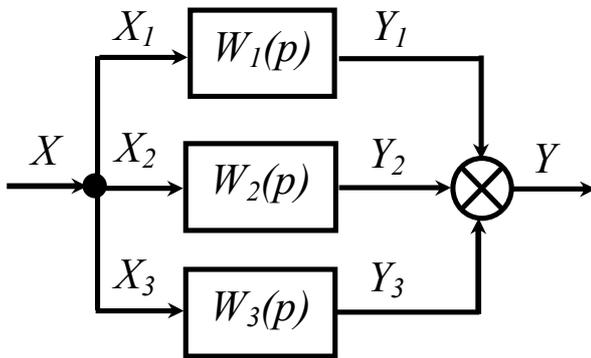


Рис. 2.11. Паралельне з'єднання ланок.

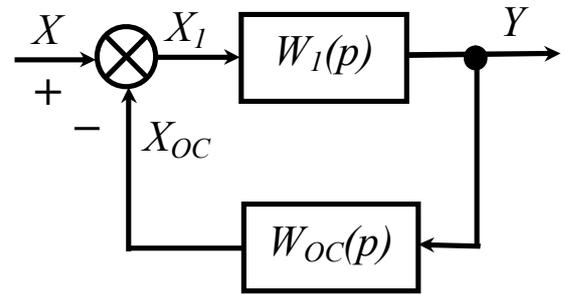


Рис. 2.12. Система із зворотним зв'язком.

Згідно рис. 2.12 виходить, що  $X_1 = X - X_{oc}$ , а передатні функції визначаються рівняннями:

$$W_1(p) = Y/X_1 = Y/(X - X_{oc}), \quad (2.14)$$

$$W_2(p) = X_{oc}/Y. \quad (2.15)$$

Враховуючи рівняння (2.14) і підставляючи у нього значення для  $X_{oc}$  з рівняння (2.15), отримаємо наступну формулу для передатної функції системи:

$$W(p) = \frac{Y}{X} = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)}. \quad (2.16)$$

Формула (2.16) отримана у передбаченні, що ланка охоплена негативним зворотним зв'язком. У протилежному випадку (позитивний зворотний зв'язок) формула (2.16) прийме такий вигляд:

$$W(p) = \frac{Y}{X} = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p) \cdot W_2(p)}. \quad (2.17)$$

Передатна функція об'єкту визначає основні динамічні параметри (постійна часу, запізнення, коефіцієнт підсилення), що необхідні для подальшого аналізу і синтезу сталої з необхідною якістю АСР.

## **3. ПРИНЦИПИ АНАЛІТИЧНОГО МЕТОДУ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ**

### **3.1. БЛОКОВИЙ ПРИНЦИП**

Найбільш загальним прийомом розробки математичних моделей технологічних об'єктів є блоковий принцип. За з цим принципом спочатку досліджують гідродинамічну модель процесу як основу для структури математичної моделі. Далі вивчають кінетику хімічних реакцій, процеси масопередачі і теплопередачі з урахуванням гідродинамічних умов протікання процесу і складають математичний опис кожного з цих процесів. Якщо технологічний процес характеризується виділенням або поглинанням речовини за рахунок хімічних реакцій або масопередачі, то рівняння гідродинаміки доповнюють членом, який враховує інтенсивність джерела речовини. Якщо при протіканні технологічного процесу виділяється або поглинається теплота, то складаються рівняння термодинаміки, причому число цих рівнянь дорівнює числу ємностей, в яких може накопичуватися теплота. У разі необхідності до складу моделі об'єкта включають емпіричні співвідношення між різними параметрами процесу (наприклад, залежність коефіцієнта масопередачі від швидкостей потоку фаз, залежність теплоємності суміші від складу компонентів та ін.). Заключним етапом є об'єднання всіх досліджених «елементарних» процесів (блоків) в єдину систему рівнянь математичної моделі об'єкта керування. Перевага блокового принципу побудови математичної моделі, загальна структура якого наведена на рис. 3.1, полягає в тому, що його можна запроваджувати на стадії проектування об'єкта, коли остаточний варіант апаратного оформлення ще невідомий.

### **3.2. ПРИНЦИП ЗБЕРЕЖЕННЯ МАСИ ТА ЕНЕРГІЇ**

За цим принципом складаються рівняння матеріального і енергетичного балансу для складних об'єктів. Рівняння сумарних балансів дозволяють відобразити зв'язок об'єктів моделювання з іншими об'єктами. Крім того, балансові рівняння можуть відображати внутрішні залежності об'єкта моделювання. Це будуть балансові рівняння його складових час-

тин, або балансові рівняння для окремих компонентів технологічного середовища чи балансові рівняння для теплоносіїв.

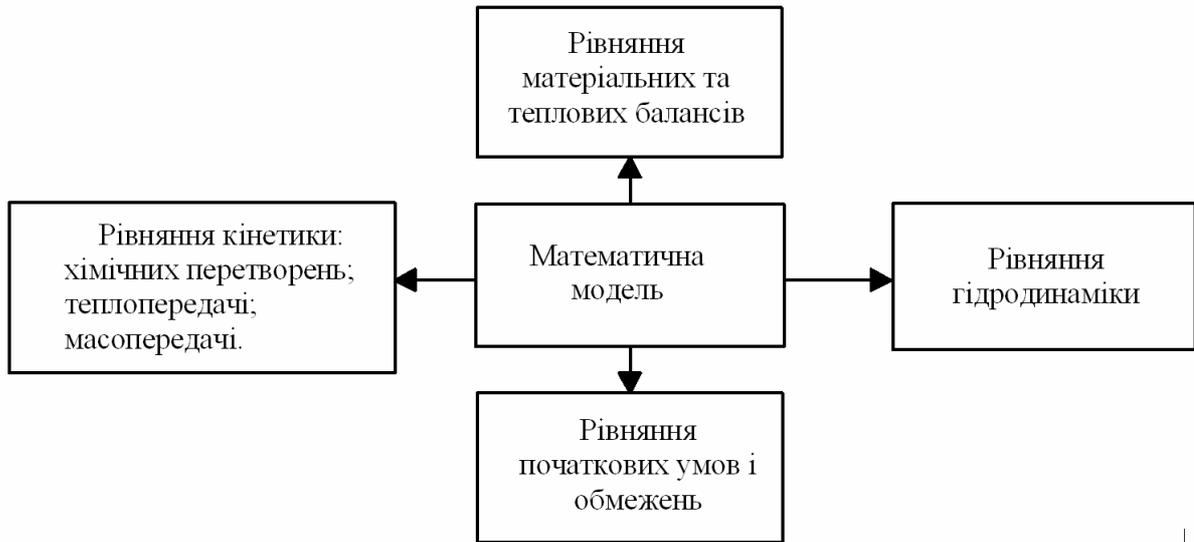


Рис. 3.1. Загальна структура побудови математичної моделі згідно блокового принципу.

Кількість балансових рівнянь, необхідних для складання математичної моделі залежить від фізико-хімічних процесів, що протікають в об'єкті.

Рівняння сумарних балансів для статичних режимів ґрунтуються на припущенні, що загальна кількість речовини  $G_{\text{ВХ}}(t)$  чи енергії  $Q_{\text{ВХ}}(t)$  яка надходить в об'єкт дорівнює загальній кількості речовини  $G_{\text{ВИХ}}(t)$  або енергії  $Q_{\text{ВЕХ}}(t)$ , які виходять з об'єкту.

$$G_{\text{ВХ}}(t) = G_{\text{ВИХ}}(t). \quad (3.1)$$

$$Q_{\text{ВХ}}(t) = Q_{\text{ВИХ}}(t). \quad (3.2)$$

Для динамічних режимів роботи об'єкту закони збереження речовини і енергії можна сформулювати наступним чином:

*Закон збереження речовини* – зміна в часі кількості речовини  $m(t)$ , що міститься в даному об'ємі дорівнює різниці між притоком  $G_{\text{ВХ}}(t)$  і витратою  $G_{\text{ВИХ}}(t)$  речовини.

$$\frac{dm(t)}{dt} = G_{\text{ВХ}}(t) - G_{\text{ВИХ}}(t). \quad (3.3)$$

*Закон збереження енергії* – зміна в часі енергії  $q(t)$ , що знаходиться в даному об'ємі, дорівнює різниці між вхідним  $Q_{\text{вх}}(t)$  і вихідним  $Q_{\text{вих}}(t)$  потоками енергії.

$$\frac{dq(t)}{dt} = Q_{\text{вх}}(t) - Q_{\text{вих}}(t). \quad (3.4)$$

Більшість об'єктів керування мають декілька більш-менш відособлених складових частин, кожна з яких характеризується певним значенням технологічного параметра. Наприклад в сушильній установці можна виділити частину, в якій готується сушильний агент (топка, калорифер) і камеру сушіння. Щоб можна було розкрити внутрішні зв'язки у такому об'єкті, складають рівняння матеріальних або теплових балансів для кожної такої частини.

Крім того, балансові рівняння можна отримати для окремих компонентів технологічного процесу, або для окремих фаз (газова, рідка, тверда).

При складанні балансових рівнянь необхідно враховувати теплові ефекти хімічних реакцій, зміни фазового стану речовин, механічну роботу, теплові втрати в навколишнє середовище.

Тепловий потік між теплоносіями через стінку  $Q_T$  розраховується згідно з формулою теплопередачі

$$Q_T = kF\Delta\theta_{\text{CP}}, \quad (3.5)$$

де  $k$  – коефіцієнт теплопередачі;  $F$  – поверхня теплопередачі;  $\Delta\theta_{\text{CP}}$  – середня різниця температур теплоносіїв.

Для розрахунку теплообміну між теплоносіями можна тепловий потік  $Q_T$  визначити як тепловіддачу від теплоносія до стінки, що розділяє, і від цієї стінки до іншого теплоносія за залежністю:

$$Q_T = \alpha F \Delta\theta, \quad (3.6)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт тепловіддачі;  $\Delta\theta$  – різниця температур теплоносія і стінки.

Тепловий ефект хімічної реакції  $Q_p$  можна виразити залежністю

$$Q_p = \frac{G_p}{M} q_p, \quad (3.7)$$

де  $G_p$  – кількість речовини, яка прийняла участь в реакції;  $M$  – молярна маса речовини, що прореагувала;  $q_p$  – питомий тепловий ефект хімічної реакції.

Тепловий ефект фізичних перетворень речовини (випарювання, конденсації, розчинення, кристалізації)  $Q_\Phi$  можна виразити залежністю:

$$Q_\Phi = G_\Phi q_\Phi, \quad (3.8)$$

де  $G_\Phi$  – маса речовини, що змінила фазовий стан в одиницю часу;  $q_\Phi$  – питомий тепловий ефект фізичного перетворення речовини.

Теплота  $Q_M$ , яка утворилася під час виконання механічної роботи

$$Q_M = A q_M, \quad (3.9)$$

де  $A$  – робота, що виконана в одиницю часу;  $q_M$  – тепловий коефіцієнт механічної роботи.

Теплота  $Q_i$ , що надходить або йде з потоком речовини

$$Q_i = G_i c_i \theta_i, \quad (3.10)$$

де  $G_i$  – масова витрата;  $c_i$  – теплоємність;  $\theta_i$  – температура;  $i$  – номер потоку.

### 3.3. ПРИНЦИП ТИПІЗАЦІЇ ГІДРОДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПОТОКІВ

Будь який технологічний процес, як правило, супроводжується переміщенням матеріальних потоків рідини, газу або твердих частинок. Тому при складанні математичної моделі особливого значення набуває опис руху потоків речовин. Модель структури реального потоку (гідродинамічні моделі) дуже складна і не завжди піддається математичному опису.

На сьогодні розроблені спрощені (типові) математичні моделі структури потоків в технологічних об'єктах керування. Найбільш поширені серед них теоретичні моделі ідеального перемішування та ідеального витіснення. Крім них до типових гідродинамічних моделей відносять дифузійні, коміркові і комбіновані моделі. Дифузійна і коміркова моделі

характеризують реальні потоки. Ці моделі при граничних ідеалізованих умовах переходять в одну з теоретичних моделей – ідеального витіснення або ідеального перемішування. Комбіновані моделі також представляють реальні потоки у складних об'єктах і будуються поєднанням більш простих моделей, відповідних окремим ділянцям складного реального потоку.

**Модель ідеального перемішування** становить собою ідеалізований потік і є теоретичною моделлю. Відповідно до цієї моделі приймається, що потік, який надходить в апарат, миттєво розподіляється по всьому об'єму внаслідок повного (ідеального) перемішування частинок середовища. При цьому концентрація розподіленої речовини у всіх точках апарату і в потоці на виході з нього однакова. Схема моделі ідеального перемішування наведена на рис 3.2.

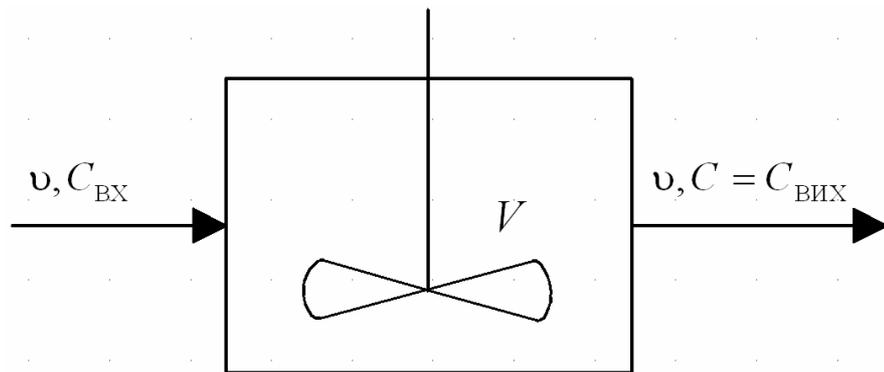


Рис. 3.2. Схематичне зображення апарату ідеального перемішування.

Математична модель динаміки ідеального перемішування має вигляд:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{v}{V}(C_{\text{ВХ}} - C), \quad (3.11)$$

де  $C_{\text{ВХ}}$  – концентрація речовини на вході;  $C$  – концентрація речовини в апараті та на виході з нього;  $V$  – об'єм апарату;  $v$  – об'ємна витрата потоку через апарат.

Відношення  $\tau = V/v$  – характеризує середній час перебування частинок в зоні ідеального перемішування, його прийнято називати часом пе-

ребування частинок в апараті і позначати  $\tau$ . Час перебування  $\tau$  є параметром моделі ідеального перемішування, який зазвичай визначається експериментально або розрахунком. Диференціальне рівняння моделі ідеального перемішування зазвичай записують з урахуванням параметра  $\tau$ :

$$\frac{dC}{dt} = \frac{l}{\tau}(C_{\text{вх}} - C). \quad (3.12)$$

Рівнянню (3.12) відповідає передатна функція виду

$$W(p) = \frac{1}{Tp + 1}. \quad (3.13)$$

Найкращим чином ця модель відповідає реальним потокам в проточних апаратах з мішалкою, у яких висота  $l$  мало відрізняється від діаметра  $d$  і об'ємна швидкість потоків невелика. Саме в подібних випадках можна досягти такого стану, коли концентрація речовини у всіх точках об'єму апарата стає практично однаковою, тобто структура потоку близька до моделі ідеального перемішування.

**Модель ідеального витіснення** – це також теоретична модель з ідеалізованою структурою потоку, що рухається.

Відповідно до моделі ідеального витіснення приймається поршнева течія без перемішування вздовж потоку при рівномірному розподілі концентрації речовини в напрямку, перпендикулярному руху. При цьому час перебування всіх частинок в зоні ідеального витіснення однаковий і дорівнює відношенню об'єму зони витіснення  $V$  до об'ємної витрати рідини (або газу)  $\tau = V/v$ . Схематичне зображення моделі ідеального витіснення показано на рисунку 3.3.

Математична модель динаміки ідеального витіснення має вигляд:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -u \frac{\partial C}{\partial z}, \quad (3.14)$$

де  $u$  – середня лінійна швидкість потоку, яка знаходиться за формулою  $u = v/S_B$ ;  $S_B$  – перетин зони ідеального витіснення;  $z$  – просторова координата.

Модель ідеального витіснення є моделлю з розподіленими параметрами. Якщо замість середньої швидкості  $u$  підставити у рівняння (3.14) її значення, воно прийме наступний вигляд:

$$S_B \frac{\partial C}{\partial t} = -v \frac{\partial C}{\partial z}. \quad (3.15)$$

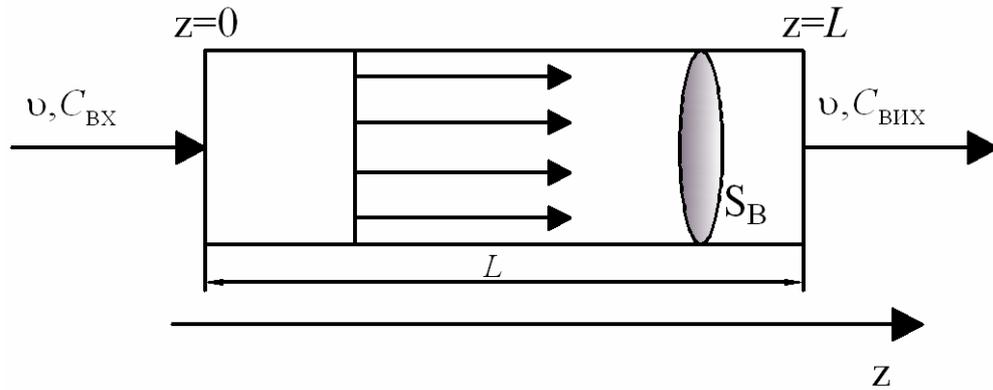


Рис. 3.3. Схематичне зображення апарату ідеального витіснення.

Модель ідеального витіснення описується ланкою чистого запізнення.

$$W(p) = e^{-p\tau}. \quad (3.16)$$

Модель ідеального витіснення широко використовується в хімічній технології при описі трубчастих реакторів і теплообмінників. Трубчасті апарати з великим відношенням довжини трубок до їх діаметру ( $l/d > 20$ ) при турбулентному русі рідини чи газу можуть описуватися як моделі ідеального витіснення. Це пояснюється тим, що при  $l/d > 20$  поздовжнє перемішування незначне і мало спотворює потік витіснення, а турбулентний рух при цьому забезпечує рівномірний розподіл концентрації по перетину апарату.

**Дифузійна модель** використовується при описі реальних потоків в апаратах, в яких відбувається поздовжнє або поздовжнє і радіальне перемішування. Розрізняють однопараметричну і двопараметричну дифузійні моделі. Якщо при побудові моделі враховують тільки поздовжнє перемішування, а в радіальному напрямку концентрацію беруть постійною, то така модель називається однопараметричною. Ця модель характеризується одним параметром, що враховує поздовжнє перемішування, який позначається  $D_L$ . Основою однопараметричної дифузійної моделі є модель

витіснення, ускладнена зворотним перемішуванням. Якщо математичний опис враховує і радіальне перемішування, то модель стає двопараметричною. При складанні моделі необхідно ввести додатково другий параметр  $D_R$  – коефіцієнт радіального перемішування. Вона більш точно відображає процес, але її опис і рішення значно ускладнюються. Крім того, рішення зазвичай має настільки складний вид, що застосовувати його на практиці вкрай незручно, тому двопараметричну модель використовують порівняно рідко. Схематичне зображення однопараметричної дифузійної моделі ідеального витіснення показано на рисунку 3.4. Згідно цієї моделі деяка речовина переміщується з середньою лінійною швидкістю  $u$  в поздовжньому каналі, вздовж якого відбувається перемішування за рахунок прямого і зворотного потоків при рівномірному розподілі речовини в напрямку, перпендикулярному руху.

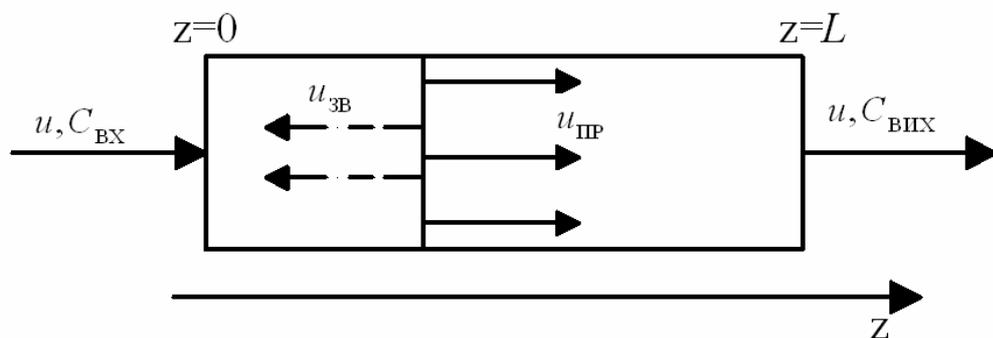


Рис. 3.4. Схематичне зображення комірки потоку витіснення з поздовжнім перемішуванням (однопараметричний дифузійний потік).

Математична модель динаміки однопараметричної дифузійної моделі має вигляд:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_L \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - u \frac{\partial C}{\partial z}, \quad (3.17)$$

де  $D_L$  – коефіцієнт поздовжнього перемішування ( $\text{м}^2/\text{с}$ ), що враховує молекулярну дифузію, турбулентність потоку, нерівномірність поля швидкостей. Цей коефіцієнт знаходиться дослідним шляхом або обчислюється за розрахунковими формулами, складеними для апаратів різного типу.

У практиці технологічних розрахунків однопараметрична дифузійна модель використовується при дослідженні багатьох апаратів, зокрема,

плівкових, розпилювальних, барботажних, пульсаційних, насадкових колон, роторно-дискових екстракторів, а також трубчастих апаратів.

Таким чином, моделі ідеального перемішування, ідеального витіснення, одно- і двопараметричні з певним ступенем точності можуть застосовуватись в багатьох апаратах хімічної і фармацевтичної промисловості. Однак ідеальні моделі в ряді випадків неадекватні реальному процесу, а дифузійна модель відрізняється складністю. З цієї причини для трубчастих і колонних апаратів, а також для каскадів послідовно розташованих реакторів зручніше представляти реальні потоки у вигляді коміркової моделі.

**Коміркова модель** передбачає розбиття апарату на низку послідовно з'єднаних комірок. В кожній з таких комірок потік має структуру повного перемішування, а між комірками перемішування відсутнє. Параметром, що характеризує модель, служить число комірок  $n$ . Якщо  $n=1$  коміркова модель переходить в модель ідеального перемішування, а якщо  $n \rightarrow \infty$  – в модель ідеального витіснення. Структурна схема апарату з комірковою моделлю наведена на рисунку 3.5.

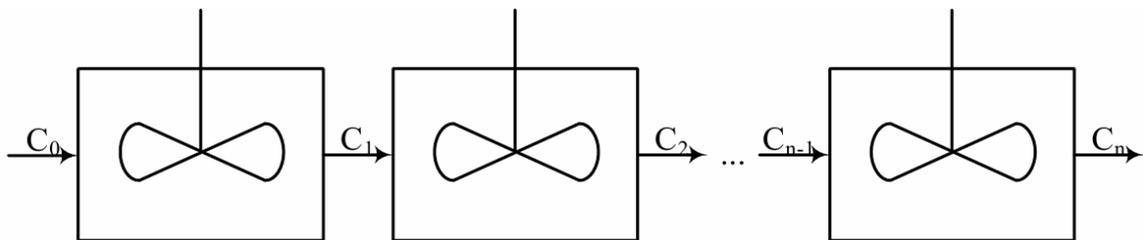


Рис. 3.5 Структурне зображення апаратів з комірковою моделлю.

Математичний опис коміркової моделі має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} = \frac{n}{\tau}(C_0 - C_1); \\ \frac{dC}{dt} = \frac{n}{\tau}(C_1 - C_2); \\ \dots \\ \frac{dC}{dt} = \frac{n}{\tau}(C_{n-1} - C_n), \end{cases} \quad (3.18)$$

де  $\tau = V/v$  – середній час перебування частинок в системі;  $V = nV_1$  – об'єм всіх комірок.

Передатна функція коміркової моделі

$$W(p) = \frac{1}{(Tp + 1)^n}. \quad (3.19)$$

Коміркова модель досить точно відтворює властивості потоків в послідовно з'єднаних апаратах з мішалками, що створюють інтенсивне перемішування (каскади реакторів), в абсорбційних і екстракційних колонах, і в апаратах з псевдозрідженим шаром.

**Комбінована модель** застосовується у випадку, коли структуру потоку речовини не вдається описати однією із типових гідродинамічних моделей (ідеального перемішування, ідеального витіснення, коміркова, дифузійна)

Принцип побудови комбінованих моделей полягає в тому, що досліджуваний процес розбивають на окремі зони, з'єднані послідовно або паралельно, або за схемою зі зворотним зв'язком, в яких спостерігаються різні структури потоків. При цьому комбінована модель являє собою поєднання математичних описів всіх зон, що становлять процес. У ході побудови комбінованих моделей слід оцінити можливість застосування для різних ділянок апарату математичних описів типових моделей, а також врахувати застійні зони. Крім перерахованих вище структур, при побудові комбінованих моделей необхідно враховувати й інші види течії рідини (газу), які можуть виникати в реальних апаратах:

*Байпасний потік* – частина рідини (газу), що рухається паралельно судині або деякій її зоні, в результаті чого частина потоку потрапляє на вихід апарату, не зазнаючи ніяких змін (проскакування частини потоку).

*Циркуляційні потоки* (рецикли або зворотні потоки) – це всякого роду повернення потоку. Вони виникають тому, що частина рідини (газу), яка виводиться за межі судини або певної його частини, повертається до неї знову і потім змішується зі свіжими порціями речовини на вході в посудину або в деяку його зону.

*Струменевий потік* (прослизання) – місцевий потік, миттєво переносить речовину безпосередньо з однієї зони судини в іншу.

У якості приклада розглянемо об'єкт, який поєднує паралельні зони ідеального перемішування і ідеального витіснення. Схема такого об'єкту зображена на рис.3.6.

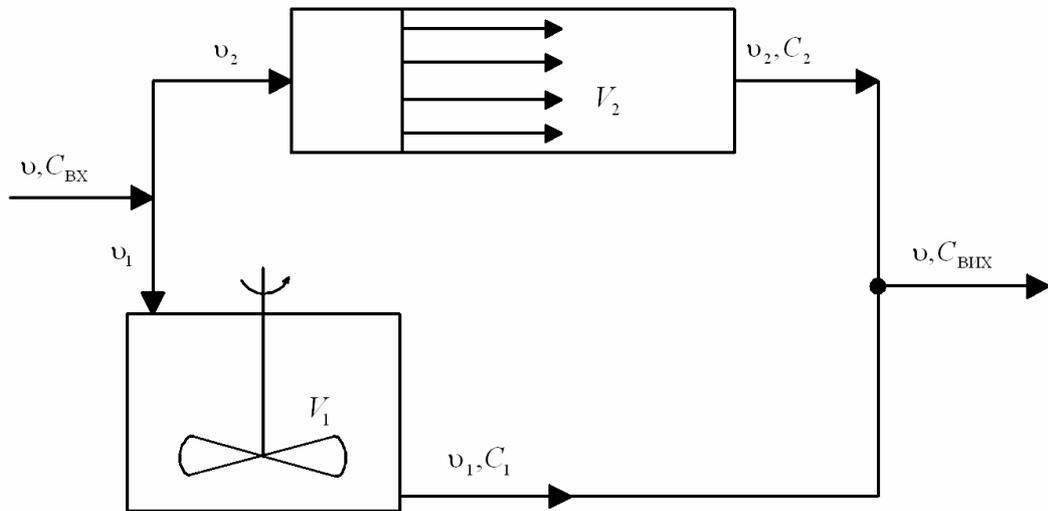


Рис.3.6 Структурна схема апарату з комбінованою моделлю.

Передатна функція комбінованого об'єкту має вигляд:

$$W(p) = (1 - \beta) \frac{1}{\tau_1 p + 1} + \beta e^{-p\tau_2}, \quad (3.20)$$

де  $\tau_1 = \frac{V_1}{v_1}$  і  $\tau_2 = \frac{V_2}{v_2}$  – час перебування в зонах ідеального перемішування і ідеального витіснення;  $V_1$  і  $V_2$  – об'єми цих зон;  $v_1$  і  $v_2$  – об'ємні швидкості потоків у відповідних зонах;  $\beta = \frac{v_2}{v}$  – доля потоку, що поступає в зону ідеального витіснення;  $(1 - \beta) = \frac{v_1}{v}$  – доля потоку, що поступає в зону ідеального перемішування.

Таким чином, вищеперелічені типові моделі гідродинаміки можуть використовуватися як основа для переважної більшості апаратів хімічної і фармацевтичної промисловості. При цьому, в ході складання математичної моделі доводиться приймати компромісне рішення між простотою математичної моделі і точністю, з якою модель відображає реальний процес. Тому при формулюванні припущень, прийнятих при складанні математичного опису гідродинаміки процесу, необхідно ретельно про-

аналізувати відомі теоретичні відомості та експериментальні дані, щоб забезпечити максимальну адекватність моделі. Модель повинна відображати сутність реального потоку і в той же час мати достатньо простий математичний опис; давати можливість визначити її параметри розрахунковим або експериментальним шляхом; бути зручною для використання в конкретних розрахунках хіміко-технологічних процесів.

### 3.4. ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ ТИПІЗАЦІЇ ГІДРОДИНАМІКИ ПОТОКІВ ДЛЯ РЕАЛІЗАЦІЇ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

**Теплообмінники** є одними з найбільш поширених технологічних апаратів. Необхідність передачі теплоти від одного теплоносія до іншого виникає в багатьох галузях техніки: в енергетиці, хімічній, фармацевтичній, металургійній, нафтовій, харчовій та інших галузях промисловості. Наприклад, теплообмінні апарати складають приблизно 30-40% від всього обладнання хімічного заводу.

Теплові процеси, що відбуваються в теплообмінних апаратах можуть бути найрізноманітнішими: нагрівання, охолодження, випаровування, конденсація, плавління та ін. Як правило, застосовують таку класифікацію теплообмінних апаратів:

- за *призначенням* – підігрівачі, конденсатори, охолоджувачі, випарники, пароперегрівачі та ін.;
- за *принципом дії* – поверхневі і змішувальні.

В змішувальних апаратах теплообмін відбувається за безпосереднього контакту теплоносіїв.

Поверхневі апарати діляться на два типи:

- а) Рекуперативні (поверхневі), в яких обидва теплоносія розділені стінкою, причому тепло передається через поверхню цієї стінки;
- б) Регенеративні апарати, в яких два або більше число теплоносіїв поперемінно стикаються з однією і тією ж поверхнею нагріву. Під час стикання поверхня нагріву спочатку акумулює теплову енергію, забираючи її від нагрітого середовища, а потім віддає іншому теплоносію.

Найбільш широке застосування в даний час знаходять рекуперативні (поверхневі) теплообмінники, які за своїми конструктивними ознаками поділяються на:

- теплообмінні апарати, що виготовляються з труб різної форми і діаметрів (кожухотрубчасті, «труба в трубі», зрошувальні, кручені та інші);

- теплообмінні апарати, що виготовляються з листа (пластинчасті, спіральні і панельні)

- теплообмінні апарати, сполучені з різними типами хімічних апаратів і реакторів.

У залежності від напрямку руху теплоносіїв уздовж поверхні теплообміну розрізняють теплообмінні апарати з протитечією, перехресним рухом, у тому числі одно - і багатоходові.

Необхідність скорочення витрати енергії і матеріалів, а також зниження вартості теплообмінного обладнання зумовила в останні роки розширення робіт, спрямованих на інтенсифікацію процесу теплообміну, зниження маси і габаритів теплообмінників, збільшення їх теплової продуктивності або зниження витрат енергії на здійснення процесів теплопередачі за інших рівних умов. Складність опису та розрахунку теплообміну з урахуванням реальних умов його протікання пояснює той факт, що в даний час теплообмінну апаратуру розраховують за моделями, які передбачають режим повного витіснення теплоносія або його повне змішування. При побудові математичних моделей теплообмінних апаратів попередньо проводять структурний аналіз з виявленням кількості і видів однорідних потоків теплової енергії, що мають місце в апараті. Для кожного поля записується математичний опис у вигляді виразів, що характеризують зміну температури в потоці теплоносія у часі, яке обумовлене рухом потоку і теплопередачею.

В рекуперативних теплообмінниках тепло від одного теплоносія до іншого передається крізь стінку, що їх розділяє.

В загальному вигляді структура потоків в рекуперативних теплообмінних апаратах є дуже різною, що ускладнює побудову математичної моделі. В багатьох випадках можна значно спростити математичну модель, якщо припустити, що структура потоків теплоносія відповідає од-

ній із типових гідродинамічних моделей ідеального перемішування або ідеального витіснення.

Математичний опис процесу в теплообмінних апаратах зручно записувати у вигляді виразу, що характеризує зміну температури в потоці теплоносія у часі, і обумовлене, по-перше, рухом потоку і, по-друге, теплопередачею.

Якщо структура потоку теплоносія відповідає моделі ідеального перемішування, то для математичного опису цього потоку можна використовувати рівняння (3.12) в якому замість концентрації записуємо температуру:

$$Vc_T \frac{d\theta}{dt} = \nu c_T (\theta_{\text{ВХ}} - \theta), \quad (3.21)$$

де  $V$  – об'єм зони ідеального перемішування;  $c_T$  – питома теплоємність теплоносія;  $\nu$  – об'ємна швидкість потоку (витрата);  $\theta_{\text{ВХ}}$  – температура потоку на вході в зону ідеального перемішування;  $\theta$  – температура в будь-якій точці зони ідеального перемішування.

З урахуванням теплопередачі модель ідеального перемішування прийме вигляд

$$Vc_T \frac{d\theta}{dt} = \nu c_T (\theta_{\text{ВХ}} - \theta) + Vq_T, \quad (3.22)$$

де  $Vq_T$  – інтенсивність теплообміну в реакційному об'ємі, яка знаходиться за формулою:

$$Vq_T = FK_T \Delta\theta, \quad (3.23)$$

або

$$q_T = \frac{FK_T \Delta\theta}{V}, \quad (3.24)$$

де  $q_T$  – питома об'ємна інтенсивність джерела тепла;  $F$  – поверхня теплообміну;  $K_T$  – коефіцієнт теплопередачі;  $\Delta\theta = (\theta_1 - \theta_2)$  – різниця температур первинного і вторинного теплоносіїв, при цьому  $\theta_1$  і  $\theta_2$  мають постійні значення в кожній точці об'ємів ідеального перемішування.

Якщо структура потоку теплоносія відповідає моделі ідеального витіснення, то для математичного опису цього потоку можна використовувати

вати рівняння (3.14). Підставивши замість лінійної швидкості потоку її значення  $u = \frac{v}{S_B}$  і, замінивши концентрацію на температуру одержимо

$$S_B c_T \frac{\partial \theta}{\partial t} = -v c_T \frac{\partial \theta}{\partial z}. \quad (3.25)$$

З урахуванням теплопередачі

$$S_B c_T \frac{\partial C}{\partial t} = -v c_T \frac{\partial \theta}{\partial z} + S_B q_T; \quad (3.26)$$

$$S_B q_t = \frac{S_B F K_T \Delta \theta}{S_B L} = \frac{F K_T \Delta \theta}{L}; \quad (3.27)$$

$$q_T = \frac{F K_T \Delta \theta}{V}, \quad (3.28)$$

де  $\Delta \theta$  – рушійна сила теплообміну, що змінюється уздовж зони ідеального витіснення.

Можливі три типи теплообмінних апаратів, в яких потоки первинного і вторинного теплоносіїв характеризуються моделями ідеального перемішування і ідеального витіснення.

*Теплообмінник типу «перемішування – перемішування»*, структурна схема кого представлена на рис. 3.7.

Якщо тепловою ємністю стінки, що розділяє потоки теплоносіїв, можна зневажити, то математична модель апарату буде складатися з двох рівнянь, записаних для первинного та вторинного теплоносіїв.

$$\begin{cases} V_1 c_{1T} \frac{d\theta_1}{dt} = v_1 c_{1T} (\theta_{1H} - \theta_1) - F K_T (\theta_1 - \theta_2); \\ V_2 c_{2T} \frac{d\theta_2}{dt} = v_2 c_{2T} (\theta_{2H} - \theta_2) + F K_T (\theta_1 - \theta_2), \end{cases} \quad (3.29)$$

де  $\theta_1 - \theta_2 = \Delta \theta$ , при цьому  $\theta_1$  і  $\theta_2$  – мають постійні значення в кожній точці об'єму ідеального перемішування;  $\theta_{1H}$ ,  $\theta_{2H}$  – початкові температури

первинного і вторинного теплоносіїв.  $\theta_{1К} = \theta_1$ ,  $\theta_{2К} = \theta_2$  – кінцеві температури первинного і вторинного теплоносіїв.

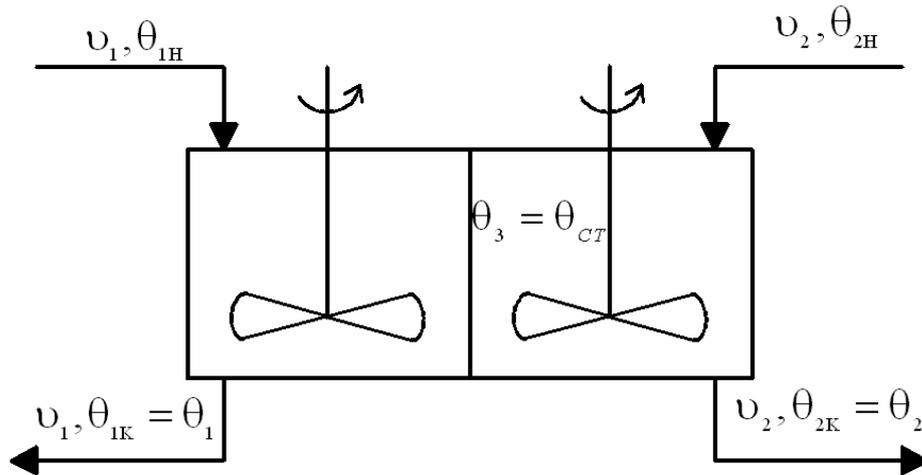


Рис. 3.7. Теплообмінник «перемішування – перемішування».

Величина  $FK_T(\theta_1 - \theta_2)$  – має знак «мінус», якщо теплоносій віддає тепло, і знак «плюс», якщо теплоносій приймає тепло.

Якщо тепловою ємністю стінки, що розділяє потоки теплоносіїв, зневажити не можна, то до даних рівнянь додають рівняння зміни температури стінки.

$$\begin{cases} V_1 c_{1T} \frac{d\theta_1}{dt} = v_1 c_{1T} (\theta_{1H} - \theta_1) - F \alpha_1 (\theta_1 - \theta_3); \\ V_2 c_{2T} \frac{d\theta_2}{dt} = v_2 c_{2T} (\theta_{2H} - \theta_2) + F \alpha_2 (\theta_3 - \theta_2); \\ G_3 c_{3T} \frac{d\theta_3}{dt} = F \alpha_1 (\theta_1 - \theta_3) - F \alpha_2 (\theta_3 - \theta_2). \end{cases} \quad (3.30)$$

Теплообмінник типу «витіснення – витіснення», структурна схема якого наведена на рис.3.8.

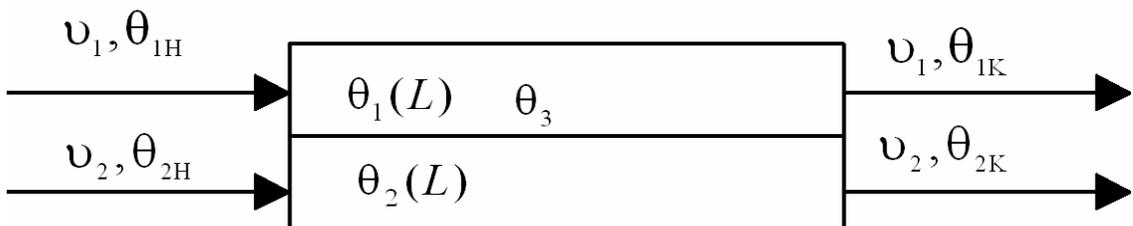


Рис.3.8. Теплообмінник «витіснення – витіснення».

Математична модель теплообмінника типу «витіснення – витіснення» має вид системи двох диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\begin{cases} S_{1B}c_{1T} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = -v_1c_{1T} \frac{\partial \theta_1}{\partial l} - \frac{F}{L} K_T \Delta \theta; \\ S_{2B}c_{2T} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -v_2c_{2T} \frac{\partial \theta_2}{\partial l} + \frac{F}{L} K_T \Delta \theta, \end{cases} \quad (3.31)$$

де  $\Delta \theta = \theta_1 - \theta_2$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  змінюються по довжині відповідної зони ідеального витіснення.

Якщо тепловий ємністю стінки, що розділяє потоки теплоносіїв, зневажити не можна, то до даних рівнянь додають рівняння зміни температури стінки.

$$\begin{cases} S_{1B}c_{1T} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = -v_1c_{1T} \frac{\partial \theta_1}{\partial l} - \frac{F}{L} \alpha_1 (\theta_1 - \theta_3); \\ S_{2B}c_{2T} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -v_2c_{2T} \frac{\partial \theta_2}{\partial l} + \frac{F}{L} \alpha_2 (\theta_3 - \theta_2); \\ G_3c_{3T} \frac{\partial \theta_3}{\partial t} = F \alpha_1 (\theta_1 - \theta_3) - F \alpha_2 (\theta_3 - \theta_2). \end{cases} \quad (3.32)$$

Дослідження по зміні температури проводяться з метою вивчення впливу температури холодоносія на витрату холодоносія. Після зміни температури холодоносія змінюють його витрату до тих пір, поки кінцеві температури гарячого теплоносія і холодоносія не досягнуть необхідних значень.

Теплообмінник типу «перемішування – витіснення», структурна схема теплообмінника типу «перемішування – витіснення» приведена на рис.3.9.

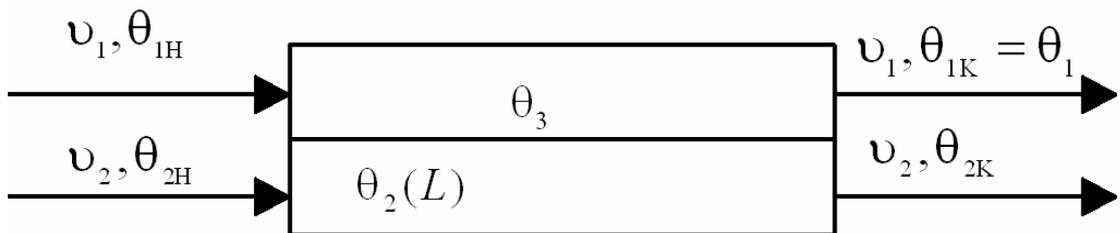


Рис. 3.9. Теплообмінник типу «перемішування – витіснення»

Математична модель теплообмінника типу «витіснення – витіснення» має вид «перемішування – витіснення»

$$\begin{cases} V_1 c_{1T} \frac{d\theta_1}{dt} = v_1 c_{1T} (\theta_{1H} - \theta_1) - FK_T (\theta_1 - \theta_2); \\ S_{2B} c_{2T} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -v_2 c_{2T} \frac{\partial \theta_2}{\partial l} + \frac{F}{L} K_T (\theta_1 - \theta_2). \end{cases} \quad (3.33)$$

З урахуванням теплової ємності стінки

$$\begin{cases} V_1 c_{1T} \frac{d\theta_1}{dt} = v_1 c_{1T} (\theta_{1H} - \theta_1) - FK_T (\theta_1 - \theta_3); \\ S_{2B} c_{2T} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -v_2 c_{2T} \frac{\partial \theta_2}{\partial l} + \frac{F}{L} K_T (\theta_3 - \theta_2); \\ G_3 c_{3T} \frac{d\theta_3}{dt} = F \alpha_1 (\theta_1 - \theta_3) - F \alpha_2 (\theta_3 - \theta_2). \end{cases} \quad (3.34)$$

**Хімічні реактори** – апарати, в яких здійснюється хімічне перетворення з метою отримання певної речовини в рамках одного технологічного процесу.

У хімічній, фармацевтичній і суміжних галузях промисловості застосовують різноманітні типи реакторів, що мають суттєві відмінності. Хімічні реактори можна класифікувати по ряду ознак. У якості таких ознак (критеріїв) найбільш часто приймаються: фазовий стан реагентів, характер операцій живлення реагентами і видалення продуктів реакції, режим руху реакційного середовища, тепловий режим, конструктивні особливості.

а) Залежно від фазового стану реагуючих речовин реактори можуть бути: гомогенними і гетерогенними.

б) За характером операцій живлення (завантаження) реагентами і видалення (вивантаження) продуктів реакції розрізняють реактори: періодичної дії, безперервної дії і полуперіодичної дії.

*Реактори періодичної дії* характеризуються тим, що реагенти завантажуються одночасно перед початком процесу, а через певний час, необхідний для досягнення заданого ступеня перетворення, вивантажується продукт реакції. Основні параметри хімічного процесу (склад, температура, тиск) в них змінюються у часі. Тривалість реакції може бути виміряна безпосередньо. Такі реактори прості по конструкції і оснащуються

невеликим допоміжним обладнанням. Вони використовуються головним чином для проведення дослідницьких робіт з метою вивчення хімічної кінетики, в малотоннажних виробництвах або для переробки дорогих речовин.

*Реактори безперервної дії* (або зі сталим потоком) на відміну від періодичних мають безперервне живлення реагентами і безперервне видалення продуктів реакції. У цьому випадку замість тривалості реакції, яка не може бути безпосередньо заміряна, користуються величиною часу перебування (контакту). Реактори із сталим потоком є найбільш економічними для переробки великих кількостей продуктів або при реакціях, що протікають з високими швидкостями. Вони вимагають спеціального допоміжного обладнання (мішалки, барботер, інжектори, теплообмінники і т. п.), проте дозволяють надійно управляти якістю цільових продуктів.

*Реактори полуперіодичної дії* (або з несталими потоками) характеризуються різними варіантами живлення та видалення продуктів реакції (наприклад, реагенти подаються періодично при безперервному видаленні продуктів реакції, або один реагент надходить періодично, а інший безперервно). Реакціями, що протікають в цих апаратах, легко керувати за рахунок подачі реагуючих речовин, тому вони широко використовуються в лабораторних умовах.

в) За режимом руху реакційного середовища, або за структурою потоків речовини, реактори поділяють на апарати: ідеального перемішування, ідеального витіснення, витіснення з поздовжнім перемішуванням, витіснення з поздовжнім і радіальним перемішуванням, з комбінованою структурою потоку.

г) За тепловим режимом реактори поділяють на: ізотермічні, адіабатичні і політропічні.

*Ізотермічні реактори* мають одну постійну температуру в усіх точках реакційного простору; швидкість реакції в них залежить тільки від складу реакційного середовища. Ізотермічний режим рідко досягається без допоміжних пристроїв для відводу (підведення) тепла. Зазвичай для дотримання ізотермічних умов потрібні теплоносій, здатний передати (відібрати) необхідну кількість теплоти, і відповідна поверхня теплообміну.

*Адіабатичні реактори* характеризуються тим, що вони не повинні мати обміну з зовнішнім середовищем. Це практично досягається доброю тепловою ізоляцією.

*Політропічні реактори*, у яких як правило не завжди вдається забезпечити ізотермічний або адіабатичний режими, а отже процес протікає політропічно.

5) За конструктивними ознаками реактори можна віднести до таких типів апаратів: трубчасті, ємнісні, поличні, комбіновані.

Описана класифікація свідчить про те, що реальні хімічні реактори істотно відрізняються один від одного, а отже, завдання побудови математичних моделей таких апаратів повинно вирішуватися у кожному конкретному випадку з урахуванням особливостей процесу і конструктивного оформлення. При цьому необхідно використовувати моделі визначальних «елементарних» процесів (наприклад, для реакторів безперервної дії – моделі руху потоків речовин і хімічного перетворення) і приєднати до них рівняння, що описують тепловий режим, зміну фазового стану реагентів, конструктивні та інші особливості.

Найбільш простими є математичні моделі хімічних реакторів ідеального перемішування і ідеального витіснення.

*Хімічний реактор ідеального перемішування.* Математичну модель його можна отримати із загальних рівнянь гідродинаміки потоку для випадку ідеального перемішування за невеликих витрат і малих відносинах довжини реактора до його діаметра. Математична модель повинна враховувати зміну концентрації в реакційному середовищі у часі, яке обумовлюється, по-перше, рухом потоку (гідродинамічний фактор) і, по-друге, хімічним перетворенням (кінетичний фактор). Тому зазначену модель слід будувати на основі типової моделі ідеального перемішування з урахуванням швидкості хімічної реакції

$$\frac{dC}{dt} = \frac{v}{V}(C_{\text{ВХ}} - C) + \omega_r, \quad (3.35)$$

де  $\omega_r$  – швидкість хімічної реакції;  $C_{\text{ВХ}}$ ,  $C$  – концентрація на вході і в кожній точці об'єму реактора.

Аналогічних рівнянь записують стільки, скільки речовин бере участь у реакції. Тоді змінна  $C$  буде концентрацією відповідної  $i$ -ї речо-

вини ( $C_A, C_B, \dots$ ), а  $\omega_r$  – швидкістю реакції за тією ж  $i$ -ю речовиною. Отримана система рівнянь буде математичною моделлю динаміки даного реактора ідеального перемішування.

Якщо прийняти, що вихідною є речовина  $A$ , і замінити величини  $C_{\text{ВХ}} = C_{A_0}, C_{\text{ВИХ}} = C_A, \omega_r = \omega_{rA}$  (речовина  $A$  убуває), а також представити час перебування як відношення реакційного об'єму  $V$  до об'ємної швидкості  $\nu, \tau = \frac{V}{\nu}$  – то рівняння прийме вигляд:

$$-\frac{dC_A}{dt} = \frac{1}{\tau}(C_{A_0} - C_A) - \omega_{rA}. \quad (3.36)$$

При сталому режимі роботи реактора, який характеризується дотриманням умови  $\frac{dC}{dt} = 0$  рівняння прийме наступний вигляд:

$$\frac{1}{\tau}(C_{A_0} - C_A) = \omega_{rA}. \quad (3.37)$$

Рівняння (3.37) є статичною моделлю хімічного реактора ідеального перемішування у загальному вигляді.

Вирішуючи системи з рівнянь (3.36) можна знайти основні параметри, що характеризують роботу і економічність хімічних реакторів: час перебування вихідної речовини в реакторі  $\tau$ , від величини якого залежить обсяг апарату (чим менше  $\tau$ , тим менше  $V$ ); зміну концентрації вихідної речовини в часі; концентрації цільових і побічних продуктів.

Для врахування теплового режиму в реакторах ідеального витіснення використовується рівняння:

$$\nu_0 \rho_0 C_{p0} \theta_{\text{ВХ}} - \nu \rho C_p \theta + V \sum_j (Q_{Tj} \cdot \omega_{rj}) \pm k_T F (\theta - \theta_{\text{ТН}}) = V C_p \rho \frac{d\theta}{dt}, \quad (3.38)$$

де  $\rho$  – густина речовини,  $C_p$  – теплоємність потоку,  $\theta_{\text{ВХ}}$  – температура на вході в реактор,  $\theta$  – температура на виході ректора,  $Q_{Tj}$  – тепловий ефект  $j$ -ої реакції,  $\omega_{rj}$  – швидкість  $j$ -ої реакції,  $k_T$  – коефіцієнт теплопередачі,  $F$  – поверхня теплопередачі,  $\theta_{\text{ТН}}$  – температура теплоносія.

Для усталеного режиму за умови рівності швидкості вхідного потоку, швидкості потоку на виході, і незначній зміні теплоємності та густини

(що можливо, якщо діапазон зміни температур  $\theta_{\text{ВХ}} - \theta$  невеликий), рівняння (3.38) матиме вигляд:

$$\frac{1}{\tau}(\theta_{\text{ВХ}} - \theta) + \frac{1}{C_p \rho} \sum_j (Q_{T,r_j}) \pm \frac{k_T F}{V C_p \rho} (\theta - \theta_{\text{ТН}}) = 0. \quad (3.39)$$

*Реактор ідеального витіснення.* Математична модель його може бути записана у вигляді диференціального рівняння, яке описує розподіл речовини у реакційному середовищі як за рахунок гідродинамічних факторів, так і за рахунок хімічного перетворення.

Отже, у загальному вигляді такий математичний опис, що побудований на основі типової моделі ідеального витіснення з урахуванням впливу швидкості хімічної реакції має вигляд:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -u \frac{\partial C}{\partial z} + \omega_r. \quad (3.40)$$

Аналогічні рівняння можна записати для всіх речовин, які беруть участь у реакції.

Для стаціонарного режиму роботи реактора ( $\frac{dC}{dt} = 0$ ) і для вихідної речовини  $A$ , що убуває математична модель реактора має вид:

$$u \frac{dC_A}{dz} = -\omega_{rA}. \quad (3.41)$$

З урахуванням, що лінійна швидкість  $u = \frac{v}{S_B}$ , і елемент довжини  $dz = dV/S_B$ , рівняння (3.41) прийме наступний вигляд:

$$-\frac{dC_A}{\omega_{rA}} = \frac{dV}{v}. \quad (3.42)$$

Проінтегрувавши (3.42) і замінивши  $\tau = \frac{V}{v}$  отримаємо математичну модель статички реактора ідеального витіснення

$$\tau = - \int_{C_{A_0}}^{C_A} \frac{dC}{\omega_{rA}}. \quad (3.43)$$

Тепловий режим в реакторі ідеального витіснення описується рівнянням:

$$\begin{aligned} \upsilon C_p \rho \theta dt - [\upsilon C_p \rho (\theta + d\theta)] dt + F dl \left( \sum_j Q_{Tj} \omega_{rj} \right) dt \pm \\ \pm [k_T F (\theta - \theta_{TH})] dt dl = C_p \rho \theta dt F dl. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Рівняння теплового балансу для сталого режиму після перетворень буде мати вигляд:

$$\upsilon C_p \theta - \upsilon C_p \rho (\theta + d\theta) + V \sum_j Q_{Tj} \omega_{rj} \pm k_T F (\theta - \theta_{TH}) = \frac{d\theta}{dl}. \quad (3.45)$$

*Каскад реакторів ідеального перемішування* використовується, якщо задану ступінь перетворення речовин неможливо досягти в одиничному реакторі. Каскад реакторів уявляє собою ланцюжок послідовно з'єднаних реакторів.

Математична модель каскаду реакторів ідеального перемішування є системою звичайних диференціальних рівнянь наступного виду:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dC_1}{dt} &= \frac{n}{\tau} (C_0 - C_1) + \frac{\omega_{r_1}}{\tau}; \\ \frac{dC_2}{dt} &= \frac{n}{\tau} (C_1 - C_2) + \frac{\omega_{r_2}}{\tau}; \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dC_n}{dt} &= \frac{n}{\tau} (C_{n-1} - C_n) + \frac{\omega_{r_n}}{\tau}, \end{aligned} \right. \quad (3.46)$$

де  $n$  – кількість реакторів;  $\tau$  – час перебування речовини в каскаді.

**Абсорбери** – це апарати, у яких здійснюється процес поглинання газу рідким поглиначем. Апарати у яких відбувається зворотній процес (виділення розчиненого газу з розчину), носять назву десорберів.

У абсорбційних процесах (абсорбція, десорбція) беруть участь дві фази – рідка і газова і відбувається перехід речовини з газової фази в рідку (при абсорбції) або, навпаки, з рідкої фази в газову (при десорбції). Таким чином, абсорбційні процеси є одним з видів процесів масопередачі.

При абсорбційних процесах масообмін відбувається на поверхні стикання фаз. Тому абсорбційні апарати повинні мати розвинену поверхню дотику між газом і рідиною. Виходячи із засобу створення цієї поверхні абсорбційні апарати можна поділити на групи.

*Поверхневі абсорбери*, в яких поверхнею контакту між фазами є дзеркало рідини (власно поверхневі абсорбери) або поверхня поточної плівки рідини (плівкові абсорбери). До цієї ж групи належать насадкові абсорбери, у яких рідина стікає по поверхні завантаженої в абсорбер насадки з тіл різної форми (кільця, кусковий матеріал і т. п.), і механічні плівкові абсорбери. Для поверхневих абсорберів поверхня контакту певною мірою визначається геометричною поверхнею елементів абсорбера (наприклад, насадки), хоча в багатьох випадках і не дорівнює їй.

*Барботажні абсорбери*, в яких поверхня контакту визначається потоками газу, що розподіляється в рідині у вигляді бульбашок і цівок. Такий рух газу (барботаж) здійснюється шляхом пропускання його через заповнений рідиною апарат (суцільний барботаж) або в апаратах колонного типу з різного типу тарілками. Подібний характер взаємодії газу і рідини спостерігається також у абсорбера з затопленою насадкою.

До цієї ж групи входять барботажні абсорбери з перемішуванням рідини механічними мішалками. У барботажних абсорберах поверхня контакту визначається гідродинамічним режимом (витратами газу та рідини).

*Розпилюючі абсорбери*, в яких поверхня контакту утворюється шляхом розпилення рідини в масі газу на дрібні краплі. Поверхня контакту визначається гідродинамічним режимом (витратами рідини). До цієї групи відносяться абсорбери, в яких розпилення рідини проводиться форсунками (форсункові абсорбери); в струмі, що рухається з великою швидкістю газу (швидкісні прямоочні розпилюючі абсорбери); або механічними пристроями (механічні розпилюючі абсорбери).

Наведена класифікація абсорбційних апаратів є умовною, оскільки відображає не стільки конструкцію апарату, скільки характер поверхні контакту. Один і той же тип апарату в залежності від умов роботи може виявитися при цьому в різних групах. Наприклад, насадкові абсорбери можуть працювати як в плівковому, так і в барботажному режимах. В апаратах з барботажними тарілками можливі режими, коли відбувається

значне розпилювання рідини і поверхня контакту утворюється в основному краплями.

З різних типів апаратів на сьогодні найбільш поширені насадкові абсорбери. При виборі типу абсорбера потрібно в кожному конкретному випадку виходити з фізико-хімічних умов проведення процесу з урахуванням техніко-економічних факторів.

Математичний опис процесу абсорбції має включати: опис фазової рівноваги в системі газ – рідина; кінетику протікання процесу, опис структури потоків фаз в апараті. Швидкість масопередачі в насадкових абсорберах залежить від гідродинамічного режиму в апараті.

Схема насадкового абсорбера наведена на рис. 3.10,а.

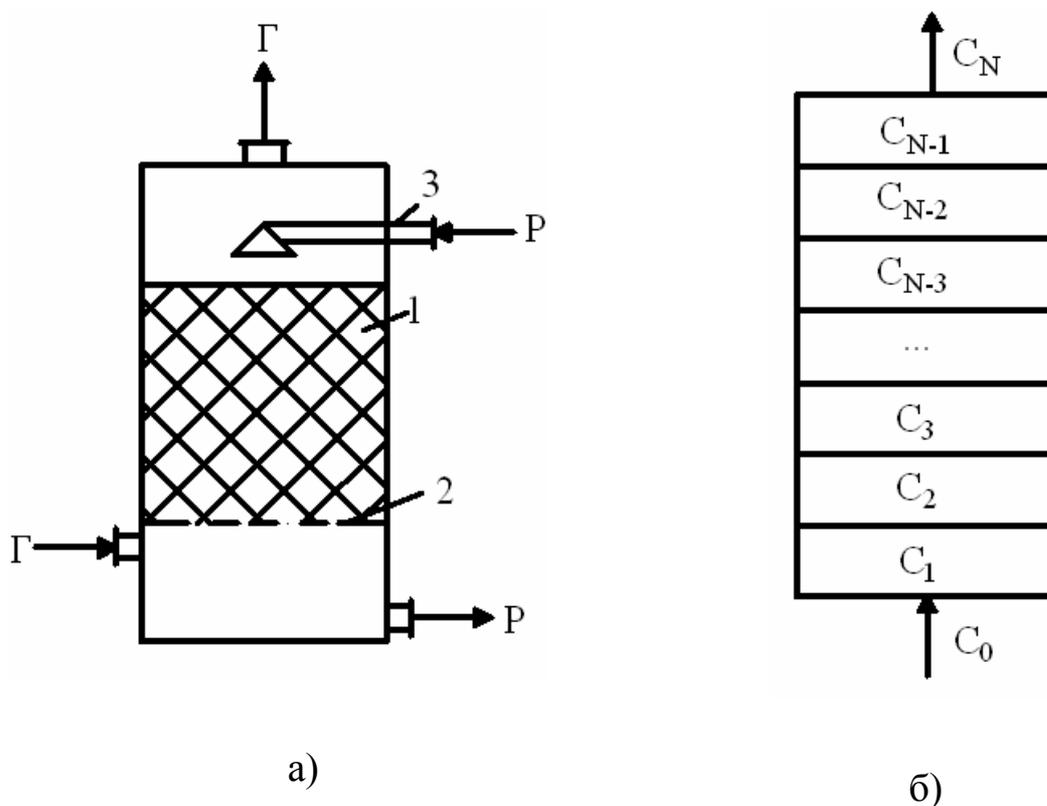


Рис. 3.10. Схема насадкового абсорбера (а) і схема його газових потоків (б).

Рідина стікає по поверхні насадки тонкою плівкою і одночасно розподіляється в шарі насадки у вигляді крапель і бризок. Насадка 1 спирається на ґрати 2, в яких є отвори для проходу газу і стоку рідини. Газ надходить у колону знизу і рухається догори протитечією по відношенню до рідини.

Для такого типу апаратів реальний потік зручно представляти у вигляді коміркової моделі. Схема, згідно якої складається математичної моделі абсорбера по газовому потоку наведена на рис. 3.10, б.

Математична модель абсорбера являє собою систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dC_1}{dt} = \frac{vN}{V}(C_0 - C_1); \\ \frac{dC_2}{dt} = \frac{vN}{V}(C_1 - C_2); \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dC_N}{dt} = \frac{vN}{V}(C_{N-1} - C_N), \end{array} \right. \quad (3.47)$$

де  $V$  – об’єм насадки,  $v$  – об’ємна швидкість потоку,  $C_i$  – концентрація речовини в  $i$ -й комірці,  $N$  – кількість комірок.

З урахуванням того, що відношення  $V/v$  є часом перебування речовини в апараті  $\tau$  одержимо

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dC_1}{dt} = \frac{N}{\tau}(C_0 - C_1); \\ \frac{dC_2}{dt} = \frac{N}{\tau}(C_1 - C_2); \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dC_N}{dt} = \frac{N}{\tau}(C_{N-1} - C_N). \end{array} \right. \quad (3.48)$$

Таким чином, застосування типових гідродинамічних моделей дозволяє спростити залежності між параметрами та зберегти фізичну картину процесу. Цей принцип доцільно використовувати, якщо прийняті припущення не вносять суттєвих відхилень від реального процесу.

## 4 АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ У ВИЗНАЧЕНІ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ КЕРУВАННЯ

### 4.1 ЛІНЕАРИЗАЦІЯ, ЯК МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

В реальних системах математична модель складається з нелінійних алгебраїчних і диференціальних рівнянь. Аналіз і розв'язування цих рівнянь з метою визначення зв'язку між вихідними і вхідними параметрами надзвичайно трудомісткій, а у деяких випадках він взагалі не можливий. Тому завжди, коли це можливо, намагаються замінити нелінійні математичні залежності лінійними, які може і менш точні, але піддаються аналізу стандартними і відносно простими прийомами. Така заміна найчастіше здійснюється шляхом лінеаризації математичної моделі, а розв'язання системи динамічних рівнянь – із застосуванням операційного методу (перетворень Лапласу).

Лінеаризація базується на принципі суперпозиції за якого реакція об'єкта на одночасний вплив декількох вхідних впливів (збурень та управлінь), дорівнює сумі реакцій об'єкта на кожен з цих впливів окремо.

Лінеаризація математичної моделі динаміки об'єкта керування являє собою заміну системи нелінійних диференціальних рівнянь нормальною системою лінійних (точніше лінеаризованих) диференціальних рівнянь, записаних в абсолютних відхиленнях змінних щодо стаціонарного стану. Геометрично лінеаризація може бути представлена як заміна поверхні станів об'єкта керування площиною, дотичною до поверхні станів в точці стаціонарного режиму.

Лінеаризацію нелінійних рівнянь динаміки зручно проводити розкладанням їх у ряд Тейлора. Розглянемо нелінійну функцію  $z$ :

$$z = f(x, y). \quad (4.1)$$

В статичному режимі функцію  $z$  можна записати в наступному виді:

$$z_0 = f(x_0, y_0), \quad (4.2)$$

де  $z_0, x_0, y_0$  – стаціонарні значення змінних  $z, x, y$ .

Змінні величини можна записати як суму стаціонарних значень і приростів:

$$z = z_0 + \Delta z; y = y_0 + \Delta y; x = x_0 + \Delta x. \quad (4.3)$$

Підставимо одержані значення у рівняння (4.1)

$$z_0 + \Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y). \quad (4.4)$$

Розкладемо одержаний вираз у ряд Тейлора

$$\begin{aligned} z_0 + \Delta z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Delta y^2 \right] + \\ + \dots + \frac{1}{n!} \left[ \frac{\partial^n z}{\partial x^n} \Delta x^n + \frac{\partial^n z}{\partial y^n} \Delta y^n \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Враховуючи, що прирости  $\Delta x$   $\Delta y$  є малими величинами, можна без істотної втрати точності відкинути доданки вищої степені малості  $\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta x^3, \Delta y^3$  та інші.

$$z = z_0 + \Delta z \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y. \quad (4.6)$$

Якщо віднімемо із рівняння (4.6) рівняння (4.2), яке зв'язує стаціонарні значення  $z, x$  і  $y$ , то отримаємо лінійне наближення функції у приростах:

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y. \quad (4.7)$$

Розглянемо лінеаризацію нелінійного диференціального рівняння:

$$A \frac{dy(t)}{dt} + B[x(t), y(t)] - C[x(t), y(t)] = 0, \quad (4.8)$$

де  $y(t)$  – вихідна змінна;  $x(t)$  – вхідна змінна;  $B[x(t), y(t)]$  та  $C[x(t), y(t)]$  – нелінійні функції.

Лінеаризуємо рівняння динаміки (4.8), розклавши його в ряд Тейлора, враховуючи що

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d[y_0 + \Delta y(t)]}{dt} = \frac{d\Delta y(t)}{dt}. \quad (4.9)$$

У підсумку рівняння (4.8) може бути записано наступним чином:

$$A \frac{d\Delta y(t)}{dt} + \frac{\partial B[x(t), y(t)]}{\partial x} \Delta x(t) + \frac{\partial B[x(t), y(t)]}{\partial y} \Delta y(t) - \frac{\partial C[x(t), y(t)]}{\partial x} \Delta x(t) - \frac{\partial C[x(t), y(t)]}{\partial y} \Delta y(t) = 0. \quad (4.10)$$

Після групування доданків отриманого рівняння відносно змінних, записаних у приростах, воно прийме такий вигляд:

$$A \frac{d\Delta y(t)}{dt} + \left( \frac{\partial B[x(t), y(t)]}{\partial y} - \frac{\partial C[x(t), y(t)]}{\partial y} \right) \Delta y(t) = \left( \frac{\partial C[x(t), y(t)]}{\partial x} - \frac{\partial B[x(t), y(t)]}{\partial x} \right) \Delta x(t). \quad (4.11)$$

Нижче розглянуті окремі приклади лінеаризації функцій.

*Приклад.1* Лінеаризувати функцію  $z = cx\sqrt{(H-y)\rho}$ .

Змінними є  $x$  і  $y$ . Для лінеаризації функції  $z$  знайдемо частинні похідні функції  $z$  по  $x$  і  $y$  та запишемо їх в приростах величин:

$$\Delta z \approx c\sqrt{(H-y)\rho}\Delta x - \frac{cx\sqrt{\rho}}{2\sqrt{(H-y)}}\Delta y.$$

*Приклад.2* Лінеаризувати функцію  $z = cx\sqrt{P+(H-y)\rho}$  відносно змінних  $x$ ,  $y$  та  $\rho$ .

Запишемо частинні похідні функції  $z$  по  $x$  і  $y$  та  $\rho$  і запишемо їх в приростах величин:

$$\Delta z \approx c\sqrt{P+(h-y)\rho}\Delta x - \frac{cx\rho}{z\sqrt{P-(h-y)\rho}}\Delta y + \frac{cx(h-y)}{2\sqrt{P-(h-y)\rho}}\Delta\rho.$$

*Приклад. 3* Лінеаризувати диференціальне рівняння

$$S \frac{dH(t)}{dt} = f_1 x(t) \sqrt{P_1 + (h - H(t))\rho} - f_2 z(t) \sqrt{H(t)\rho - P_2},$$

де  $H(t)$  – вихідна змінна;  $x(t)$  і  $z(t)$  – вхідні змінні; інші величини є константами.

Використовуючи вираз (4.9) отримаємо лінеаризоване рівняння

$$S \frac{d\Delta H(t)}{dt} = f_1 \sqrt{P_1 + (h - H)\rho} \Delta x(t) - \frac{f_1 x \rho}{2\sqrt{P_1 + (h - H)\rho}} \Delta H(t) - \\ - f_2 \sqrt{H\rho - P_2} \Delta z(t) - \frac{f_2 z \rho}{2\sqrt{H\rho - P_2}} \Delta H(t).$$

Згрупувавши доданки з відповідними змінними, отримаємо:

$$S \frac{d\Delta H(t)}{dt} + \left( \frac{f_1 x \rho}{2\sqrt{P_1 + (h - H)\rho}} + \frac{f_2 z \rho}{2\sqrt{H\rho - P_2}} \right) \Delta H(t) = \\ = f_1 \sqrt{P_1 + (h - H)\rho} \Delta x(t) - f_2 \sqrt{H\rho - P_2} \Delta z(t).$$

Коефіцієнти рівнянь динаміки об'єктів керування хімічної технології, які одержані аналітичним методом майже завжди мають розмірність. В багатьох випадках проводити дослідження більш зручно з рівняннями, що мають безрозмірні коефіцієнти.

Для перетворення рівнянь динаміки до безрозмірної форми необхідно замінити розмірну змінну на відношення її приросту до статичного значення.

*Приклад.* Дано рівняння динаміки

$$T_0 \frac{d\Delta\theta(t)}{dt} + \Delta\theta(t) = b\Delta G(t), \quad (4.12)$$

де  $\Delta\theta$  – приріст вихідної температури, град;  $\Delta G$  – приріст витрати, кг/с.

В цьому випадку коефіцієнти рівняння динаміки мають розмірність

$$[T_0] = c; \quad [b] = \left[ \frac{\text{град} \cdot c}{\text{кг}} \right].$$

Переходимо до змінних в безрозмірному вигляді. Поділимо та помножимо кожен складову рівняння (4.12) на сталі значення відповідної змінної

$$T_0 \frac{d\Delta\theta(t)}{\theta_0 dt} \theta_0 + \frac{\Delta\theta(t)}{\theta_0} \theta_0 = b \frac{\Delta G(t)}{G_0} G_0, \quad (4.13)$$

де  $\theta_0, G_0$  – значення змінних в статичному режимі.

Введемо наступні позначення

$$y(t) = \frac{\Delta\theta}{\theta_0}; x(t) = \frac{\Delta G}{G_0}.$$

Використовуючи прийняті позначення перепишемо рівняння (4.13)

$$T_0\theta_0 \frac{dy(t)}{dt} + \theta_0 y(t) = bG_0 x(t). \quad (4.14)$$

У підсумку рівняння (4.14) в канонічній формі з безрозмірними змінними буде мати вигляд:

$$T_0 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t), \quad (4.15)$$

де  $k = \frac{bG_0}{\theta_0}$  – коефіцієнт підсилення.

Хіміко-фармацевтичні виробництва характеризуються великою кількістю об'єктів з різноманітними процесами, що відбуваються в них. В окремих випадках ці процеси настільки складні, що можливо подати лише математичне формулювання задачі. Тому далі наведені приклади побудови математичних моделей та отримання передатних функцій для окремих типових об'єктів від простих до більш складних.

## 4.2. ОБ'ЄКТИ ТРАНСПОРТУВАННЯ РЕЧОВИН

До таких об'єктів, що найчастіше зустрічаються в практичних умовах, відносяться відрізки трубопроводів і стрічкові дозатори. Перші, як правило, пов'язані з транспортуванням газів чи рідини, а другі – твердих матеріалів.

**Об'єкт транспортування газу і рідини.** Структурна схема цього об'єкту у вигляді трубопроводу з встановленими на ньому звужувальним пристроєм (1) і виконавчим механізмом (2) представлена на рис. 4.1, а.

Швидкість рідини у трубопроводі, що залежить від різниці тисків  $\Delta p = p_1 - p_2$  визначається рівнянням Бернуллі:

$$u = c \sqrt{2 \frac{\Delta p}{\rho}} = c \sqrt{2g \frac{\Delta p}{\gamma}}, \quad (4.16)$$

де  $u$  – лінійна швидкість рідини;  $c$  – коефіцієнт витрати;  $g$  – прискорення сили тяжіння;  $\gamma$  – питома вага рідини;  $\rho = \frac{\gamma}{g}$  – густина рідини;  $\Delta p$  – перепад тиску на ділянці трубопроводу.

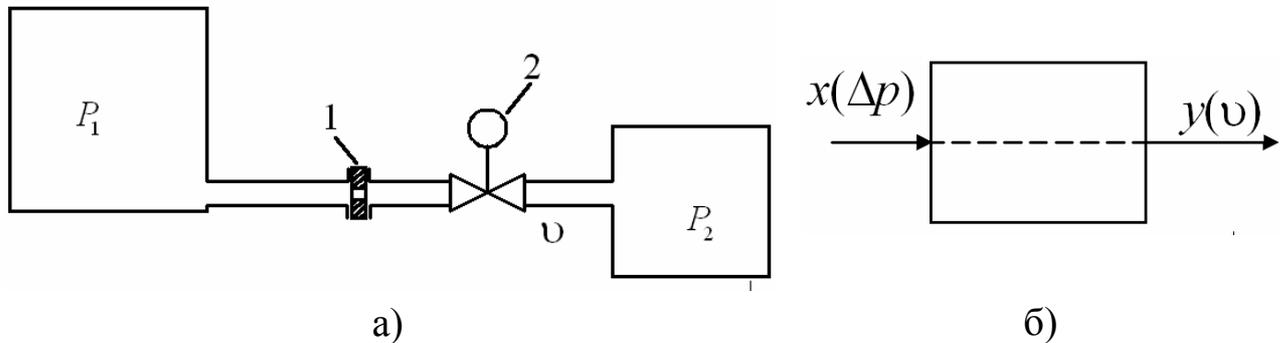


Рис.4.1. Структурна схема трубопроводу як об'єкту керування (а) та його динамічних каналів (б).

Об'ємна витрата рідини  $v$  дорівнює добутку швидкості  $u$  на площу перерізу трубопроводу  $S$ :

$$v = uS. \quad (4.17)$$

Рівняння статички трубопроводу визначається балансом рушійної сили потоку  $F_{\text{рух}}$  і сили опору трубопроводу  $F_{\text{оп}}$ , тобто  $F_{\text{рух}} = F_{\text{оп}}$ .

Вирішуючи рівняння (4.16) і (4.17) відносно коефіцієнту витрати  $c$  отримаємо:

$$c = \frac{v}{S} \sqrt{\frac{\rho}{2\Delta p}}. \quad (4.18)$$

Якщо рушійна сила потоку перевищує силу опору трубопроводу, виникає прискорення потоку  $\frac{du}{dt}$ . Рівняння матеріального балансу може бути представлене наступним чином:

$$m \frac{du}{dt} + F_{\text{оп}} = F_{\text{рух}}. \quad (4.19)$$

З урахуванням виразів (4.16) і (4.17) рівняння (4.19) прийме вигляд:

$$\frac{m}{S} \frac{dv}{dt} + \frac{v^2 \rho}{2Sc^2} = S\Delta p, \quad (4.20)$$

де  $m = V\rho$  – маса рідини в трубопроводі;  $V = LS$  – об’єм трубопроводу;  $L$  – довжина трубопроводу.

З урахування маси рідини маємо:

$$L\rho \frac{dv}{dt} + \frac{v\rho}{2Sc^2}v = S\Delta p. \quad (4.21)$$

Приводимо рівняння (4.21) до стандартного виду:

$$T \frac{dv}{dt} + v = k\Delta p, \quad (4.22)$$

де  $T = \frac{2LS^2c^2}{v}$  – стала часу;  $k = \frac{2S^2c^2}{v\rho}$  – коефіцієнт передачі по каналу

$\Delta p \rightarrow v$ .

Передатна функція згідно рівняння (4.22) може бути представлена у наступному вигляді:

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}. \quad (4.23)$$

Підставивши замість коефіцієнта  $c^2$  його значення згідно виразу (4.18) остаточно одержимо формули для визначення динамічних параметрів об’єкту:

$$T = \frac{Lv\rho}{S\Delta p} \text{ та } k = \frac{v}{\Delta p}. \quad (4.24)$$

Як можна побачити, стала часу пропорційна витраті рідини, довжині трубопроводу, та обернено пропорційна площині перерізу та перепаду тиску.

*Приклад.*

Для трубопроводу довжиною  $L=70$  м, діаметром  $D=100$  мм. Площина перерізу  $S = \frac{3,14 \cdot 0,01}{4} = 0,00785 \text{ м}^2$ ,  $v = 0,0066 \text{ м}^3/\text{с}$ ,  $\Delta p = 1,2 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ,  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$

Стала часу трубопроводу  $T = \frac{70 \cdot 1000 \cdot 0,0066}{0,00785 \cdot 120000} = 0,6 \text{ с}$ .

Коефіцієнт підсилення  $k = \frac{0,0066}{120000} = 5,5 \cdot 10^{-8} \frac{\text{м}^3}{\text{с} \cdot \text{Па}}$ .

Стала часу трубопроводу є дуже малою величиною, тому динамічні характеристики системи регулювання витрати в трубопроводі визначаються головним чином інерційністю вимірювального пристрою, регулятора, виконавчого механізму і ліній передачі сигналу.

**Стрічковий дозатор** найчастіше застосовується для транспортування сипких матеріалів або готових виробів.

Керування потоками за допомогою стрічкових дозаторів найбільш розповсюджене у харчових виробництвах і виробництвах будівельних матеріалів.

Стрічковий дозатор, наприклад у виробництві будматеріалів, служить для підтримки заданої витрати сипкого матеріалу з бункера 2 в технологічний апарат 3 (рис.4.2). Дозатор має постійну швидкість  $u$  руху стрічки. При рівномірному завантаженні стрічки витрата  $v_2$  матеріалу на виході дозатора дорівнює

$$v_2 = \frac{Vu}{l}, \quad (4.25)$$

де  $V$  – об'єм матеріалу, рівномірно розподіленого по довжині  $l$  робочої ділянки стрічки дозатора.

Ступінь завантаження стрічкового дозатора регулюється затвором 4, встановленим на виході бункера. У стані рівноваги рівняння матеріального балансу дозатора має вигляд

$$v_1 - v_2 = 0, \quad (4.26)$$

де  $v_1$  – об'ємна витрата матеріалу через затвор бункера.

Звідси одержуємо рівняння статичної характеристики дозатора

$$v_1 = v_2. \quad (4.27)$$

Якщо внести ступінчате збурення в режим роботи дозатора, наприклад, змінивши прохідний переріз затвора 4, то кількість матеріалу, який дозується  $v_2$  на стрічці почне змінюватися

За час  $\Delta t$  з моменту внесення збурення на стрічці опиниться наступна додаткова кількість  $\Delta V$  матеріалу, величина якої визначається рівнянням:

$$\Delta V = \Delta v_1 \Delta t - \Delta v_2 \Delta t. \quad (4.28)$$

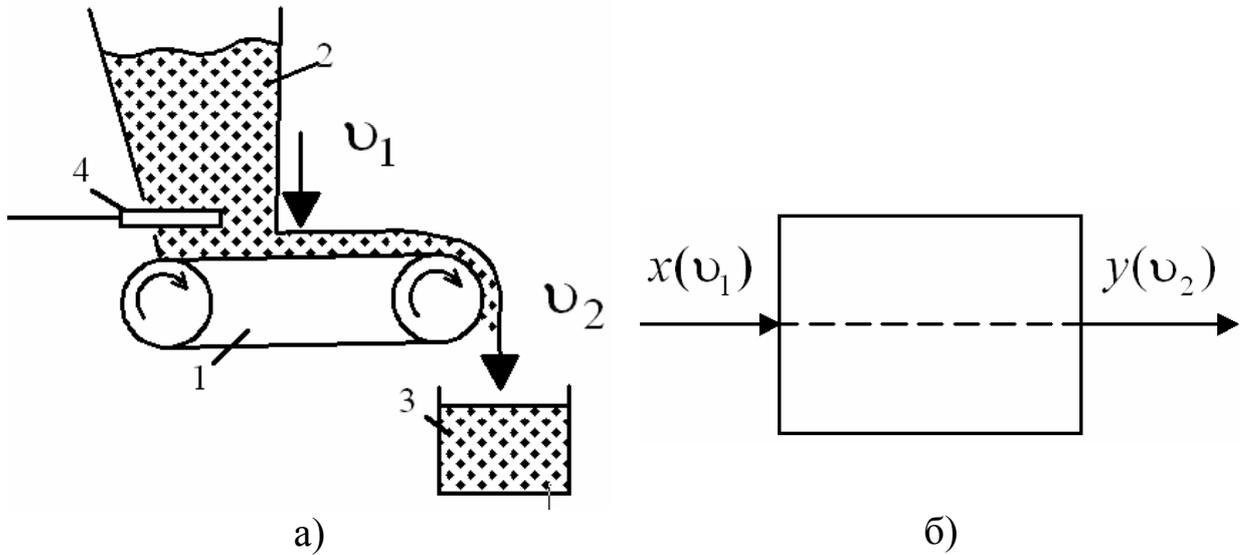


Рис 4.2. Структурна схема стрічкового дозатора як об'єкту керування (а) та схема його динамічних каналів (б): 1 – стрічковий дозатор; 2 – бункер; 3 – технологічний апарат; 4 – шибер.

Проте, витрата матеріалу на виході дозатора фактично не буде змінюватись, доки ділянка стрічки не пройде відстань від точки під затвором до точки скидання. Цей відрізок часу складе:

$$t_T = \frac{l}{u}. \quad (4.29)$$

Отже у проміжку часу від моменту внесення збурення  $t_0$  до  $t_0 + t_T = t_1$  величина  $\Delta v_2 = 0$  і рівняння (4.28) прийме вигляд:

$$\Delta V = \Delta v_1 \Delta t \quad \text{при} \quad \Delta t \leq t_T. \quad (4.30)$$

З моменту  $t_1$  витрата  $v_2$  збільшиться на величину  $\Delta v_2$ , яка відповідно до рівнянь (4.28) і (4.29), складе:

$$\Delta v_2 = \frac{\Delta V u}{l} = \frac{\Delta v_1 t_T u}{l} = \Delta v_1. \quad (4.31)$$

Таким чином, динамічні властивості стрічкового дозатора описуються рівнянням

$$v_1(t) = v_2(t - t_T), \quad (4.32)$$

передатна функція якого буде мати вигляд:

$$W(p) = e^{-pt_T}. \quad (4.33)$$

### 4.3. ГАЗОВІ РЕСИВЕРИ

Газові ресивери застосовуються найчастіше як акумулятори газу компресорних станцій. Задача регулювання таких об'єктів полягає у стабілізації тиску. При цьому ресивери складаються з однієї чи двох акумуляторів у залежності від особливостей технологічного оформлення.

**Одноємнісний ресивер.** Структурна схема та схема динамічних каналів такого об'єкту наведена на рис. 4.3. Об'єкт регулювання – ємність з газом.

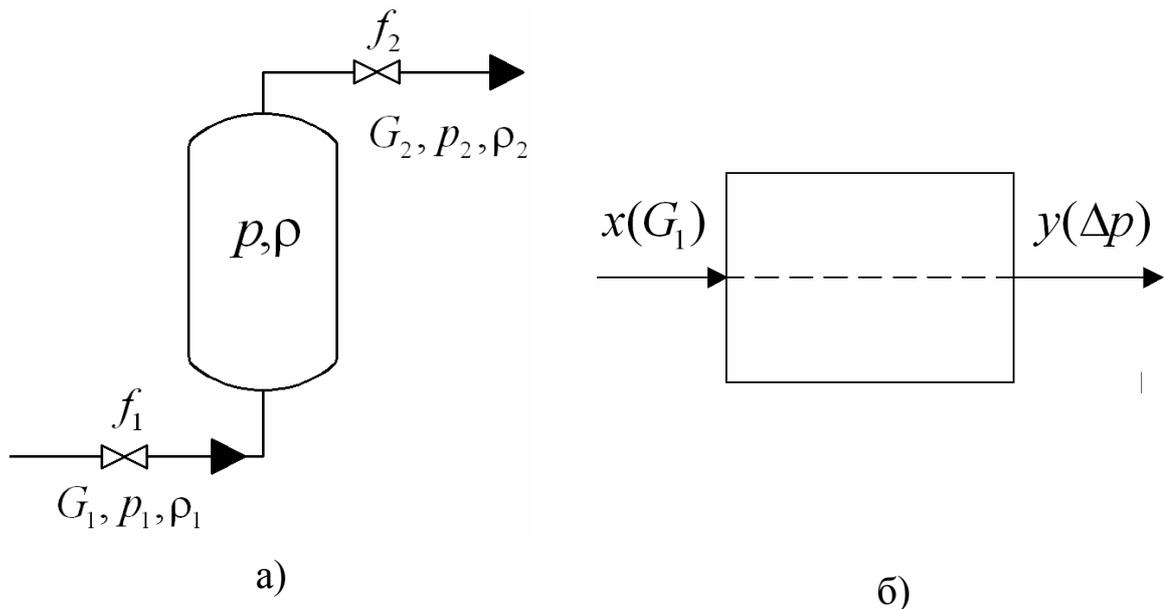


Рис 4.3. Структурна схема одно ємнісного акумулятору об'єкту керування тиском (а) та схема його динамічних каналів (б).

На рисунку (4.3) наведені наступні позначення:  $G_1, G_2$  – масова витрата на вході та виході;  $f_1, f_2$  – прохідний перетин дросельних пристроїв;  $p_1, p_2, p$  – надлишковий тиск відповідно на вході, виході і в резервуарі (вихідний тиск  $p_2$  дорівнює атмосферному);  $\rho_1, \rho_2, \rho$  – густина газу відповідно на вході, виході і в резервуарі (для ідеальних газів  $\rho_2 = \rho$ ).

Стан ідеального газу у такому об'єкті описується рівнянням Менделєєва-Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \quad (4.34)$$

де  $p$  – тиск,  $V$  – об'єм,  $m$  – маса газу,  $\mu$  – молярна маса,  $R$  – універсальна газова стала,  $T$  – абсолютна температура.

В стаціонарному режимі кількість газу, що приходить дорівнює газу, що виходить, тобто  $G_1 = G_2$ .

При порушенні рівноваги між притоком і витратою маса газу в резервуарі  $m$  змінюється

$$\frac{dm}{dt} = G_1 - G_2. \quad (4.35)$$

Рівняння динаміки у приростах

$$\frac{d\Delta m}{dt} = \Delta G_1 - \Delta G_2. \quad (4.36)$$

Із рівняння (4.34) визначається маса газу

$$m = \frac{pV\mu}{RT}. \quad (4.37)$$

За постійності  $V$  і  $T$  рівняння (4.37) після лінеаризації матиме вигляд:

$$\frac{d\Delta m}{dt} = \frac{V\mu}{RT} \frac{d\Delta p}{dt}. \quad (4.38)$$

Відповідно до рівняння Бернуллі (4.16) об'ємна  $v$  і масова  $G$  витрата газу визначається рівняннями:

$$v = cf \sqrt{2 \frac{\Delta p}{\rho}}. \quad (4.39)$$

$$G = v\rho = cf \sqrt{2\rho\Delta p}. \quad (4.40)$$

Витрата на виході резервуару з урахуванням того, що  $p_2=0$  складе:

$$G_2 = c_2 f_2 \sqrt{2\rho_2 p}, \quad (4.41)$$

де  $c_2$  – коефіцієнт витрати вихідного вентиля.

Густина  $\rho_2 = \rho$  знаходимо з рівняння Менделєєва-Клапейрона (4.34):

$$\rho_2 = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}. \quad (4.42)$$

Підставляючи одержаний вираз для  $\rho_2$  у вираз (4.41) та провівши лінеаризацію одержаної залежності, знаходимо:

$$\Delta G_2 = c_2 f_2 \sqrt{2 \frac{\mu}{RT}} \Delta p. \quad (4.43)$$

З урахуванням (4.38) і (4.43) маємо:

$$\frac{V\mu}{RT} \frac{d\Delta p}{dt} + c_2 f_2 \sqrt{2 \frac{\mu}{RT}} \Delta p = \Delta G_1. \quad (4.44)$$

Приводимо рівняння динаміки до канонічного виду

$$T_0 \frac{d\Delta p}{dt} + \Delta p = k \Delta G_1, \quad (4.45)$$

де стала часу дорівнює:

$$T_0 = \frac{V}{c_2 f_2} \sqrt{\frac{\mu}{2RT}}. \quad (4.46)$$

Коефіцієнт підсилення по каналу керування:

$$k = \frac{1}{c_2 f_2} \sqrt{\frac{RT}{2\mu}}. \quad (4.47)$$

Передатна функція згідно рівняння (4.45) буде мати вигляд ідентичний виразу (4.23).

*Приклад.* Розглянемо резервуар з наступними показниками:

$V=50 \text{ м}^3$ ,  $T_a=20^\circ\text{C}$ ,  $R=150 \text{ Дж}/(\text{кг К})$ ,  $p=1000 \text{ кН}/\text{м}^2$ ,  $f_2=0,002 \text{ м}^2$  і  $c_2=0,75$ . Згідно формул (4.46) і (4.47) параметри моделі об'єкту будуть мати значення:  $T=112 \text{ с}$ ,  $k = 10^5 \frac{\text{Н}/\text{м}^2}{\text{кг}/\text{с}}$ .

**Двоємнісний ресивер.** Об'єкт керування становить собою послідовно з'єднані два ресивери (рис. 4.4)

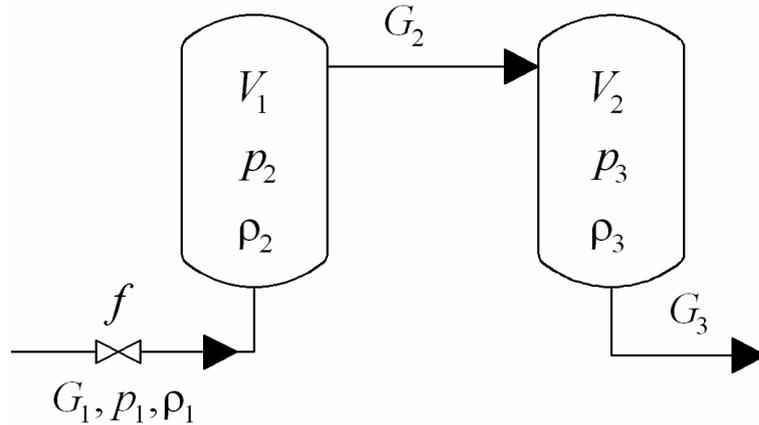


Рис 4.4. Структурна схема двоємнісного ресиверу як об'єкту керування тиском.

Вихідним параметром є тиск у другому ресивері  $p_3$ .

Рівняннями статички є матеріальні баланси кожної ємності:

$$\begin{aligned} G_1 - G_2 &= 0; \\ G_2 - G_3 &= 0, \end{aligned} \quad (4.48)$$

де  $G_1, G_2$  і  $G_3$  – масові витрати газу.

Значення витрат можна представити у вигляді:

$$G_1 = c_1 f \sqrt{(p_1 - p_2) \rho_1}; \quad (4.49)$$

$$G_2 = c_2 \sqrt{(p_2 - p_3) \rho_2}, \quad (4.50)$$

де  $c_1, c_2$  – коефіцієнти витрат;  $f$  – ступінь відкриття клапану;  $\rho_1, \rho_2$  – густина газу на вході клапану і в першій ємності, відповідно.

З урахуванням (4.49) і (4.50) рівняння матеріальних балансів приймуть вигляд:

$$c_1 f \sqrt{(p_1 - p_2) \rho_1} - c_2 \sqrt{(p_2 - p_3) \rho_2} = 0; \quad (4.51)$$

$$c_2 \sqrt{(p_2 - p_3) \rho_2} - G_3 = 0. \quad (4.52)$$

З урахуванням кількості газу, що акумулюється в ресиверах, одержимо їх рівняння динаміки:

$$c_1 f \sqrt{(p_1 - p_2) \rho_1} - c_2 \sqrt{(p_2 - p_3) \rho_2} = V_1 \frac{d\rho_2}{dt}; \quad (4.53)$$

$$c_2 \sqrt{(p_2 - p_3)\rho_2} - G_3 = V_3 \frac{d\rho_3}{dt}, \quad (4.54)$$

де  $V_1, V_2$  – об'єми ресиверів.

Лінеаризуємо рівняння (4.51) і (4.52) відносно змінних  $p_2, p_3, f, G_3$

$$\begin{aligned} V_1 \frac{d\Delta\rho_2}{dt} + \left( \frac{c_1 f \sqrt{\rho_1}}{2\sqrt{p_1 - p_2}} + \frac{c_2 \sqrt{\rho_2}}{2\sqrt{p_2 - p_3}} \right) \Delta P_2 + \frac{c_2 \sqrt{p_2 - p_3}}{2\sqrt{\rho_2}} \Delta\rho_2 = \\ = c_1 \sqrt{(p_1 - p_2)\rho_1} \Delta f + \frac{c_2 \sqrt{\rho_2}}{2\sqrt{p_2 - p_3}} \Delta p_3. \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} V_2 \frac{d\Delta\rho_3}{dt} + \frac{c_2 \sqrt{\rho_2}}{2\sqrt{p_2 - p_3}} \Delta p_3 = \\ = \frac{c_2 \sqrt{\rho_2}}{2\sqrt{p_2 - p_3}} \Delta P_2 + \frac{c_2 \sqrt{p_2 - p_3}}{2\sqrt{\rho_2}} \Delta\rho_2 - \Delta G_3. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Для ізотермічних процесів можна записати наступні залежності між  $\Delta\rho_2$  і  $\Delta p_2$ , а також між  $\Delta\rho_3$  і  $\Delta p_3$ :

$$\Delta\rho_2 = \frac{\Delta p_2}{RT}, \quad \Delta\rho_3 = \frac{\Delta p_3}{RT}. \quad (4.57)$$

З урахуванням (4.57) рівняння (4.55) і (4.56) приймуть вигляд:

$$\frac{V_1}{RT} \frac{d\Delta p_2}{dt} + A \Delta p_2 = B \Delta m + C \Delta P_3. \quad (4.58)$$

$$\frac{V_2}{RT} \frac{d\Delta P_3}{dt} + C \Delta P_3 = D \Delta P_2 - \Delta G_3. \quad (4.59)$$

Визначення коефіцієнтів сталого режиму в отриманих рівняннях здійснюється за формулами:

$$\begin{aligned} A = \frac{c_1 f \sqrt{\rho_1}}{2\sqrt{p_1 - p_2}} + \frac{c_2 \sqrt{\rho_2}}{2\sqrt{p_2 - p_3}} + \frac{c_2 \sqrt{(p_2 - p_3)\rho_2}}{2RT\rho^2}, \\ B = c_1 \sqrt{(p_1 - p_2)\rho_1}, \quad C = \frac{c_2 \rho_2}{2\sqrt{(p_2 - p_3)\rho_2}}, \end{aligned}$$

$$D = B + \frac{c_2 \sqrt{(p_2 - p_3) \rho_2}}{2RT \rho_2}.$$

Виключивши з рівнянь (4.58) і (4.59) проміжну змінну  $\Delta p_2$  одержимо:

$$T_2 \frac{d^2 \Delta p_3}{dt^2} + T_1 \frac{d \Delta p_3}{dt} = k_1 \Delta f - T_3 \frac{d \Delta G_3}{dt} - k_2 \Delta G_3, \quad (4.60)$$

де  $T_2 = \frac{V_1 V_2}{(RT)^2 C(A-D)}$ ;  $T_1 = \frac{V_1 C + V_2 A}{RTC(A-D)}$ ;  $k_1 = \frac{DB}{C(A-D)}$ ;

$$k_2 = \frac{A}{C(A-D)}; T_3 = \frac{V_1}{RTC(A-D)}.$$

Рівняння (4.60) дозволяє отримати передатні функції по каналах збурень як  $\Delta G_3$ , так і  $\Delta f$ . При постійності  $\Delta G_3$  передатна функція матиме такий вид:

$$W(p) = \frac{k_1}{T_2^2 p + T_1 p + 1}. \quad (4.61)$$

#### 4.4. РІДИННІ РЕСИВЕРИ

Рідинні ресивери застосовуються в технологічних системах як у якості окремих проміжних ємностей, так і входять до складу складного обладнання (куб ректифікаційної колони, абсорбер, випарний апарат, сепаратор та ін.). При цьому резервуари в залежності від технологічних умов можуть бути як із вільним так і з примусовим витоком рідини.

**Ресивери з вільним витоком рідини.** Прикладом такого об'єкту може служити куб ректифікаційної колони (рис. 4.5) у якому необхідно забезпечити стабілізацію рівня.

Матеріальний баланс ректифікаційної колони забезпечується відбором високо киплячого компонента з кубу колони. При цьому для нормального протікання процесу ректифікації в кубі колони необхідно підтримувати постійний рівень  $H$ . Схема динамічних каналів об'єкту керування наведена на рис.4.5б. Збурюючим впливом є витрата рідини  $v_1$ , що стікає з насад очної частини до кубу колони. Регулюючий клапан встановлено

на виході колони. Рідина відводиться вільно, під дією сили тяжіння у кількості  $v_2$ .

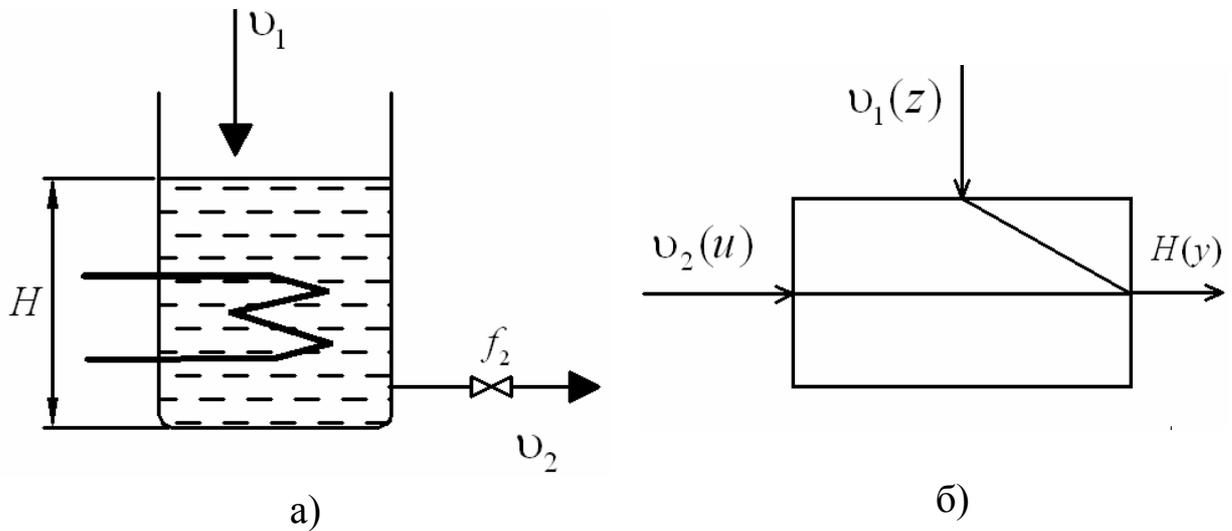


Рис.4.5. Структурна схема кубу ректифікаційної колони як об'єкту керування рівня (а) та схема його динамічних каналів (б).

Рівняння матеріального балансу куба колони в сталому режимі має вигляд:

$$v_1 = v_2. \quad (4.62)$$

Запишемо рівняння матеріального балансу динаміки, яке враховує кількість речовини, що накопичується в апараті

$$\frac{dV}{dt} = v_1 - v_2, \quad (4.63)$$

де  $V = SH$  – об'єм рідини;  $S$  – площа горизонтального перерізу куба колони.

При постійному  $S$  рівняння (4.63) має вид:

$$S \frac{dH}{dt} = v_1 - v_2. \quad (4.64)$$

При вільному зливі рідини з ємності її витрата залежить від конструкції і розміру місцевого опору, встановленого на трубопроводі, площі його прохідного перетину, а також від гідростатичного напору або від поточного значення рівня  $H$ .

$$v_2 = c_2 f_2 \sqrt{2gH}, \quad (4.65)$$

де  $c_2$  – коефіцієнт витрати вентиля,  $g$  – прискорення вільного падіння,  $f_2$  – площа прохідного перетину клапана.

Підставляючи рівняння (4.65) в (4.64) отримаємо

$$S \frac{dH}{dt} = v_1 - c_2 f_2 \sqrt{2gH}. \quad (4.66)$$

З рівняння (4.64) випливає, що зміна приходу рідини  $v_1$  викликає зміну рівня рідини в апараті  $H$ . У свою чергу, зміна рівня відповідно до залежності (4.65) призводить до зміни витрати рідини з ємності. Зокрема, при зростанні рівня витрата рідини збільшується, що приводить до зменшення швидкості зростання рівня. Наявність такого внутрішнього негативного зворотного зв'язку забезпечує встановлення об'єкта в новий стаціонарний стан при впливі різних збурень.

Отримане диференціальне рівняння (4.66) є нелінійним і тому незручним для подальшого дослідження. Лінеаризуємо це рівняння, тобто записуємо його у відхиленнях змінних відносно сталого стану:

$$S \frac{d\Delta H}{dt} = \Delta v_1 - \Delta v_2. \quad (4.67)$$

Враховуючи, що  $v_2 = \varphi(f_2, H)$  одержимо:

$$\Delta v_2 = \left( \frac{\partial v_2}{\partial f_2} \right) \Delta f_2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial H} \right) \Delta H. \quad (4.68)$$

Визначимо частинні похідні:

$$\left( \frac{\partial v_2}{\partial H} \right) = c_2 f_2 \frac{1}{2} (2gH)^{\frac{1}{2}-1} 2g = \frac{1}{2} c_2 f_2 \frac{2g}{\sqrt{2gH}}. \quad (4.69)$$

Або

$$\left( \frac{\partial v_2}{\partial H} \right) = \frac{1}{2} c_2 f_2 \frac{\sqrt{2gH} \cdot 2g}{\sqrt{2gH} \sqrt{2gH}} = \frac{1}{2} \frac{v_2}{H}; \quad (4.70)$$

$$\left( \frac{\partial v_2}{\partial f} \right) = c_2 \sqrt{2gH} \frac{f_2}{f_2} = \frac{v_2}{f_2}. \quad (4.71)$$

Підставивши вирази (4.70) і (4.71) в (4.68) одержимо

$$\Delta v_2 = c_2 \sqrt{2gH} \Delta f + \frac{1}{2} \frac{v_2}{H} \Delta H. \quad (4.72)$$

Підставивши вираз (4.72) в рівняння (4.67) будемо мати:

$$S \frac{d\Delta H}{dt} = \Delta v_1 - c_2 \sqrt{2gH} \Delta f_2 - \frac{1}{2} \frac{v_2}{H} \Delta H. \quad (4.73)$$

Привівши вираз (4.73) до стандартного виду, шляхом перенесення вихідної величини у ліву частину та поділивши всі члени рівняння на коефіцієнт при вихідній величині  $\Delta H$ , одержимо:

$$\frac{2HS}{v_2} \frac{d\Delta H}{dt} + \Delta H = \frac{2H}{v_2} \Delta v_1 - \frac{2Hc_2 \sqrt{2gH}}{v_2} \Delta f_2. \quad (4.74)$$

Диференціальне рівняння (4.74) можна записати в більш стислій формі так:

$$T \frac{d\Delta H}{df} + \Delta H = k_1 \Delta v_2 - k_2 \Delta f_2, \quad (4.75)$$

де  $T_0 = 2 \frac{SH}{v_2} = 2 \frac{V}{v_2}$  м – стала часу,  $k_1 = 2 \frac{H}{v_2}$  – коефіцієнт передачі по каналу збурення,  $k_2 = 2 \frac{Hc_2 \sqrt{2gH}}{v_2}$  – коефіцієнт передачі по каналу керування.

Передатні функції об'єкта керування по кожному з каналів є аперіодичною ланкою першого порядку:

$$W_1(p) = \frac{k_1}{Tp + 1}; \quad W_2(p) = \frac{k_2}{Tp + 1}. \quad (4.76)$$

**Ресивер з примусовим витоком рідини** найчастіше застосовується для видачі кінцевого продукту на склад або споживачу.

Об'єктом моделювання є ємність в якій необхідно підтримувати певну кількість рідини (рис.4.6). Тобто певний рівень в резервуарі  $H$  не повинен залежати від навантаження (кількості рідини, що відбирається насосом  $v_{\text{в\u0430\u0434\u0430\u043d\u043e}}$ ). Заданий рівень в апараті підтримується за допомогою клапана, який змінює приток рідини в ємність. Таким чином, збурюючим впливом

є продуктивність насоса  $v_{\text{ВИХ}}$ , регулюючий вплив – витрата  $v_{\text{ВХ}}$ , а вихідний параметр – рівень  $H$ .

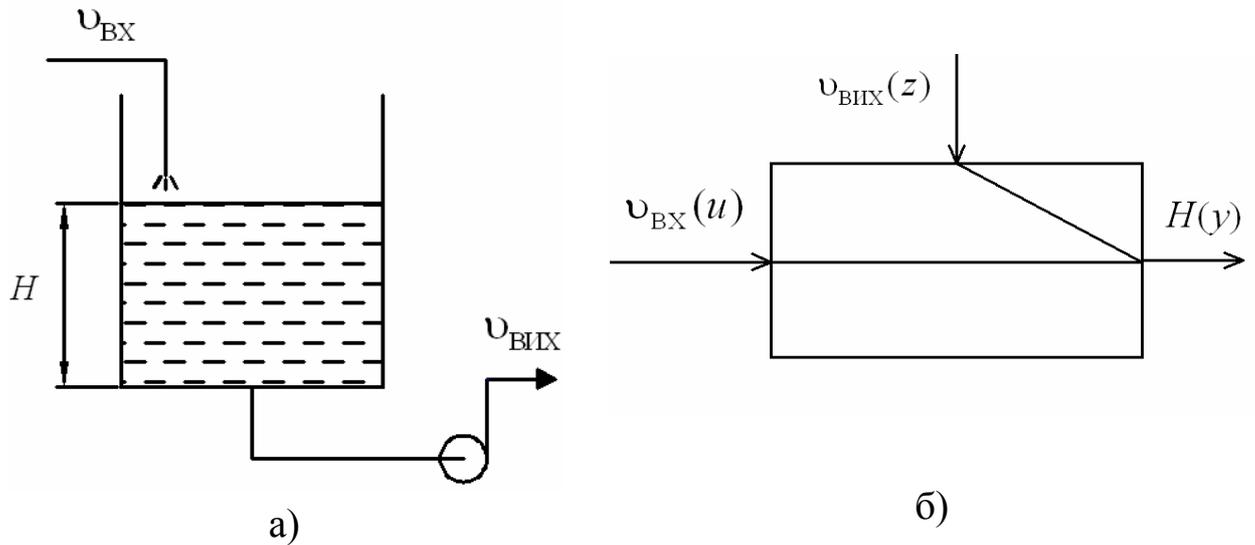


Рис. 4.6. Структурна схема астатичного об'єкту керування рівня (а) та схема його динамічних каналів (б).

Стан рівноваги ємності описується рівнянням матеріального балансу

$$v_{\text{ВХ}} = v_{\text{ВИХ}} \quad (4.77)$$

Витрати рідини на вході  $v_{\text{ВХ}}$  і виході  $v_{\text{ВИХ}}$  не залежать від рівня в резервуарі  $H$ . Отже даний об'єкт є астатичним.

При порушенні рівноваги кількість рідини, а отже і рівень в резервуарі змінюються. За малий проміжок часу  $\Delta t$  зміна кількості рідини становить

$$\Delta V = (v_{\text{ВХ}} - v_{\text{ВИХ}})\Delta t \quad (4.78)$$

Відповідна зміна рівня

$$\Delta H = \frac{\Delta V}{S} = \frac{(v_{\text{ВХ}} - v_{\text{ВИХ}})\Delta t}{S}, \quad (4.79)$$

де  $S$  – площа горизонтального перерізу резервуару.

Після диференціювання одержимо рівняння динаміки

$$\frac{d\Delta H}{dt} = \frac{v_{\text{ВХ}}}{S} - \frac{v_{\text{ВИХ}}}{S} \quad (4.80)$$

Якщо клапан має лінійну характеристику в робочому діапазоні витрат, то

$$v_{\text{ВХ}} = c_{\text{КЛ}} \Delta l, \quad (4.81)$$

де  $c_{\text{КЛ}}$  – коефіцієнт пропускної здатності клапану;  $\Delta l$  – ступінь відкриття клапану.

Підставивши (4.81) в (4.80) остаточно одержимо

$$\frac{d\Delta H}{dt} = \frac{c_{\text{КЛ}}}{S} \Delta l - \frac{1}{S} v_{\text{ВИХ}}. \quad (4.82)$$

Приведемо рівняння до безрозмірного вигляду

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{T} (x_1 - x_2), \quad (4.83)$$

де  $y = \frac{\Delta H}{H_0}$ ;  $x_1 = \frac{\Delta l}{l_0}$ ;  $x_2 = \frac{\Delta v_{\text{ВИХ}}}{v_0}$ ;  $T = \frac{H_0 S}{c_{\text{КЛ}} l_0} = \frac{H_0 S}{v_0}$  – стала часу.

Передатна функція згідно рівняння (4.83) може бути записана у вигляді, що характеризує об'єкт як інтегруючу ланку:

$$W(p) = \frac{1}{Tp}. \quad (4.84)$$

**Ресивери змішування компонентів** найчастіше застосовуються у харчовій, лакофарбовій, фармацевтичній та інших галузях промисловості і характеризуються тим, що отримання кінцевого продукту змішування заданої концентрації відбувається без хімічної реакції. Такі об'єкти у залежності від особливостей їх конструктивного та технологічного оформлення можуть мати один або декілька параметрів регулювання. Ці параметри можуть бути зв'язаними, частково зв'язаними або незалежними.

У випадку зв'язку між каналами регулювання математична модель по певному каналу повинна також включати опис каналів впливу, які пов'язані з каналом, що досліджується. Однак взаємозв'язок між параметрами об'єкту не завжди є очевидним. У такому випадку необхідно розглядати повну математичну модель об'єкту керування, що включає рівняння динаміки для всіх каналів керування. За вірно обраних залежностей вони самі покажуть наявність такого зв'язку в об'єкті.

Таким чином, за наявності декількох параметрів, що регулюються, необхідно скласти математичну модель для кожного каналу регулювання окремо. Нижче розглянуті окремі приклади визначення динамічних властивостей таких об'єктів.

*Приклад 1.* На рис. 4.7 наведена загальна схема змішувача компонентів постійного об'єму  $V$ , що забезпечує ідеальне перемішування рідини. У змішувач подаються потоки рідини, витрати та концентрації яких відповідно дорівнюють  $v_1, C_1$  і  $v_2, C_2$ . Вихідною величиною змішувача є склад рідини  $C$  у змішувачі і на виході з нього, а вхідними змінними – величини потоків на вході  $v_1, v_2$ , а також концентрація  $C_1$ . Причому дотримується умова  $C_1 > C_2 > C$ .

Приймаємо, що структура потоків речовин в розглянутому змішувачі відповідає моделі ідеального перемішування. Ця модель припускає, що потік, який надходить в апарат, миттєво поширюється по всьому об'єму. При цьому концентрація речовини у всіх точках апарату і в потоці на виході апарату однакова.

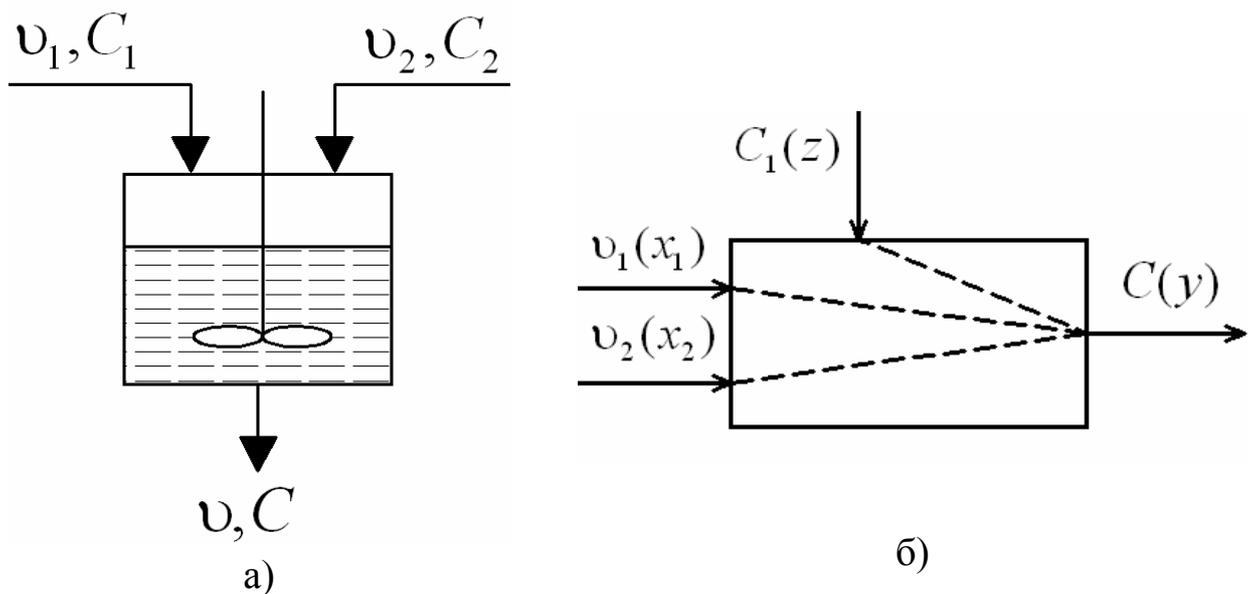


Рис. 4.7. Схема змішувача двох рідин (а) і схема його динамічних каналів (б).

Повний матеріальний баланс дорівнює:

$$v_1 + v_2 = v. \quad (4.85)$$

Рівняння матеріального балансу, що відповідає моделі ідеального перемішування з урахуванням концентрації речовини в кожному потоці буде мати вигляд:

$$V \frac{dC}{dt} + (v_1 + v_2)C = v_1 C_1 + v_2 C_2. \quad (4.86)$$

Одержане рівняння є нелінійним. Лінеаризуємо його, для чого замінимо кожен змінну на суму її базисного значення та приросту:  $C = C_0 + \Delta C$ ;  $C_1 = C_{10} + \Delta C_1$ ;  $v_1 = v_{10} + \Delta v_1$ ;  $v_2 = v_{20} + \Delta v_2$

За такої заміни рівняння (4.86) прийме такий вигляд:

$$\begin{aligned} V \frac{d\Delta C}{dt} + v_{10} C_0 + v_{10} \Delta C + C_0 \Delta v_1 + v_{20} C_0 + v_{20} \Delta C + C_0 \Delta v_2 = \\ = v_{10} C_{10} + v_{10} \Delta C_1 + C_{10} \Delta v_1 + v_{20} C_2 + C_2 \Delta v_2. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Рівняння змішувача в рівноважному стані має вид:

$$v_{10} C_0 + v_{20} C_0 = v_{10} C_{10} + v_{20} C_2. \quad (4.88)$$

Запишемо рівняння змішувача в приростах. Для цього віднімемо з рівняння (4.87) рівняння (4.88), враховуючи, що  $v_{10} + v_{20} = v_0$ . У підсумку отримаємо:

$$V \frac{d\Delta C}{dt} + v_0 \Delta C = v_{10} \Delta C_1 + (C_{10} - C_0) \Delta v_1 - (C_0 - C_2) \Delta v_2. \quad (4.89)$$

Із рівняння (4.89) випливає, що концентрація речовини  $C$  в змішувачі зростає із збільшенням  $C_1$  і  $v_1$ , бо  $C_{10} > C_0$ , і знижується із збільшенням  $v_2$ , оскільки  $C_0 > C_2$  за умовою.

Запишемо рівняння динаміки змішувача у безрозмірному вигляді, для чого підставимо в рівняння (4.89) відносні величини:  $y = \Delta C / C_0$ ;  $z = \Delta C_1 / C_{10}$ ;  $x_1 = \Delta G_1 / G_{10}$ ;  $x_2 = \Delta G_2 / G_{20}$ .

За рахунок чого одержимо:

$$V C_0 \frac{dy}{dt} + v_0 C_0 y = v_{10} \Delta C_{10} z + (C_{10} - C_0) v_{10} x_1 - (C_0 - C_2) v_{20} x_2. \quad (4.90)$$

Представимо рівняння динаміки змішувача в канонічному вигляді, для чого розділимо всі доданки рівняння (4.90) на співмножник  $v_0 C_0$  при вихідній величині  $y$

$$T \frac{dy}{dt} + y = k_1 z + k_2 x_1 - k_3 x_2, \quad (4.91)$$

де  $T = \frac{V}{v_0}$  – стала часу об'єкту;  $k_1, k_2, k_3$  – коефіцієнти підсилення по каналам "C<sub>1</sub>– C", "v<sub>1</sub>– C<sub>2</sub>", "v<sub>2</sub>– C" дорівнюють :

$$k_1 = \frac{v_{10} C_{10}}{v_0 C_0}; \quad k_2 = \frac{v_{10} (C_{10} - C_0)}{v_0 C_0}; \quad k_3 = \frac{v_{20} (C_0 - C_2)}{v_0 C_0}.$$

Рівняння динаміки змішувача в операторній формі:

$$(T p + 1) y = k_1 z + k_2 x_1 - k_3 x_2. \quad (4.92)$$

Передатні функції змішувача по його каналах мають вигляд

$$W_1(p) = \frac{k_1}{T p + 1}; \quad W_2(p) = \frac{k_2}{T p + 1}; \quad W_3(p) = -\frac{k_3}{T p + 1}. \quad (4.93)$$

Таким чином по всім трьом каналам змішувач є усталеним об'єктом першого порядку.

*Приклад 2.* На рис. 4.8 наведена загальна схема змішувача двох потоків з двома можливим параметрами регулювання.

Згідно рис. 4.8а у змішувач подається два потоки  $G_1$  і  $G_2$ , що містять розчин однакової речовини з концентраціями відповідно  $C_1$  і  $C_2$ . Після змішування на виході встановлюється концентрація речовини  $C$ . За суттєвої зміни вхідних або вихідних потоків у змішувачі змінюється і рівень  $H$  суміші. У цьому випадку об'єкт має дві вихідні (регульовані) величини  $C$  і  $H$ . В процесі побудови математичної моделі визначимо два рівняння статички і динаміки.

Рівняннями статички будуть відповідно рівняння матеріального балансу по речовині, концентрація якої регулюється, і рівняння загального матеріального балансу:

$$G_1 C_1 + G_2 C_2 - G_3 C = 0. \quad (4.94)$$

$$G_1 + G_2 - G_3 = 0. \quad (4.95)$$

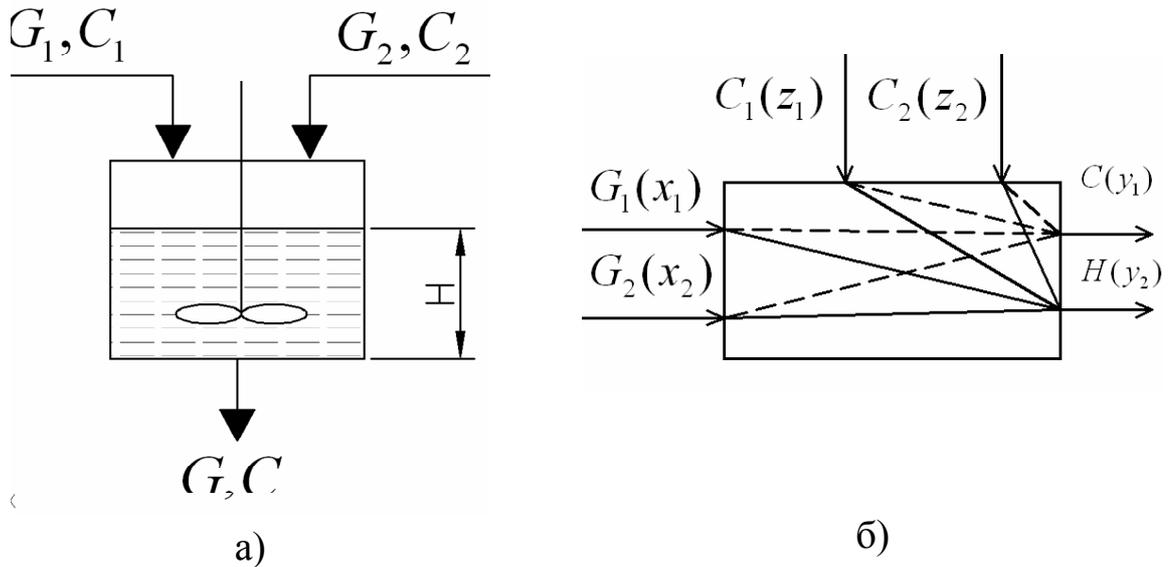


Рис. 4.8. Схема змішувача двох потоків (а) і його динамічних каналів (б) при регулюванні двох параметрів.

Витрату речовини  $G_3$  розраховуємо за відомою залежністю:

$$G_3 = fm\sqrt{H\rho}, \quad (4.96)$$

де  $f$  – коефіцієнт витрати;  $m$  – ступінь відкриття регулюючого клапану;  $\rho$  – густина рідини в змішувачі.

Враховуючи (4.96) рівняння (4.94) і (4.95) можна представити таким чином:

$$G_1C_1 + G_2C_2 - fm\sqrt{H\rho}C = 0. \quad (4.97)$$

$$G_1 + G_2 - fm\sqrt{H\rho} = 0. \quad (4.98)$$

З урахуванням кількості рідини, яка акумулюється в змішувачі, одержимо рівняння динаміки змішувача

$$G_1C_1 + G_2C_2 - fm\sqrt{H\rho}C = F \frac{d(H\rho C)}{dt}; \quad (4.99)$$

$$G_1 + G_2 - fm\sqrt{H\rho} = F \frac{d(H\rho C)}{dt}, \quad (4.100)$$

де  $F$  – площа поперечного перерізу змішувача.

Густина суміші  $\rho$  в певному діапазоні змін можна описати лінійною залежністю

$$\rho = bC + \rho_0, \quad (4.101)$$

або в приростах

$$\Delta\rho = b\Delta C, \quad (4.102)$$

де  $b$  – коефіцієнт пропорційності;  $\rho_0$  – густина суміші на початку ділянки лінеаризації.

Отримані нелінійні диференційні рівняння лінеаризуємо відносно змінних  $C_1, C_2, G_1, G_2, m, H$ , після чого будемо мати:

$$\left\{ \begin{array}{l} G_1\Delta C_1 + G_2\Delta C_2 + C_2\Delta G_2 - f\sqrt{H\rho}C\Delta m - fm\sqrt{H\rho}\Delta C - \\ - \frac{fmC\rho}{2\sqrt{H\rho}}\Delta H - \frac{fmCH}{2\sqrt{H\rho}}\Delta\rho = FH\left(\rho\frac{dC}{dt} + C\frac{d\rho}{dt}\right) + F\rho C\frac{dH}{dt}; \\ \Delta G_1 + \Delta G_2 - f\sqrt{H\rho}\Delta m - \frac{fmH}{2\sqrt{H\rho}}\Delta\rho - \frac{fm\rho}{2\sqrt{H\rho}}\Delta H = \\ = F\rho\frac{dH}{dt} + FH\frac{d\rho}{dt}. \end{array} \right. \quad (4.103)$$

Перетворимо систему рівнянь (4.103) до нормального виду

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1\frac{dC}{dt} + \Delta C = k_1\Delta G_1 + k_2\Delta C_2 + k_3\Delta G_2 - k_4\Delta m - k_5\Delta H - T_2\frac{dH}{dt}; \\ T_3\frac{dH}{dt} + \Delta H = k_6\Delta G_1 + k_7\Delta G_2 + k_8\Delta m - k_9\Delta C - T_4\frac{dC}{dt}, \end{array} \right. \quad (4.104)$$

де постійні коефіцієнти  $T_i$  <sup>3</sup>  $k$  дорівнюють:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{FH(\rho + bC)}{B}; T_2 = \frac{F\rho C}{B}; T_3 = \frac{F\rho C}{D}; T_4 = \frac{THb}{D}; \\ B &= fm\sqrt{H\rho} + \frac{fmbcH}{2\sqrt{H\rho}}; D = \frac{fm\rho}{2\sqrt{H\rho}}; k_1 = \frac{C_1}{B}; k_2 = \frac{G_2}{B}; \\ k_3 &= \frac{C_2}{B}; k_5 = \frac{fmc\rho}{2B\sqrt{H\rho}}; k_6 = k_7 = \frac{1}{D}; k_8 = \frac{f\sqrt{H\rho}}{D}; k_9 = \frac{fmhb}{D}. \end{aligned}$$

Як можна побачити із рівнянь динаміки (4.104) вихідні параметри змішувача  $H$  і  $C$  є взаємопов'язаними. Зміна одного з них призведе до

зміни іншого, а перехідна функція наприклад по каналу "рівень рідини – витрата потоку  $G_1$ " є аперіодичною ланкою першого порядку ідентична рівнянню (4.93).

#### 4.5. ТЕПЛООБМІННИКИ ЗМІШУВАННЯ

Теплообмінники змішування, процес теплообміну у яких відбувається за безпосереднього контакту двох потоків теплоносіїв з різними температурами. Задача регулювання таких апаратів полягає у підтримці заданої температури суміші на виході і вирішується шляхом зміни витрати одного з потоків на вході. За таких умов може суттєво змінюватись і рівень в об'ємі змішування, що обумовлює необхідність його стабілізації. Тому в процесі побудови системи керування виникає задача стабілізації не тільки температури, але і рівня. Нижче розглянуто визначення динамічних властивостей таких об'єктів як з одним, так і з двома параметрами регулювання.

**Теплообмінник змішування з одним параметром регулювання.** На рис. 4.9 представлена схема такого теплообмінника змішування з наступними позначеннями:  $G_1, G_2$  – масова витрата теплоносіїв на вході;  $G$  – масова витрата рідини на виході;  $\theta_1, \theta_2, \theta$  – температури теплоносіїв.

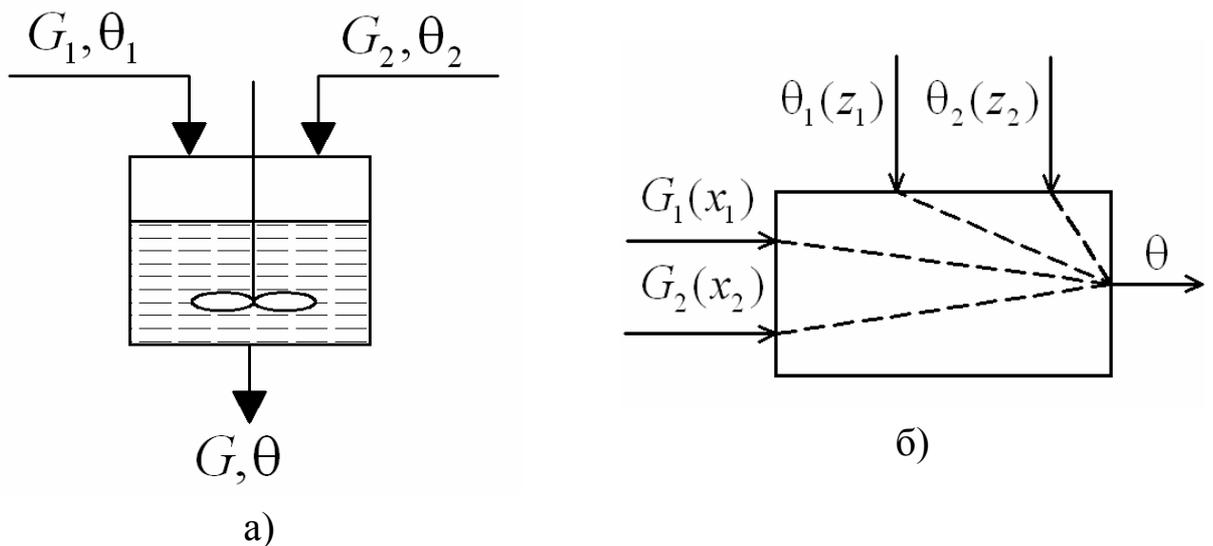


Рис.4.9. Теплообмінник змішування (а) і схема його динамічних каналів (б).

За незмінної витрати на вході утворюється вихідний потік

$$G = G_1 + G_2. \quad (4.105)$$

Рівняння енергетичного балансу в стаціонарному режимі

$$G_{10}c_1\theta_{10} + G_{20}c_2\theta_{20} = Gc\theta, \quad (4.106)$$

де  $c_1, c_2, c$  – питома теплоємність потоків; «0» – індекс, що відповідає стаціонарному режиму.

Температура теплоносія на виході в стаціонарному режимі

$$\theta = \frac{G_{10}c_1\theta_{10} + G_{20}c_2\theta_{20}}{G_{10}c_1 + G_{20}c_2}. \quad (4.107)$$

Якщо теплоносії мають однакову теплоємність, то можна записати

$$\theta = \frac{G_{10}\theta_{10} + G_{20}\theta_{20}}{G}. \quad (4.108)$$

Як можна бачити, статичні характеристики теплообмінника по каналам регулювання є нелінійними.

Рівняння динаміки енергетичного балансу теплообмінника можна записати у спрощеному виді, якщо прийняти, що змішування потоків відповідає моделі ідеального перемішування:

$$\begin{aligned} \frac{m_p c + m_{CT} c_{CT}}{Gc} \frac{d\theta}{dt} + \Delta\theta = \\ = \frac{c_1\theta_{10}}{Gc} \Delta G_1 + \frac{c_2\theta_{20}}{Gc} \Delta G_2 + \frac{G_{10}c_1}{Gc} \Delta\theta_1 + \frac{G_{20}c_2}{Gc} \Delta\theta_2, \end{aligned} \quad (4.109)$$

де  $m_p$  – маса рідини в теплообміннику;  $m_{CT}$  – маса матеріалу корпусу теплообмінника;  $c_{CT}$  – теплоємність матеріалу корпусу.

Якщо один із вхідних потоків пари, наприклад  $G_1$ , то рівняння (4.109) приймає такий вид:

$$\begin{aligned} \frac{m_p c + m_{CT} c_{CT}}{Gc} \frac{d\theta}{dt} + \Delta\theta = \\ = \frac{(i - c\theta)}{Gc} \Delta G_{II} + \frac{c_2\theta_{20}}{Gc} \Delta G_2 + \frac{G_{20}c_2}{Gc} \Delta\theta_2, \end{aligned} \quad (4.110)$$

де  $i$  – ентальпія пари;  $G_I$  – витрата пари.

Відповідні передатні функції згідно рівняння (4.109) по кожному каналу мають наступний вигляд:

$$W_i(p) = \frac{k_i}{Tp + 1} e^{-p\tau}, \quad (4.111)$$

де  $T = \frac{m_p c + m_{CT} c_{CT}}{Gc}$  – стала часу теплообмінника;  $k_1 = \frac{c_1 \theta_{10}}{Gc}$ ,  $k_2 = \frac{c_2 \theta_{20}}{Gc}$ ,

$k_3 = \frac{G_{10} c_1}{Gc}$ ,  $k_4 = \frac{G_{20} c_2}{Gc}$  коефіцієнти підсилення по відповідному каналу;  $\tau$

– час запізнювання, наявність якого обумовлена не ідеальністю процесу перемішування у теплообміннику. Величину запізнювання приблизно обирають рівним часу, що дорівнює 1–2 оборотам мішалки.

**Теплообмінник змішування з двома параметрами регулювання**, структурна схема якого наведена на рис.4.10а. У теплообміннику вода з температурою  $\theta_1$  підігривається водяною парою до температури  $\theta$ . Вважаємо, що рівень води  $H$  у зоні змішування може суттєво змінюватись. В цьому випадку параметрами, що повинні регулюватись будуть температура на виході  $\theta$  і рівень  $H$ .

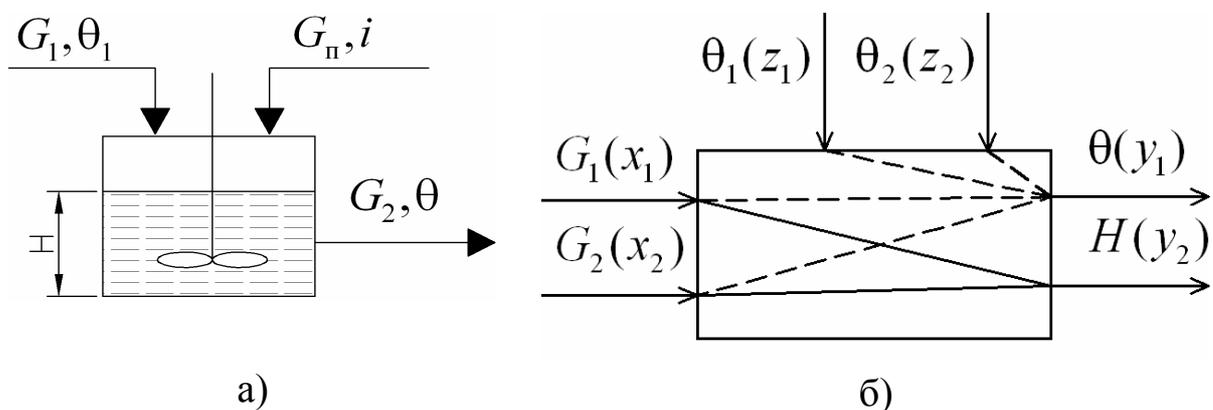


Рис. 4.10. Схема теплообмінника змішування (а) і його динамічних каналів (б) при регулюванні двох параметрів.

Рівнянням статички теплообмінника по температурі є рівняння енергетичного балансу

$$G_1 c \theta_1 + G_{\pi} i - G_2 c \theta = 0, \quad (4.112)$$

де  $i$  – ентальпія пари;  $c$  – питома теплоємність води;  $G_{\text{п}}, G_1, G_2$  – масові витрати пари і води на вході і виході відповідно.

Витрата води, що підігривається можна записати у вигляді:

$$G_2 = f_2 l \sqrt{H\rho}, \quad (4.113)$$

де  $f_2$  – коефіцієнт витрати клапану;  $l$  – ступінь відкриття клапану;  $H$  і  $\rho$  – рівень і густина води в теплообміннику.

Зневажаючи зміною густини і теплоємності води при зміні температури та враховуючи зміну кількості теплоти, що акумулюється в рідині одержуємо рівняння динаміки теплообмінника змішування по температурі у такому вигляді:

$$G_1 c \theta_1 + G_{\text{п}} i - f_2 l c \theta \sqrt{H\rho} = S \rho c \frac{d(H\theta)}{dt}. \quad (4.114)$$

Рівнянням статки для рівня буде рівняння матеріального балансу теплообмінника

$$G_1 + G_{\text{п}} - G_2 = 0. \quad (4.115)$$

Враховуючи рівняння (4.113), а також зміну кількості води в апараті, що пов'язана зі зміною рівня одержимо рівняння динаміки рівня теплообмінника змішування у виді:

$$G_1 + G_{\text{п}} - f_2 l \sqrt{H\rho} = S \rho \frac{dH}{dt}. \quad (4.116)$$

Одержані рівняння динаміки є нелінійними, тому лінеаризуємо їх відносно змінних  $\theta, \theta_1, H, G_{\text{п}}$  і  $l$ .

$$\begin{aligned} G_1 c \Delta\theta_1 + i \Delta G_{\text{п}} - f_2 c \theta \sqrt{H\rho} \Delta l - f_2 c l \sqrt{H\rho} \Delta\theta - \frac{f_2 c l \theta \sqrt{H\rho}}{2H} \Delta H = \\ = S \rho c \theta \frac{d\Delta H}{dt} + S \rho c H \frac{d\Delta\theta}{dt}. \end{aligned} \quad (4.117)$$

$$\Delta G_{\text{п}} - f_2 \sqrt{H\rho} \Delta l - \frac{f_2 l \sqrt{H\rho}}{2H} \Delta H = S \rho \frac{d\Delta H}{dt} \quad (122). \quad (4.118)$$

Перетворивши рівняння (4.117) і (4.118) до стандартного виду, одержимо лінеаризовані рівняння динаміки теплообмінника змішування по температурі і рівню

$$T_1 \frac{d\Delta\theta}{dt} + \Delta\theta = k_1 \Delta G_i + k_2 \Delta\theta_1 - k_3 \Delta l - k_4 \Delta H - T_2 \frac{d\Delta H}{dt}. \quad (4.119)$$

$$T_3 \frac{d\Delta H}{dt} + \Delta H = k_5 \Delta G_i - k_6 \Delta m, \quad (4.120)$$

де

$$\begin{aligned} A &= f_2 c l \sqrt{H\rho}; \quad T_1 = \frac{S\rho Hc}{A}; \quad k_1 = \frac{i}{A}; \\ k_2 &= \frac{G_1 c}{A}; \quad k_3 = \frac{f_2 c \sqrt{H\rho} \theta}{A}; \quad T_2 = \frac{S\rho c \theta}{A}; \\ k_4 &= \frac{f_2 c \theta l \sqrt{H\rho}}{2AH}; \quad B = \frac{f_2 l \sqrt{H\rho}}{2H}; \quad T_3 = \frac{S\rho}{B}; \\ k_5 &= \frac{1}{B}; \quad k_6 = \frac{f_2 \sqrt{H\rho}}{B}. \end{aligned}$$

Як можна побачити із рівнянь (4.119) і (4.120) зміна рівня рідини в теплообміннику  $\Delta H$  призводить до зміни температури  $\Delta\theta$ , а зміна температури  $\Delta\theta$  не приводить до зміни рівня  $\Delta H$ .

#### 4.6. РЕКУПЕРАТИВНІ ТЕПЛООБМІННИКИ

**Теплообмінник-реактор з водяною оболонкою** найчастіше застосовується для реалізації процесів, пов'язаних з виділенням теплоти хімічних реакцій. Основним завданням регулювання теплового режиму такого реактора є підтримання температури у реакційній зоні шляхом зміни витрати води, що надходить у водяну оболонку. Збурюючими факторами роботи реактора, як правило, можуть бути коливання витрати реакційної суміші. Температури реакційної суміші і води на вході в оболонку залишаються постійними. Структурна схема екзотермічного реактора з водяною оболонкою наведена на рис. 4.11.

При побудові математичної моделі приймаємо такі припущення: структура потоків в реакторі і в оболонці відповідає моделі ідеального перемішування; відсутність втрати тепла в навколишнє середовище; теплова ємність стінки між реактором і оболонкою зневажливо мала.

Рівняння енергетичного балансу реактора:

$$\rho_p V_p c_p \frac{d\theta}{dt} = G_p c_p (\theta_p - \theta) + \frac{R_0}{\mu} G_p - \alpha F (\theta - \theta_c). \quad (4.121)$$

Рівняння енергетичного балансу оболонки:

$$\rho_B V_B c_B \frac{d\theta_C}{dt} = \alpha F(\theta - \theta_C) - G_B c_B (\theta_C - \theta_B^{BX}), \quad (4.122)$$

де  $G_P, G_{II}$  – масові витрати реакційної суміші та продукту;  $G_B^{BX}, G_B^{BIX}$  – масові витрати води, що охолоджує, на вході і на виході оболонки;  $\theta_P, \theta_{II}, \theta_B^{BX}, \theta_B^{BIX}, \theta, \theta_C$  – температури реакційної суміші, продукту, води на виході і вході оболонки, в реакторі і оболонці відповідно;  $\rho_P, \rho_B$  – густина реакційної суміші і води;  $V_P, V_B$  – об'єми реакційної зони реактора і оболонки;  $c_P, c_B$  – питомі теплоємності реакційної суміші і води;  $R_0$  – кількість тепла що виділяється в процесі реакції одного моля реакційної суміші;  $\mu$  – молярна вага реакційної суміші;  $\alpha$  – коефіцієнт теплопередачі через стінку між реактором і оболонкою;  $F$  – поверхня теплопередачі.

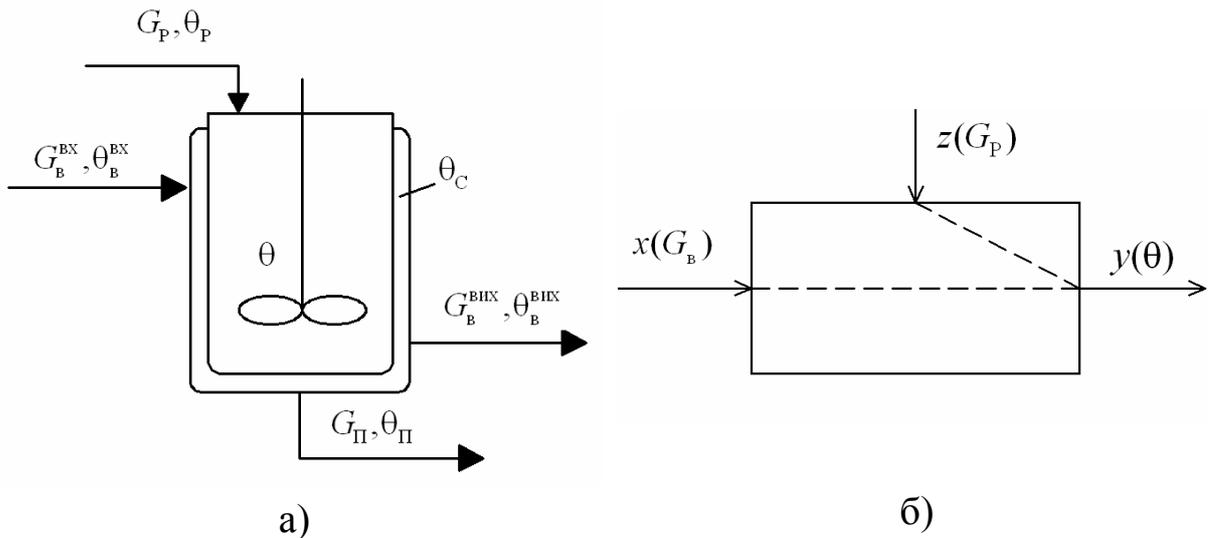


Рис. 4.11. Схема екзотермічного реактора з водяною оболонкою (а) та його динамічних каналів (б).

Записуючи рівняння (4.121), (4.122) в приростах та приводячи їх до стандартного вигляду, отримуємо систему двох рівнянь першого порядку, що описують даний об'єкт:

$$\begin{cases} T_1 \frac{d\Delta\theta}{dt} + \Delta\theta = k_1 \Delta G_P + k_2 \Delta\theta_C; \\ T_2 \frac{d\Delta\theta_C}{dt} + \Delta\theta_C = k_3 \Delta\theta + k_4 G_B, \end{cases} \quad (4.123)$$

де  $T_1 = \frac{\rho_P V_P c_P}{G_P c_P + \alpha F}$ ,  $T_2 = \frac{\rho_B V_B c_B}{G_B c_B + \alpha F}$  – сталі часу;  $k$  – коефіцієнти підсилення, які дорівнюють:

$$k_1 = \frac{c_P(\theta_P - \theta) + \frac{R_0}{\mu}}{G_P c_P + \alpha F}; \quad k_2 = \frac{\alpha F}{G_P c_P + \alpha F};$$

$$k_3 = \frac{\alpha F}{G_B c_B + \alpha F}; \quad k_4 = -\frac{c_B(\theta_P - \theta_B^{BX})}{G_P c_P + \alpha F}.$$

Передатна функція об'єкту по каналу "витрата води – температура в оболонці"

$$W_1(p) = \frac{k_4}{T_2 p + 1}. \quad (4.124)$$

Передатна функція об'єкту по каналу "температура в оболонці – температура в реакторі"

$$W_2(p) = \frac{k_2}{T_1 p + 1}. \quad (4.125)$$

Передатна функція об'єкту по каналу керування "витрата води – температура в реакторі"

$$W_3(p) = W_1(p)W_2(p) = \frac{k_2 k_4}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}. \quad (4.126)$$

Передатна функція об'єкту по каналу збурення "витрата реакційної суміші – температура в реакторі"

$$W_4(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1}. \quad (4.127)$$

**Теплообмінник типу "труба в трубі"** набув широкого застосування у зв'язку з простотою конструкції. Структурну схему цього теплообмінника можна представити у вигляді, наведеному на рис.4.12 у якому прийняті наступні позначення:  $l$  – просторова координата (довжина труби);  $D_B$  – діаметр внутрішньої частини внутрішньої труби;  $\delta$  – товщина

стілки внутрішньої труби;  $D_3$  – діаметр внутрішньої частини зовнішньої труби.

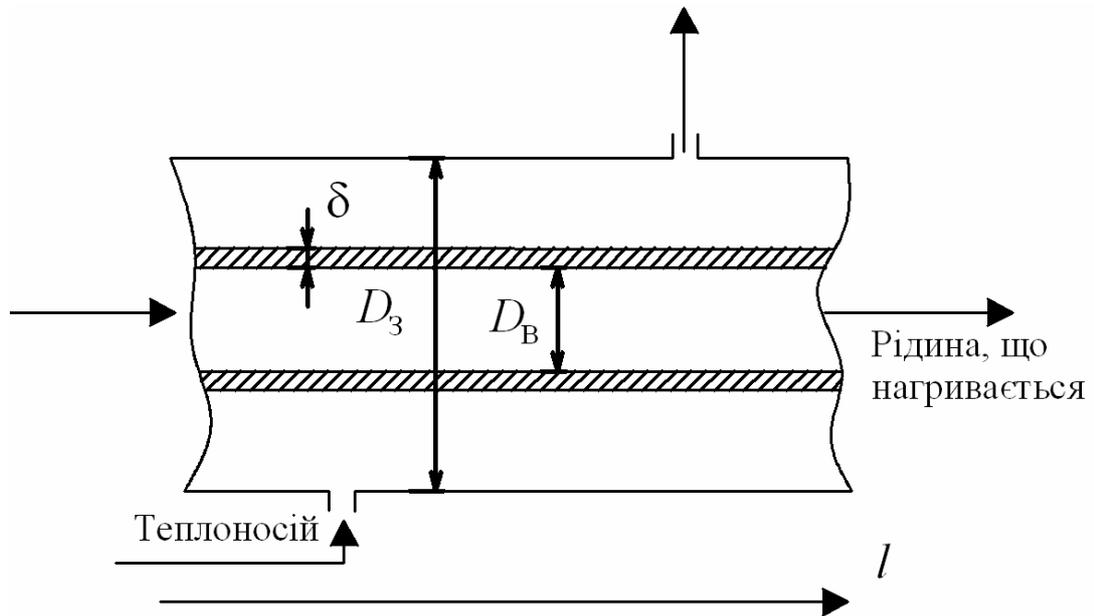


Рис.4.12. Структурна схема теплообмінника типу "труба в трубі".

Згідно рис. 4.12 рідина, що нагрівається подається у внутрішню трубу, а теплоносій – у зовнішню. Об'єкт містить три акумулюючі ємності: ємність рідини, що нагрівається у внутрішній трубі, ємність стінки внутрішньої труби, ємність рідини в зовнішній трубі.

Визначимо рівняння динаміки зміни температури рідини у внутрішній трубі. Для чого розглянемо елемент об'єму рідини у внутрішній трубі  $S_B \Delta l$  ( $S_B = \pi D_B^2 / 4$  – площа поперечного перерізу внутрішньої труби,  $\Delta l$  – приріст довжини труби).

Кількість теплоти в елементарному об'ємі  $S_B \Delta l$  становитиме:

$$Q_n^p = S_B \Delta l \rho_p c_p \theta_p, \quad (4.128)$$

де  $\rho_p, c_p, \theta_p$  – густина, питома теплоємність і температура рідини, що нагрівається.

Оскільки температура рідини змінюється як у часі, так і по довжині теплообмінника, загальна зміна теплоти, що містить елементарний об'єм рідини буде дорівнювати сумі змін теплоти за рахунок приросту часу  $\Delta t$  і довжини  $\Delta l$ .

Приріст теплоти в елементі  $S_B \Delta l$  за проміжок часу  $\Delta t$  складе:

$$\Delta Q_n^p = \frac{\partial \theta_p}{\partial t} S_B \Delta l \rho_p c_p \Delta t. \quad (4.129)$$

Знайдемо приріст теплоти в елементі об'єму за рахунок приросту координати  $\Delta l$ . Потік теплоти крізь переріз внутрішньої труби за рахунок руху рідини дорівнює:

$$Q_l^p = \rho_p c_p \theta_p u_p S_B, \quad (4.130)$$

де  $u_p$  – швидкість руху рідини;  $S_B$  – площа перерізу внутрішньої труби.

Кількість теплоти крізь переріз  $S_B$  за проміжок часу  $\Delta t$  визначиться рівнянням:

$$\Delta Q_l^p = \rho_p c_p \theta_p u_p S_B \Delta t. \quad (4.131)$$

Отже загальний приріст теплоти в елементі об'єму теплообмінника складе:

$$\Delta Q_{nl}^p = \frac{\partial \theta_p}{\partial t} \rho_p c_p u_p S_B \Delta t \Delta l. \quad (4.132)$$

Теплота, яка передається від стінки труби елементу  $S_{\hat{A}} \Delta l$  за час  $\Delta t$  за рахунок теплообміну становитиме:

$$\Delta Q_{Tn}^p = \alpha_1 x_1 (\theta_{CT} - \theta_p) \Delta l \Delta t, \quad (4.133)$$

де  $\alpha_1$  – коефіцієнт тепловіддачі від стінки труб до холодного теплоносія;  $x_1 = \pi D_B$  – довжина внутрішньої окружності внутрішньої труби;  $\theta_{\text{NO}}$  – температура стінки;  $x_1 \Delta l$  – поверхня тепловіддачі.

Рівняння енергетичного балансу для холодної рідини матиме вигляд:

$$\frac{\partial \theta_p}{\partial t} S_B \rho_p c_p + \frac{\partial \theta_p}{\partial l} S_B \rho_p c_p u_p = \alpha_1 x_1 (\theta_{CT} - \theta_p). \quad (4.134)$$

Перетворимо рівняння (4.134), розділивши ліву і праву частину рівняння на  $S_B \rho_p c_p$  і запишемо його у вигляді:

$$\frac{\partial \theta_p}{\partial t} + u_p \frac{\partial \theta_p}{\partial l} + b_1 \theta_p = b_1 \theta_{CT}, \quad (4.135)$$

де  $b_1 = \alpha_1 x_1 / S_B \rho_p c_p$ .

Рівняння енергетичного балансу теплоносія у зовнішній трубі має аналогічний вид:

$$\frac{\partial \theta_T}{\partial t} + u_T \frac{\partial \theta_T}{\partial l} + b_2 \theta_T = b_2 \theta_{CT}, \quad (4.136)$$

де  $\rho_T, c_T, \theta_T$  – густина, питома теплоємність і температура теплоносія;  $u_T$  – швидкість теплоносія;  $b_2 = \alpha_2 x_2 / S_K \rho_T c_T$  – постійний коефіцієнт;  $x_2 = \pi(D_B + 2\delta)$  – довжина зовнішньої окружності внутрішньої труби;  $S_K = \pi[D_C^2 - (D_A + 2\delta)^2] / 4$  – переріз кільця між внутрішньою і зовнішньою трубами;  $\alpha_2$  – коефіцієнт тепловіддачі від теплоносія до стінки.

Розглянемо процеси, що відбуваються у стінці. Знайдемо зміну кількості теплоти, що акумулюється в елементарному об'ємі стінки.

$$\Delta Q_n^{CT} = S_{CT} \Delta l \rho_{CT} c_{CT} \frac{\partial \theta_{CT}}{\partial t}, \quad (4.137)$$

де  $\rho_T, c_T, \theta_T$  – густина, питома теплоємність і температура стінки;  $S_{CT} = \pi\delta(D_B + \delta)$  – переріз стінки внутрішньої труби.

Рівняння енергетичного балансу стінки:

$$S_{CT} \rho_{CT} c_{CT} \frac{\partial \theta_{CT}}{\partial t} = \alpha_2 x_2 (\theta_T - \theta_{CT}) - \alpha_1 x_1 (\theta_{CT} - \theta_P). \quad (4.138)$$

Після перетворень отримаємо:

$$\frac{\partial \theta_{CT}}{\partial t} + (b_3 + b_4) \theta_{CT} = b_3 \theta_T - b_4 \theta_P, \quad (4.139)$$

$$\text{де } b_3 = \frac{\alpha_2 x_2}{S_{CT} \rho_{CT} c_{CT}}; \quad b_4 = \frac{\alpha_1 x_1}{S_{CT} \rho_{CT} c_{CT}}.$$

Система рівнянь (4.135), (4.136) і (4.139) описує динаміку теплообмінника "труба в трубі", що є об'єктом з розподіленими параметрами. Для розв'язання системи рівнянь необхідно задатися початковими і граничними умовами.

В багатьох випадках модель з розподіленими параметрами можна замінити моделлю з зосередженими параметрами, якщо це не приводить до значних похибок.

Зокрема, таку заміну можна зробити для протитечійних теплообмінників типу "труба в трубі" при дотриманні умови  $-\Delta\theta_{\text{Б}}/\Delta\theta_{\text{М}} < 2$ , де  $\Delta\theta_{\text{Б}}, \Delta\theta_{\text{М}}$  – більша і менша різниці температур теплоносіїв на вході і виході апарату, відповідно.

При виконанні цих умов можна з достатньою для практичних розрахунків точністю припустити, що температура теплоносія по довжині апарату змінюється лінійно. При цьому середня температура теплоносіїв визначається як середня арифметична величина:

$$\theta_{1\text{CP}} = 0,5(\theta_{1\text{П}} + \theta_{1\text{К}}); \quad (4.140)$$

$$\theta_{2\text{CP}} = 0,5(\theta_{2\text{П}} + \theta_{2\text{К}}). \quad (4.141)$$

Середня різниця температур (рушійна сила теплообміну) визначається формулою:

$$\Delta\theta = \theta_{1\text{CP}} - \theta_{2\text{CP}}. \quad (4.142)$$

В даному разі внаслідок лінеаризації кривої зміни температур по довжині апарату параметри  $\theta_1, \theta_2, \theta_{\text{СТ}}, \Delta\theta$  будуть змінюватися тільки в часі (координата довжини виключається), і математична модель може бути записана у вигляді звичайних диференціальних рівнянь. Найчастіше застосовуються теплообмінники з протитечійним рухом теплоносіїв, у яких забезпечується більш ефективний теплообмін. Схема потоків за такої умови наведена на рис. 4.13а з наступними позначеннями:  $Q_1$  і  $Q_2$  – кількості теплоти, що передаються через поверхню теплообміну  $F_1$  і  $F_2$ ;  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  – коефіцієнти тепловіддачі відповідно з боку первинного та вторинного теплоносіїв;  $G_1$  і  $G_2$  – масова швидкість потоків;  $\theta_{1\text{П}}, \theta_{1\text{К}}$  – початкова і кінцева температура гарячого теплоносія;  $\theta_{2\text{П}}, \theta_{2\text{К}}$  – початкова і кінцева температура холодного теплоносія;  $c_1, c_2$  – питома теплоємність теплоносіїв;  $m_{\text{СТ}}, c_{\text{СТ}}, \theta_{\text{СТ}}$  – маса, теплоємність і температура стінки.

Математична модель теплообмінника, що досліджується повинна включати наступні рівняння:

Рівняння енергетичного балансу:

$$dQ_1 = G_1 c_1 (\theta_{1\text{П}} - \theta_{1\text{К}}) dt; \quad (4.143)$$

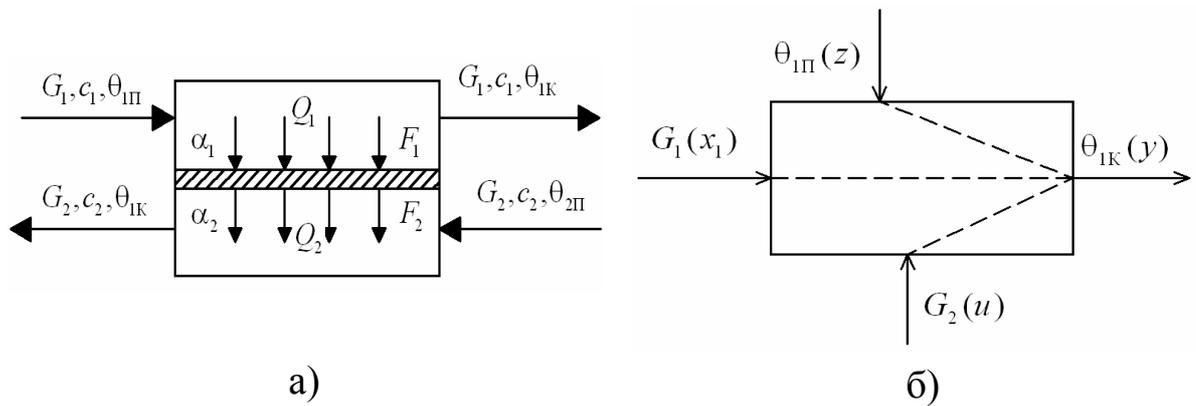


Рис.4.13. Схема потоків протитечійного теплообмінника (а) та його динамічник каналів (б).

$$dQ_2 = G_2 c_2 (\theta_{2П} - \theta_{2К}) dt . \quad (4.144)$$

Рівняння тепловіддачі:

$$dQ_1 = \alpha_1 F_1 (\theta_{СТ} - \theta_{СТ}) dt . \quad (4.145)$$

$$dQ_2 = \alpha_2 F_2 (\theta_{СТ} - \theta_{2СТ}) dt . \quad (4.146)$$

Рівняння перехідного режиму:

$$dQ_1 - dQ_2 = m_{СТ} C_{СТ} d\theta_{СТ} . \quad (4.147)$$

Рівняння (4.147) показує, що при теплообміні в несталому потоці частина тепла акумулюється стінкою.

Математична модель протитечійного теплообмінника остаточно має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ_1}{dt} = G_1 c_1 (\theta_{1П} - \theta_{1К}); \\ \frac{dQ_2}{dt} = G_2 c_2 (\theta_{2К} - \theta_{2П}); \\ \frac{dQ_1}{dt} = \alpha_1 F_1 \left( \frac{\theta_{1П} + \theta_{1К}}{2} - \theta_{СТ} \right); \\ \frac{dQ_2}{dt} = \alpha_2 F_2 \left( \theta_{СТ} - \frac{\theta_{2П} + \theta_{2К}}{2} \right); \\ \frac{dQ_1}{dt} - \frac{dQ_2}{dt} = m_{СТ} c_{СТ} \frac{d\theta_{СТ}}{dt} . \end{array} \right. \quad (4.148)$$

Отримана система рівнянь (4.148) дозволяє визначити передатні функції по відповідним каналам регулювання.

Припустимо, що система автоматичного регулювання теплообмінника повинна стабілізувати кінцеву температуру гарячого теплоносія  $\theta_{1К}$  зміною подачі холодоагенту  $G_2$  (рис.4.13б). Збурюючим впливом може бути зміна початкової температури холодного теплоносія  $\theta_{1П}$ . Вхідний параметр – витрата холодоагенту  $G_1$ .

Виключивши з системи рівнянь (4.148) проміжні змінні  $Q_1, Q_2, \theta_{СТ}$  і провівши лінеаризацію та відповідні перетворення, отримаємо передатні функції об'єкта регулювання по розглянутих каналах:

$$W_1(P) = \frac{k_1}{Tp + 1}; \quad (4.149)$$

$$W_2(P) = \frac{k_2}{Tp + 1}, \quad (4.150)$$

де  $k_1$  – коефіцієнт підсилення об'єкту по каналу керування  $\Delta G_2 - \Delta \theta_{1К}$ ;  $k_2$  – коефіцієнт підсилення об'єкту по каналу збурення  $\Delta \theta_{1П} - \Delta \theta_{1К}$ .

Коефіцієнти підсилення у формулах (4.149) і (4.150) дорівнюють:

$$k_1 = \frac{(\alpha_2 F_2 / 2G_2)(\theta_{2К} - \theta_{2П})}{\alpha_2 F_2 (G_1 c_1 / \alpha_1 F_1 + 0.5) + G_1 c_1 (1 + \alpha_2 F_2 / 2G_2 c_2)}; \quad (4.151)$$

$$k_2 = \frac{\alpha_2 F_2}{\alpha_2 F_2 (G_1 c_1 / \alpha_1 F_1 + 0.5) + G_1 c_1 (1 + \alpha_2 F_2 / 2G_2 c_2)}. \quad (4.152)$$

Стала часу однакова для всіх каналів

$$T = \frac{m_{СТ} c_{СТ} (G_1 c_1 / \alpha_1 F_1 + 0.5)}{G_1 c_1 + \frac{\alpha_2 F_2 (G_1 c_1 / \alpha_1 F_1 + 0.5)}{1 + \alpha_2 F_2 / 2G_2 c_2}}. \quad (4.153)$$

Рівняння динаміки об'єкта регулювання можна записати у вигляді

$$\Delta \theta_{1К} = W(p) \Delta G_2 + W(p) \Delta \theta_{1П}. \quad (4.154)$$

**Теплообмінники із зміною агрегатного стану речовин**, особливість процесів конденсації або випаровування у яких полягає у рівності

температур рідкої і парової фаз за постійності тиску і відсутності переохолодження конденсату (перегріву пари, що утворюється). Оскільки температура рідкої і парової фаз однакова, вона не може служити показником процесу випаровування або конденсації. Тоді в якості основного показника процесу теплообміну обирають рівень рідкої фази. У випарниках або конденсаторах, призначених для випаровування або конденсації рідини, завдання регулювання зводиться до підтримки матеріального балансу по технологічному потоку (газу або рідині). Нижче розглянуті окремі приклади визначення динамічних властивостей об'єктів.

*Парорідинний теплообмінник-підігрівач з паровою оболонкою*, що призначений для нагрівання рідини до заданої температури за рахунок теплоти конденсації пари, що гріє, застосовується найчастіше у випарних та ректифікаційних установках. Основним завданням регулювання таких об'єктів є стабілізація температури рідини на виході з теплообмінника-підігрівача.

На рис.4.14 представлена спрощена схема апарату з мішалкою та паровою оболонкою в якому рідина нагрівається насиченою водяною паром.

Припустивши, що теплообмінник є об'єктом з зосередженими параметрами (температура рідини  $\theta_{\text{вих}}$  є постійною по всьому об'єму) запишемо рівняння енергетичного балансу для теплопередавальних стінок

$$G_{\text{п}} r_{\text{п}} dt = m_{\text{ст}} c_{\text{ст}} d\theta_{\text{ст}} + \alpha F (\theta_{\text{ст}} - \theta_{\text{вих}}) dt, \quad (4.155)$$

де  $G_{\text{п}}$  – витрата водяної пари,  $r_{\text{п}}$  – питома теплота конденсації пари,  $m_{\text{ст}}$  – маса теплопередавальних стінок,  $c_{\text{ст}}, c_{\text{р}}$  – питома теплоємність стінок та рідини,  $\alpha$  – коефіцієнт тепловіддачі з боку рідини,  $F$  – поверхня теплопередачі,  $\theta_{\text{ст}}, \theta_{\text{вх}}, \theta_{\text{вих}}$  – температури стінки та рідини на вході і виході,  $t$  – час.

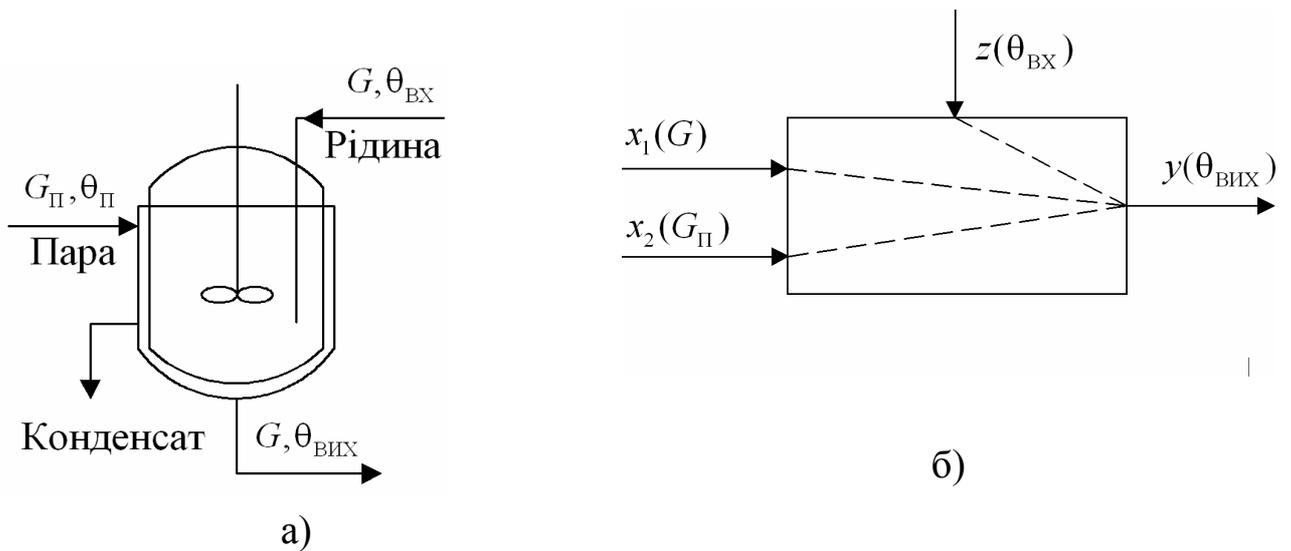


Рис. 4.14. Схема парорідинного теплообмінника-підігрівача з паровою оболонкою (а) та його динамічних каналів (б).

Перепишемо рівняння (4.155) і (4.156) у стандартному вигляді

$$m_{\text{СТ}} c_{\text{СТ}} \frac{d\theta_{\text{СТ}}}{dt} + \alpha F \theta_{\text{СТ}} = G_{\Pi} r_{\Pi} + \alpha F \theta_{\text{ВИХ}}; \quad (4.157)$$

$$m_{\text{П}} c_{\text{П}} \frac{d\theta_{\text{ВИХ}}}{dt} + (G c_{\text{П}} + \alpha F) \theta_{\text{ВИХ}} = G c_{\text{П}} \theta_{\text{ВХ}} + \alpha F \theta_{\text{СТ}}. \quad (4.158)$$

В рівняннях (4.157) і (4.158) замінимо змінні на кінцеві прирости та віднесемо їх до номінальних значень змінних.

Проведемо лінеаризацію рівнянь (4.157), (4.158) та введемо безрозмірні змінні:

$$y = \frac{\Delta \theta_{\text{ВИХ}}}{\theta_{\text{ВИХ}}^0}; \quad y_{\text{СТ}} = \frac{\Delta \theta_{\text{СТ}}}{\theta_{\text{СТ}}^0}; \quad x = \frac{\Delta G_{\Pi}}{G_{\Pi}^0}; \quad x_1 = \frac{\Delta G}{G^0}; \quad z = \frac{\Delta \theta_{\text{ВХ}}}{\theta_{\text{ВХ}}^0}.$$

Після диференціювання рівняння (4.157), (4.158) приймуть наступний вигляд

$$m_{\text{СТ}} c_{\text{СТ}} \theta_{\text{СТ}}^0 \frac{dy_{\text{СТ}}}{dt} + \alpha F \theta_{\text{СТ}}^0 y_{\text{СТ}} = G_{\Pi}^0 r_{\Pi} x + \alpha F \theta_{\text{ВИХ}}^0 y. \quad (4.159)$$

$$\begin{aligned} m_{\text{П}} c_{\text{П}} \theta_{\text{ВИХ}}^0 \frac{dy}{dt} + (G^0 c_{\text{П}} + \alpha F) \theta_{\text{ВИХ}}^0 = \\ = -G^0 c_{\text{П}} (\theta_{\text{ВИХ}}^0 - \theta_{\text{ВХ}}^0) x_1 + G^0 c_{\text{П}} \theta_{\text{ВХ}}^0 z + \alpha F \theta_{\text{СТ}}^0 y_{\text{СТ}}. \end{aligned} \quad (4.160)$$

Перетворивши рівняння (4.159), (4.160) отримаємо:

$$T_1^* \frac{dy_{CT}}{dt} + y_{CT} = k_3 x + k_5 y. \quad (4.161)$$

$$T_2^* \frac{dy}{dt} + y = -k_1 x_1 + k_2 z + k_4 y_{CT}. \quad (4.162)$$

Де постійні коефіцієнти  $k$  і  $T$  розраховуються за формулами:

$$T_1^* = \frac{m_{CT} c_{CT}}{\alpha F}; \quad T_2^* = \frac{m_P c_P}{G^0 c_P + \alpha F};$$

$$k_1 = \frac{G^0 c_P (\theta_{ВИХ}^0 - \theta_{ВХ}^0)}{(G^0 c_P + \alpha F) \theta_{ВИХ}^0}; \quad k_2 = \frac{G^0 c_P \theta_{ВХ}^0}{(G^0 c_P + \alpha F) \theta_{ВХ}^0};$$

$$k_3 = \frac{G_{II}^0 r_{II}}{\alpha F \theta_{CT}^0}; \quad k_4 = \frac{\alpha F \theta_{CT}^0}{(G^0 c_P + \alpha F) \theta_{ВИХ}^0}; \quad k_5 = \frac{\theta_{ВИХ}^0}{\theta_{CT}^0}.$$

Виключимо з рівнянь (4.161) та (4.162) змінну  $y_{CT}$ , для чого диференціюємо рівняння (4.162) за часом та виразимо з нього похідну  $\frac{dy_{CT}}{dt}$  і змінну  $y_{CT}$ . Одержанні вирази підставимо в рівняння (4.161). Розділимо всі доданки отриманого рівняння на коефіцієнт при  $y$ , який дорівнює  $\frac{G_P^0 c_P \theta_{ВИХ}^0}{\alpha F \theta_{CT}^0}$  і враховуючи рівняння енергетичного балансу

$$G_{II}^0 r_{II} = \alpha F (\theta_{CT}^0 - \theta_{ВИХ}^0) = G^0 c_P (\theta_{ВИХ}^0 - \theta_{ВХ}^0), \quad (4.163)$$

отримуємо остаточне рівняння динаміки теплообмінника

$$T_2^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + T_1 \frac{dy}{dt} + y = kx - k(T_3 \frac{dx_1}{dt} + x_1) + (1-k)(T_3 \frac{dz}{dt} + z), \quad (4.164)$$

де коефіцієнти  $k$  і  $T$  мають значення:

$$T_2^2 = \frac{m_{CT} c_{CT} m_P}{\alpha F G^0}, \quad T_1 = \frac{m_{CT} c_{CT}}{\alpha F} + \frac{m_{CT} c_{CT}}{G^0 c_P} + \frac{m_P}{G^0},$$

$$T_3 = \frac{m_{CT} c_{CT}}{\alpha F}; \quad k = \frac{\theta_{ВИХ}^0 - \theta_{ВХ}^0}{\theta_{ВИХ}^0}.$$

З рівняння (4.164), як і попередньому випадку можна отримати передатну функцію за будь-яким каналом регулювання.

*Кожухотрубний теплообмінник-підігрівач* на відміну від попереднього характеризується зміною температури рідини по довжині теплообмінних трубок теплообмінника. З урахуванням цього теплообмінник розглядають як об'єкт з розподіленими параметрами (рис.4.15).

Приймаємо, що пара є насиченою і конденсат відводиться при температурі конденсації без переохолодження.

Запишемо рівняння енергетичного балансу:

$$G_p c_p (\theta_{\text{вих}} - \theta_{\text{вх}}) = G_{\text{п}} r_{\text{п}}, \quad (4.165)$$

де  $G_p$  – масова витрата рідини на вході теплообмінника;  $c_p$  – питома теплоємність рідини;  $\theta_{\text{вх}}$ ,  $\theta_{\text{вих}}$  – температура рідини на вході і виході теплообмінника;  $r_{\text{п}}$  – питома теплота конденсації,  $G_{\text{п}}$  – масова витрата пари.

Рівняння матеріального балансу для міжтрубного простору теплообмінника

$$\rho_k F \frac{dH}{dt} = G_{\text{п}} - G_{\text{к}}, \quad (4.166)$$

де  $F$  – площа поверхні між трубного простору;  $G_{\text{п}}$ ,  $G_{\text{к}}$  – масові витрати пари і конденсату;  $H$  – рівень конденсату у міжтрубному просторі.

Рівняння теплопередачі через стінку теплообмінника

$$\frac{dQ}{dF_T} = k_T (\theta_{\text{п}} - \theta_{\text{р}}), \quad (4.167)$$

де  $Q$  – тепловий потік крізь стінку;  $k_T$  – коефіцієнт теплопередачі;  $F_T$  – площа поверхні труб теплообмінника;  $\theta_{\text{п}}$ ,  $\theta_{\text{р}}$  – температури пари і рідини.

На рис.4.15б наведена схема динамічних каналів теплообмінника з розподіленими параметрами.

Основними збурюючими впливами є: витрата рідини; температура рідини на вході  $\theta_{\text{вих}}$ ; тиск пари  $p_{\text{п}}$ , що гріє, на вході, який визначає теплоту конденсації  $r_{\text{п}} = f(p_{\text{п}})$ . Регулюючими впливами можуть бути витрата пари  $G_{\text{п}}$ , що гріє і витрата конденсату  $G_{\text{к}}$ . Вихідними параметрами теплообмінника є температура рідини на виході  $\theta_{\text{вих}}$  і рівень конденсату

у міжтрубному просторі  $H$ .  $\theta_{\text{вих}}$  і  $H$  зв'язані між собою поверхнею теплообміну, оскільки ефективність теплопередачі у верхній частині міжтрубного простору, який заповнений паром, набагато більша, ніж ефективність теплопередачі між конденсатом і рідиною.

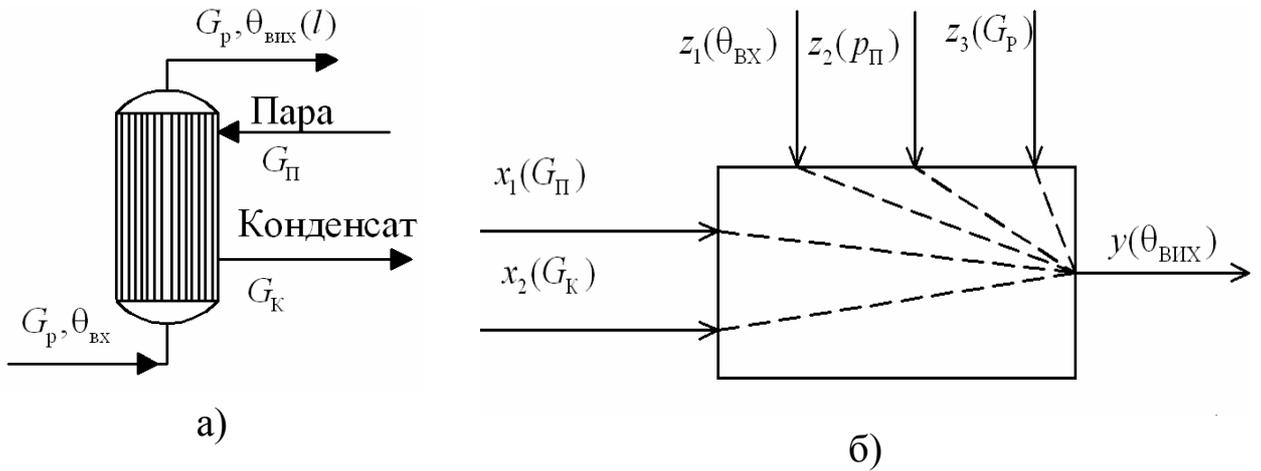


Рис. 4.15. Схема парорідинного теплообмінника з розподіленими параметрами (а) і схема його динамічних каналів (б).

З рівняння (4.165) визначимо температуру рідини на виході теплообмінника

$$\theta_{\text{вих}} = \theta_{\text{вх}} + \frac{G_{\Pi}}{G_p} \frac{r_{\Pi}}{c_p}. \quad (4.168)$$

З рівняння (4.168) випливає, що температура рідини на виході  $\theta_{\text{вих}}$  зв'язана лінійною залежністю з температурою рідини на вході в теплообмінник  $\theta_{\text{вх}}$ , витратою грючої пари  $G_{\Pi}$ , питомою теплотою конденсації  $r_{\Pi}$  і обернено пропорційна витраті рідини  $G_p$ . Далі визначимо передатні функції по каналах керування.

а) Встановлення передатної функції теплообмінника по каналу керування "витрата пари  $G_{\Pi}$  – температура рідини на виході  $\theta_{\text{вих}}$ ".

Рівняння динаміки міжтрубного простору теплообмінника

$$T_1 \frac{dy_1}{dt} + y_1 = k_1 x_1, \quad (4.169)$$

де  $y_1 = p_{\Pi} - p_{\Pi}^0$ ;  $T_1 = \frac{2V\sqrt{p_{\Pi}}}{R\theta_{\Pi}}$ ;  $k_1 = \frac{2\sqrt{p_{\Pi}}}{c_{\text{КЛ}}}$ ;  $V$  – об’єм міжтрубного простору;  $c_{\text{КЛ}}$  – витратний коефіцієнт клапану на лінії конденсату;  $R$  – універсальна газова стала;  $p_{\Pi}$  – тиск пари, що гріє.

Відповідна передатна функція міжтрубного простору має вигляд

$$W_1(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1}. \quad (4.170)$$

Рівняння енергетичного балансу для трубного простору теплообмінника має наступний вигляд:

$$m_p c_p \frac{\partial \theta_p}{\partial t} + m_p c_p u \frac{\partial \theta_p}{\partial l} = F_B \alpha_B (\theta_C - \theta_p), \quad (4.171)$$

або

$$T_p \frac{\partial \theta_p}{\partial t} + u T_p \frac{\partial \theta_p}{\partial l} = \theta_C - \theta_p, \quad (4.172)$$

де  $T_p = \frac{m_p c_p}{F_B \alpha_B}$ ;  $m_p$  – маса рідини;  $c_p$  – питома теплоємність рідини;  $F_B$  – площа внутрішньої поверхні теплообміну;  $\alpha_B$  – коефіцієнт тепловіддачі від внутрішньої поверхні труби до рідини;  $\theta_C$  – температура стінки;  $u$  – швидкість рідини,  $\theta_p$  – поточна температура рідини у трубному просторі.

Рівняння енергетичного балансу стінок труби за припущення незначної зміни теплопровідності буде мати вигляд:

$$m_c c_c \frac{\partial \theta_c}{\partial t} = F_{\text{ЗВН}} \alpha_{\text{ЗВН}} (\theta_{\Pi} - \theta_c) - F_B \alpha_B (\theta_c - \theta_p), \quad (4.173)$$

або

$$T_c \frac{\partial \theta_c}{\partial t} + \theta_c (1 + \beta) = \theta_{\Pi} + \beta \theta_p, \quad (4.174)$$

де  $T_c = \frac{m_c c_c}{F_{\text{ЗВН}} \alpha_{\text{ЗВН}}}$ ;  $\beta = \frac{F_B \alpha_B}{F_{\text{ЗВН}} \alpha_{\text{ЗВН}}}$ ;  $m_c$  – маса стінки труби;  $c_c$  – питома теплоємність стінки;  $F_{\text{ЗВН}}$  – площа зовнішньої поверхні теплообміну;  $\alpha_{\text{ЗВН}}$  –

коефіцієнт тепловіддачі від пари до зовнішньої поверхні труби,  $\theta_c$  – температура стінки.

У рівняннях (4.172) і (4.174) переходимо до відхилень змінних від їх номінального значення, тобто:  $y_3 = \theta_p - \theta_p^0$ ;  $y_2 = \theta_c - \theta_c^0$ ;  $x = \theta_{II} - \theta_{II}^0$ .

Щоб отримати передатну функцію з диференціального рівняння в частинних похідних, виконаємо перетворення Лапласа за часом.

Після перетворень по Лапласу рівняння (4.172) і (4.174) матимуть вигляд:

$$T_p p Y_3 + u T_p \frac{\partial Y_3}{\partial l} + Y_3 = Y_2; \quad (4.175)$$

$$T_c p Y_2 + Y_2(1 + \beta) = Y_3 \beta + X, \quad (4.176)$$

де  $Y_3(p, l)$ ,  $Y_2(p)$ ,  $X(p, l)$  – зображення вихідних і вхідних величин по Лапласу.

Виключивши із рівнянь (4.175) і (4.176)  $Y_2$  (температуру стінки) одержимо звичайне диференційне рівняння першого порядку

$$ua(p) \frac{dY_3}{dl} + Y_3 = b(p) X, \quad (4.177)$$

де

$$a(p) = \frac{\theta_p (\theta_c p + 1 + \beta)}{(\theta_p p + 1)(\theta_c p + 1 + \beta) - \beta} = \frac{\theta_p}{\theta_c p + 1 - [\beta / (\theta_c p + 1 + \beta)]};$$

$$b(p) = \frac{1}{(\theta_p p + 1)(\theta_c p + 1 + \beta) - \beta}.$$

Задамося граничними умовами:  $Y_3(p, l) = 0$ . Для  $l = 0$  при  $X(l) = const$  рішення рівняння (4.177) має вигляд:

$$Y_3(p, l) = X(p) b(p) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{l}{ua(p)}\right) \right]. \quad (4.178)$$

Для температури на виході труби (при  $l = L$ ) рівняння (4.177) приймає вид

$$Y_3(p, l) = X(p)b(p) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\tau_{3АП}}{ua(p)}\right) \right], \quad (4.179)$$

де  $\tau_{3АП} = l/u$  – час транспортного запізнювання.

Із (4.179) знаходимо передатну функцію, яка відображає взаємозв'язок між температурою пари у міжтрубному просторі  $\theta_1$  і температурою рідини  $\theta_D$  на виході із труб:

$$W_3(p) = \frac{Y_3(p, L)}{X(p)} = b(p) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\tau_{3АП}}{a(p)}\right) \right], \quad (4.180)$$

де  $b(p)$  можна представити у вигляді добутку двох аперіодичних функцій першого порядку

$$b(p) = \frac{1}{T_2 p + 1} \frac{1}{T_3 p + 1}. \quad (4.181)$$

Вираз  $1/[a(p)]$  апроксимуємо лінійним двочленом

$$1/a(p) \approx p + a. \quad (4.182)$$

Тоді

$$\exp\left(-\frac{\tau_{3АП}}{a(p)}\right) \approx \exp[-\tau_{3АП}(p + a)]. \quad (4.183)$$

Остаточно передатна функція (4.180) має вигляд:

$$W_3(p) = \frac{1 - \exp[-\tau_{3АП}(p + a)]}{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}. \quad (4.184)$$

Таким чином, передатна функція кожухотрубного парорідинного теплообмінника по каналу керування "витрата пари  $G_1$  – температура рідини на виході теплообмінника  $\theta_{ВИХ}$ " має вигляд:

$$W(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1} \frac{1 - \exp[-\tau_{3АП}(p + a)]}{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}. \quad (4.185)$$

б) Встановлення передатної функції теплообмінника по каналу збурення "температура рідини на вході в теплообмінник  $\theta_{\hat{A}\hat{O}}$  – температура рідини на виході  $\theta_{\hat{A}\hat{E}\hat{O}}$ ".

Динамічна характеристика теплообмінника по каналу збурення визначається із рівняння (4.177) при граничних умовах  $Y_3(0) = t(0)$ :

$$ua(p) \frac{dY_3}{dl} + Y_3 = 0. \quad (4.186)$$

Рівняння (4.186) має рішення:

$$Y_3(l, p) = Y_3(0, p) \exp \left[ -\frac{l}{ua(p)} \right]. \quad (4.187)$$

Тоді передатна функція по каналу " $\theta_{\text{ВХ}}(0) - \theta_{\text{ВИХ}}(l)$ " має вигляд:

$$W_c(p) = \frac{Y_3(l, p)}{Y_3(0, p)} = \exp \left[ -\frac{l}{ua(p)} \right], \quad (4.188)$$

або

$$W_3 = b \exp(-\tau_{3АП} p), \quad (4.189)$$

де  $b = \exp[-a(p)\tau_{3АП}]$ .

## 4.7. ХІМІЧНІ РЕАКТОРИ

Хімічні реактори є найбільш складними для математичного моделювання. Різноманіття хімічних реакцій обумовлює і різноманіття конструкцій цих реакторів. Швидкість хімічних перетворень визначається гідродинамікою взаємодіючих реагентів, рівняннями кінетики, масообміну та теплових процесів. В свою чергу, хімічні перетворення у реакторах призводять до зміни теплових та гідродинамічних режимів. У більшості випадків математичний опис хімічних реакторів можна спростити, якщо припустити, що режим руху потоків речовин в них відповідає структурам повного перемішування або ідеального витіснення. Особливо спрощується математична модель реактора за відсутності теплового ефекту реакції, що наглядно ілюструється наступними прикладами.

*Приклад 1.* Вважаємо, що в реакторі ідеального перемішування (рис. 4.16) відбувається хімічна реакція, швидкість якої нескінченно велика, а тепловий ефект практично відсутній за рівнянням:



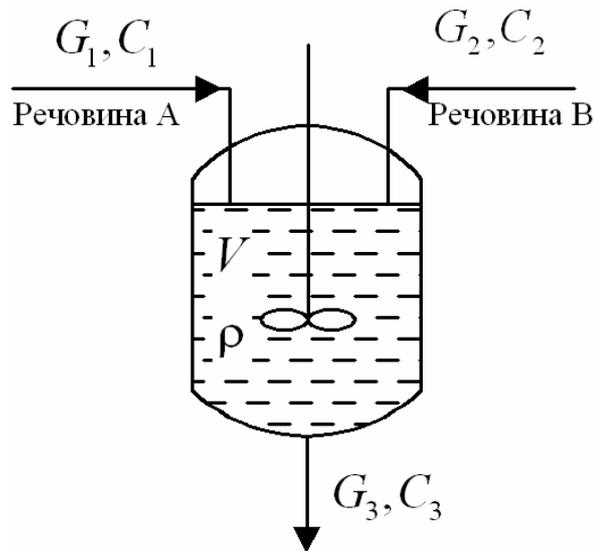


Рис. 4.16. Схема матеріальних потоків в хімічному реакторі ідеального перемішування.

При цьому, у реакторі підтримується надлишок речовини  $B$ .

Рівнянням статички такого процесу буде матеріальний баланс по речовині  $B$ .

$$G_2 C_2 - n \frac{G_1 C_1 M_B}{M_A} - G_3 C_3 = 0, \quad (4.191)$$

де  $G_1, G_2, G_3$  – масові витрати речовин  $A, B$  і  $C$  відповідно;  $M_A, M_B$  – молекулярна маса речовин  $A$  і  $B$ ;  $n$  – стехіометричний коефіцієнт реакції;  $C_1, C_2, C_3$  – масові концентрації речовин.

З урахуванням незмінності об'єму реакційної маси  $V$  запишемо рівняння динаміки реактора, тобто рівняння матеріального балансу по речовині в динамічному режимі:

$$G_2 C_2 - S G_1 C_1 - G_3 C_3 = V \frac{d(\rho C_3)}{dt}, \quad (4.192)$$

де  $\rho$  – густина реакційної маси;  $S = n \frac{M_B}{M_A}$  – стала величина.

Густина реакційної маси  $\rho$  в загальному виді нелінійно залежить від концентрації реагентів  $C$ . У вузькому діапазоні зміни концентрації, що має місце в реакторах безперервної дії, цю залежність можна прийняти лінійною. Тоді рівняння прийме такий вигляд:

$$V \frac{d(\rho C_3)}{dt} = V(\rho + aC_3) \frac{dC_3}{dt}, \quad (4.193)$$

де  $a$  – коефіцієнт пропорційності.

Після лінеаризації одержимо:

$$T \frac{dC_3}{dt} + \Delta C_3 = k_1 \Delta G_1 + k_2 \Delta G_2 + k_3 \Delta C_1 + k_4 \Delta C_2, \quad (4.194)$$

де постійна часу  $T$  і коефіцієнти підсилення  $k$  по різним каналам керування мають такий вигляд:

$$T = \frac{V(\rho + aC_3)_0}{(G_1 + G_2)_0}; \quad k_1 = \frac{SC_{10} - C_{30}}{(G_1 + G_2)_0}; \quad k_2 = \frac{C_{20} - C_{30}}{(G_1 + G_2)_0}; \quad k_3 = \frac{SG_{10}}{(G_1 + G_2)_0};$$

$$k_4 = \frac{G_{20}}{(G_1 + G_2)_0}.$$

Передатні функції реактора по всіх каналах описуються аперіодичною функцією першого порядку.

$$W_1(p) = \frac{k_1}{Tp + 1}; \quad W_2(p) = \frac{k_2}{Tp + 1}; \quad W_3(p) = \frac{k_3}{Tp + 1}; \quad W_4(p) = \frac{k_4}{Tp + 1}. \quad (4.195)$$

*Приклад 2.* Об'єкт керування – реактор ідеального перемішування в якому проходить екзотермічна реакція. Швидкість хімічної реакції  $w$  залежить від багатьох чинників: концентрацій реагуючих речовин, тиску, температури, наявності каталізатора. Якщо реакція проходить в рідкій фазі без каталізатору можна записати:

$$w = kC^m, \quad (4.196)$$

де  $k = Ae^{-\frac{E}{RT}}$  константа швидкості реакції згідно закону Ареніуса;  $m$  – порядок реакції;  $A$  – питома швидкість реакції, постійна;  $E$  – енергія активації;  $R$  – універсальна газова стала.

Для реакції нульового порядку (при  $m=0$ ) рівняння (4.196) має вигляд:

$$w = Ae^{-\frac{E}{RT}}. \quad (4.197)$$

У цьому випадку швидкість хімічної реакції не залежить від концентрацій реагентів, а тільки від температури. Схема такого об'єкту наведена на рис. 4.17.

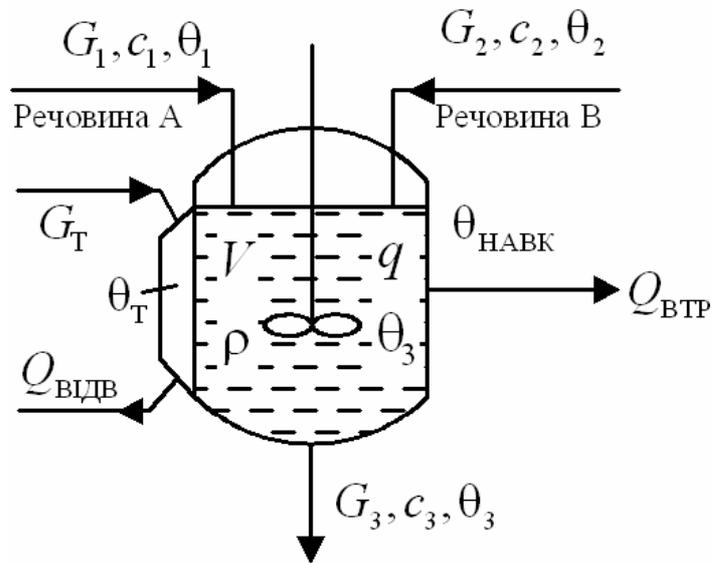


Рис. 4.17. Схема матеріальних і теплових потоків в хімічному реакторі ідеального перемішування:  $q$  – тепловий ефект реакції;  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  – температури вхідних продуктів та реакційної маси;  $\theta_T$  – середня температура теплоносія;  $\theta_{\text{НАВК}}$  – температура навколишнього середовища;  $G_1, G_2, G_3$  – витрати технологічних потоків;  $Q_{\text{ВТР}}$  – теплові втрати в навколишнє середовище;  $Q_{\text{ВДВ}}$  – кількість тепла, що відводиться в холодильній зоні;  $\rho$  – густина реакційної маси;  $V$  – об'єм реакційної маси;  $c_1, c_2, c_3$  – теплоємності.

Величини теплових потоків  $Q_{\text{ВТР}}$  і  $Q_{\text{ВДВ}}$  визначаються рівняннями:

$$Q_{\text{ВТР}} = \alpha_2 F_2 (\theta_3 - \theta_{\text{НАВК}}); \quad (4.198)$$

$$Q_{\text{ВДВ}} = \alpha_1 F_1 (\theta_3 - \theta_T), \quad (4.199)$$

де  $F_1, F_2$  – поверхня теплообміну з водою, що охолоджує і з навколишнім середовищем;  $\alpha_1, \alpha_2$  – коефіцієнти теплопередачі до теплоносія і до навколишнього середовища;

Рівнянням стаціонарного режиму реактора буде рівняння його енергетичного балансу:

$$G_1 c_{t1} \theta_1 + G_2 c_{t2} \theta_2 + V \rho w q - G_3 C_{t3} \theta_3 - Q_{\text{ВІДВ}} - Q_{\text{ВТР}} = 0. \quad (4.200)$$

Враховуючи зміни кількості теплоти, що акумулюється в реакційній масі та з урахуванням (4.198), (4.199.) і (4.200) запишемо рівняння динаміки реактора:

$$G_1 c_{t1} \theta_1 + G_2 c_{t2} \theta_2 + V \rho A e^{\frac{E}{RT}} q - G_3 c_{t3} \theta_3 - \alpha_1 F_1 (\theta_3 - \theta_T) - \alpha_2 F_2 (\theta_3 - \theta_{\text{НАВК}}) = V c_{t3} \frac{d\theta_3}{dt}. \quad (4.201)$$

Проводимо лінеаризацію рівняння (4.201) відносно змінних  $\theta_3, T, \theta_T$  та  $\theta_1$ , яке після перетворень прийме наступний вид:

$$V \rho c_{t3} \frac{d\Delta\theta_3}{dt} + B \Delta\theta_3 = G_1 c_{t1} \Delta\theta_1 + G_2 c_{t2} \Delta\theta_2 + \alpha_1 F_1 \Delta\theta_T, \quad (4.202)$$

або

$$T \frac{d\theta_3}{dt} + \theta_3 = k_1 \theta_1 + k_2 \theta_2 + k_3 \theta_T, \quad (4.203)$$

де коефіцієнти у виразах (4.202) і (4.203) дорівнюють:

$$B = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + G_3 c_{t3} - \frac{V \rho A E q}{RT^2} e^{\frac{E}{RT}};$$

$$T = \frac{V c_{t3}}{B}; \quad k_1 = \frac{G_{10} c_{t1}}{B}; \quad k_2 = \frac{G_{20} c_{t2}}{B}; \quad k_3 = \frac{\alpha_1 F_1}{B}.$$

Таким чином, динаміка реактора, у якому проходить екзотермічна реакція нульового порядку описується передатними функціями першого порядку, а задача керування такого реактора зводиться до стабілізації його теплового режиму.

*Приклад 3.* Об'єкт керування – реактор ідеального перемішування в якому проходить реакція ненульового порядку. За такої умови швидкість реакції залежить від двох чинників: температури і концентрації. Для реакції першого порядку ( $m=1$ ) швидкість реакції визначається за рівнянням:

$$w = A e^{\frac{E}{RT}} C. \quad (4.204)$$

Математична модель хімічного реактора складається з системи рівнянь енергетичного та матеріального балансів в статиці і динаміці.

Ці балансові рівняння для стаціонарного режиму утворюють наступну систему:

$$\begin{cases} G_1 C_1 - V \rho A e^{-\frac{E}{RT}} C_3 - G_3 C = 0; \\ G_1 c_{t_1} \theta_1 + G_2 c_{t_2} \theta_2 + V \rho A e^{-\frac{E}{RT}} C_3 q - G_3 c_{t_3} \theta - Q_{\text{ВТР}} - Q_{\text{ВІДВ}} = 0. \end{cases} \quad (4.205)$$

В динамічному режимі з урахуванням (4.198) і (4.199) система набуде вигляду:

$$\begin{cases} G_1 C_1 - V \rho A e^{-\frac{E}{RT}} C_3 - G_3 C = V \rho \frac{dc_3}{dt}; \\ G_1 c_{t_1} \theta_1 + G_2 c_{t_2} \theta_2 + V \rho A e^{-\frac{E}{RT}} C_3 q - G_3 c_{t_3} \theta - \alpha_1 F_1 (\theta_3 - \theta_T) - \\ - \alpha_2 F_2 (\theta_3 - \theta_{\text{навк}}) = V \rho c_{t_2} \frac{d\theta}{dt}. \end{cases} \quad (4.206)$$

Обираємо у якості змінних  $G_1, G_2, G_3, G_T, C_1, \theta_1, \theta_2, \theta_3, t_1$ . Лінеаризуємо систему рівнянь (4.206). Наприклад, якщо виконати лінеаризації відносно змінних  $C_3$  і  $\theta_3$ , то система прийме такий вигляд:

$$\begin{cases} \Delta(V \rho A e^{-\frac{E}{RT}} C_3) = V \rho A e^{-\frac{E}{RT}} C_{30} \frac{-E}{RT} \Delta\theta_3 + V \rho A e^{-\frac{E}{RT}} \Delta C_3; \\ \Delta(V \rho A e^{-\frac{E}{RT}} C_3 q) = V \rho A e^{-\frac{E}{RT}} C_{30} \frac{-E}{RT} q \Delta\theta_3 + V \rho A e^{-\frac{E}{RT}} q \Delta C_3. \end{cases} \quad (4.207)$$

Після лінеаризації і приведення подібних членів остаточно отримаємо:

$$\begin{cases} T_C \frac{dC_3}{dt} + \Delta C_3 = k_{1C} \Delta G_1 - k_{2C} \Delta G_2 + k_{3C} \Delta C_1 + k_{4C} \Delta\theta_3; \\ T_\theta \frac{d\theta_3}{dt} + \Delta\theta_3 = k_{1\theta} \Delta G_1 + k_{2\theta} \Delta G_2 - k_{3\theta} \Delta G_T + k_{4\theta} \Delta\theta_1 + k_{5\theta} \Delta\theta_2 + \\ + k_{6\theta} \Delta t_1 + k_{7\theta} \Delta C_3. \end{cases} \quad (4.208)$$

Постійні коефіцієнти у системі рівнянь (4.208 ) дорівнюють:

$$\begin{aligned}
 T_C &= \frac{V\rho}{B_C}; \quad T_C = \frac{V\rho c_{t3}}{B_\theta}; \quad k_{1C} = \frac{(C_{10} - C_{30})}{B_C}; \quad k_{2C} = \frac{C_{30}}{B_C}; \quad k_{3C} = \frac{G_{10}}{B_C}; \\
 k_{4C} &= V\rho A e^{-\frac{E}{RT}} \frac{E}{RT^2} - \frac{C_{30}}{B_C}; \quad k_{1\theta} = \frac{c_{t1}\theta_{10} - c_{t3}\theta_{30}}{B_\theta}; \quad k_{2\theta} = \frac{c_{t2}\theta_{20} - c_{t3}\theta_{30}}{B_\theta}; \\
 k_{3\theta} &= \left[ \frac{2c_{T0}\alpha_1 F_1}{2G_{T0}c + \alpha_1 F} - \frac{4G_{T0}c^2\alpha_1 F}{(2G_{T0}c + \alpha_1 F)^2} \right] \frac{(\theta_3 - t_1)_0}{B_\theta}; \\
 k_{4\theta} &= \frac{G_{10}c_{t1}}{B_\theta}; \quad k_{5\theta} = \frac{G_{20}c_{t2}}{B_\theta}; \quad k_{6\theta} = \frac{2G_T c_T \alpha_1 F_1}{(2G_T c_T + \alpha_1 F) B_\theta}; \\
 k_{7\theta} &= V\rho A e^{-\frac{E}{RT}} \frac{q}{B_\theta}; \quad B_C = V\rho A e^{-\frac{E}{RT}} + (G_1 + G_2)_0; \\
 B_\theta &= V\rho A e^{-\frac{E}{RT}} C_{30} q + (G_1 + G_2)_0 c_{t3} + \frac{2G_T c_T \alpha_1 F_1}{2G_T c_T + \alpha_1 F_1} + \alpha_2 F_2.
 \end{aligned}$$

Отже рівняння динаміки по основних каналах керування характеризується також першим порядком

$$T_0 \frac{dy}{dt} + y = k_1 z + k_2 x_1 - k_3 x_2. \quad (4.209)$$

*Приклад 4.* Особливе місце в системах автоматизації об'єктів хімічної технології займає вимірювання і регулювання  $pH$ .

Водневий показник  $pH$  є мірою активності іонів водню в розчині, тобто визначає ступінь кислотності або лужності цього розчину.  $pH$  обчислюється як негативний десятковий логарифм активності іонів водню  $H^+$ . У достатньо розведених розчинах використовується термін "концентрація".

$$pH = -\lg c. \quad (4.210)$$

Об'єктом моделювання є реактор, структурна схема потоків в якому наведена на рис.4.18

В апарат надходять декілька потоків з витратою  $G_1, G_2, G_3$  і  $G_4$ . Вихідний потік –  $G_5$ . Концентрація іонів водню у вхідних і вихідному потоках відповідно дорівнює  $C_1, C_2, C_3, C_5$ . В потоці  $G_4$  містяться аніони гідроксильної групи  $OH^-$  з концентрацією  $C_4$ , які нейтралізують іони водню. Великою, що регулюється є рівень  $pH$  в реакторі.

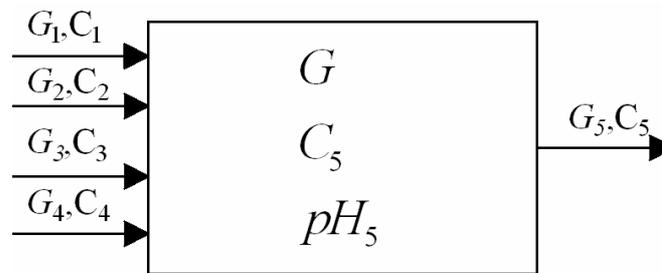


Рис.4.18. Структурна схема потоків в об'єкті регулювання  $pH$ .

В реакторі проходить хімічна реакція першого порядку з виділенням іонів водню. Тобто  $pH$  в реакторі зменшується. Швидкість хімічної реакції першого порядку має вигляд:

$$w = kC_5, \quad (4.211)$$

де  $k$  – константа хімічної реакції, яка визначається за рівнянням Ареніуса.

Необхідний в реакторі рівень  $pH$  підтримується шляхом нейтралізації надлишкових іонів водню  $H^+$  аніонами гідроксильної групи  $OH^-$ .

Рівняння загального матеріального балансу реактора та матеріального балансу за активними іонами водню матимуть відповідно наступний вигляд:

$$G_1 + G_2 + G_3 + G_4 = G_5; \quad (4.212)$$

$$G_1C_1 + G_2C_2 + G_3C_3 - G_4C_4 + G\omega = G_5C_5, \quad (4.213)$$

де  $G$  – маса речовини в реакторі, яка приймається сталою.

Вираз  $G_4C_4$  має знак "мінус", оскільки потік  $G_4$  містить аніони гідроксильної групи, що нейтралізують іони водню.

Враховуючи кількість акумульованих в реакторі іонів водню, одержимо рівняння динаміки  $pH$  в реакторі у вигляді:

$$G_1 C_1 + G_2 C_2 + G_3 C_3 - G_4 C_4 + G\omega - G_5 C_5 = G \frac{dG_5}{dt}. \quad (4.214)$$

З рівняння (4.210) одержимо

$$C_i = 10^{-pH_i}. \quad (4.215)$$

$$C_4 = 10^{-pOH_4}. \quad (4.216)$$

Підставивши залежності (4.215) і (4.216) у рівняння (4.214) одержимо наступний вираз:

$$G_1 10^{-pH_1} + G_2 10^{-pH_2} + G_3 10^{-pH_3} - G_4 10^{-pOH_4} - G_5 10^{-pH_5} + GAe^{\frac{E}{kT}} 10^{-pH_5} = -G 10^{-pH_5} \ln 10 \frac{dpH_5}{dt}. \quad (4.217)$$

Після лінеаризації рівняння (4.217) відносно змінних  $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, pH_1, pH_5$  і  $T$  одержимо:

$$T_o \frac{d\Delta pH_5}{dt} + \Delta pH_5 = N\Delta G_1 + M\Delta G_2 + F\Delta G_3 - R\Delta G_4 - y\Delta T + x\Delta pH_1, \quad (4.218)$$

де постійні коефіцієнти дорівнюють

$$B = 2,303 \cdot 10^{-pH_5} (G - GA_o e^{\frac{E}{RT}}); \quad T_o = \frac{2,303G 10^{-pH_5}}{B};$$

$$N = \frac{(10^{-pH_5} - 10^{-pH_1})}{B}; \quad M = \frac{(10^{-pH_5} - 10^{-pH_2})}{B};$$

$$F = \frac{(10^{-pH_5} - 10^{-pH_3})}{B}; \quad R = \frac{(10^{-pOH_4} + 10^{-pH_5})}{B};$$

$$x = \frac{2,303G_1 10^{-pH_1}}{B}; \quad y = \frac{GA_o E}{BRT^2} 10^{-pH_5} e^{\frac{E}{RT}}.$$

## 4.8. БІОХІМІЧНІ РЕАКТОРИ

Біохімічні реактори широко застосовуються в фармацевтичній, харчовій та нафтогазовій галузях і призначені для проведення в них реакції біохімічного перетворення речовини. Математична модель біохімічного реактору крім опису процесів, що відносяться до макрорівня (гідродина-

міка, кінетика тепло- і масоперенос) повинна також включати опис сукупності цих процесів з визначенням кінетики біосинтезу.

У якості приклада розглядається проточний біохімічний реактор з мішалкою, в якому проходить процес культивування (вирощування біомаси) анаеробних мікроорганізмів. Схема біохімічного реактору наведена на рис. 4.19а.

Процес роботи реактора протікає наступним чином. Живильний потік безперервно надходить в біохімічний реактор у кількості  $v$  ( $\text{м}^3/\text{с}$ ) з вмістом субстрату  $S_0$  ( $\text{кг}/\text{м}^3$ ). Робочий об'єм реактора  $V$  ( $\text{м}^3$ ). Концентрація біомаси в об'ємі реактора і на виході з нього дорівнює  $X$  ( $\text{кг}/\text{м}^3$ ), а субстрату –  $S$  ( $\text{кг}/\text{м}^3$ ). Відношення  $v/V$  ( $\text{с}^{-1}$ ) називають в біотехнології швидкістю розбавлення і позначають  $D$ .

Схема динамічних каналів біохімічного реактору наведена на рис. 4.19,б. Вхідними величинами є швидкість розбавлення  $D$  і концентрація субстрату в живильному потоці  $S_0$ , а вихідними - концентрація біомаси  $X$  і концентрація субстрату  $S$  в апараті.

Математична модель динамічного режиму біохімічного реактора включає в себе матеріальні баланси по біомасі і по субстрату.

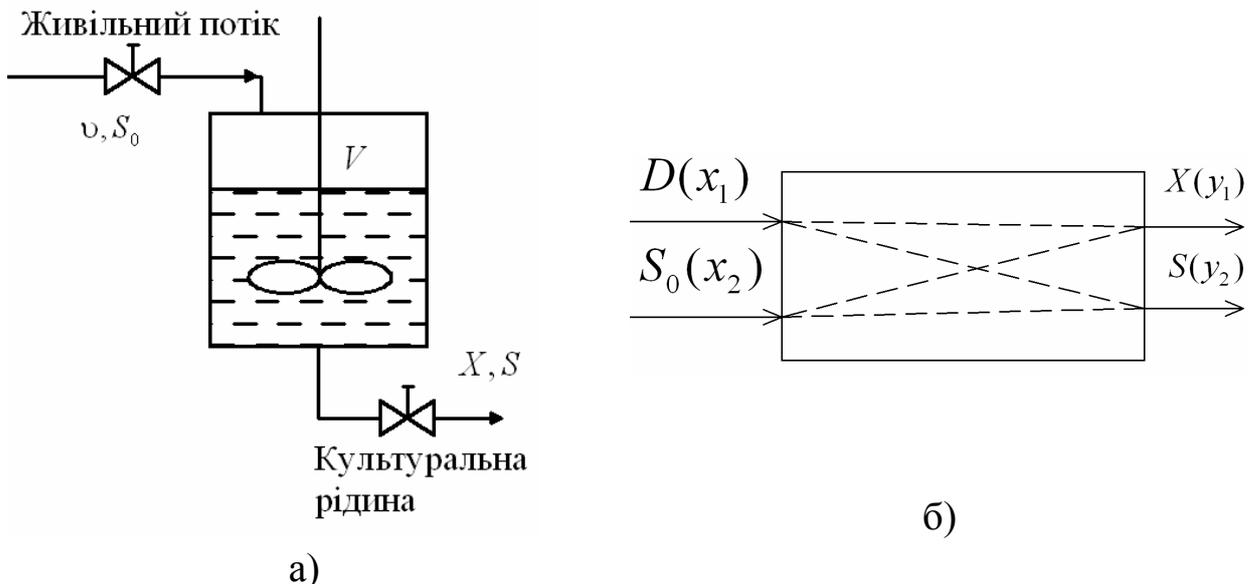


Рис. 4.19. Схема біохімічного реактору.

Матеріальний баланс по біомасі має вигляд:

$$\frac{dX}{dt} = -DX + \mu_m \frac{S}{k_s + S} X, \quad (4.219)$$

де  $\mu_m$  – максимальна швидкість утворення біомаси,  $\text{с}^{-1}$ ;  $\mu$  – швидкість утворення біомаси,  $\text{с}^{-1}$ ;  $k_s$  – константа Моно (концентрація субстрату, при якій  $\mu = \mu_m/2$ ),  $\text{г/м}^3$ .

Матеріальний баланс по субстрату визначається наступним рівнянням:

$$\frac{dS}{dt} = DS_0 - DS - \frac{1}{Y} \mu_m \frac{S}{k_s + S} X. \quad (4.220)$$

Для спрощення математичної моделі біореактору введемо безрозмірні коефіцієнти:

$$y = \frac{1}{k_s} S; \quad y_0 = \frac{1}{k_s} S_0; \quad x = \frac{1}{k_s Y} X; \quad \delta = \frac{1}{\mu_m} D; \quad \tau = \mu_m t.$$

Звідки одержимо наступні вирази:

$$S = k_s y; \quad S_0 = k_s y_0; \quad X = k_s Y x; \quad D = \mu_m \delta; \quad t = \frac{1}{\mu_m} \tau. \quad (4.221)$$

Підставивши (4.221) в рівняння (4.219) і (4.220) після перетворень одержимо математичну модель динаміки біохімічного реактору у безрозмірному виді

$$\frac{dx}{d\tau} = -\delta x + \frac{y}{1+y} x. \quad (4.222)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \delta y_0 - \delta y - \frac{y}{1+y} x. \quad (4.223)$$

Вихідні величини біореактору  $x$  і  $y$  є взаємозалежними величинами, а система рівнянь (4.222), (4.223) є нелінійною. Проведемо лінеаризацію цих рівнянь окіл стаціонарного робочого режиму ( $\delta = \delta^0; y_0 = y_0^0; x = x^0; y = y^0$ ). Тоді математична модель стаціонарного робочого режиму біохімічного реактора може бути представлена нелінійною системою наступних алгебраїчних рівнянь:

$$-\delta^0 x^0 + \frac{y^0}{1+y^0} = 0. \quad (4.224)$$

$$\delta^0 y_0^0 - \delta^0 y^0 - \frac{y^0}{1+y^0} x^0 = 0. \quad (4.225)$$

Система рівнянь (4.224) - (4.225) має два варіанта рішення у залежності від режимів роботи. Перший варіант (режим вимивання біомаси) має місце за умови  $\delta^0 \geq \delta_B^0$ , де  $\delta_B^0 = \frac{y_0^0}{1+y_0^0}$  – швидкість вимивання, що визначається виразами

$$x^0 = 0; y^0 = 0.$$

Другий варіант (режим утворення біомаси) спостерігається за умови  $\delta^0 < \delta_B^0$  і визначається виразами

$$y^0 = \frac{\delta^0}{1-\delta^0}; \quad x^0 = y_0^0 - \frac{\delta^0}{1-\delta^0}. \quad (4.226)$$

Лінеаризовані рівняння навколо стаціонарного режиму утворення біомаси (4.226) мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta x}{d\tau} = & -\delta^0 x^0 - \delta^0 \Delta x - x^0 \Delta \delta + \frac{y^0}{1+y^0} x^0 + \\ & + \frac{y^0}{1+y^0} \Delta x + \frac{x^0}{(1+y^0)^2} \Delta y. \end{aligned} \quad (4.227)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta y}{d\tau} = & \delta^0 y_0^0 + \delta^0 \Delta y_0 + y_0^0 \Delta \delta - \delta^0 y^0 - \delta^0 \Delta y - \\ & - y^0 \Delta \delta - \frac{y^0}{1+y^0} x^0 - \frac{y^0}{1+y^0} \Delta x - \frac{x^0}{(1+y^0)^2} \Delta y. \end{aligned} \quad (4.228)$$

Відніmemo доданки рівнянь (4.224) і (4.225) з рівнянь (4.227) і (4.228), та враховуючи (4.226) одержимо таку систему:

$$\begin{cases} \frac{d\Delta x}{d\tau} = \frac{x^0}{(1+y^0)^2} \Delta y - x^0 \Delta \delta; \\ \frac{d\Delta y}{d\tau} = -\delta^0 \Delta x - \left[ \frac{x^0}{(1+y^0)^2} + \delta^0 \right] \Delta y + (y_0^0 - y^0) \Delta \delta + \delta^0 \Delta y_0. \end{cases} \quad (4.229)$$

Виразимо коефіцієнти перед приростами через вхідні змінні біореактору та швидкість вимивання і введемо позначення

$$B = x^0 = y_0^0 - \frac{\delta^0}{1-\delta^0} = \frac{(1+y_0^0)}{1-\delta^0} (\delta_B^0 - \delta^0).$$

$$A = \frac{x^0}{(1+y^0)^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta^0}{1-\delta^0}\right)^2} \frac{1+y_0^0}{1-\delta^0} (\delta_B^0 - \delta^0) =$$

$$= (1-\delta^0)(1+y_0^0)(\delta_B^0 - \delta^0).$$

Остаточно математична модель динаміки біореактора буде складатись з системи двох рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{d\Delta x}{d\tau} = A\Delta y - B\Delta \delta; \\ \frac{d\Delta y}{d\tau} = -\delta^0 \Delta x - (\delta^0 + A)\Delta y + B\Delta \delta + \delta^0 \Delta y_0. \end{cases} \quad (4.230)$$

Таким чином біореактор це двоємнісний об'єкт із взаємозалежними вихідними параметрами. Його входи ( $\delta$  і  $y_0$ ) впливають на обидва виходи ( $x$  і  $y$ ). Зміна входу  $\delta$  безпосередньо призводить до зміни обох вихідних змінних, а зміна входу  $y_0$  спочатку викликає зміну змінної  $y$ , а потім через неї і змінної  $x$ .

## 4.9. МАСООБМІННІ АПАРАТИ

Масообмінні апарати і установки широко використовуються в хімічних та фармацевтичних технологіях для вирішення задач розділення рідких і газових гомогенних сумішей, їх концентрування, а також захисту навколишнього середовища. Вони розрізняються агрегатним станом взаємодіючих фаз, характером їх руху, наявністю паралельних процесів теп-

лообміну. До масообмінних процесів відносять абсорбцію, адсорбцію, десорбцію, екстракцію, ректифікацію, висушування, кристалізацію та інші.

Особливість масообмінних установок як об'єктів управління полягає у наявності різного роду випадкових збурюючих впливів, що вимагає застосування декількох каналів керування, великі розміри основних апаратів, в яких проводиться процес масообміну. Звідси складання математичного опису є досить складним завданням, а отримані диференціальні рівняння та передатні функції не завжди мають стандартний вигляд.

Нижче розглянуті окремі приклади моделювання масообмінних апаратів і установок з метою отримання загальних рівнянь динаміки. Ці рівняння можуть бути використані як і в попередніх випадках для отримання передатних функцій методом лінеаризації, що достатньо відображено вищенаведеними прикладами. Тому в подальшому розглянуто визначення основних динамічних зв'язків між параметрами процесів з метою вибору основних каналів керування.

**Випарний апарат** є складовою частиною випарних установок, які застосовуються для підвищення концентрації вихідного розчину або виділення чистого розчинника. Найбільш поширені випарні установки безперервної дії.

Структурна схема випарного апарату з природною циркуляцією і виносною камерою, що гріє, наведена на рис.4.20. Установка працює наступним чином. Вихідний розчин подається по трубах кип'ятильника 1, де нагрівається до температури кипіння з утворенням парорідинної суміші, яка далі надходить в сепаратор. У сепараторі 2 парорідинна суміш розділяється на пари розчинника і концентрований розчин.

Пари розчинника проходять через бризкоуловлювач 3 і виводяться з процесу з верху сепаратора у вигляді парового потоку  $G_{\Pi}$ . Виділена рідка фаза з парів розчинника повертається в кип'ятильник 1 по циркуляційній трубі 4. Сконцентрований розчин у вигляді потоку  $G_K$  виводиться з низу сепаратора.

Схема динамічних каналів випарної установки наведена на рис.4.21. У якості керуючих змінних можуть бути витрати теплоносія  $G_T$ , первинного розчину  $G_p$ , пари із сепаратора  $G_{\Pi}$  і концентрованого розчину  $G_K$ .

Збурюючи змінні – концентрація розчину на вході  $C_p$ , температури теплоносія  $\theta_T$  і первинного розчину  $\theta_p$ .

Вихідними параметрами, що підлягають регулюванню, є наступні: концентрація концентрованого розчину  $C_K$ , рівень розчину в сепараторі  $h_K$ ; температура в апараті  $\theta_{АП}$  і – тиск в сепараторі  $P_{\Pi}$ .

Найчастіше регулювання концентрації розчину  $C_K$  здійснюють за непрямим показником – температурною депресією (різницею температур кипіння розчину і розчинника).

Математична модель динаміки випарного апарату складається з наступних рівнянь.

Покомпонентний матеріальний баланс по рідині має вид:

$$\rho_K S_{\text{сеп}} h_K \frac{dC_K}{dt} = G_P C_P - G_K C_K, \quad (4.231)$$

де  $S_{\text{сеп}}$  – площа перерізу сепаратора;  $h_K$  – рівень розчину в сепараторі;  $\rho_K$  – густина концентрованого розчину.

Енергетичний баланс випарної установки:

$$\begin{aligned} (\rho_{\Pi} V_{\Pi} c_{p\Pi} + \rho_K V_K c_{pK}) \frac{d\theta_{АП}}{dt} = G_T^{\text{ВХ}} c_{pT} \theta_T^{\text{ВХ}} + \\ + G_P c_{pP} \theta_P - G_T^{\text{ВІХ}} c_{pT} \theta_T^{\text{ВІХ}} - G_K c_{pK} \theta_K - G_{\Pi} r_{\Pi} \pm Q_{\text{конц}} \end{aligned}, \quad (4.232)$$

де  $V_{\Pi}$  – об'єм парової фази в сепараторі;  $V_K$  – об'єм рідини в сепараторі;  $\theta_{АП}$  – температура в апараті ( $\theta_{АП} = \theta_K = \theta_{\Pi}$ );  $c_{p\Pi}, c_{pK}, c_{pT}, c_{pP}$  – питомі теплоємності пари, концентрованого розчину, теплоносія і первинного розчину;  $Q_{\text{конц}} = -\Delta q G_K$  – теплота розчинення;  $\Delta q = q_K(C_K) - q_P(C_P)$  – тепловий ефект розчинення згідно закону Геса;  $q_P, q_K$  – інтегральні теплоти розчинення на початку і в кінці процесу.

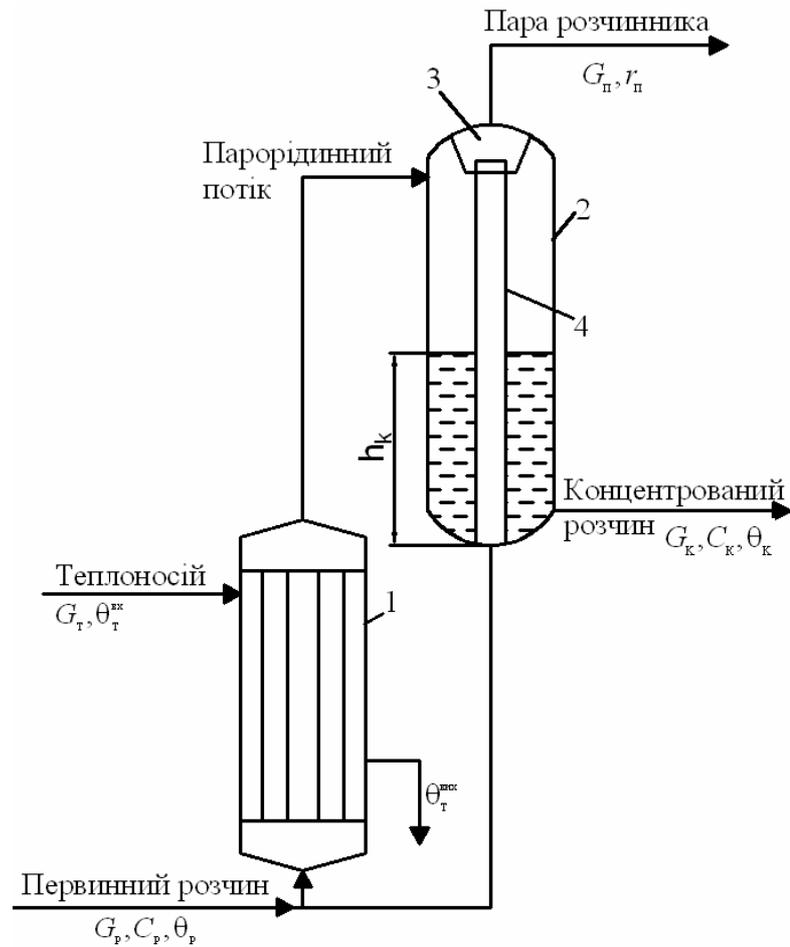


Рис.4.20. Структурна схема випарної установки: 1 – гріюча камера; 2 – сепаратор; 3 – бризкоуловлювач; 4 – циркуляційна труба.

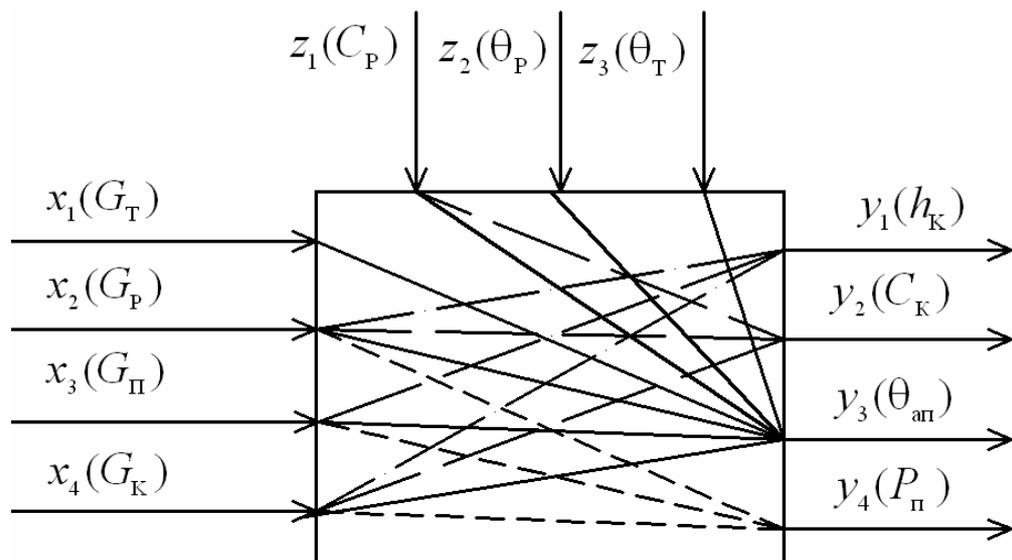


Рис.4.21. Схема динамічних каналів випарної установки.

Матеріальний баланс по рідкій фазі (для розчину)

$$\rho_K S_{\text{СЕП}} \frac{dh_K}{dt} = G_P - G_K - G_{\Pi}. \quad (4.233)$$

Матеріальний баланс по паровій фазі (для розчину)

$$\frac{V_{\Pi} M_{\Pi}}{R \theta_{\Pi}} \frac{dP_{\Pi}}{dt} = G_P - G_K - G_{\Pi}, \quad (4.234)$$

де  $M_{\Pi}$  – мольна маса парової фази (розчинника), кг/моль;  $P_{\Pi}$  – тиск пари в сепараторі;  $\theta_{\Pi}$  – температура в сепараторі ( $\theta_{\text{АП}} = \theta_K = \theta_{\Pi}$ ).

Матеріальний баланс по рідкій фазі (для теплоносія)

$$\rho_T S_T \frac{dh_T}{dt} = G_T^{\text{ВХ}} - G_T^{\text{ВИХ}}, \quad (4.235)$$

де  $h_T$  – рівень теплоносія в міжтрубному просторі;  $S_T$  – площа перерізу міжтрубного простору.

Матеріальний баланс по паровій фазі (для теплоносія)

$$\frac{V_T^{\text{МТР}} M_T}{R \theta_T} \frac{dP_T^{\text{МТР}}}{dt} = G_T^{\text{ВХ}} - G_T^{\text{ВИХ}}, \quad (4.236)$$

де  $M_T$  – мольна маса парової фази (теплоносія), кг/моль;  $P_T^{\text{МТР}}$  – тиск теплоносія в міжтрубному просторі кип'ятильника;  $\theta_T$  – температура теплоносія;  $V_T^{\text{МТР}}$  – об'єм парової фази теплоносія в міжтрубному просторі кип'ятильника.

Таким чином математична модель випарної установки описує динамічні властивості об'єкта по наступним каналам керування: "концентрація розчину на виході  $C_k$  – витрата первинного розчину", "тиск в сепараторі  $P_{\Pi}$  – витрата пари розчинника  $G_{\Pi}$ ", "рівень в сепараторі  $h_k$  – витрата концентрованого розчину  $G_p$ ".

**Ректифікаційна установка** призначена для розділення рідких сумішей, складові яких мають різну температуру кипіння. Показником ефективності процесу ректифікації є склад цільового продукту. Залежно від

технологічних особливостей у якості цільового продукту можуть виступати як дистиллят, так і кубовий залишок.

Ректифікаційна установка є складним об'єктом керування зі значним часом запізнювання, з великим числом параметрів, що характеризують процес, численними взаємозв'язками між ними і т. п. Схема ректифікаційної установки наведена на рис.4.22.

Робота установки полягає у наступному. Первинна суміш  $G_{ж}$  нагрівається в підігрівачі потоку живлення 2 до температури кипіння  $\theta_{ж}^0$  і подається в колону 1 на тарілку живлення ( $i = f$ ). Вихідна суміш стікає по тарілках нижньої частини колони у вигляді рідинного потоку  $G_x$  в куб колони, беручи участь у масообмінних процесах з паровим потоком  $G_y$ . З куба колони виводиться кубовий продукт  $G_k$ . Частина кубового продукту надходить до кип'ятильнику 3, де випаровується з утворенням парового потоку  $G_y^0$ , який подається у низ колони. Паровий потік піднімається вгору колони, контактуючи з рідким потоком і збагачуючись цільовим компонентом. Збагачений цільовим компонентом паровий потік  $G_y^n$  виводиться з верху колони і подається в дефлегматор 4, де конденсується. Конденсат збирається у збірнику флегми 5. Зі збірника флегми відбирається два потоки: потік дистилляту  $G_d$  – цільовий продукт; потік флегми  $G_{\phi}$  – рідка фаза, яка використовується для зрошення верха колони.

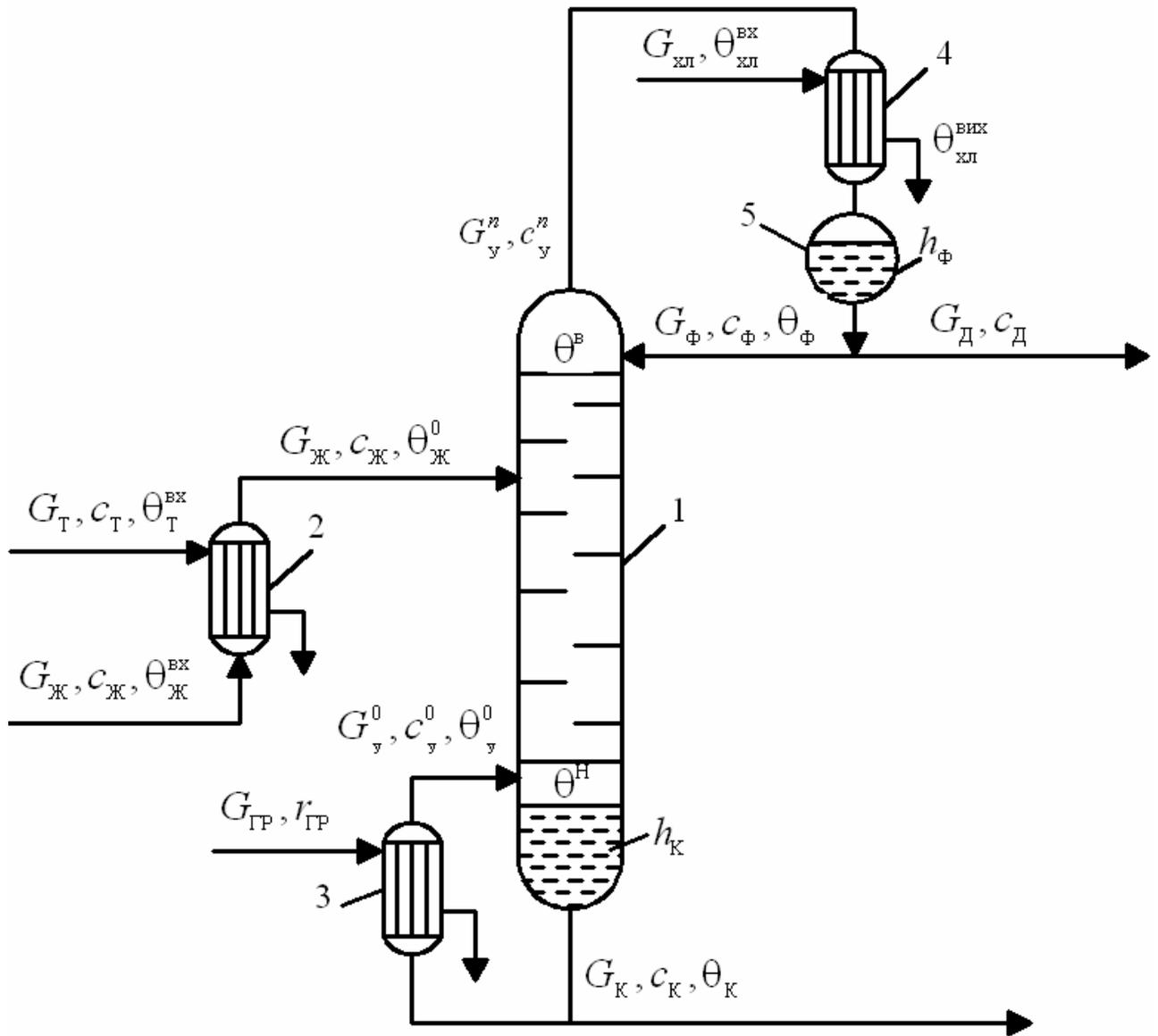


Рис. 4.22. Схема ректифікаційної установки: 1 – ректифікаційна колона; 2–підігрівач; 3– кип'ятильник; 4– дефлегматор; 5– збірник флегми.

Структурна схема матеріальних потоків ректифікаційної установки наведена на рис.4.23.

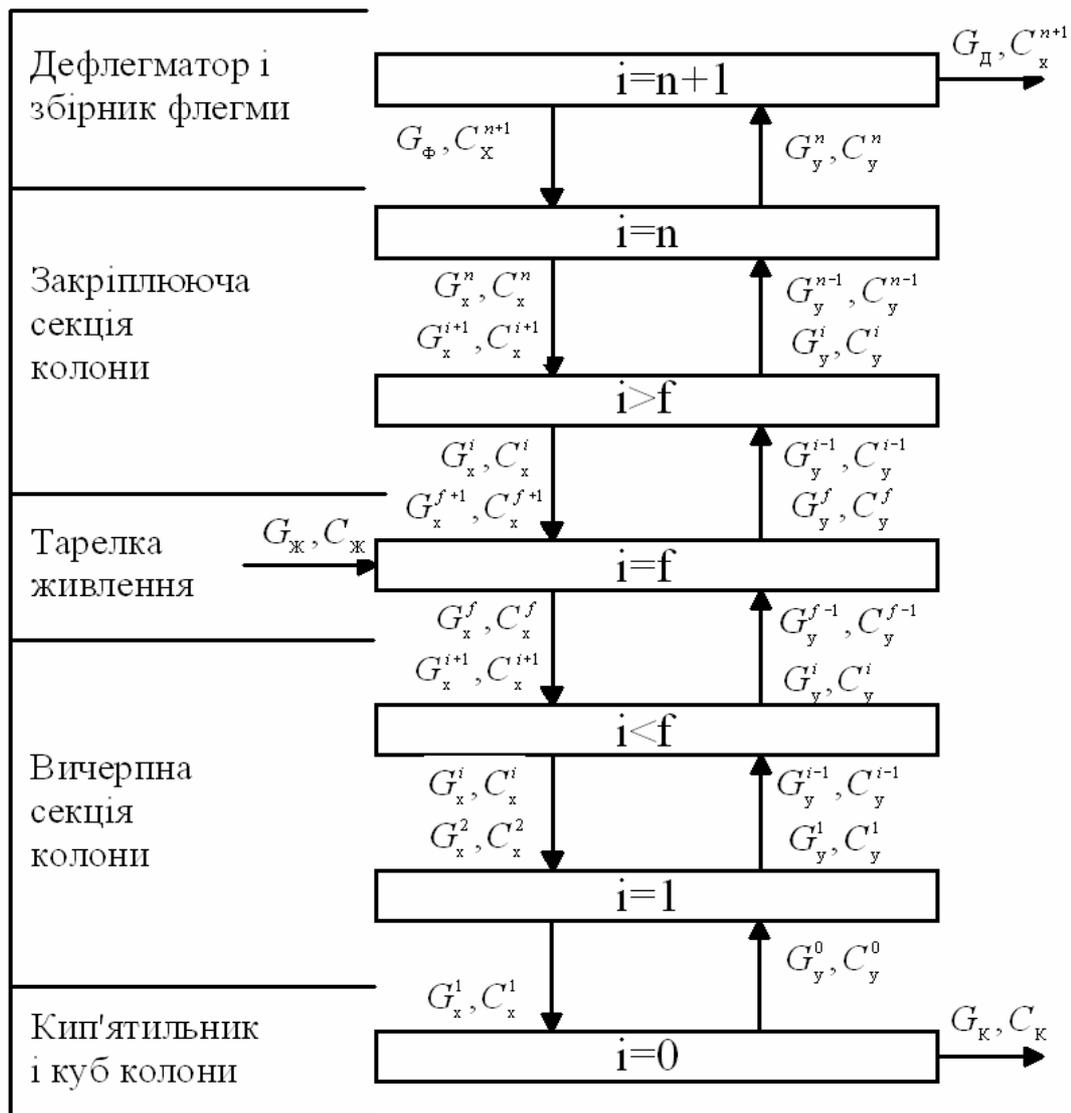


Рис.4.23. Структурна схема матеріальних потоків ректифікаційної установки.

Математичний опис куба і кип'ятильника (низ колони) згідно рис. 4.24 складається з наступних рівнянь.

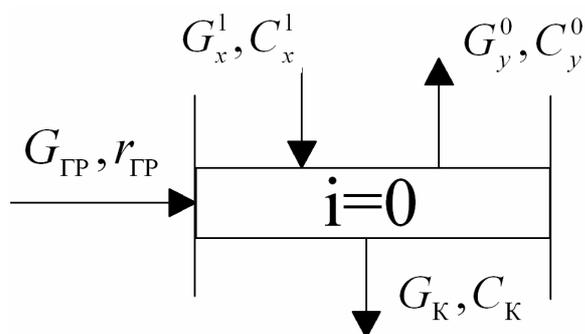


Рис 4.24. Структурна схема низу колони.

### Енергетичний баланс низу колони

$$\rho_K V_K c_{pK} \frac{d\theta_H}{dt} = G_{ГР} r_{ГР} + G_X^l c_{pX}^l \theta_X^l - G_y^0 r_K - G_K c_{pK} \theta_H, \quad (4.237)$$

де  $\rho_K$  – густина кубової рідини;  $V_K$  – об'єм кубової рідини;  $c_{pK}, c_{pX}^l$  – питомі теплоємності;  $G_X^l, G_K, G_y^0$  – масові витрати потоків в кубі колони;  $r_{ГР}$  – питома теплота конденсації пари;  $r_K$  – питома теплота випаровування кубової рідини;  $\theta_i$  – температура низу колони ( $\theta_i = \theta_0$ ).

### Енергетичний баланс кип'ятильника

$$G_y^0 r_K = G_{ГР} r_{ГР}. \quad (4.238)$$

### Матеріальний баланс по всій речовині

$$\rho_K S_K \frac{dh_K}{dt} = G_X^l - G_K - G_y^0, \quad (4.239)$$

де  $\rho_K$  – густина кубової рідини;  $S_K$  – переріз куба колони;  $h_K$  – рівень кубової рідини.

### Матеріальний баланс по легколеткому компоненту

$$M_0 \frac{dC_x^0}{dt} = G_X^l C_x^l - G_K C_x^0 - G_y^0 C_y^0, \quad (4.240)$$

де  $M_0$  – маса рідини в нижній частині колони.

Отримані рівняння (4.237 – 4.240) дозволяють визначити схему динамічних каналів низу ректифікаційної колони, яка може бути представлена у вигляді рис. 4.25.

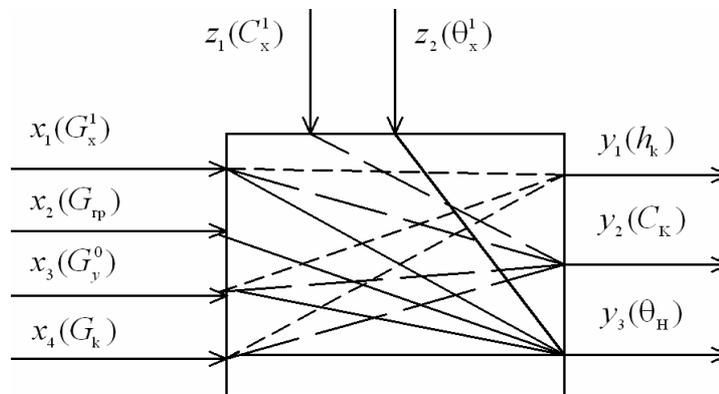


Рис.4.25. Схема динамічних каналів низу колони.

Математичний опис верха колони згідно рис. 4.26, 4.27 і 4.28 містить наступні рівняння.

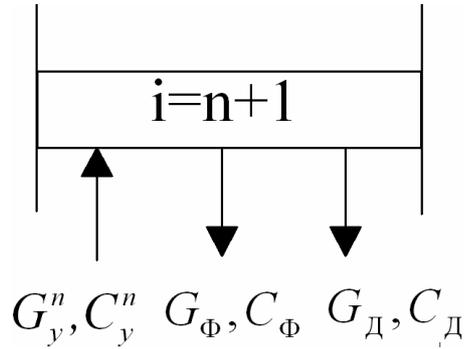


Рис.4.26. Структурна схема дефлегматора з флегмовою ємністю.

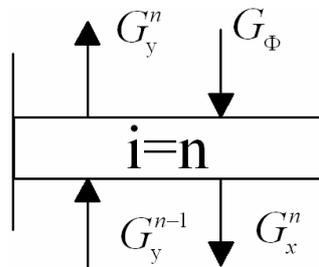


Рис. 4.27. Структурна схема  $n$ -ої тарілки.

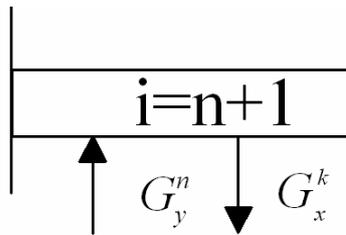


Рис.4.28. Структурна схема дефлегматора без флегмової ємності.

Матеріальний баланс по всій речовині

$$\rho_{\Phi} S_{\Phi} \frac{dh_{\Phi}}{dt} = G_y^n - G_{\Phi} - G_{\text{Д}}, \quad (4.241)$$

де  $\rho_{\Phi}$  – густина флегми;  $S_{\Phi}$  – переріз флегмової ємності;  $h_{\Phi}$  – рівень флегми  $G_y^n, G_{\Phi}, G_{\text{Д}}$  – масові витрати.

Матеріальний баланс за цільовим компонентом

$$M_{n+1} \frac{dC_D}{dt} = G_y^n C_y^n - G_\Phi C_x^{n+1} - G_D C_x^{n+1} \quad (4.242)$$

Енергетичний баланс верха колони

$$M_x^n c_{px}^n \frac{d\theta_B}{dt} = G_y^{n-1} c_{py}^{n-1} \theta_y^{n-1} - G_y^n c_{py}^n \theta_B + \\ + G_\Phi c_{p\Phi} \theta_\Phi - G_x^n c_{px}^n \theta_B, \quad (4.243)$$

де  $M_x^n$  – маса парової фази наверху колони;  $c_{px}^n, c_{py}^{n-1}, c_{py}^n, c_{p\Phi}$  – питомі теплоємності парової та рідкої фази на  $n$ -ій тарілці;  $G_y^{n-1}, G_y^n, G_x^n, G_{yn-1}, G_{yn}, G_{xn}$  – витрати парової та рідкої фази на  $n$ -ій тарілці;  $G_\Phi$  – витрата флегми.

Баланс по паровій фазі

Рівняння динаміки дефлегматора

$$\frac{VM_B}{R\theta^B} \frac{dP_B}{dt} = G_y^n - G_x^K, \quad (4.244)$$

де  $G_x^K$  залежить від кількості холодоагенту  $G_{xЛ}$  і може бути одержане із рівняння теплового балансу конденсатора

$$G_y^K r_{yК} = G_{xЛ} c_{pХЛ} \Delta\theta_{xЛ}. \quad (4.245)$$

Згідно рівнянь (4.241 – 4.245) схема динамічних каналів верха колони представлена на рис. 4.29

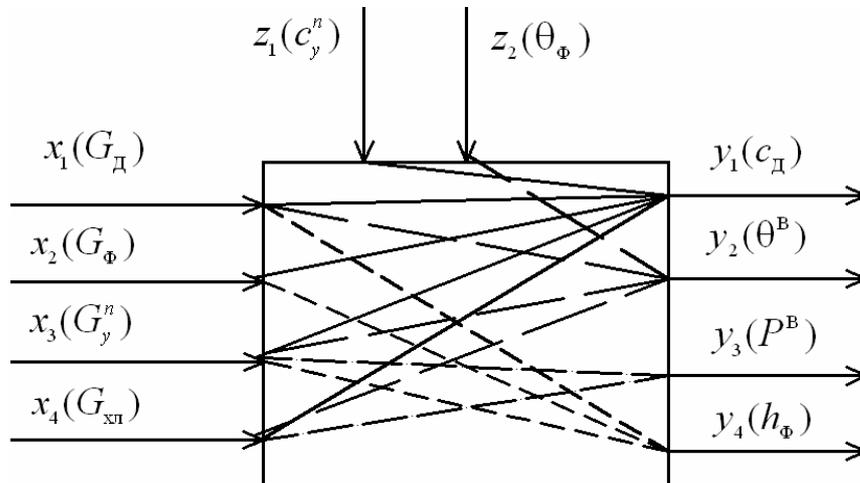


Рис.4.29. Схема динамічних каналів верха колони.

Енергетичний баланс підігрівача потоку живлення визначається рівнянням

$$\rho_{\text{ж}} V_{\text{ж}} c_{\text{рж}} \frac{d\theta_{\text{ж}}^0}{dt} = G_{\text{т}} c_{\text{рт}} \theta_{\text{т}}^{\text{вх}} - G_{\text{т}} c_{\text{рт}} \theta_{\text{т}}^{\text{вих}} + G_{\text{ж}} c_{\text{рж}} \theta_{\text{ж}} - G_{\text{ж}} c_{\text{рж}} \theta_{\text{ж}}^0, \quad (4.246)$$

де  $\theta_{\text{т}}^{\text{вх}}, \theta_{\text{т}}^{\text{вих}}, \theta_{\text{ж}}, \theta_{\text{ж}}^0$  – температури потоків теплоносія і живлення на вході і виході з теплообмінника;  $V_{\text{ж}}$  – об'єм потоку живлення в трубах теплообмінника;  $c_{\text{рж}}, c_{\text{рт}}$  – питомі теплоємності потоків живлення та теплоносія;  $G_{\text{т}}, G_{\text{ж}}$  – масові витрати теплоносія і живлення.

У відповідності з цим рівнянням схема динамічних каналів підігрівача наведена на рис. 4.30.

Математична модель ректифікаційної установки описує динамічні властивості об'єкта по наступним каналам керування: "температура верха колони  $\theta_{\text{в}}$  – витрата флегми  $G_{\text{ф}}$ ", "тиск верха колони  $P_{\text{в}}$  – витрата холодоагенту  $G_{\text{хл}}$  в дефлегматор", "рівень флегми в збірнику  $h_{\text{ф}}$  – відбір дистилляту  $G_{\text{д}}$ ", "рівень в кубі колони  $h_{\text{к}}$  – витрата кубового продукту  $G_{\text{к}}$ ", "температура вихідного розчину на вході в колону  $\theta_{\text{ж}}^0$  – витрата теплоносія  $G_{\text{т}}$ ".

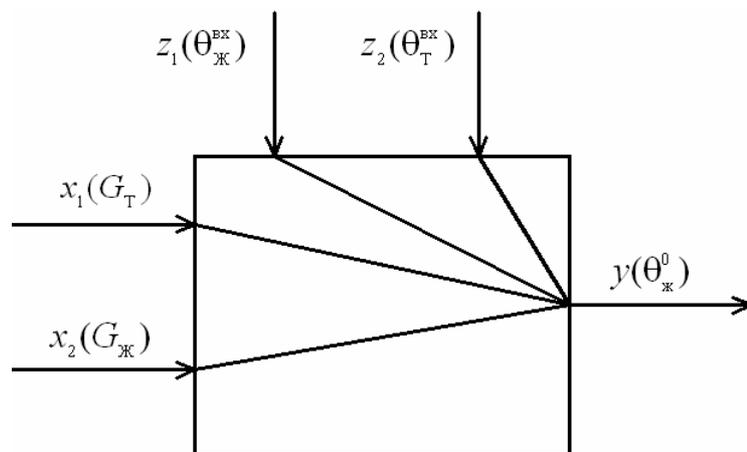


Рис.4.30. Схема динамічних каналів підігрівача.

**Абсорбційна установка** призначена для поглинання певних компонентів вихідної газової суміші при її контактуванні з рідиною (абсорбентом). Управління процесом абсорбції полягає у стабілізації концентрації заданого

компонента у збідненому газі, а також у дотриманні матеріального і енергетичного балансів абсорбційної установки. На рис. 4.31 наведена типова схема абсорбційної установки з насадковою колоною і двома холодильниками на лініях вхідних потоків.

У відповідності зі схемою первинна газова суміш  $G_{\Gamma}$  і абсорбент  $G_A$  охолоджуються в холодильниках 1 і 2 до заданих температур  $\theta_{\Gamma}^0$  і  $\theta_A^0$  і протитоком подаються в колону 3. У колоні 3 відбувається вилучення цільового компонента з вихідної газової суміші за допомогою рідкого абсорбенту. В результаті масообмінного процесу між газовою і рідкою фазами отримують: у нижній частині колони – насичений абсорбент  $G_{HA}$  з концентрацією цільового компонента  $C_{HA}$ , а верхній частині колони – збіднену газову суміш  $G_{3\Gamma}$  з концентрацією цільового компонента  $C_{3\Gamma}$ .

Математична модель абсорбційної установки складається з наступних основних рівнянь матеріального та енергетичного балансів.

Матеріальний баланс за цільовим компонентом в газовій фазі.

$$\rho_{3\Gamma} S_{АП} (H_{АП} - h_{HA}) \frac{dC_{3\Gamma}}{dt} = G_{\Gamma} C_{\Gamma} - G_{3\Gamma} C_{3\Gamma} - m_{\Gamma}^{HA}, \quad (4.247)$$

де  $h_{HA}$  – рівень абсорбенту;  $H_{АП}$  – висота колони;  $S_{АП}$  – площа перерізу колони;  $\rho_{3\Gamma}$  – густина газу;  $m_{\Gamma}^{HA}$  – маса цільового компонента, що переходить з газової фази в рідку в одиницю часу (визначається рівнянням масопередачі).

Матеріальний баланс за цільовим компонентом в насиченому абсорбенті.

$$\rho_{HA} S_{АП} h_{HA} \frac{dC_{HA}}{dt} = m_{\Gamma}^{HA} + G_A C_A - G_{HA} C_{HA}, \quad (4.248)$$

де  $\rho_{HA}$  – густина абсорбенту.

Матеріальний баланс за загальною кількістю цільового компонента в процесі абсорбції.

$$\rho_{3\Gamma} S_{АП} (H_{АП} - h_{HA}) \frac{dC_{3\Gamma}}{dt} = G_{\Gamma} C_{\Gamma} - G_{3\Gamma} C_{3\Gamma} + G_A C_A - G_{HA} C_{HA}. \quad (4.249)$$

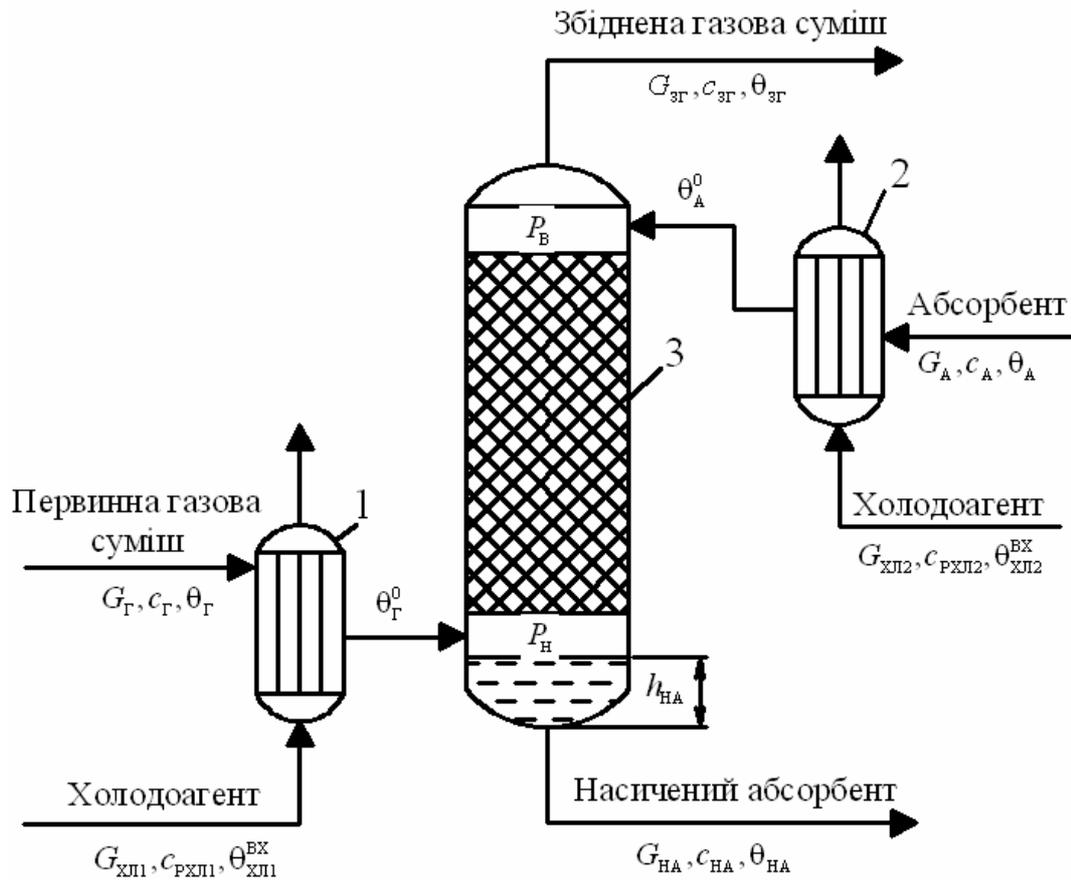


Рис.4.31. Схема абсорбційної установки: 1,2 –холодильники; 3– колона.

Матеріальний баланс по рідкій фазі.

$$\rho_{\text{НА}} S_{\text{АП}} \frac{dh_{\text{НА}}}{dt} = G_{\text{А}} + m_{\Gamma}^{\text{НА}} - G_{\text{НА}}. \quad (4.250)$$

Матеріальний баланс по газовій фазі.

$$\frac{V_{\text{ЗГ}} M_{\text{ЗГ}}}{R \theta_{\text{ЗГ}}} \frac{dP_{\text{ЗГ}}}{dt} = G_{\Gamma} - G_{\text{ЗГ}} - m_{\Gamma}^{\text{НА}}, \quad (4.251)$$

де  $M_{\text{ЗГ}}$  – мольна маса збідненої газової суміші;  $P_{\text{ЗГ}}$  – тиск в колоні;  $\theta_{\text{ЗГ}}$  – температура газу в колоні;  $V_{\text{ЗГ}}$  – об'єм газової фази в колоні.

Енергетичний баланс для холодильника 1 вихідної суміші.

$$\rho_{\Gamma} V_{\Gamma} c_{\Gamma} \frac{d\theta_{\Gamma}^0}{dt} = G_{\Gamma} c_{\Gamma} \theta_{\Gamma} + G_{\text{ХЛ1}} c_{\text{РХЛ1}} \theta_{\text{ХЛ1}}^{\text{ВХ}} - G_{\Gamma} c_{\Gamma} \theta_{\Gamma}^0 - G_{\text{ХЛ1}} c_{\text{РХЛ1}} \theta_{\text{ХЛ1}}^{\text{ВИХ}}. \quad (4.252)$$

Енергетичний баланс для холодильника 2 абсорбенту.

$$\rho_A V_A c_{PA} \frac{d\theta_A^0}{dt} = G_A c_{PA} \theta_A + G_{XЛ2} c_{PXЛ2} \theta_{XЛ2}^{BX} -$$

$$-G_A c_{PA} \theta_A^0 - G_{XЛ2} c_{PXЛ2} \theta_{XЛ2}^{BIX} . \quad (4.253)$$

Схема динамічних зв'язків установки згідно отриманих рівнянь математичної моделі наведена на рис. 4.32.

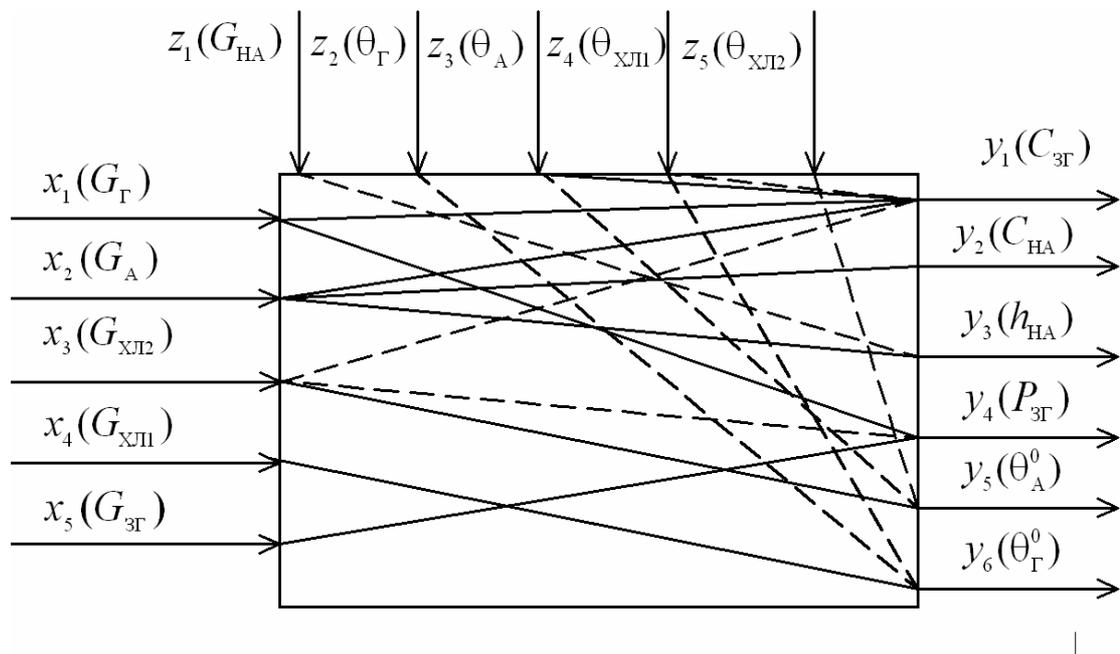


Рис. 4.32. Схема динамічних каналів абсорбційної установки.

Таким чином математична модель абсорбційної установки описує динамічні властивості об'єкта по наступним основним каналам керування: "концентрація збідненої газової  $C_{3Г}$  – витрата газової суміші  $G_\Gamma$ ", "концентрація насиченого абсорбенту  $C_{HA}$  – витрата абсорбенту  $G_A$ ", "рівень абсорбенту  $h_{HA}$  – витрата абсорбенту  $G_A$ ", "тиск в колоні  $P_{3Г}$  – витрата газу  $G_\Gamma$ ", "температура абсорбенту на вході в колону  $\theta_A^0$  – витрата холодоагенту  $G_{XЛ2}$ ", "температура газу на вході в колону  $\theta_\Gamma^0$  – витрата холодоагенту  $G_{XЛ1}$ ".

**Барабанна сушарка** ставить собою установку, в якій відбувається тепловий процес зневоднення твердих матеріалів шляхом випаровування вологи і відведення пари, що утворюється. В хіміко-фармацевтичній промисловості найбільш розповсюджені барабанні сушарки і сушарки з псевдозрідженим шаром.

Загальна схема барабанної сушарки прямооточного дії представлена на рис. 4.33.

Робота установки полягає у наступному. Газоподібне паливо  $G_{II}$  подається з первинним повітрям  $G_{III}$  через пальники в топку 1, де спалюється для одержання сушильного агента. Сушильний агент формується в камері змішувача 2, куди надходить вторинне повітря  $G_{VI}$ . Вологий матеріал подається за допомогою автоматичного дозатора в сушильний барабан 3. Барабан похило розташований і обертається, так що матеріал переміщується уздовж барабана, контактуючі з сушильним агентом. Висушування до певної вологості  $\omega_{CM}$  відбувається до моменту потрапляння в бункер 4. Сухий матеріал  $G_{CM}$  відвантажується з бункера 4 автоматичним дозатором. Сушильний агент  $G_{CA}$  після барабана прямує у циклон 5, де очищується від пилу і вентилятором 6 виводиться з процесу.

Метою керування процесом сушки є підтримання заданої вологості матеріалу на виході  $\omega_{CM} = \omega_{CM}^{зад}$ . Нижче розглянуті основні ділянки цієї установки: топка зі змішувальною камерою і сушильний барабан та їх рівняння математичної моделі.

Загальна схема топки і змішувальної камери представлена на рис.4.34.

Математична модель топки складається з рівнянь матеріального та енергетичного балансу

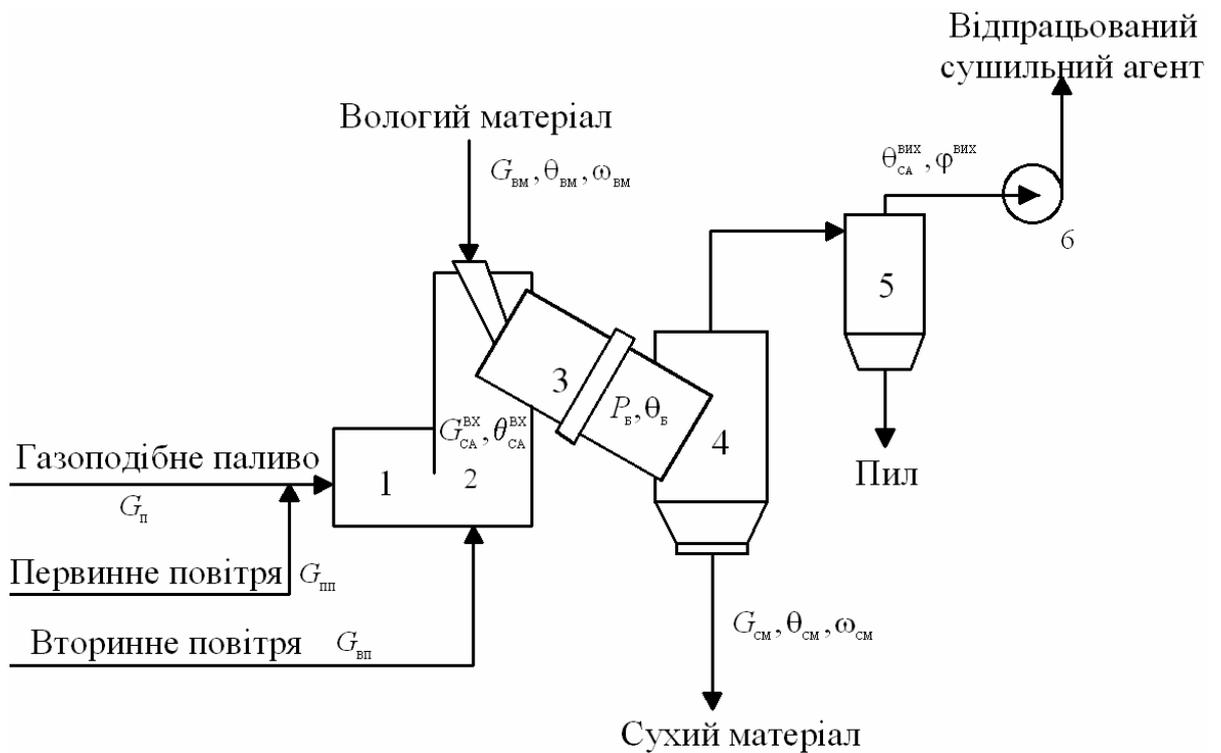


Рис.4.33. Структурна схема барабанної сушарки: 1– топка, 2 – камера змішувня, 3 – сушильний барабан; 4 – бункер; 5 – циклон; 6 – вентилятор.

Матеріальний баланс динаміки і статички по газовій фазі відповідно визначається рівняннями:

$$\frac{V_{CA} M_{CA}^{BXx}}{R\theta_{CA}^{BX}} \frac{dP_{CA}}{dt} = G_{II} + G_{III} + G_{VII} - G_{CA}^{BX} \quad (4.254)$$

$$G_{II} + G_{III} + G_{VII} = G_{CA}^{BX} \quad (4.255)$$

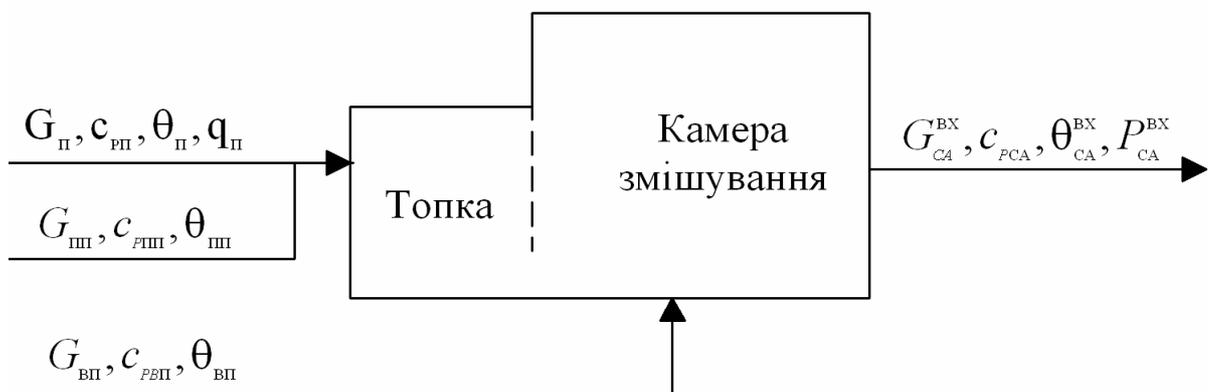


Рис.4.34. Структурна схема топки і змішувальної камери.

Рівняння енергетичного балансу динаміки і статички мають наступний вигляд:

$$c_{PCA} \rho_{CA} V_{CA} \frac{d\theta_{CA}^{BX}}{dt} = G_{\Pi} q_{\Pi} + G_{\Pi} c_{P\Pi} \theta_{\Pi}^{BX} + \quad (4.256)$$

$$+ G_{\text{III}} c_{P\text{III}} \theta_{\text{III}} + G_{\text{ВП}} c_{P\text{ВП}} \theta_{\text{ВП}} - G_{CA}^{BX} c_{PCA} \theta_{CA}^{BX};$$

$$G_{\Pi} q_{\Pi} + G_{\Pi} c_{P\Pi} \theta_{\Pi}^{BX} + G_{\text{III}} c_{P\text{III}} \theta_{\text{III}} + G_{\text{ВП}} c_{P\text{ВП}} \theta_{\text{ВП}} = G_{CA}^{BX} c_{PCA} \theta_{CA}^{BX}. \quad (4.257)$$

На рис.4.35. наведена схема динамічних каналів топки і камери змішування у відповідності з отриманими рівняннями (4.254 – 4.257)

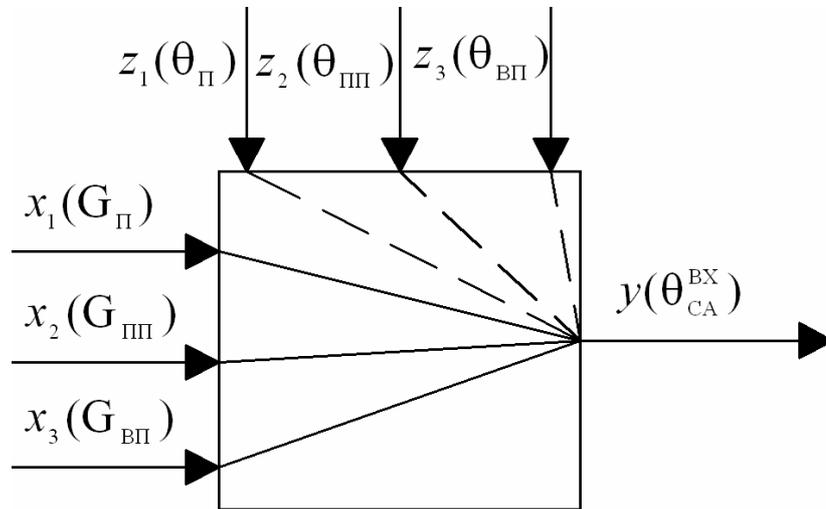


Рис. 4.35. Схема динамічних каналів топки і камери змішування.

Згідно рис. 4.35 вхідними величинами є витрати палива  $G_{\Pi}$ , первинного  $G_{\text{III}}$  та вторинного повітря  $G_{\text{ВП}}$ , збурюючими величинми є температури цих потоків, а вихідною величиною – температура сушильного агенту  $\theta_{CA}^{BX}$ , який надходить у барабан.

Сушильний барабан, структурна схема якого наведена на рис.4.36, визначається наступними рівняннями матеріального і енергетичного балансу.

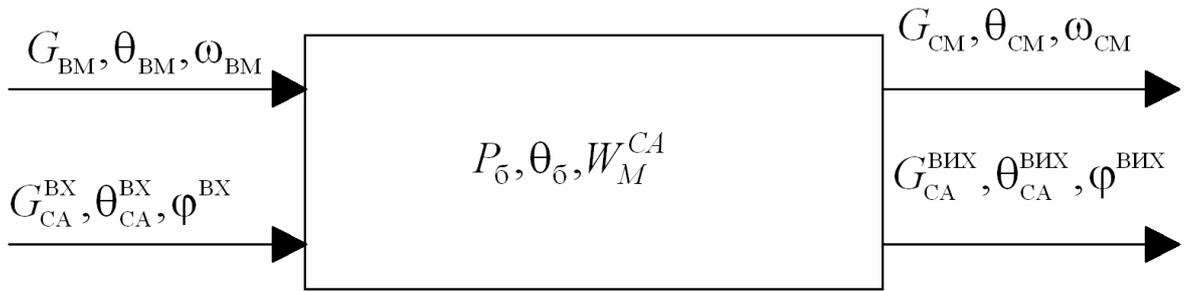


Рис.4.36. Структурна схема сушильного барабану.

Рівняння матеріального балансу по газовій фазі

$$\frac{V_{CA}^B M_{CA}^B}{R\theta_{CA}^B} \frac{dP_{CA}^B}{dt} = G_{CA}^{BX} - G_{CA}^{BIX} + W_{CA}^M, \quad (4.258)$$

де  $M_{CA}^B$  – мольна маса сушильного агента в барабані;  $P_{CA}^B$  – розрідження в барабані;  $\theta_{CA}^B$  – температура в барабані (газова фаза);  $V_{CA}^B$  – об’єм газової фази в барабані.

Рівняння матеріального балансу динаміки і статички по твердій фазі відповідно

$$\rho_M S_{АП} \frac{dh_M}{dt} = G_{BM} - G_{CM} - W_{CA}^M. \quad (4.259)$$

$$G_{BM} = G_{CM} + W_{CA}^M, \quad (4.260)$$

де  $h_M$  – висота шару матеріалу в барабані;  $S_{АП}$  – переріз апарату;  $\rho_M$  – густина матеріалу;  $W_{CA}^M$  – кількість вологи, що видаляється в процесі сушіння з матеріалу за одиницю часу.

Рівняння енергетичного балансу динаміки і статички сушильного барабану відповідно

$$\rho_{CA} V_{CA} c_{PCA} \frac{d\theta_B}{dt} = G_{CA}^{BX} c_{PCA} \theta_{CA}^{BX} + G_{BM} c_{PBM} \theta_{BM} - \quad (4.261)$$

$$- G_{CA}^{BIX} c_{PCA} \theta_{CA}^{BIX} - G_{CM} c_{PCM} \theta_{CM} - W_{CA}^M r.$$

$$G_{CA}^{BX} c_{PCA} \theta_{CA}^{BX} + G_{BM} c_{PBM} \theta_{BM} = G_{CA}^{BIX} c_{PCA} \theta_{CA}^{BIX} + G_{CM} c_{PCM} \theta_{CM} + W_{CA}^M r, \quad (4.262)$$

де  $r$  – питома теплота випаровування вологи.

Рівняння матеріального балансу динаміки і статички за кількістю вологи в матеріалі відповідно

$$\rho_{\text{CM}} V_{\text{CM}} \frac{d\omega_{\text{CM}}}{dt} = G_{\text{BM}} \omega_{\text{BM}} - G_{\text{CM}} \omega_{\text{CM}} - W_{\text{CA}}^{\text{M}}. \quad (4.263)$$

$$G_{\text{BM}} \omega_{\text{BM}} = G_{\text{CM}} \omega_{\text{CM}} + W_{\text{CA}}^{\text{M}}. \quad (4.264)$$

Рівняння матеріального балансу динаміки і статички за кількістю во-  
логи в сушильному агенті

$$\rho_{\text{CA}} V_{\text{CA}} \frac{d\phi_{\text{CA}}}{dt} = G_{\text{CA}}^{\text{BX}} \phi_{\text{CA}}^{\text{BX}} - G_{\text{CA}}^{\text{ВИХ}} \phi_{\text{CA}}^{\text{ВИХ}} + W_{\text{CA}}^{\text{M}}. \quad (4.265)$$

$$G_{\text{CA}}^{\text{BX}} \phi_{\text{CA}}^{\text{BX}} + W_{\text{CA}}^{\text{M}} = G_{\text{CA}}^{\text{ВИХ}} \phi_{\text{CA}}^{\text{ВИХ}}. \quad (4.266)$$

Рівняння матеріального балансу динаміки і статички за загальною кі-  
лькістю вологи в процесі сушки

$$\rho_{\text{CM}} V_{\text{CM}} \frac{d\omega_{\text{CM}}}{dt} = G_{\text{BM}} \omega_{\text{BM}} + G_{\text{CA}}^{\text{BM}} \phi_{\text{CA}}^{\text{BM}} - G_{\text{CM}} \omega_{\text{CM}} - G_{\text{CA}}^{\text{ВИХ}} \phi_{\text{CA}}^{\text{ВИХ}}. \quad (4.267)$$

$$G_{\text{BM}} \omega_{\text{BM}} + G_{\text{CA}}^{\text{BX}} \phi_{\text{CA}}^{\text{BX}} = G_{\text{CM}} \omega_{\text{CM}} + G_{\text{CA}}^{\text{ВИХ}} \phi_{\text{CA}}^{\text{ВИХ}}. \quad (4.268)$$

Згідно цих рівнянь основні динамічні зв'язки сушильного барабану  
наочно можуть бути представлені і вигляді рис.4.37.

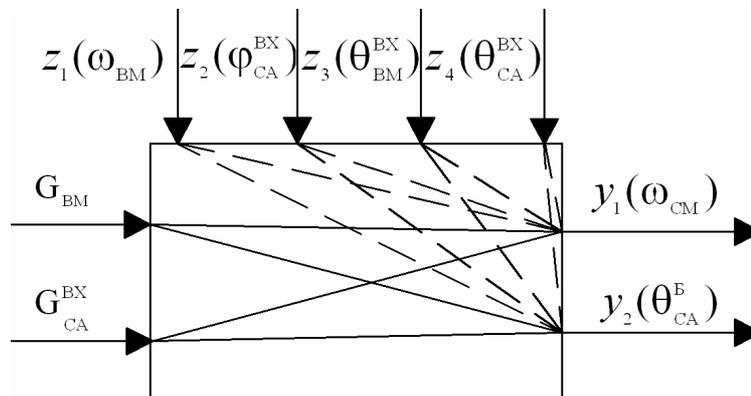


Рис.4.37. Схема динамічних каналів сушильного барабана.

Вхідними параметрами є витрати вологого матеріалу  $G_{\text{BM}}$  та су-  
шильного агента  $G_{\text{CA}}^{\text{BX}}$ , збуреннями є температури цих потоків, а вихід-  
ною величиною – температура сушильного агента  $\theta_{\text{CA}}^{\text{BX}}$ , який надходить в  
барабан.

**Кристалізатор** – це апарат, в якому відбувається виділення твердої речовини з його розчину або розплаву з метою одержання солей або чистих продуктів.

Для проведення процесу кристалізації солей, розчинність яких значно зменшується з пониженням температури, застосовують ізогідричні кристалізатори. Розчин в них охолоджується при постійній кількості розчинника до температури нижче температури насичення. У результаті охолодження розчин стає пересиченим, що призводить до виникнення процесу кристалізації.

Схема ізогідричного кристалізатора безперервної дії, як об'єкта керування, наведена на рис. 4.38.

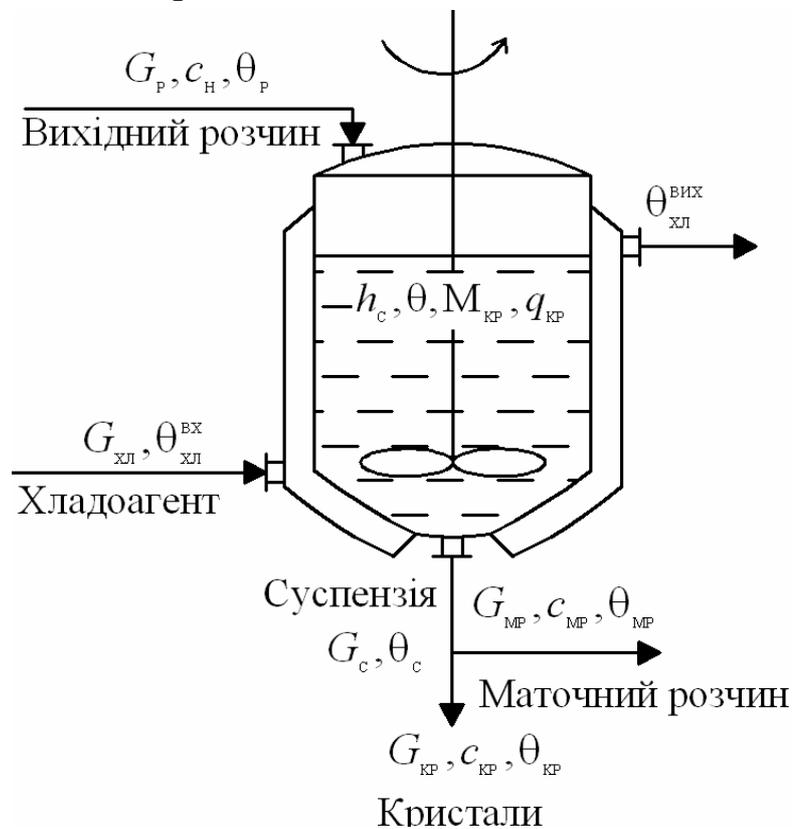


Рис. 4.38. Структурна схема кристалізатора.

Згідно зі схемою вихідний гарячий насичений розчин  $G_p$  подається зверху в апарат, де охолоджується за допомогою холодоносія  $G_{ХЛ}$ , що надходить в оболонку, і стає пересиченим. В результаті пересичення розчину і при інтенсивному перемішуванні відбувається кристалізація цільового компонента з розчину з утворенням кристалів ( $M_{КР} \rightarrow G_{КР}$ ).

При цьому концентрація розчину знижується і рідка фаза  $G_{MP}$  (маточний розчин), що залишилася в суміші з  $G_{KP}$  у вигляді потоку суспензії  $G_C$  виводиться з процесу.

При моделюванні прийняті наступні припущення:  $G_C = G_{MP} + G_{KP}$ ;  $\theta_C = \theta_{MP} = \theta_{KP} = \theta$ ;  $C_{KP} = 1$ , тобто кристали чисті, без домішок.

Мета керування процесом – забезпечення заданого діаметру кристалів  $d_{KP} = d_{KP}^{3AD}$ .

Математичний опис кристалізатора складається з наступних основних рівнянь.

Загальний матеріальний баланс кристалізатора

$$\rho_C S \frac{dh_C}{dt} = G_P - G_{MP} - G_{KP} \quad (4.269)$$

Матеріальний баланс по речовині, що кристалізується

$$\rho_{MP} V_{MP} \frac{dC_{MP}}{dt} = G_P C_H - G_{MP} C_{MP} - G_{KP} C_{KP} \quad (4.270)$$

На підставі дифузійної теорії швидкість росту кристалів можна представити через радіус частинок:

$$\eta = \frac{dr}{dt} = K(C^{\Pi} - C^H)^n, \quad (4.271)$$

де  $r$  – радіус кристала;  $C^{\Pi}, C^H$  – концентрації пересиченого і насиченого розчинів;  $n$  – емпірична стала;  $K = K_0 \exp\left(-\frac{E_A}{R\theta}\right)$  – константа;  $K_0$  – константа;  $E_A$  – енергія активації;  $R$  – універсальна газова стала.

Як випливає з рівняння (4.271) діаметр кристала залежить від концентрації пересиченого і насиченого розчинів  $(C^{\Pi} - C^H)$  і від температури  $\theta$ . При умові, що  $C^H = const$  заданий діаметр кристалу  $d_{KP} = d_{KP}^{3AD}$  залежатиме тільки від температури  $\theta$ .

Енергетичний баланс кристалізатору

$$\rho_c V_c \frac{d\theta}{dt} = G_p C_{pp} \theta_p^{BX} + G_{XЛ} C_{PXЛ} \theta_{XЛ}^{BX} + G_{KP} q_{KP} -$$

$$- G_{XЛ} C_{PXЛ} \theta_{XЛ}^{BIX} - G_{MP} C_{PMP} \theta_{MP} - G_{KP} C_{PKP} \theta_{KP}. \quad (4.272)$$

Отримані рівняння дозволяють визначити основні динамічні канали зв'язку, які схематично наведені на рис.4.39.

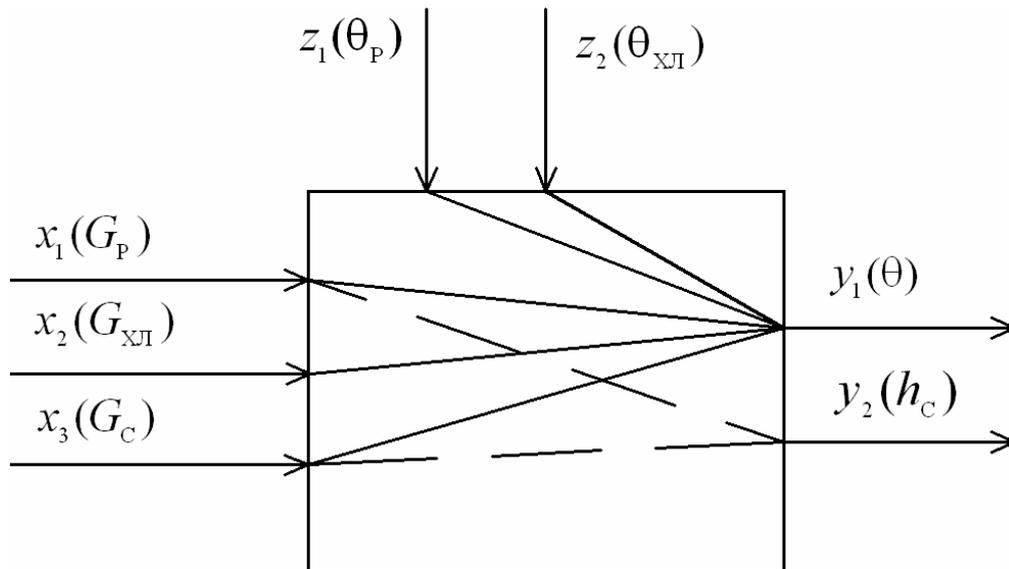


Рис.4.39. Схема динамічних каналів кристалізатора.

Таким чином, математична модель кристалізатора характеризує динамічні властивості об'єкта керування за наступними основними каналами керування: "температура кристалізації  $\theta$  – витрата холодоагенту  $G_{XЛ}$ ", "температура кристалізації  $\theta$  – витрата вихідного розчину  $G_p$ ", "температура кристалізації  $\theta$  – витрата суспензії  $G_c$ ", "рівень суспензії  $h_N$  – витрата суспензії  $G_c$ " і  $G_c$ ", "рівень суспензії  $h_c$  – витрата вихідного розчину  $G_p$ ".

## **5 ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИЙ МЕТОД МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ У ВИЗНАЧЕННІ ДИНАМІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ОБ'ЄКТІВ КЕРУВАННЯ**

Проведення ідентифікації, тобто визначення динамічних характеристик об'єкту керування, вимагає ретельного вивчення технологічного процесу, що проходить у ньому, з метою вивчення динамічної структури об'єкта. Згідно цієї структури встановлюються експериментальні залежності між вихідними і вхідними величинами об'єкту, що можуть бути отримані, як вже відзначалось, у перехідних режимах (перехідні характеристики, імпульсні характеристики), або у сталих коливних режимах (частотні характеристики). Нижче розглянуто процедуру ідентифікації об'єктів, що передбачає отримання експериментальних перехідних характеристик та визначення передатних функцій із застосуванням найбільш поширених методів апроксимації цих характеристик.

### **5.1. ІДЕНТИФІКАЦІЯ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ЗА ЧАСОВИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ**

Широке поширення одержали методи ідентифікації лінійних детермінованих об'єктів шляхом ступінчастої зміни керуючого вхідного сигналу.

**Методика отримання перехідних характеристик** за рахунок такої зміни зводиться до виконання наступних основних умов:

- до нанесення впливу стабілізується режим роботи об'єкту керування за регульованим параметром, щодо якого знімається розгінна характеристика;
- розмикається головний зворотній зв'язок між об'єктом та регулятором, що регулює параметр, за яким знімається розгінна характеристика;
- величина впливу встановлюється виходячи з виробничих можливостей тривалого порушення режиму роботи об'єкту керування.

Необхідно, щоб вплив значно перевершував за величиною випадкові збурення, які можуть мати місце під час експерименту (зазвичай вплив становить не менше 10% від максимально можливого). Вплив наносять з можливо більшою швидкістю, наближаючись до ступінчастого. Під час експерименту необхідно забезпечити, щоб інші види збурень були відсутні або, у всякому разі, були малі в порівнянні з тими, що вносяться. У зв'язку з тим, що складні регульовані об'єкти мають різні динамічні властивості при різних видах впливів, то перехідні характеристики знімають за керуючим і збурюючих впливах. Експеримент слід повторити, принаймні, два рази при впливах одного знаку, а потім знак змінити. Перехідна характеристика вважатиметься отриманою при задовільному збігу результатів.

Якщо за умовами експлуатації неможливо отримати перехідну характеристику при тривалому збуренні, або є технічне обмеження по відхиленню регульованої величини, то використовують імпульсну перехідну характеристику, яка фіксується за результатом короткочасного збурення. Імпульсну перехідну характеристику  $\omega(t)$  можна перебудувати в звичайну перехідну характеристику  $h(t)$ , оскільки прямокутний імпульс тривалості  $\tau_i$  може бути представлений як різниця двох ступінчастих функцій, зміщених на час  $\tau_i$  один щодо одного. У разі припущення лінійності об'єкту до нього може бути застосований принцип суперпозиції, тобто реакція об'єкта на прямокутний імпульс (імпульсна перехідна характеристика) може розглядатися як різниця двох зміщених на час  $\tau_i$  звичайних перехідних характеристик  $h(t)$  і  $h(t - \tau_i)$

$$\omega(t) = h(t) - h(t - \tau_i). \quad (5.1)$$

Звідки визначена  $h(t)$  буде дорівнювати

$$h(t) = \omega(t) + h(t - \tau_i). \quad (5.2)$$

Враховуючі, що

$$\begin{cases} h(t - \tau_i) = \omega(t - \tau_i) + h(t - 2\tau_i); \\ h(t - 2\tau_i) = \omega(t - 2\tau_i) + h(t - 3\tau_i); \\ i \text{ м.д.}, \end{cases} \quad (5.3)$$

можна одержати наступний вираз для  $h(t)$

$$h(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega(t - i\tau_i). \quad (5.4)$$

На підставі цього виразу значення перехідної характеристики  $h(t)$  на момент часу  $t$  отримується підсумовуванням значень імпульсної перехідної характеристики  $\omega(t)$ , взятих у дискретні моменти часу через інтервал  $\tau_i$ . Загальна схема перетворення імпульсної перехідної характеристики в перехідну представлена на рис. 5.1

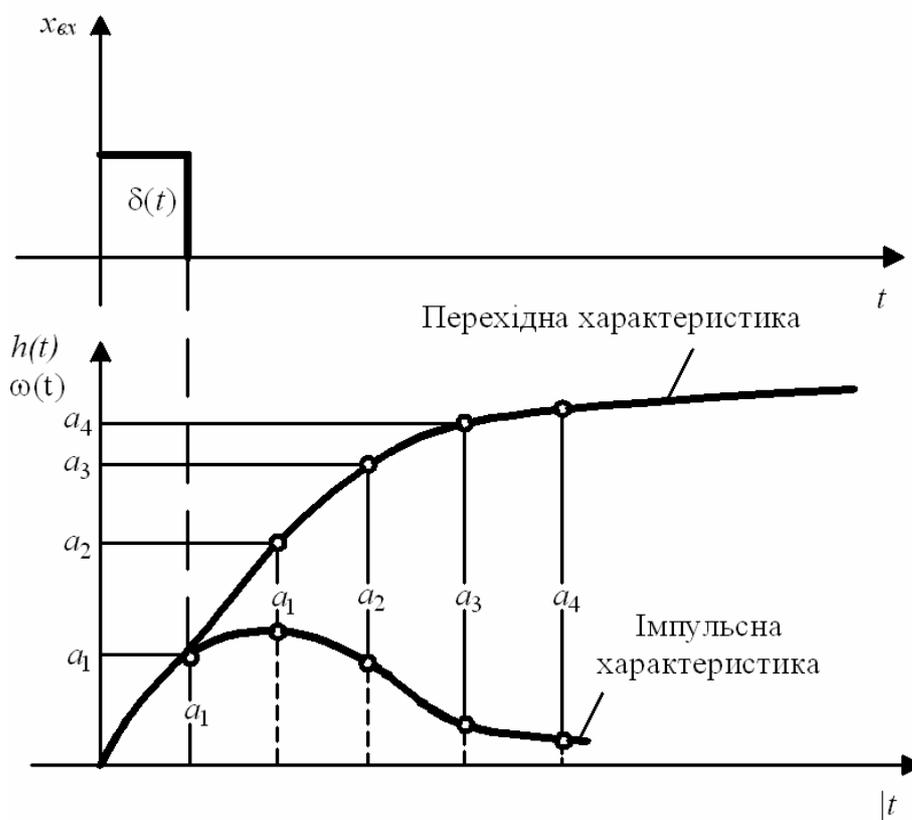


Рис. 5.1. Схема перетворення експериментальної імпульсної характеристики у перехідну характеристику.

**Згладжування експериментальних перехідних характеристик.** При дослідженні динамічних характеристик промислових об'єктів на останні діють невраховані збурення. У зв'язку з чим експериментальна перехідна характеристика  $z(t)$  складається із корисного сигналу  $h(t)$  і сигналу завад  $f(t)$ , який домовилися вважати адитивним

$$z(t) = h(t) + f(t). \quad (5.5)$$

Для виділення корисного сигналу із експериментальної характеристики використовують різні методи згладжування, найбільш простий серед яких є метод послідовного усереднення.

Метод полягає в тому, що на деякому інтервалі часу  $L\Delta t$  ( $L$  – ціле число, краще парне) виконують послідовне усереднення ординат  $z_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) з використанням наступного алгоритму:

$$h_{i+L/2}^* = \frac{1}{L+1} \sum_{\beta=0}^L z_{i+\beta}, \quad (5.6)$$

де  $h^*$  – ординати усередненої характеристики;  $Z_{i+\beta}$  – ордината експериментально отриманої точки;  $i$  – порядковий номер точки.

Точність усереднення залежить від числа  $L$ . При малому значенні  $L$  якість згладжування буде низькою. Збільшення  $L$  може призвести до викривлення суттєвих особливостей часової характеристики. Тому спочатку обирають  $L = 2$  і візуально оцінюють якість апроксимації і, у разі потреби, збільшують значення  $L$  до 4.

Якщо  $L = 2$ , то усереднення проводять по трьом точкам за наступними формулами:

$$\begin{aligned} h_0^* &= (5Z_0 + 2Z_1 - Z_2) / 6; \\ h_i^* &= (Z_{i-1} + Z_i + Z_{i+1}) / 3; \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ h_N^* &= (5Z_N + 2Z_{N-1} - Z_{N-2}) / 6. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Якщо  $L=4$ , то формули усереднення по п'яти точкам мають вигляд:

$$\begin{aligned} h_0^* &= (3Z_0 + 2Z_1 + Z_2 - Z_4) / 5; \\ h_1^* &= (4Z_0 + 3Z_i + 2Z_2 + Z_3) / 10; \\ h_i^* &= (Z_{i-2} + Z_{i-1} + Z_i + Z_{i+1} + Z_{i+2}) / 5; \quad 2 \leq i \leq N-2 \\ h_{N-1}^* &= (Z_{N-3} + 2Z_{N-2} - 3Z_{N-1} + 4Z_N) / 10; \\ h_N^* &= (3Z_N + 2Z_{N-1} + Z_{N-2} - Z_{N-4}) / 5. \end{aligned} \quad (5.8)$$

На рис. 5.2 наведені результати згладжування перехідної характеристики.

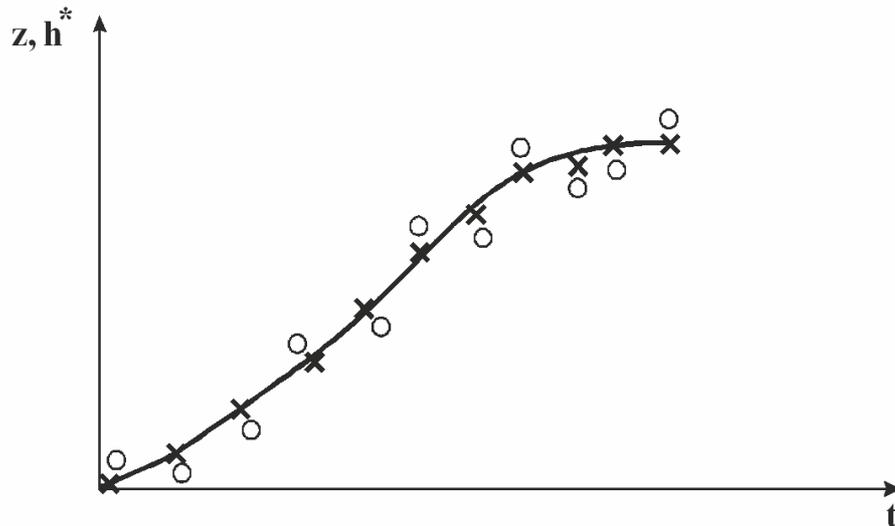


Рис. 5.2. Результати згладжування перехідної характеристики: о – експериментальні значення; х – розрахункові значення.

Графічне подання перехідних характеристик повністю відображає динамічні властивості об'єкта керування, але не зручно для практичного використання. Тому перехідні характеристики об'єктів керування апроксимують передатними функціями чи диференціальними рівняннями, які і використовують в процесі синтезу автоматичних систем регулювання. При апроксимації перехідних характеристик приймають певні припущення, основним з яких є припущення про лінійність об'єкту.

**Апроксимація перехідних характеристик** має на меті отримання найпростішої апроксимуючої залежності, яка б відображала динамічні властивості експериментальної характеристики із заданою точністю. Для однієї і тієї ж перехідної характеристики можуть бути отримані різні передатні функції чи диференціальні рівняння. Перевірка точності апроксимації проводиться шляхом порівняння графіків експериментальної перехідної характеристики і характеристики отриманої при розв'язуванні апроксимуючого виразу. Якщо експериментальна і розрахункова характеристики співпадають із заданою точністю, то апроксимацію вважають закінченою. В іншому випадку обирають більш складний вираз апроксимуючої функції.

Апроксимація – заміна одних математичних об'єктів іншими, в тому чи іншому сенсі близькими до вихідних. Апроксимація дозволяє досліджувати числові характеристики та якісні властивості об'єкта, зводячи

задачу до вивчення більш простих або більш зручних об'єктів (наприклад, таких, характеристики яких легко обчислюються або властивості яких вже відомі).

Апроксимацію експериментальних графіків перехідних характеристик об'єктів регулювання зазвичай проводять у два етапи:

а) вибір загальної аналітичної формули для апроксимуючої характеристики;

б) визначення оптимальних значень коефіцієнтів цієї характеристики за умови мінімуму прийнятого критерію наближення характеристик.

Для апроксимації перехідних характеристик розроблено значну кількість методів. Визначення апроксимуючої передатної функції починають з вибору її форми і порядку, а потім визначають числові значення її коефіцієнтів. Незалежно від методу апроксимації визначення коефіцієнтів починають з розрахунку коефіцієнта передачі об'єкта. Коефіцієнт передачі узгоджує розмірність вихідної і вхідної величин об'єкта і розраховується за формулою:

$$k = \frac{\Delta y(\infty)}{\Delta x(\infty)}, \quad (5.9)$$

де  $\Delta y(\infty), \Delta x(\infty)$  – максимальне відхилення вихідної і вхідної величин об'єкта.

Значення коефіцієнту  $k$  можна визначити із графіка перехідної характеристики об'єкта з самовирівнюванням. За визначенням коефіцієнт передачі  $k$  є розмірна величина. Це не дає змоги порівнювати коефіцієнти передачі по різних каналах впливу. Тому цей коефіцієнт часто приводять до безрозмірного вигляду.

Для цього значення максимальних відхилень величин ділять на їх номінальні значення

$$k = \frac{y(\infty) - y(0)}{y(0)} \cdot \frac{x(0)}{x(\infty) - x(0)}. \quad (5.10)$$

*Приклад.* Визначити коефіцієнт передачі теплообмінника, в якому рідина нагрівається водяною парою, по експериментальній перехідній характе-

ристиці, одержаній при ступінчастій зміні витрати пари, що гріє, на 15% відносно номінального значення.

Усталене значення температури рідини по закінченню перехідного процесу  $T_{уст} = 152^{\circ}C$ . До збурення температура рідини була  $T_0 = 144^{\circ}C$ .

Коефіцієнт передачі в розмірному виді:

$$k = \frac{152 - 144}{15} = 0,53 \text{ (град/\% номінальної витрати).}$$

Коефіцієнт передачі в безрозмірному виді:

$$k = \frac{152 - 144}{144} \cdot \frac{100}{15} = 0,37.$$

Методика визначення сталих коефіцієнтів або постійних часу передатної функції залежить від методу апроксимації.

**Методи апроксимації** перехідних характеристик поділяють на графоаналітичні методи та чисельні методи апроксимації на ЕОМ. Графоаналітичні методи використовують для попередньої оцінки динамічних властивостей об'єкта керування. Методи апроксимації на ЕОМ більш універсальні та точні.

## **5.2 ГРАФОАНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ АПРОКСИМАЦІЇ ЛІНІЙНИХ ОБ'ЄКТІВ КЕРУВАННЯ ЗА ЧАСОВИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ**

**Наближення через аперіодичні ланки першого і другого порядку** застосовується для достатньо простих об'єктів, вигляд передатних функція для яких зазвичай передбачений.

*Апроксимація перехідної характеристики аперіодичною ланкою першого порядку без запізнювання.* Для інерційного об'єкта першого порядку стала часу об'єкта  $T$  визначається як відрізок часу, за який перехідна функція досягає 63% своєї усталеної величини. Це впливає з того, що при  $t = T$  значення перехідної функції приблизно дорівнює

$$h(t)|_{t=T} = k(1 - e^{-t/T}) = k(1 - e^{-1}) \approx 0,63k. \quad (5.11)$$

Для величини кута нахилу дотичної до перехідної кривої в нульовий момент часу справедливе співвідношення:

$$h(t)|_{t=0} = \frac{k}{T} e^{-t/T} |_{t=0} = \frac{k}{T}. \quad (5.12)$$

Звідси випливає, що стала часу може бути визначена як момент часу, у який дотична до перехідного процесу в початковій точці траєкторії пересіче стале значення вихідної величини (рис. 5.3).

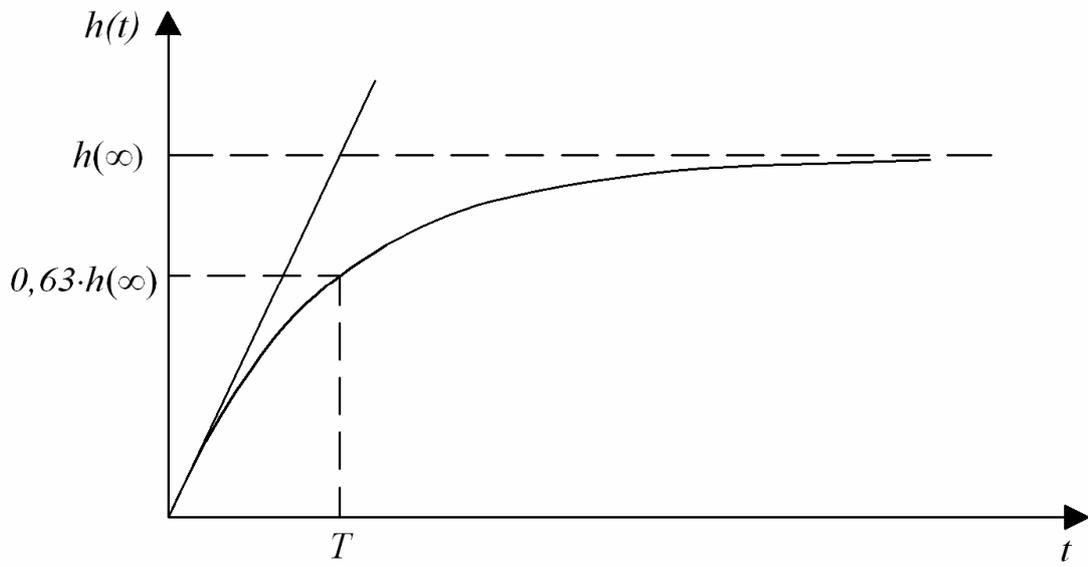


Рис 5.3. Апроксимація перехідної характеристики методом 2/3.

*Апроксимація перехідної характеристики аперіодичною ланкою другого порядку без запізнювання.* Аперіодичний об'єкт другого порядку має передатну функцію

$$W(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}. \quad (5.13)$$

і перехідну характеристику

$$h(t) = k \left( 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right). \quad (5.14)$$

Для визначення сталої  $T_1$  початкову ділянку перехідної кривої апроксимують лінійною залежністю до перетину з віссю ординат, вважаючи процес аперіодичним першого порядку. Беручи за початок відліку точку перетину апроксимованої кривої і осі ординат знаходять  $T_1$ . Сталу часу  $T_2$

визначають шляхом ідентифікації початкової ділянки перехідної кривої, знаходячи момент часу  $T$ , в який розгінна характеристика досягає приблизно 37% свого усталеного значення

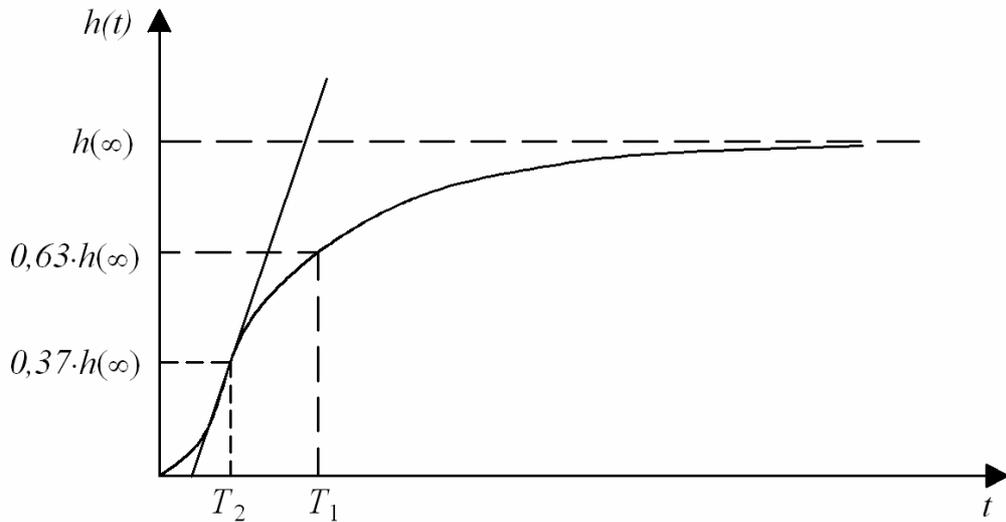


Рис.5.4. Наближення перехідної характеристики аперіодичною ланкою другого порядку.

*Апроксимація перехідної характеристики аперіодичною ланкою першого порядку з запізнюванням.* Передатна функція об'єкту має вигляд

$$W(p) = \frac{ke^{-p\tau}}{Tp + 1}. \quad (5.15)$$

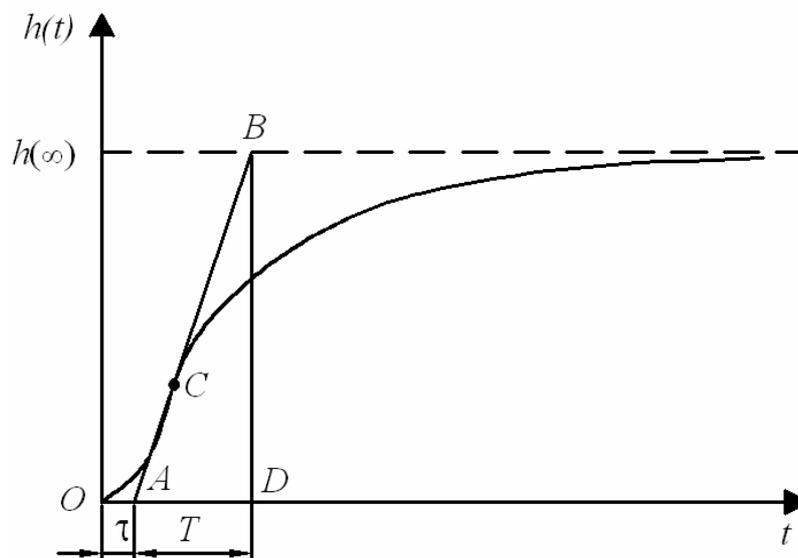


Рис.5.5. Наближення перехідної характеристики аперіодичною ланкою першого порядку з запізнюванням.

Для визначення  $\tau$  і  $T$  до перехідної характеристики (рис.5.5) проводять дотичну  $AB$  в точці перегину  $C$  (точці перегину відповідає максимальний кут  $\alpha$  між дотичною та віссю абсцис).

Час запізнювання  $\tau$  дорівнює відстані  $OA$  від початку координат до точки перетину дотичної з віссю абсцис, а стала часу  $T$  визначається величиною  $AD$ , тобто проекцією відрізка  $AB$  на вісь абсцис.

*Апроксимація перехідної характеристики методом двох крапок.*

Перехідна характеристика попередньо нормується від 0 до 1 за формулою

$$h(t) = \frac{y(t) - y(0)}{y(\infty) - y(0)}. \quad (5.16)$$

Обираємо на нормованій кривій (рис. 5.6) дві точки  $A$  і  $B$  (точка  $A$  лежить в області перегину кривої, точка  $B$  має ординату  $0,7 - 0,9$ ).

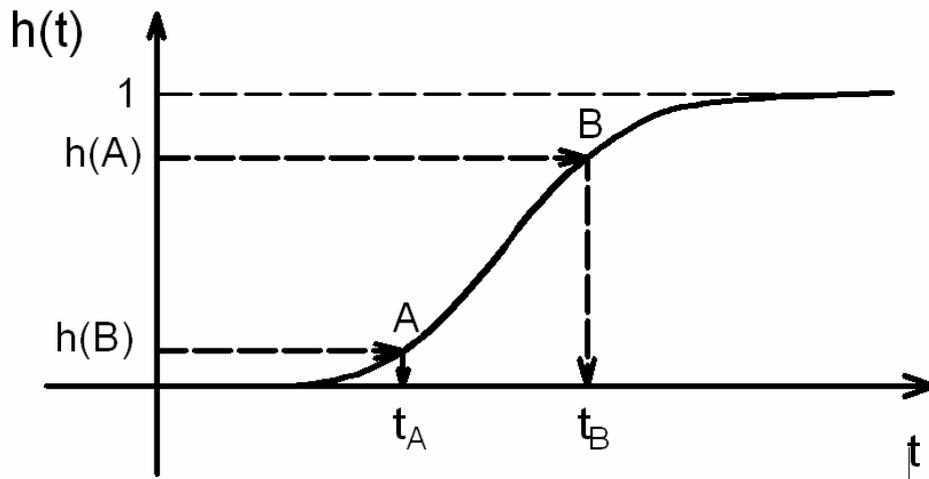


Рис. 5.6. Наближення перехідної характеристики методом двох крапок.

Отримуємо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} h(A) = 1 - e^{-\frac{t_A - \tau}{T}}; \\ h(B) = 1 - e^{-\frac{t_B - \tau}{T}}. \end{cases} \quad (5.17)$$

Розв'язуючи цю систему відносно  $T$  і  $\tau$  отримуємо

$$T = -\frac{t_A - \tau_d}{\ln(1 - h_A)}; \quad (5.18)$$

$$\tau = \frac{t_B \ln(1 - h_A) - t_A \ln(1 - h_B)}{\ln(1 - h_A) - \ln(1 - h_B)}. \quad (5.19)$$

Слід відзначити, що розглянуті методи не завжди в повній мірі відображають динамічні параметри об'єкту.

### Метод послідовного логарифмування.

Досліджуваний об'єкт описується лінійним диференціальним рівнянням з постійними коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1) Y(p) = \\ = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + 1) X(p). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Якщо корені характеристичного рівняння мають дійсні від'ємні значення, то його рішення, як відомо, має вигляд:

$$h(t) = 1 - \sum_{K=1}^n H_K e^{-\frac{t}{T_K}}. \quad (5.21)$$

Для визначення коефіцієнтів  $H_K$  і  $T_K$  застосуємо метод послідовного логарифмування, який полягає у послідовному наближенні функції  $h(t)$  розв'язанням рівняння першого порядку, тобто функції  $H_1 e^{-\frac{t}{T_1}}$ . Якщо така апроксимація є не задовільною на якомусь відрізку часу, то розглядається друга складова  $H_2 e^{-\frac{t}{T_2}}$  і т.д.

Припустимо, що функція  $h(t)$  (рис.5.7а) є рішенням диференціального рівняння першого порядку

$$h(t) = 1 - H_1 e^{-\frac{t}{T_1}}, \quad (5.22)$$

або

$$1 - h(t) = H_1 e^{-\frac{t}{T_1}} = h_1(t). \quad (5.23)$$

Логарифмуємо цей вираз

$$\ln[h_1(t)] = \ln H_1 - \frac{t}{T_1}. \quad (5.24)$$

Логарифмуємо і будуємо графік у десяткових логарифмах функції  $\ln[h_1(t)]$  залежно від  $t$  (рис.5.7б).

$$\ln[h_1(t)] = 2,3 \lg[h_1(t)]. \quad (5.25)$$

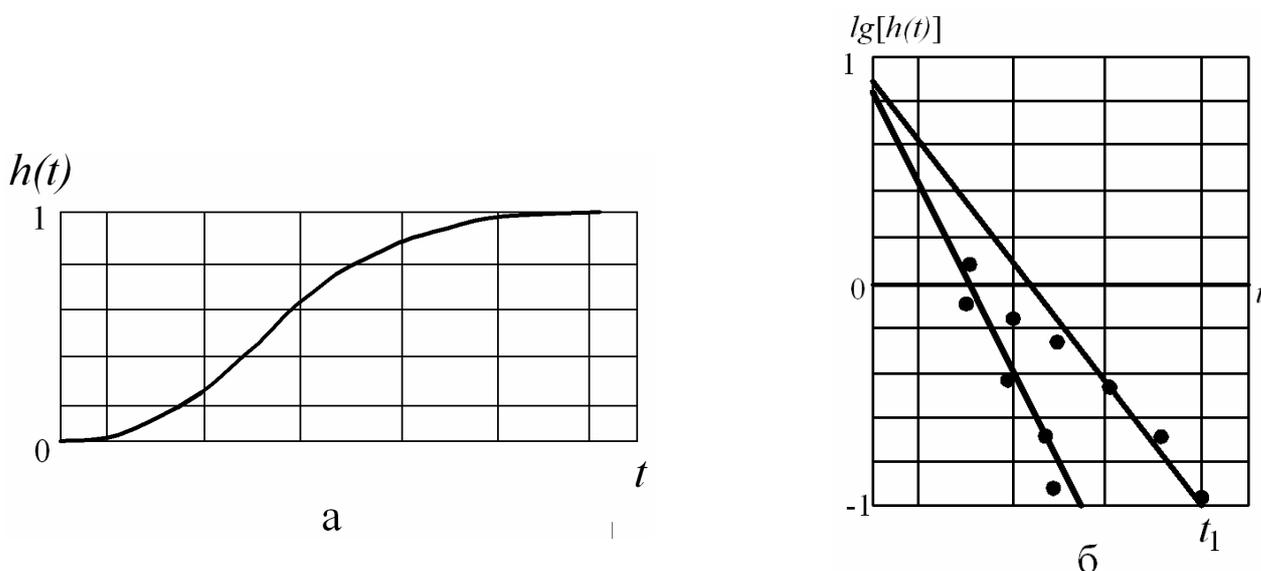


Рис 5.7. Визначення наближення перехідної характеристики методом послідовного логарифмування.

Проводимо асимптоту до отриманої кривої. На осі ординат вона відсікає відрізок, що дорівнює  $\lg H_1$ , при  $t = 0$ . Звідси визначимо  $H_1$ .

Величина  $1/T_1$  дорівнює тангенсу нахилу асимптоти до осі абсцис, а саме:

$$T_1 = \frac{t_1}{\ln H_1}, \quad (5.26)$$

де  $t_1$  – точка перетину з віссю часу.

Якщо проведена асимптота не співпадає з усіма значеннями  $\ln[h_1(t)]$ , то підвищуємо порядок диференціального рівняння і знаходимо чергову функцію:

$$h_2(t) = h_1(t) - H_1 e^{-\frac{t}{T_1}}. \quad (5.27)$$

Далі логарифмуємо  $h_2(t)$  і будуємо графік  $\ln[h_2(t)]$ . Аналогічно визначаємо  $H_2$  і  $T_2$ . За умови вірного визначення параметрів повинні виконуватися умови:

$$\sum_{k=1}^n H_k = 1; \quad (5.28)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{H_k}{T_k} = \sum_{k=1}^n \frac{H_k}{T_k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{H_k}{T_k^{n-1}} = 0.$$

Продиференціюємо рівняння перехідної функції  $h(t)$

$$\frac{dh(t)}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{H_k}{T_k} e^{-\frac{t}{T_k}}. \quad (5.29)$$

Перетворимо цю функцію по Лапласу

$$L\left[\frac{dh(t)}{dt}\right] = \sum_{k=1}^n \frac{H_k}{T_k \left(p + \frac{1}{T_k}\right)}. \quad (5.30)$$

Звідки отримаємо передатну функцію об'єкту у вигляді

$$W(p) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (T_k p + 1)}. \quad (5.31)$$

Якщо об'єкт має запізнювання, то коефіцієнти  $H_k, T_k$  визначаються за перехідною функцією, з якої виділено чисте запізнювання.

**Метод Ормана** найчастіше застосовується для апроксимації перехідної функції розв'язанням диференційного рівняння першого чи другого порядку. Визначення постійних часу  $T_1$  і  $T_2$  без додаткового запізнювання  $\tau$  виконується у наступній послідовності.

За нормованою перехідною характеристикою  $h(t)$  визначається час  $t_7$  як корінь рівняння  $h(t_7) = 0,7$ . Розраховується час  $t_4$  і загальна стала часу  $T = T_1 + T_2$  за емпіричним співвідношенням:

$$t_4 = 0,4T = t_7/3 \quad (5.32)$$

По графіку  $h(t)$  визначається ордината  $h(t_4)$ . За номограмою (див. рис. 5.8) визначається параметр  $z$  і обчислюються постійні часу:

$$T_1 = 0,416(1 + z)t_7; \quad (5.33)$$

$$T_2 = 0,416(1 - z)t_7 \quad (5.34)$$

За допомогою цієї ж номограми при  $\tau = 0$  по значенню  $z$  визначаються  $h_p(t_{20})$  і  $h_p(t_8)$ . Порівнюються ці значення з ординатами експериментальної перехідної функції для  $t_{20} = 2T$  і  $t_8 = 0,8T$ . Якщо похибка апроксимації перевищує 3 % чи  $h_4 < 0,19$ , то слід вважати  $\tau \neq 0$ .

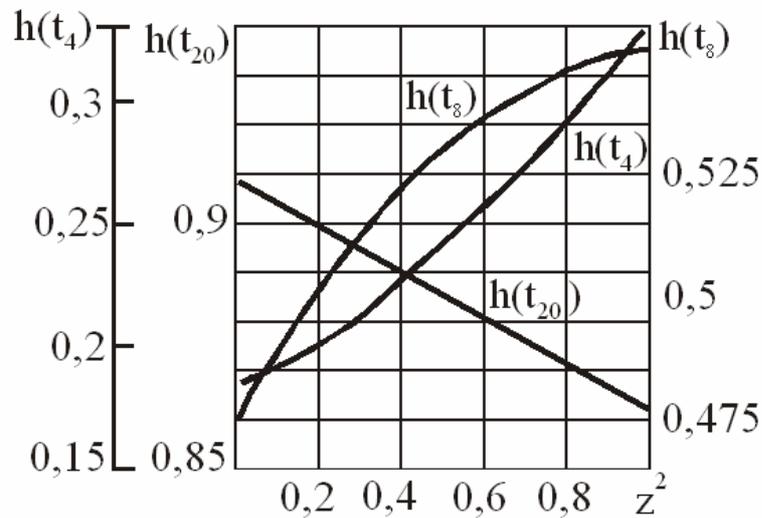


Рис. 5.8. Номограма для визначення коефіцієнтів диференційного рівняння методом Ормана.

У випадку  $\tau \neq 0$  необхідно визначити вже три невідомих  $T_1$ ,  $T_2$  і  $\tau$ . Тоді аналогічно попередньому встановлюється час  $t_7$  як корінь рівняння  $h(t_7) = 0,7$  і час  $t_4''$  як корінь рівняння  $h(t_4'') = 0,191$ . Якщо  $t_4 \leq t_7/3$ , то маємо емпіричне співвідношення  $(3t_4'' - t_7) \leq 2\tau \leq (3t_4 - t_7)$ , з якого невідоме  $\tau$  обчислюється за формулою:

$$\tau = 0,5(3t_4'' - t_7). \quad (5.35)$$

Постійні часу  $T_1$  і  $T_2$  визначаються ідентично попередньому за номограмою, але час  $t$  необхідно замінювати змінною  $(t - \tau)$ . Як правило при  $h(t_4) > 0,33$  перехідну функцію можна апроксимувати розв'язанням

диференціального рівняння першого порядку із запізненням і послідовність апроксимації буде наступною.

Визначаються час  $t_7$  і час  $t'_4$ , що відповідають рівностям  $h(t_7) = 0,7$  і  $h(t'_4) = 0,33$  (рис.5.9).

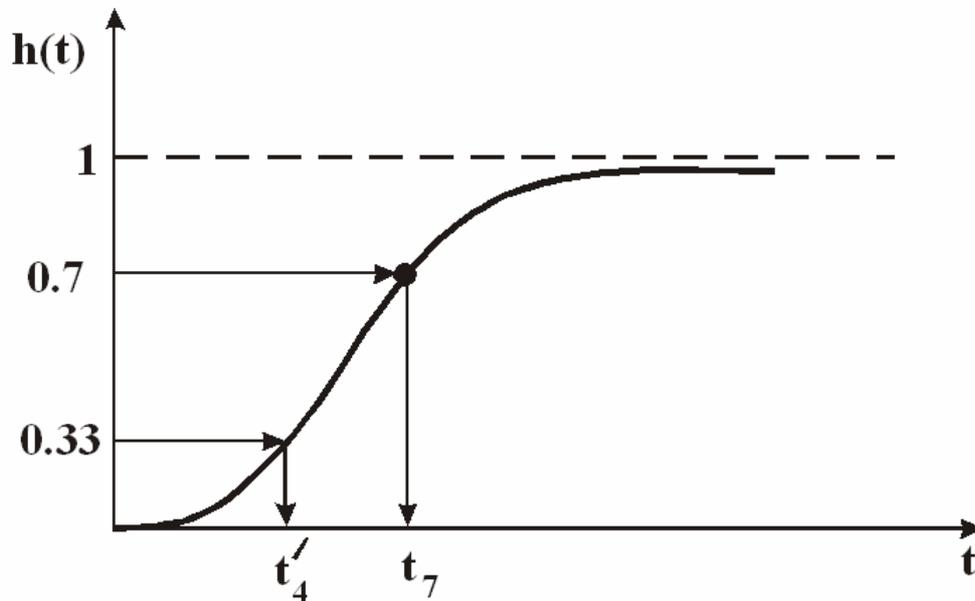


Рис. 5.9. Визначення коефіцієнтів диференціального рівняння першого порядку із запізненням за методом Ормана.

Обчислюються значення  $T$  і  $\tau$  за формулами:

$$\tau = 0,5(3t'_4 - t_7). \quad (5.36)$$

$$T = 1,25(t_7 - t'_4). \quad (5.37)$$

Для перевірки точності апроксимації за графіком нормованої перехідної характеристики визначаємо ординати  $h_e(t_4)$ ;  $h_e(t_8)$ ;  $h_e(t_{20})$ , де час  $t_4$ ;  $t_8$ ;  $t_{20}$  визначається за формулами

$$\begin{aligned} t_4 &= 0,4T + \tau; \\ t_8 &= 0,8T + \tau; \\ t_{20} &= 2T + \tau. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Розрахункові ординати апроксимуючої кривої  $h_p(t_4)$ ;  $h_p(t_8)$ ;  $h_p(t_{20})$  знаходимо за відомою залежністю:

$$\begin{cases} h(t) = 0 & \text{при } 0 \leq t \leq \tau; \\ h(t) = 1(1 - e^{-(t-\tau)/T}) & \text{при } t > \tau. \end{cases} \quad (5.39)$$

Наприкінці проводиться порівняння ординат  $h_p(t)$  з відповідними ординатами  $h_e(t)$  для кожної точки за формулою

$$\delta = \frac{h_p(t) - h_e(t)}{h_e(t)} \cdot 100\%. \quad (5.40)$$

Розглянемо застосування цього методу на конкретному прикладі.

*Приклад.* Виконати апроксимацію перехідної функції, що зображена на рис. 5.10, методом Ормана. При цьому відомо, що коефіцієнт підсилення  $k = 0,25$ .

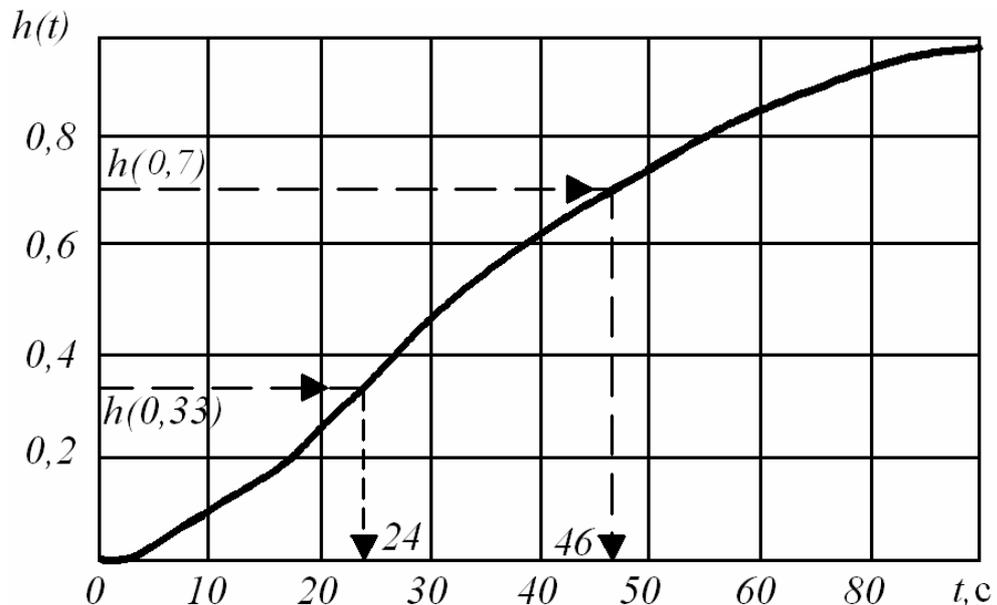


Рис. 5.10. Нормована експериментальна характеристика об'єкта по каналу регулювання.

За величиною  $h(t_7) = 0,7$  по графіку (рис. 5.10) визначається час  $t_7 = 46$  с. Згідно рівності (5.32) значення  $t_4 = 46/3 = 15,4$  с, а  $T = 15,4/0,4 = 38,5$  с. По номограмі (рис. 5.8) за величиною нормованої перехідної функції  $h(t_4) = 0,19$  встановлюється значення  $z^2 = 0,04$  чи  $z = 0,2$ . За формулами (5.33) і (5.34) обчислюються постійні часу:

$$T_1 = 0,416 \cdot 46(1 + 0,2) = 22,9 \text{ с};$$

$$T_2 = 0,416 \cdot 46(1 - 0,2) = 15,4 \text{ с}.$$

За допомогою номограми (рис. 5.8) для  $z^2 = 0,04$  визначаються  $h_P(t_{20}) = 0,9055$  і  $h_P(t_8) = 0,4825$ . По графіку (рис. 5.10) встановлюємо експериментальні значення ординат у відповідних точках часу:  $h(t_{20}) = h(2T) = 0,93$ ;  $h(t_8) = h(0,8T) = 0,47$ . Розраховується похибка апроксимації:

$$\frac{|0,9055 - 0,93|}{0,93} \cdot 100 = 2,6\%;$$

$$\frac{|0,4825 - 0,47|}{0,47} \cdot 100 = 2,6\%.$$

Отже відносні похибки апроксимації не перевищують 3%, тому слід вважати  $\tau = 0$  і експериментальну перехідну характеристику можна представити у вигляді:

$$W(p) = \frac{0,25}{(22,9p + 1) \cdot (15,4p + 1)}.$$

Спробуємо виконати апроксимацію перехідної характеристики рівнянням першого порядку із запізненням. При цьому знаходяться по експериментальній перехідній характеристиці час  $t_7 = 46$  с при  $h(t_7) = 0,7$  і час  $t'_4 = 25$  с при  $h(t'_4) = 0,33$ . Визначається час додаткового запізнення і стала часу за формулами (5.36) і (5.37):

$$\tau = 0,5(3 \cdot 25 - 46) = 14,5 \text{ с};$$

$$T = 1,25(46 - 25) = 26,2 \text{ с}.$$

Передатна функція прийме таку форму:

$$W(p) = \frac{0,25e^{-14,5p}}{26,2p + 1}.$$

Для перевірки виконаної апроксимації необхідно здійснити розрахунки за формулами (5.38):

$$t_4 = 0,4 \cdot 26,2 + 14,5 = 24,9 \text{ с};$$

$$t_8 = 0,8 \cdot 26,2 + 14,5 = 35,3 \text{ с};$$

$$t_{20} = 2 \cdot 26,2 + 14,5 = 66,5 \text{ с}.$$

По графіку експериментальної перехідної характеристики визначаються для відповідних значень часу ординати:  $h(t_4) = 0,36$ ;  $h(t_8) = 0,55$ ;  $h(t_{20}) = 0,89$ . Розраховуються значення у відповідності з отриманим рівнянням у моменти часу  $t_4$ ,  $t_8$  і  $t_{20}$ , результат розв'язання якого як відомо має вигляд:  $h_P(t) = 1 - e^{-(t - \tau)/T}$ . При цьому  $h_P(t_4) = 0,33$ ,  $h_P(t_8) = 0,551$  і  $h_P(t_{20}) = 0,87$ . Порівняння відповідних значень для  $h(t)$  і  $h_P(t)$  свідчить, що за такої апроксимації похибка ще менше. Слід відзначити, якщо має місце ще й транспортне запізнення, то необхідно до отриманої величини  $\tau$  додавати значення транспортного запізнення.

**Метод Ольденбурга-Сарторіуса** призначений для апроксимації перехідної характеристики аперіодичною ланкою другого порядку

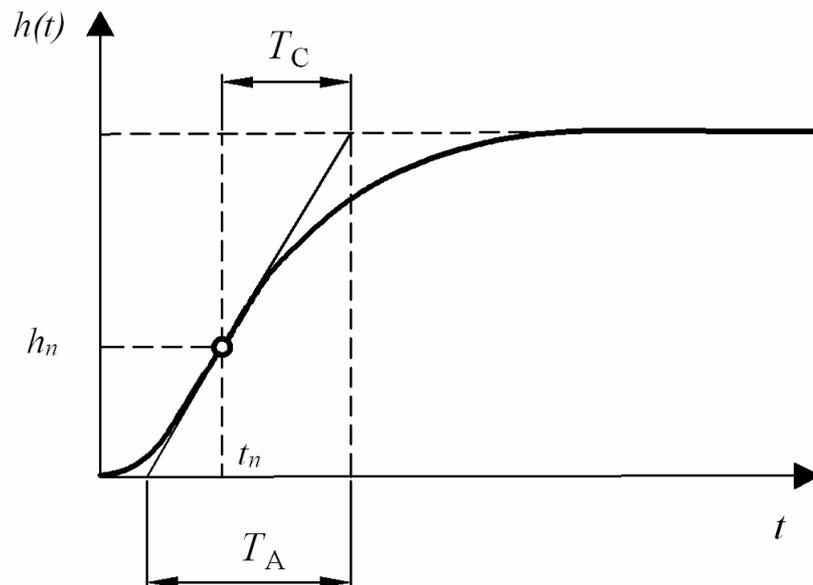


Рис. 5.11. Апроксимація перехідної характеристики по методу Ольденбурга–Сарторіуса.

Метод передбачає проведення дотичної до перехідної характеристики (рис. 5.11) з отримуванням значень часу  $T_A$  і  $T_C$ . При цьому значення часу  $T_A$  і  $T_C$  пов'язані зі сталими часу  $T_1$  і  $T_2$  наступними виразами

$$T_A = T_1 \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^n; \quad (5.41)$$

$$T_C = T_1 + T_2; \quad (5.42)$$

$$n = \frac{T_2}{T_1 - T_2}. \quad (5.43)$$

Розв'язування рівнянь (5.41–5.43) аналітичним методом досить складне завдання, тому використовується графічний метод.

Вираз (5.41) може бути записано у вигляді

$$1 = \frac{T_1}{T_A} \left[ \frac{T_2/T_A}{T_1/T_A} \right]^n. \quad (5.44)$$

Відповідний до (5.44) графік з координатами  $T_2/T_A$  і  $T_1/T_A$  приведений на рис.5.12. Значення для побудови графіка наведені у таблиці 5.1.

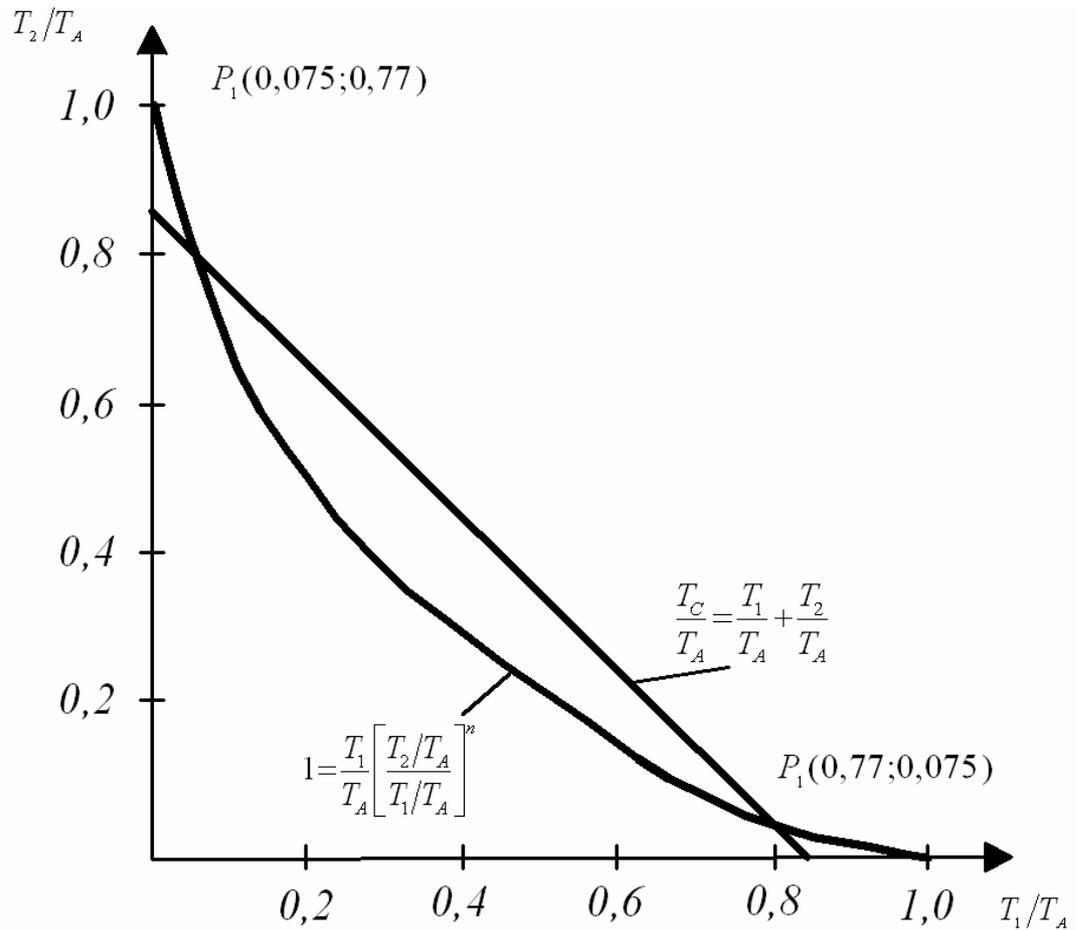


Рис. 5.12. Криві для визначення  $T_1$  і  $T_2$  за методом Ольденбурга–Сарторіуса.

Дані для побудови графіка згідно рівняння (5.44)

$T_1/T_A$	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
$T_2/T_A$	1,00	0,73	0,57	0,44	0,34	0,25	0,18	0,12	0,07	0,03	0,00

З іншого боку, вираз (5.42) може бути перетворено шляхом ділення на  $T_A$ :

$$\frac{T_C}{T_A} = \frac{T_1}{T_A} + \frac{T_2}{T_A}. \quad (5.45)$$

На рис. 5.12 рівняння (5.45) відповідає прямій, яка перетинає криву побудовану за рівнянням (5.44) у двох точках  $P_1$  і  $P_2$  координати яких  $(T_1/T_A$  і  $T_2/T_A)$  є двома рішеннями системи рівнянь (5.41–5.43).

Якщо  $(T_C/T_A) = 0,736$  пряма згідно рівняння (5.45) є дотичною до кривої побудованої за рівнянням (5.44), то це свідчить, що  $T_1 = T_2$ . У разі якщо відношення  $(T_C/T_A) < 0,736$ , тобто перетину прямої і кривої немає, то метод непридатний. При цьому слід обирати передатну функцію вище другого порядку. У разі якщо відношення  $(T_C/T_A) > 0,736$ , то визначаються координати точок перетину  $P_1$  і  $P_2$  прямої і кривої згідно відповідних рівнянь (5.44) і (5.45). При цьому значення  $T_1$  і  $T_2$  обчислюються по координатах точок  $P_1$  (або  $P_2$ ).

**Метод Андерсона** дозволяє проводити апроксимацію перехідної характеристики аперіодичною ланкою другого порядку, а саме:

$$W(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}. \quad (5.46)$$

Передатній функції (5.46) відповідає перехідна характеристика виду:

$$h(t) = k \left( 1 + \frac{T_1 e^{-t/T_1} - T_2 e^{-t/T_2}}{T_2 - T_1} \right). \quad (5.47)$$

Вираз (5.47) може бути також представлений наступним чином:

$$h(t) = k + k_1 e^{-t/T_1} - k_2 e^{-t/T_2}, \quad (5.48)$$

де  $k_1, k_2 > 0$  і  $T_2 > T_1$ .

Різниця між стаціонарним станом і перехідною характеристикою дорівнює:

$$C_L(t) = k - h(t) = -k_1 e^{-t/T_1} + k_2 e^{-t/T_2}. \quad (5.49)$$

Побудована крива згідно рівняння (5.49) є неколивною за умови  $T_1, T_2 > 0$ . За умови, що  $T_2 > T_1$  перший член у рівнянні для  $C_L(t)$  зменшується більш швидко, ніж другий, а, отже, для великих значень  $t$  можна припустити

$$C_L(t) \approx k_2 e^{-t/T_2}. \quad (5.50)$$

Логарифмуючі вираз (5.50) отримаємо:

$$\log_{10} C_L(t) \cong \log_{10} k_2 - \left( \frac{1}{T_2} \log_{10} e \right) t. \quad (5.51)$$

Побудований графік для функції  $C_L(t)$  в логарифмічному масштабі наведено на рис.5.13.

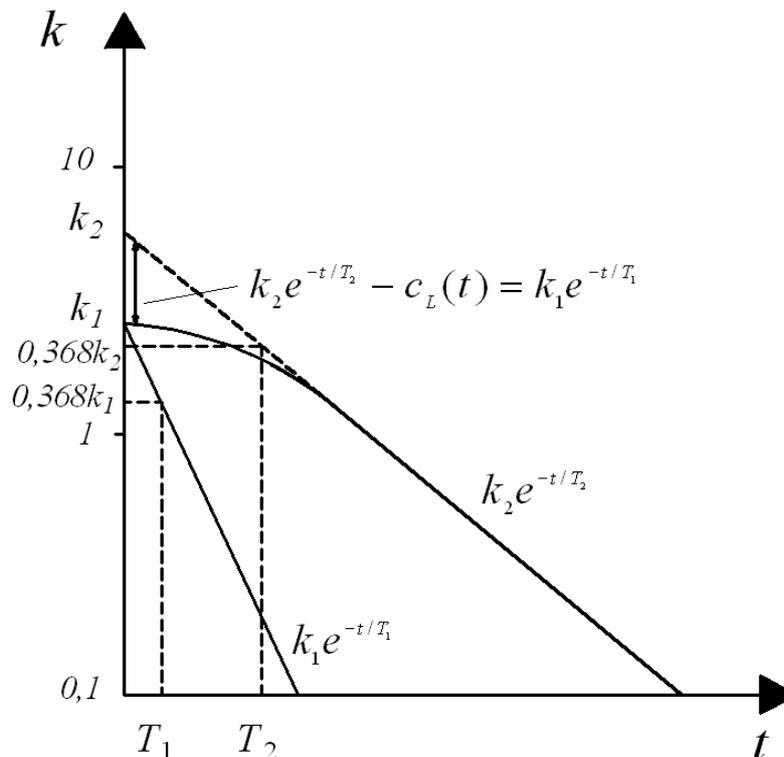


Рис.5.13. Апроксимація методом Андерсона.

Виразу  $k_2 e^{-t/T_2}$  за великих значень  $t$  на рис.5.13 відповідає пряма лінія, яка при продовженні її перетинає вісь ординат у точці  $k_2$ . В момент часу  $t = T_2$  крива  $k_2 e^{-t/T_2}$  досягає значення ординати  $0,368k_2$ , яка відповідає значенню більшої сталої часу  $T_2$ .

Для визначення другої сталої часу запишемо різницю між прямою, яка відповідає  $k_2 e^{-t/T_2}$  і кривою  $C_L(t)$ , тобто  $k_2 e^{-t/T_2} - C_L(t) = k_1 e^{-t/T_1}$

Таким чином, пряма лінія на рис.5.13, яка відповідає виразу для  $k_1 e^{-t/T_1}$  перетинає вісь ординат у точці  $k_1$ . Час  $t$ , коли лінія  $k_1 e^{-t/T_1}$  має ординату  $0,368k_1$ , відповідає сталій часу  $T_1$ .

**Метод В. Стрейца** використовується для апроксимації перехідної характеристики ланцюжком однакових аперіодичних ланок у кількості  $n$ , згідно якого до кривої розгону в точці перегину проводиться дотична і визначаються час запізнювання  $\tau$  і постійна часу  $T_\alpha$  (рис. 5.14).

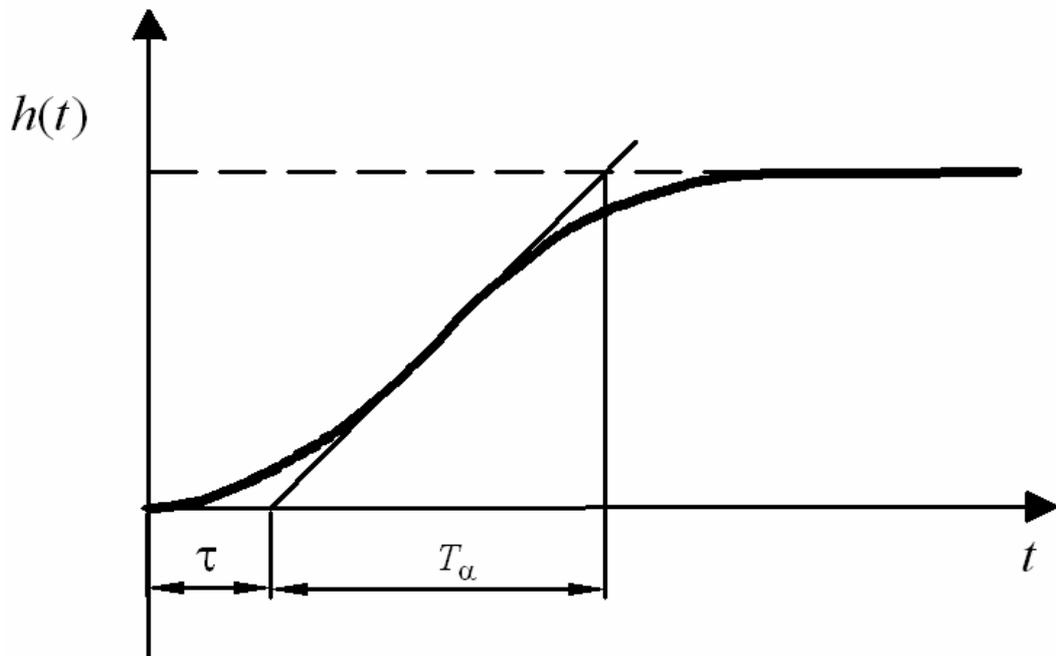


Рис. 5.14. Визначення запізнювання і постійної часу за методом В. Стрейца.

Дані для визначення коефіцієнтів передатної функції зведені до таблиці 5.2.

Взаємозв'язок коефіцієнтів об'єкта при апроксимації  $n$  рівними ланками

$n$	$T_a / \tau$	$\tau / T_a$	$\tau / T$	$\tau / T$	$T_a / T$
1	-	-	0,00	0,00	1,00
2	9,65	0,104	0,28	0,28	2,72
3	4,59	0,218	0,81	0,81	3,70
4	3,13	0,319	1,43	1,43	4,46
5	2,44	0,410	2,10	2,10	5,12
6	2,03	0,493	2,81	2,81	5,70
7	1,75	0,571	3,55	3,55	6,23
8	1,56	0,641	4,31	4,31	6,71
9	1,42	0,704	5,08	5,08	7,17
10	1,29	0,775	5,87	5,87	7,59

Алгоритм обчислень наступний:

- а) до перехідної характеристики об'єкта регулювання в точці перегину проводиться дотична, що дозволяє визначити часи  $T_a$  і  $\tau$
- б) по відношенню  $\tau / T_a$  знаходиться число  $n$  за допомогою табл. 5.2. За проміжних значеннях беруться менші значення  $n$ .
- в) у залежності від числа ланок  $n$  за величиною  $\tau / T_a$ , знайденою в п. б, за величиною  $T_a$  розраховується  $T$ .
- г) за відношення  $\tau / T$  визначається час запізнювання  $\tau$ .

Метод рекомендовано застосувати до об'єктів з транспортним запізнюванням, якщо воно менше 30% від сталої часу. У цьому випадку час запізнювання дорівнює сумі транспортного та ємнісного запізнювань  $\tau = \tau_0 + \tau_e$ .

Нижче розглянуто приклад визначення передатної функції за цим методом

*Приклад.* Перехідна характеристика побудована за експериментальними даними (табл. 5.3), наведена на рис.5.5.

## Експериментальні дані зміни безрозмірного параметру у часі

$t$	$h(t)$	$t$	$h(t)$								
0,0	0,0000	14,0	3,6331	28,0	8,7680	42,0	9,8662	56,0	9,9900	70,0	10,0004
2,0	0,0009	16,0	4,6718	30,0	9,0794	44,0	9,9054	58,0	9,9934	72,0	10,0006
4,0	0,0559	18,0	5,6423	32,0	9,3189	46,0	9,9335	60,0	9,9958	74,0	10,0008
6,0	0,3079	20,0	6,5072	34,0	9,9505	48,0	9,9536	62,0	9,9975	76,0	10,0009
8,0	0,8315	22,0	7,2495	36,0	9,6367	50,0	9,9679	64,0	9,9991	78,0	10,0010
10,0	1,6247	24,0	7,8674	38,0	9,7378	52,0	9,9780	66,0	9,9995	80,0	10,0010
12,0	2,5889	26,0	8,3691	40,0	9,8121	54,0	9,9850	68,0	10,0000		

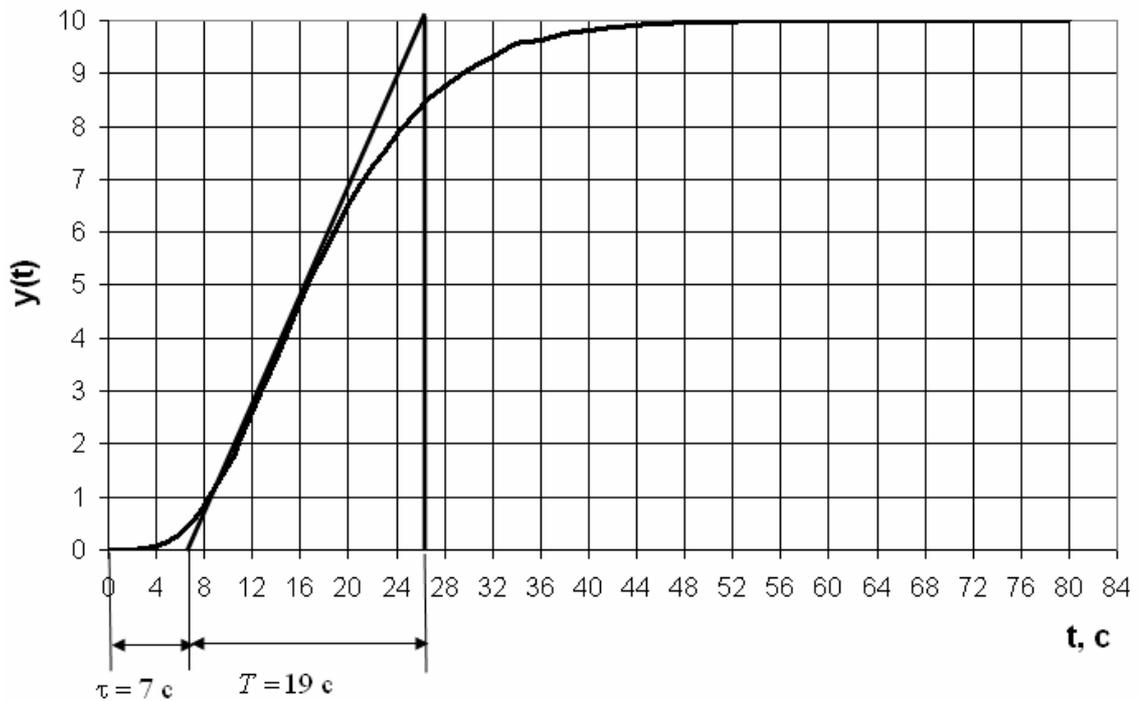


Рис. 5.15. Графік перехідної характеристики.

Згідно алгоритму із графіка знаходимо  $\tau = 7 \text{ с}$  і  $T_a = 19 \text{ с}$ , а за величиною відношення  $\frac{\tau}{T_a} = \frac{7}{19} = 0,368$ , що відповідає проміжному значенню  $n$  ( $4 < n < 5$ ), обирається менше значення  $n = 4$ .

По таблиці 5.2 визначається  $T_a / T = 4,46$ . Звідки стала часу буде дорівнювати  $T = 19 / 4,46 = 4,26 \text{ с}$ .

Із таблиці 5.2 при  $n = 4$  маємо  $\frac{\tau}{T} = 1,43$ . Звідки ємнісне запізнювання становить  $\tau_e = 1,43 \cdot 4,26 = 6,09$  с.

Різниця загального часу запізнювання і ємнісного запізнювання дає чисте (транспортне) запізнювання, а саме:

$$\begin{aligned}\tau_0 &= \tau - \tau_e; \\ \tau_0 &= 7 - 6,09 = 0,91 \text{ с.}\end{aligned}$$

Остаточно передатна функція прийме такий вигляд:

$$W(s) = \frac{ke^{-0,91p}}{(4,26p + 1)^4}.$$

**Метод додаткових членів** передбачає, що будь-яку перехідну функцію з більшою або меншою точністю можна виразити через додаткові члени наступним чином:

$$h(t) = (1 - e^{-\frac{t}{T}})^n, \quad (5.52)$$

де  $\frac{1}{T}$  – корінь  $n$ -ї кратності.

Перетворимо вираз (5.52) за Лапласом

$$H(p) = \frac{1}{p} \frac{1}{\prod_{k=1}^n (1 + \frac{T}{k} p)}. \quad (5.52)$$

Передатна функція об'єкту при одиничному вхідному сигналі  $W_{\text{вх}}(p) = 1/p$  прийме вигляд:

$$W(p) = \frac{H(p)}{W_{\text{вх}}(p)} = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (1 + \frac{T}{k} p)}. \quad (5.53)$$

Постійні часу у рівнянні (5.53) являють собою ступені гармонійного ряду, які знаходяться із залежностей

$$T_{\Sigma} = nT = T \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad (5.53)$$

де  $T_\Sigma$  – сума всіх постійних часу;  $n$  – порядок диференційного рівняння.

Невідомі параметри  $T$  і  $n$  знаходять через моменти (площі). Введемо додаткову функцію  $z(t) = 1 - h(t)$ , для якої виконується співвідношення

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pz(p) = 0; \quad (5.54)$$

$$i m_q = \int_0^\infty t^q z(t) dt = \lim_{p \rightarrow 0} (-1) \frac{\partial^q z(p)}{\partial p^q}. \quad (5.55)$$

Моменти нульового та першого порядку характеризуються рівняннями:

$$m_0 = T \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = T \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \Sigma T; \quad (5.56)$$

$$m_1 = T^2 \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = T^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}. \quad (5.57)$$

Порядок диференційного рівняння отримуємо із співвідношення

$$\lambda = \frac{m_1}{m_0^2} = 1 - \frac{\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right)^2}. \quad (5.58)$$

Із рівняння (5.58) визначаємо граничні значення  $\lambda$  за умови ( $n \rightarrow \infty$ ;  $\lambda \rightarrow \frac{1}{2}$ ), після чого отримуємо вирази для знаходження порядку диференціального рівняння  $n$  та сталих часу:

$$n = \frac{1}{72} \left(5 + \frac{4}{2\lambda - 1}\right)^2 - \frac{1}{8}; \quad (5.59)$$

$$T = \frac{1}{\sum_{k=1}^n 1/k} = C_n m_0. \quad (5.60)$$

Однак на практиці найчастіше апроксимацію через додаткові члени проводять графоаналітичним методом за двома точками графіка перехідної характеристики:

$$h(t_1) = \left(1 - e^{-\frac{t_1}{T}}\right)^n; \quad (5.61)$$

$$h(t_2) = (1 - e^{-\frac{t_2}{T}})^n. \quad (5.62)$$

Найбільшу ефективність метод має при виборі точок на графіку з координатами  $h(t_1) = 0,6321$  і  $t_2 = 0,5t_1$ .

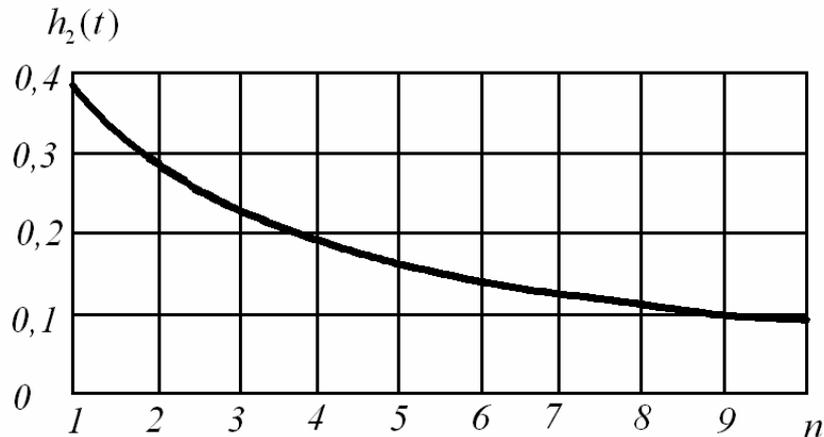


Рис.5.16. Графік для визначення порядку передатної функції.

Таблиця 5.4

Залежність постійної від порядку передатної функції

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$D_n$	0.962	0.642	0.524	0.462	0.421	0.391	0.371	0.354	0.339	0.321

Алгоритм апроксимації у цьому випадку наступний:

- По нормованому графіку перехідної характеристики за величиною  $h(t_1) = 0,6321$  визначається  $t_1$  і  $t_2 = 0,5t_1$ .
- По графіку (рис.5.16), побудованому згідно рівняння (5.63), знаходиться порядок передатної функції  $n$ , який відповідає знайденому значенню  $h(t_2)$

$$h(t) = [1 - (1 - 0,6321^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{n}}]^n. \quad (5.63)$$

- Згідно табл.5.4 визначаємо коефіцієнт  $D_n$  та постійні часу

$$T_1 = D_n T_\Sigma = D_n t_1, \quad T_2 = \frac{T_1}{2}, \quad T_3 = \frac{T_1}{3}, \quad T_4 = \frac{T_1}{4}, \dots \quad (5.64)$$

- Визначається похибка визначення постійних часу, яка не повинна перевищувати  $\pm 4\%$ .

$$\Sigma T = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n; \quad (5.65)$$

$$\frac{\Sigma T}{T_\Sigma} = 0,96 \div 1,04. \quad (5.66)$$

Нижче розглянуто приклад застосування за цим методом.

*Приклад.* З графіка експериментальної перехідної характеристики (рис.5.17) за величиною  $h(t_1) = 0,6321$  отримуємо  $t_1 = 82$  с.,  $t_2 = 0,5t_1 = 41$  с. і  $h(t_2) = 0,3$ .

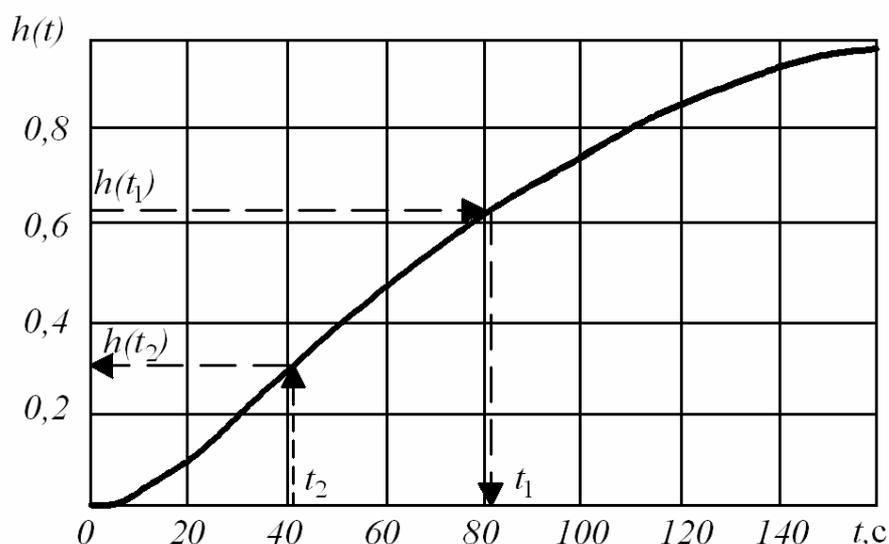


Рис.5.17. Апроксимація перехідної характеристики методом додаткових членів.

По графіку (рис.5.16) при  $h(t_2) = 0,3$  отримуємо  $n = 2$ . По табл.5.3 знаходимо  $D_n = 0,642$ , за якої постійні часу складуть:

$$T_1 = D_n t_1 = 0,642 \cdot 82 = 53 \text{ с};$$

$$T_2 = \frac{53}{2} = 26,5 \text{ с}.$$

Перевірка похибки апроксимації свідчить про виконання умови (5.66):

$$\Sigma T = 53 + 26,5 = 79,5 \text{ с};$$

$$\frac{\Sigma T}{T_\Sigma} = \frac{79,5}{82} = 0,97.$$

Таким чином передатна функція матиме вигляд:

$$W(p) = \frac{1}{(53p+1)(26,6p+1)}.$$

**Наближення через інтегруючі ланки з запізнюванням для об'єктів без самовирівнювання** здійснюється найчастіше графічними методами.

Найпростіше застосовувати метод, якщо об'єкт без самовирівнювання має передатні функції у вигляді:

$$W(p) = \frac{k}{p} e^{-p\tau}, \quad (5.67)$$

або

$$W(p) = \frac{k}{p(Tp+1)}. \quad (5.68)$$

Перехідна характеристика об'єкта без самовирівнювання, що наведена на рис. 5.18 прагне до асимптоти  $BC$ . Для таких об'єктів коефіцієнт підсилення визначається відношенням сталої швидкості зміни вихідної величини  $y$  до величини стрибка вхідного сигналу  $\Delta x$ :

$$k = \frac{dy/dt}{\Delta x_{\text{ВХ}}} = \frac{\text{tg}\alpha}{\Delta x_{\text{ВХ}}} = \frac{OB}{OA \cdot \Delta x_{\text{ВХ}}}. \quad (5.69)$$

Для рівнянь (5.67) і (5.68) величина запізнювання  $\tau$  і постійна часу  $T$  визначаються відповідними відрізками:  $\tau = OA$  і  $T = OA$ .

У разі необхідності апроксимації об'єктів без самовирівнювання передатними функціями більш високого порядку, алгоритм має бути наступним.

а) Графік експериментальної перехідної характеристики (рис.5.19) розбивають на два графіки, тобто об'єкт умовно розкладають на дві ланки: інтегруючу і аперіодичну (статичну).

$$W_1(p) = \frac{K}{p} = \frac{1}{T_1 p}. \quad (5.70)$$

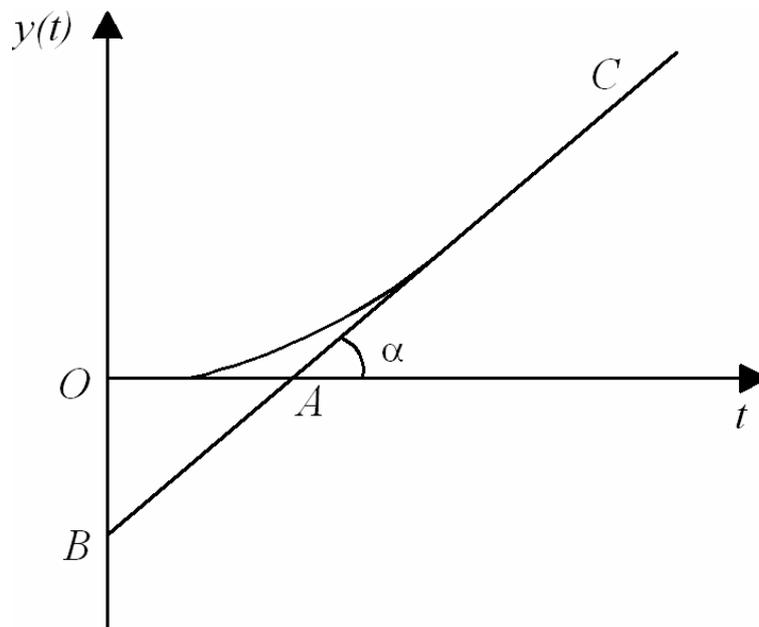


Рис.5.18. Апроксимація об'єкта без самовирівнювання.

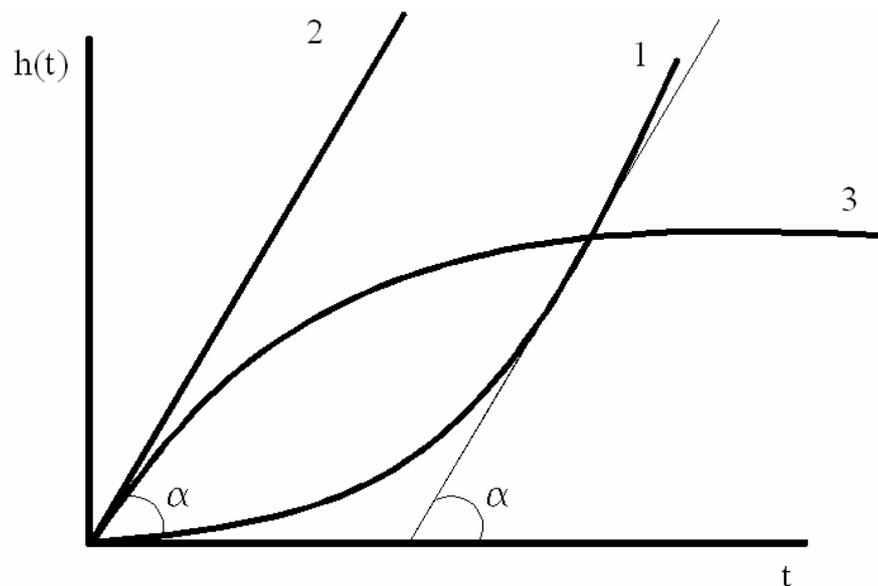


Рис. 5.19. Апроксимація перехідної характеристики передатними функціями високого порядку.

б) Для виділення інтегруючої ланки проводимо асимптоту до вихідної кривої 1 до перетину з віссю абсцис. З початку координат проводимо пряму 2 паралельну до асимптоти. Передатна функція цієї прямої є відношення тангенса кута нахилу асимптоти до амплітуди вхідного сигналу.

в) Для виділення статичної складової з ординат прямої проведеної з початку координат віднімають ординати експериментальної кривої 1 і отримують перехідну характеристику статичного об'єкту 3.

г) Криву 3 апроксимують одним з відомих вище розглянутих способів. Передатна функція астатичного об'єкта регулювання є різницею передатних функцій інтегруючої і статичної ланок, а саме:

$$W_o(p) = \left[ \frac{k}{p} - W_1(p) \right] e^{-p\tau}. \quad (5.71)$$

### 5.3. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ АПРОКСИМАЦІЇ ЛІНІЙНИХ ОБ'ЄКТІВ КЕРУВАННЯ

Динамічні властивості більшості об'єктів керування хімічної і фармацевтичної технології можна характеризувати передатною функцією виду:

$$W(p) = \frac{ke^{-p\tau}}{(Tp+1)^m (T_{m+1}p+1) \dots (T_n p+1)}, \quad (5.72)$$

де  $k$  – коефіцієнт передачі;  $\tau$  – час запізнювання;  $T$  – стала часу,  $m$  – кількість однакових аперіодичних ланок;  $n$  – загальна кількість аперіодичних ланок.

Взагалі методика апроксимації перехідних характеристик на ЕОМ складається з наступних етапів:

- а) обирається структура передатної функції;
- б) за експериментальною перехідною характеристикою визначаються коефіцієнти передатної функції;
- в) здійснюється розв'язування апроксимуючої передатної функції та будується розрахункова перехідна характеристика;
- г) порівнюється розрахункова перехідна залежність з експериментальною та визначається точність апроксимації.

У разі використання ЕОМ перехідну характеристику зручно представляти також у безрозмірному (нормалізованому) вигляді. Для нормування експериментальної кривої треба перейти від абсолютних значень

ординат  $Y$  до приростів змінної  $\Delta Y$  відносно її початкового усталеного значення і поділити ці прирости на значення максимального відхилення вихідної величини. Нормування проводиться за формулою:

$$h_i = \frac{\Delta Y_i(t)}{\Delta Y(\infty)}, \quad (5.73)$$

де  $h_i$  – нормована перехідна характеристика;  $\Delta Y_i(t)$  – поточне значення приростів вихідної величини;  $\Delta Y(\infty)$  – максимальне відхилення вихідної величини.

**Наближення через аперіодичні ланки** - це найпростіший метод, що застосовується як для об'єктів першого порядку, та і для  $n$ -го порядку

Поширеним випадком апроксимації згідно структури (5.72) є передатна функція виду

$$W(P) = \frac{ke^{-P\tau}}{Tp + 1}. \quad (5.74)$$

Для об'єкта керування, який описують передатною функцією (5.74), площа  $S$  між нормованою кривою  $h(t)$  перехідної характеристики (рис.5.20) і лінією її усталеного значення  $h(\infty)$  є сумою сталої часу  $T$  та часу запізнювання  $\tau$ , тобто

$$S = T + \tau. \quad (5.75)$$

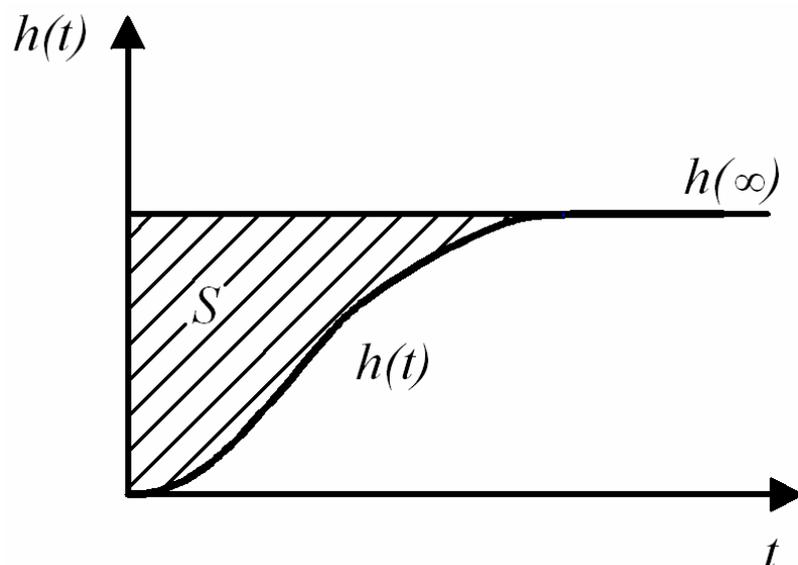


Рис. 5.20. Нормована перехідна характеристика об'єкта керування.

Площу  $S$  обчислюють методом чисельного інтегрування, наприклад, за формулою трапецій

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{C}{2}(h_0 + h_L) + C \sum_{i=1}^{L-1} h_i, \quad (5.76)$$

де  $L$  – кількість вузлів апроксимації;  $C = (b - a) / L$ ;  $b$  і  $a$  – межі інтегрування.

Точність апроксимації визначається за формулою:

$$I = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (h_i^e - h_i^p)^2, \quad (5.77)$$

де  $h_i^p$  – апроксимуюча характеристика, що розраховується за відомою формулою:

$$h_i^p = \begin{cases} 0 & \text{при } t_i < \tau; \\ k \left( 1 - e^{-\frac{(t_i - \tau)}{T}} \right) & \text{при } t_i \geq \tau, \end{cases} \quad (5.78)$$

де  $t_i = (i - 1)C$ ;  $i$  – номер точки.

Функція  $I$  залежить від двох величин  $T$  і  $\tau$ :

$$I = f(T, \tau).$$

З іншого боку  $T$  і  $\tau$  пов'язані залежністю (5.75). Звідки  $\tau = S - T$ . Підставляючи ці величини в (5.77) отримаємо:

$$I = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \left( h_i^e - 1 + e^{-\frac{t_i - S + T}{T}} \right)^2. \quad (5.79)$$

Таким чином, задача апроксимації зводиться до пошуку мінімуму функції однієї змінної, тобто  $I = I(T) \rightarrow \min$ .

Для пошуку екстремуму функції (5.79) доцільно використовувати безградієнтні методи, наприклад метод «золотого» перерізу або п'яти точок.

У разі невідповідності отриманого рівняння передатної функції у вигляді (5.74) заданій точності, застосовують більш високі порядки апериодичних ланок. Такі об'єкти керування, що мають  $S$ -образні перехідні характеристики зручно описувати передаточною функцією виду:

$$W(P) = \frac{k}{(Tp+1)^n}. \quad (5.80)$$

Визначенню підлягають параметри  $T$  і  $n$ .

Функцію  $W(p)$  розкладають в ряд за степенями  $p$  згідно з формулою Ньютона:

$$W(P) = \frac{k}{1 - A_1 p + A_2 p^2 - \dots}. \quad (5.81)$$

де  $A_1 = nT$ ;  $A_2 = \frac{n(n-1)}{2!} T^2$ .

Використовуючи експериментальну перехідну характеристику обчислюють  $S$  і  $S_1$  за формулами:

$$S = \int_0^{\infty} [1 - h(t)] dt; \quad (5.82)$$

$$S_1 = \int_0^{\infty} \left\{ S - \int_0^{\infty} [1 - h(t)] dt \right\} dt. \quad (5.83)$$

Коефіцієнти  $A_1$  і  $A_2$  є аналогами  $S$  і  $S_1$ . Тому на основі виразів (5.81) – (5.83) можна записати:

$$\begin{cases} S = nT; \\ S_1 = \frac{n(n-1)}{2!} T^2. \end{cases} \quad (5.84)$$

Звідки

$$T = \frac{S}{n}; \quad n = \frac{S^2}{S^2 - 2S_1}. \quad (5.85)$$

Оскільки по визначенню  $n$  є цілим числом, то

$$n = \text{int}(S^2 / (S^2 - 2S_1) + 0.5), \quad (5.86)$$

де  $\text{int}(a)$  – найбільше ціле до  $a$  число, що не перевищує його.

Обчислені за (5.85) значення  $n$  і  $T$  є початковими для пошуку їхніх оптимальних значень, тобто таких, при яких досягався мінімум критерію  $I(1.8)$ .

Апроксимуюча перехідна характеристика розраховується за формулою:

$$h(t) = k \left[ 1 - \left( 1 + t_1 + \frac{t_1^2}{2!} + \dots + \frac{t_1^{n-1}}{(n-1)!} \right) e^{-t_1} \right], \quad (5.87)$$

де  $t_1 = \frac{t}{T}$ .

Мінімум функції  $I$  визначається шляхом варіювання  $n$  з кроком рівним 1. Спочатку  $n$  збільшують. Якщо просування у цьому напрямку призводить до зменшення  $I$ , то  $n$  продовжують збільшувати до першого невіддалого кроку. Потім здійснюється повернення на один крок і відповідне йому значення  $T$  і  $n$  вважаються оптимальними.

**Метод Сімою** є універсальним методом наближення, що дозволяє отримати апроксимуючі вирази будь-якого порядку. Цей метод дуже зручний для обробки на ЕОМ, він легко алгоритмізується та відрізняється великою точністю.

Апроксимуючою залежністю є передатна функція виду:

$$W(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + 1}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1}. \quad (5.88)$$

Розглянемо інверсну передатну функцію моделі

$$W^{-1}(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + 1}. \quad (5.89)$$

Розкладемо  $W^{-1}(p)$  в ряд Тейлора в точці  $p=0$

$$W^{-1}(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + 1} = 1 + S_1 p + S_1 p^2 + \dots + S_i p^i + \dots, \quad (5.90)$$

де  $W^{-1}(0) = S_0 = 1$ ;  $S$  – коефіцієнти, що названі М.П.Сімою площами.

Знаючи площі  $S_i$  можна визначити коефіцієнти передатної функції (5.90). Помножимо обидві частини рівняння (5.90) на знаменник передатної функції. У підсумку отримаємо:



$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = \int_0^{\infty} (1-h) dt; \\ S_2 = S_1^2 \int_0^{\infty} (1-h)(1-\theta) d\theta; \\ S_3 = S_1^3 \int_0^{\infty} (1-h) \left(1 - 2\theta + \frac{\theta^2}{2!}\right) d\theta; \\ \dots \\ S_i = S_1^i \int_0^{\infty} (1-h) \left[ \frac{(-\theta)^{i-1}}{(i-1)!} + \frac{(-\theta)^{i-2}}{(i-2)!} + \sum_{j=0}^{i-3} \frac{S_{i-j-1} (-\theta)^j}{S_1^{i-j-1} j!} \right] d\theta. \end{array} \right. \quad (5.94)$$

де  $\theta = \frac{t}{S_1}$ .

У практичних розрахунках інтеграли рівнянь (5.94) визначаються чисельними методами. Наприклад, при використанні методу трапецій вирази для коефіцієнтів  $S_i$  набувають такого вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 \approx \Delta t \left\{ \sum_{i=0}^n [1-h(i\Delta t)] - 0,5 [1-h(0)] \right\}; \\ S_2 \approx S_1^2 \Delta \theta \left\{ \sum_{i=0}^n [1-h(i\Delta \theta)] [1-i\Delta \theta] - 0,5 [1-h(0)] \right\}; \\ S_3 \approx S_1^3 \Delta \theta \left\{ \sum_{i=0}^n [1-h(i\Delta \theta)] \left[ 1 - 2i\Delta \theta + \frac{(i\Delta \theta)^2}{2} \right] - 0,5 [1-h(0)] \right\}. \end{array} \right. \quad (5.95)$$

Як правило при ідентифікації об'єктів управління часто можна обмежитися трьома коефіцієнтами передатної функції, а тип передатної функції обирається виходячи із таких міркувань.

Якщо значення вихідної величини в момент часу  $t = 0$  дорівнює нулю, а похідна не дорівнює нулю, (див. рис. 5.21а) то в передатній функції порядок чисельника на одиницю менше порядку знаменника.

$$W(p) = \frac{b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + 1}{a_n p^n + \dots + a_1 p + 1}. \quad (5.96)$$

Якщо вихідний параметр і його перша похідна в момент часу  $t = 0$  дорівнює нулю (див. рис. 5.21б), то порядок чисельника, по крайній мірі, на дві одиниці менше чим знаменника. За такої умови можна обрати передатну функцію виду:

$$W(p) = \frac{1}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + 1}. \quad (5.97)$$

У цьому випадку  $b_i = 0$  і для визначення параметрів моделі достатньо знати  $N = n$  площин, система (5.93) приймає такий вид:

$$a_1 = S_1, a_2 = S_2, \dots, a_n = S_n. \quad (5.98)$$

Коефіцієнти  $a_i$  мають розмірність часу у відповідному ступені.

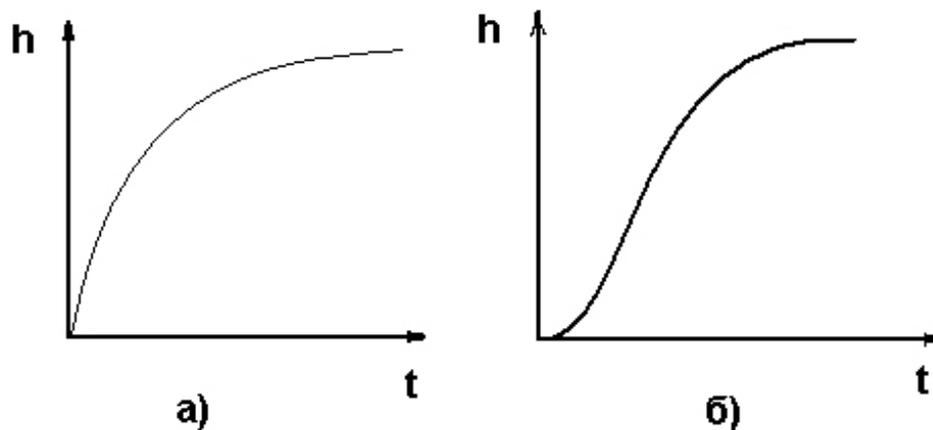


Рис. 5.21. До визначення типу передатної функції.

Найпростішими моделями згідно рівняння (5.97) можуть бути:

$$W(p) = \frac{1}{1 + S_1 p}, \quad n = 1, m = 0. \quad (5.99)$$

$$W(p) = \frac{1}{S_2 p^2 + S_1 p + 1}, \quad n = 2, m = 0. \quad (5.100)$$

$$W(p) = \frac{1}{S_3 p^3 + S_2 p^2 + S_1 p + 1}, \quad n = 3, m = 0. \quad (5.101)$$

Необхідно мати на увазі, що усі використані площі повинні бути позитивними. В іншому разі модель не стійка. За умови  $n = 2, m = 1$  передатна функція (5.97) записується у вигляді:

$$W(p) = \frac{b_1 p + 1}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}. \quad (5.102)$$

Для визначення 3-х коефіцієнтів у виразі (5.102) необхідно 3 рівняння. Система (5,93) приймає вид:

$$\begin{cases} a_1 = S_1 + b_1; \\ a_2 = S_2 + b_1 S_1; \\ 0 = S_3 + b_1 S_2. \end{cases} \quad (5.103)$$

Із останнього рівняння системи (5.103) знаходимо  $b_1 = -\frac{S_3}{S_2}$ . Підставляючи знайдене значення в перші два рівняння визначаємо коефіцієнти  $a_1$  та  $a_2$ .

За умови  $n = 3$  та  $m = 1$  передатна функція буде наступною:

$$W(p) = \frac{b_1 p + 1}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1}. \quad (5.104)$$

Коефіцієнти рівняння (5.104) визначаються рівнянням

$$\begin{cases} a_1 = S_1 + b_1; \\ a_3 = S_3 + S_2 b_1; \\ a_2 = S_2 + S_1 b_1; \\ 0 = S_4 + S_3 b_1. \end{cases} \quad (5.105)$$

#### 5.4. ІДЕНТИФІКАЦІЯ ОБ'ЄКТІВ ЗА ЧАСТОТНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Реакцію об'єкта керування на гармонійний вхідний вплив виражають за допомогою частотних характеристик. На відміну від часових характеристик, що отримуються в перехідних режимах, частотні характеристики визначають у сталих коливних режимах. Дослідження систем управління з використанням частотних характеристик називають дослідженням в частотній області, а методи дослідження, в яких використовуються частотні характеристики, – частотними методами. Частотні методи дуже хороші в практичному застосуванні, і більшість систем управління

проектується саме на основі різних модифікацій цих методів. Відмінною особливістю частотних методів є так звана робастність (або грубість). Це означає, що синтезована за їх допомогою система управління зберігає необхідні характеристики, незважаючи на невеликі відмінності між моделлю, на основі якої виконувалося проектування, і реальною системою управління.

Якщо на вхід об'єкта подати гармонійний сигнал з частотою  $\omega$  і амплітудою  $A_{\text{ВХ}}$ , то після завершення перехідного процесу у сталому режимі вихідна величина об'єкта буде здійснювати вимушені гармонійні коливання з тієї ж частотою  $\omega$ , але з іншої амплітудою  $A_{\text{ВИХ}}$  і зсунуті по фазі щодо вхідних коливань на кут  $\varphi$  (рис. 5.22).

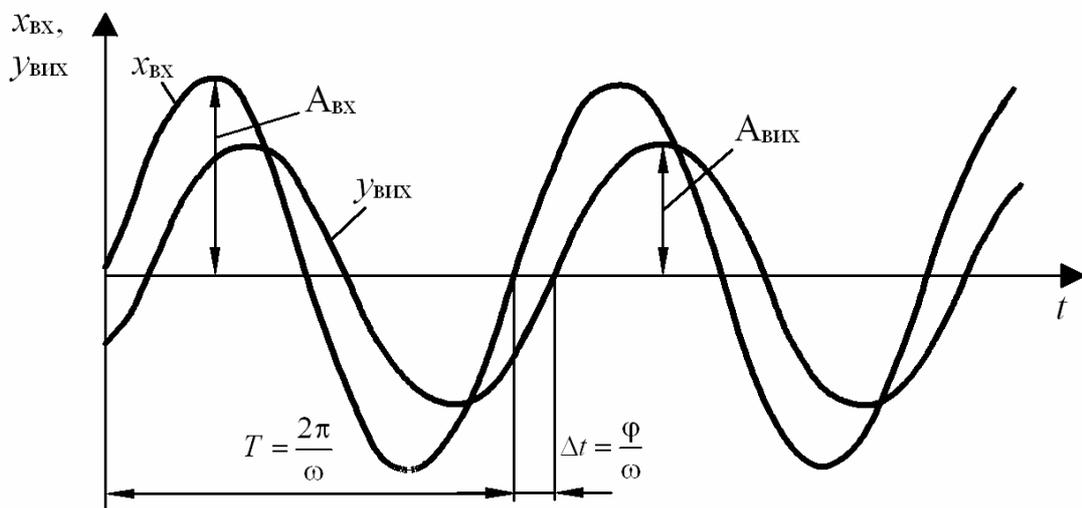


Рис. 5.22. Частотні характеристики об'єкта керування.

Динамічні характеристики, отримані частотним методом, більш точні і надійні, ніж часові, завдяки значній стійкості до перешкод за цим методом. Однак, частотний метод більш складний та трудомісткий і вимагає спеціальних пристроїв для генерування гармонійних коливань.

Для зняття частотних характеристик використовують експериментальну схему, наведену на рис.5.23. Збурення на об'єкт наносять генератором гармонійних коливань (нижня межа частот  $\omega = 0,001\text{--}0,0001$  Гц), в конструкції якого має бути передбачена можливість зміни амплітуди і частоти гармонійних коливань. У реальних об'єктах хімічної технології при збільшенні частоти на вході коливання регульованої величини зазвичай зменшуються по амплітуді і все більше відстають по фазі від вхідних ко-

ливань. Тому при експериментальному визначенні частотних характеристик спочатку визначають реакцію об'єкта на відомий вхідний вплив за нульової частоти, після чого подають коливання невеликої частоти  $\omega_0$ , а потім – коливання з частотами  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, i$  т. д., кожна з яких вдвічі більше попередньої. Частоту вхідних коливань збільшують до значення  $\omega_{cp}$ , так званої частоти «зрізу», за якої вихідна величина об'єкта має відхилення, що не перевищує 5% від усталеного значення. Амплітуду коливань на вході встановлюють однаковою при різних частотах.

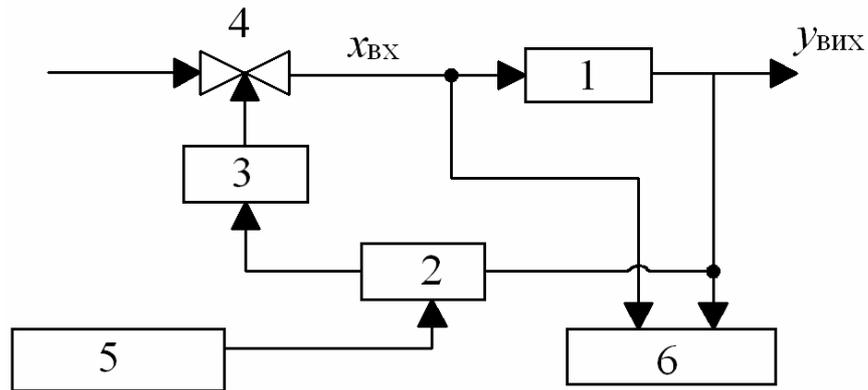


Рис. 5.23. Схема отримання частотних характеристик: 1 – об'єкт керування, 2 – регулятор, 3 – виконавчий механізм, 4 – регулювальний орган, 5 – генератор коливань, 6 – реєстратор.

Через труднощі формування гармонійних коливань на вхід об'єкта найчастіше подають збурюючий вплив у вигляді прямокутної хвилі (рис. 5.24).

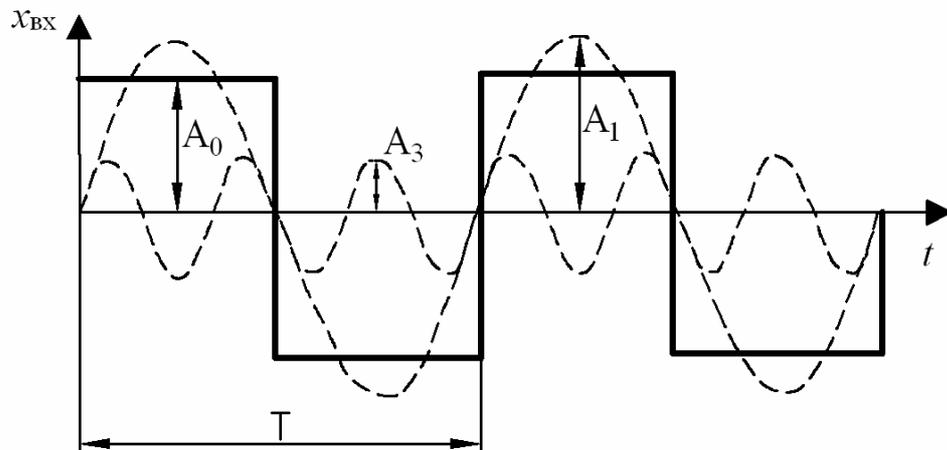


Рис.5.24. Вхідний вплив у вигляді прямокутної хвилі:  $T$  – період прямокутної хвилі;  $A_0$  – амплітуда прямокутної хвилі;  $A_1$  і  $A_3$  – амплітуди першої і третьої гармонік.

Для цього періодично (з періодом  $T$ ) змінюють вхідний вплив, миттєво переставляючи затвор регулюючого органу з одного положення в інше. Якщо практично миттєва перестановка затвора регулюючого органу неможлива, то на вхід об'єкта подають збуджуючий вплив у вигляді трапецеїдальної хвилі (рис. 5.25).

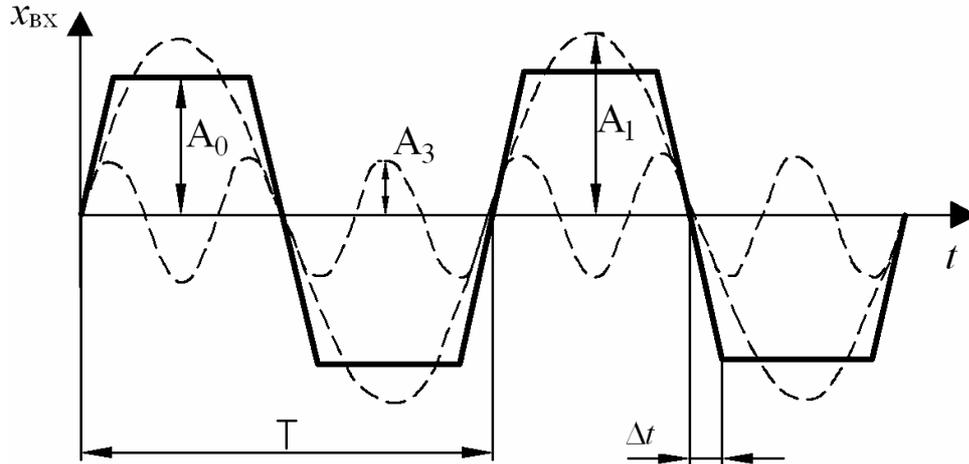


Рис.5.25. Вхідний вплив у вигляді трапецеїдальної хвилі:  $T$  – період трапецеїдальної прямокутної хвилі;  $A_0$  – амплітуда трапецеїдальної прямокутної хвилі;  $A_1$  і  $A_3$  – амплітуди першої і третьої гармонік;  $\Delta t$  – час переміщення затвора регулюючого органу від середнього до крайнього положення.

В обох випадках коливання вхідної та вихідної величин відрізняються від гармонійних коливань, тому для визначення частотних характеристик об'єкта потрібно їх додаткова обробка – виділення гармонійних складових коливань вхідної і вихідної величин. Будь-яку періодичну функцію з періодом коливань  $T_{\text{пер}}$  можна представити у вигляді нескінченного тригонометричного ряду Фур'є:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)], \quad (5.106)$$

де  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  – частота коливань.

Вираз у квадратних дужках формули (5.106) описує гармонійне коливання частотою  $\omega_k = k\omega$  і називається  $k$ -ю гармонікою:

$$x_k(t) = a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t). \quad (5.107)$$

Знаючи коефіцієнти  $a_k$  і  $b_k$ , можна визначити амплітуду  $A_k$  і початкову фазу  $\varphi_k$   $k$ -ої гармоніки:

$$A_k = \frac{\pi}{4A_0} \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad \varphi_k = \arctg\left(\frac{a_k}{b_k}\right). \quad (5.108)$$

Коефіцієнти ряду Фур'є можуть бути визначені з наступних виразів:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\infty} x(t) dt; \quad (5.109)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^{\infty} x(t) \cos(k\omega t) dt; \quad (5.110)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^{\infty} x(t) \sin(k\omega t) dt. \quad (5.111)$$

Для прямокутних коливань ряд Фур'є має вигляд

$$x_{\text{ВХ}}(t) = \frac{4A_0}{\pi} \left[ \sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right]. \quad (5.112)$$

Для трапецеїдальних коливань вираз має вигляд

$$x_{\text{ВХ}}(t) = \frac{4A_0}{\pi\alpha} \left[ \sin(\alpha) \sin(\omega t) + \frac{1}{3^2} \sin(3\alpha) \sin(3\omega t) + \frac{1}{5^2} \sin(5\alpha) \sin(5\omega t) + \dots \right], \quad (5.113)$$

де  $\alpha = \frac{2\pi}{T} \Delta t$ .

Зазвичай для більшості промислових об'єктів все гармонійні складові цього ряду крім першої інтенсивно «подавляються», тому можна обмежитися першими гармоніками вхідних і вихідних коливань. Вхідні коливання мають вигляд:

$$x_{\text{ВХ}}(t) = \frac{4A_0}{\pi} \sin \omega t; \quad x_{\text{ВХ}}(t) = \frac{4A_0 T}{\pi\alpha} \sin(\alpha) \sin(\omega t). \quad (5.114)$$

Визначення коефіцієнтів ряду Фур'є для вихідних коливань за аналітичними формулами (5.109 – 5.111) не завжди можливо через наявність перешкод, тому на практиці часто використовують наближений

метод, за якого їх підрахунок здійснюється не за допомогою інтегралів, а за допомогою кінцевих сум.

Першу гармоніку кривої вихідних коливань виділяють у такий спосіб. Період вихідних коливань розбивають на парне число рівних частин (зазвичай 12) і з отриманих точок проводять перпендикуляри до перетину з кривою вихідних коливань. Початок періоду (точка  $t_0$ ) вибирають таким чином, щоб перша гармоніка вхідних коливань мала нульову фазу (рис.5.26).

Використовуючі знайдені ординати  $y_k$  визначають коефіцієнти ряду Фур'є за наближеними формулами:

$$a_0 \approx \frac{1}{12} \sum_{k=0}^{11} y_k; \quad (5.115)$$

$$a_1 \approx \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{11} [y_k \cos(k30^\circ)]; \quad (5.116)$$

$$b_1 \approx \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{11} [y_k \sin(k30^\circ)]. \quad (5.117)$$

З урахуванням значень кутів синусів і косинусів, що кратні 30 після перетворення отримаємо такі формули:

$$a_1 \approx \frac{1}{6} \{y_{11} - y_5 + 0,5[y_1 + y_9 - y_3 - y_7] + 0,886[y_0 + y_{10} - y_4 - y_6]\}, \quad (5.118)$$

$$b_1 \approx \frac{1}{6} \{y_2 - y_8 + 0,5[y_0 + y_4 - y_6 - y_{10}] + 0,866[y_1 + y_3 - y_7 - y_9]\}. \quad (5.119)$$

Зрушення по фазі між першими гармоніками вихідних та вхідних коливань і відношення їх амплітуд (для прямокутних вхідних коливань) знаходять за формулами:

$$A(\omega) = \frac{\pi}{4A_0} \sqrt{a_1^2 + b_1^2}; \quad \varphi = \arctg\left(\frac{a_1}{b_1}\right). \quad (5.120)$$

Іноді можна обмежитися розбиттям періоду кривої, яка обробляється, на шість ділянок (рис.5.27). У цьому випадку для визначення коефіцієнтів ряду Фур'є використовуються тільки шість ординат і коефіцієнти  $a_0, a_1$  і  $b_1$  обчислюються за такими формулами:

$$a_0 \approx \frac{1}{6}(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5); \quad (5.121)$$

$$a_1 \approx \frac{1}{3} \left[ (y_0 - y_3) + \frac{1}{6}(y_1 + y_5 - y_2 - y_4) \right]; \quad (5.122)$$

$$b_1 \approx \frac{\sqrt{3}}{6}(y_1 + y_2 - y_4 - y_5). \quad (5.123)$$

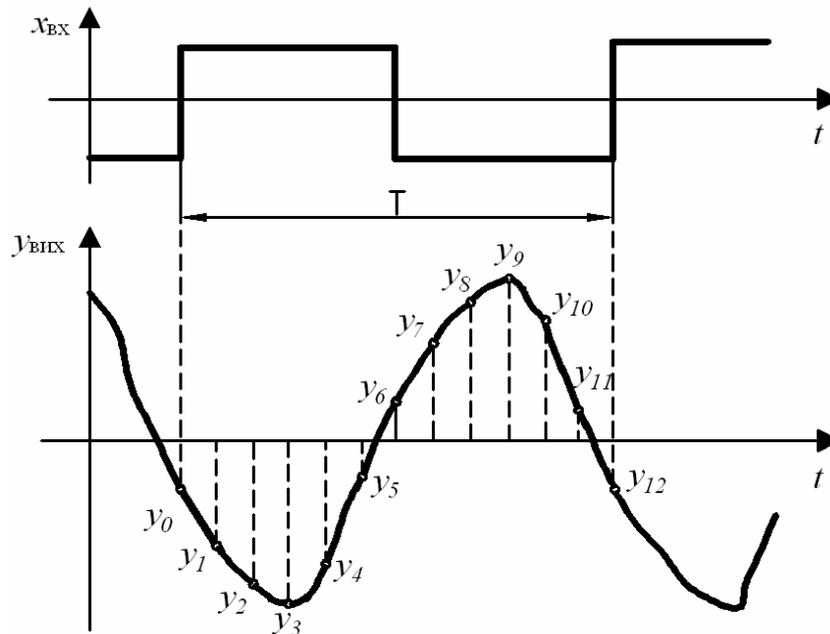


Рис.5.26. Обработка данных частотного эксперимента по двенадцати ординатам.

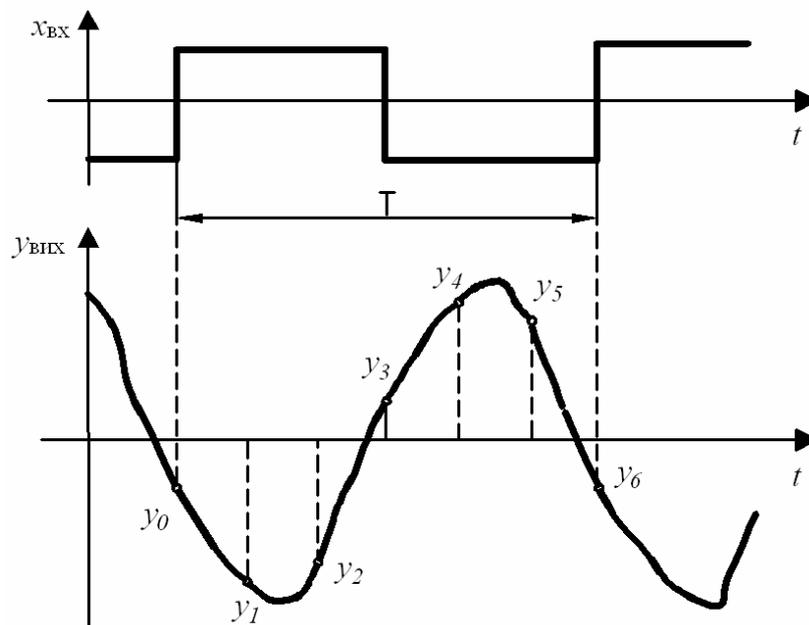


Рис.5.27. Обработка данных частотного эксперимента по шести ординатам.

## **6. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ОБ'ЄКТІВ КЕРУВАННЯ І МОЖЛИВОСТІ ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ**

Алгоритми функціонування систем керування, що отримані на стадії проектування по математичній моделі об'єкта, як правило в значній мірі відрізняється від дійсно оптимальних параметрів алгоритмів. Особливо у частині числових значень їх параметрів настройки. Це обумовлено в основному тим, що під час проектування системи керування ще відсутній діючий об'єкт, а отже, виключена можливість отримання або уточнення моделі експериментальним шляхом. Отримання ж моделі аналітичним методом безумовно пов'язано з вводом низки припущень, ступінь впливу яких на кінцевий результат важко врахувати. Практично дуже важко отримати математичну модель об'єкту по тому чи іншому каналу керування експериментальним шляхом і на діючому об'єкті внаслідок нестационарності діючих на нього в процесі експлуатації випадкових (неконтрольованих) збурень. Крім того, і динамічні властивості самого об'єкту змінюються у часі за рахунок зміни коефіцієнтів тепло-і масообміну, активності каталізаторів та ін., а іноді взагалі неможливо їх врахувати у зв'язку з недостатнім вивченням механізмів процесів, що вимагає відповідного корегування системи в процесі експлуатації.

У зв'язку з цим виникає необхідність застосування експериментально-аналітичного методу, який передбачає побудову математичної моделі з використанням аналітичного підходу та подальшим уточненням її за експериментальними даними, отриманими в процесі експлуатації діючого об'єкту, тобто в проведенні ідентифікації моделі у часі.

Нижче розглянуті можливості застосування експериментально-аналітичного методу математичного моделювання для вирішення перелічених вище задач на прикладі випарника водоаміачної абсорбційно-холодильної установки (АХУ) блоку вторинної конденсації відділення синтезу у виробництві аміаку.

## 6.1. АНАЛІЗ ОСОБЛИВОСТЕЙ АПАРАТУРНО-ТЕХНОЛОГІЧНОГО ОФОРМЛЕННЯ ПРОЦЕСУ І ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕНЬ

Випарники блоку вторинної конденсації відділення синтезу аміаку становлять собою горизонтальні кожухотрубні теплообмінники зануреного типу з U – подібними трубками. Циркуляційний газ з парою аміаку охолоджується у трубному просторі до температури згідно регламенту не вище 0°C за рахунок аміаку, що кипить у міжтрубному просторі випарників під тиском 0,296 МПа. За рахунок охолодження циркуляційного газу відбувається конденсація з нього аміаку. Основні конструктивні характеристики випарника: поверхня теплопередачі  $F = 520 \text{ м}^2$ ; загальна вага – 68,65 т; внутрішній діаметр  $D = 2,2 \text{ м}$ ; загальна довжина – 12,15 м; діаметр трубок  $d = 22 \times 3,5 \text{ мм}$ ; довжина трубок  $l = 9,5 \text{ м}$ ; кількість трубок  $n = 526$ .

Особливість процесу випаровування рідкого аміаку полягає у тому, що рідкий холодоагент (аміак), який надходить до випарника АХУ, містить деяку кількість води і вагова концентрація холодоагенту на вході складає за проектом 0,998 кг/кг. За абсолютного тиску випаровування 0,296 МПа у випарнику накопичується вода, для вилучення якої схемою передбачено дренавання її у вигляді флегми до абсорбера. Проте, з одного боку припинення дренавання флегми викликає накопичення води у випарнику, внаслідок чого зменшується концентрація аміаку і підвищується за одного і того ж тиску температура кипіння, а холодопродуктивність (тепловий потік) зменшується. З іншого боку надмірне дренавання флегми призводить до втрати холодоагенту, який може бути випарений, що також знижує холодопродуктивність АХУ. Тому, безумовно існує деяке оптимальне значення витрати флегми з випарника, яке забезпечить оптимальні як холодопродуктивність, так і температуру охолодження циркуляційного газу. Отримання таких показників у зв'язку з багатофакторністю існуючих впливів на роботу випарника (концентрація, витрата і температура холодоагенту; витрата, температура і вміст циркуляційного газу) експериментально на діючому об'єкті неможливо. Тому задача оптимізації процесу дренавання флегми з визначенням динамічних властивостей об'єкту для синтезу системи регулювання витрати флегми може

бути вирішена методом математичного моделювання, побудова якої вимагає застосування експериментально-аналітичного методу.

## 6.2. ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

В процесі побудови математичної моделі випарника прийняті наступні основні припущення: насиченість пари аміаку в усьому об'ємі міжтрубного простору; відсутність теплообміну з навколишнім середовищем; необмежена теплопровідність стінок; теплота гідравлічних втрат зневажливо мала; рівномірний розподіл концентрації і температури аміаку в об'ємі киплячої рідини; кількість теплоти і холодоагенту підводяться таким чином, що в об'ємі випарника не утворюються області рідини, що не кипить; рушійна сила теплообміну характеризується середньологарифмічною залежністю, що дозволяє позбавитись від системи рівнянь з розподіленими параметрами. З урахуванням прийнятих припущень рівняння математичного опису випарника АХУ можуть бути представлені наступним чином.

Рівняння матеріального і енергетичного балансів для двофазного простору:

$$\frac{dm_X}{dt} + \frac{dm_Y}{dt} = G_X^{BX} - G_Y^{BIX} - G_Y^{BIX}; \quad (6.1)$$

$$\frac{dm_X i_X}{dt} + \frac{dm_Y i_Y}{dt} = G_X^{BX} i_X^{BX} - G_Y^{BIX} i_Y^{BIX} - G_X^{BIX} i_X^{BX} + Q_{MT}. \quad (6.2)$$

Рівняння покомпонентного матеріального балансу:

$$\frac{dm_X \xi_X}{dt} + \frac{dm_Y \xi_Y}{dt} = G_X^{BX} \xi_X^{BX} - G_Y^{BIX} \xi_Y^{BIX} - G_X^{BIX} \xi_X^{BX}. \quad (6.3)$$

Енергетичний баланс для циркуляційного газу, що охолоджується, і стінок труб випарника:

$$\begin{aligned} \rho_{\Pi} c_{\Pi} V_B \frac{d\theta_{\Pi}^{cp}}{dt} = & G_{\Gamma}^{BIX} c_{\Gamma} (\theta_{\Pi}^{BX} - \theta_{\Pi}^{BIX}) + (G_K^{BX} + 0,5G_K) \times \\ & \times (\theta_{\Pi}^{BX} - \theta_{\Pi}^{BIX}) c_K + G_K r + G_{\Pi}^{BIX} c_{\Pi} (\theta_{\Pi}^{BX} - \theta_{\Pi}^{BIX}) - Q_B; \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$C_m m_m \frac{d\theta^{CT}}{dt} = Q_B - Q_{MT}. \quad (6.5)$$

Тепловіддача з боку холодоагенту і циркуляційного газу

$$Q_{MT} = \alpha_{MT} F_{MT} (\theta^{CT} - \theta_{MT}); \quad (6.6)$$

$$Q_B = \alpha_{Ц} F_B (\theta_{Ц}^{CP} - \theta^{CT}). \quad (6.7)$$

Середня різниця температур:

$$\Delta\theta^{CP} = \theta_{Ц}^{CP} - \theta_{MT} = \frac{(\theta_{Ц}^{BX} - \theta_{MT}) - (\theta_{Ц}^{ВІХ} - \theta_{MT})}{2,3 \lg \frac{(\theta_{Ц}^{BX} - \theta_{MT})}{(\theta_{Ц}^{ВІХ} - \theta_{MT})}}. \quad (6.8)$$

Тиск кипіння у випарнику

$$P_{MT} = P_{MT}(\theta_{MT}, \xi_X). \quad (6.9)$$

Кількість рідкого і пароподібного холодоагенту

$$m_X = V_X \rho_X; \quad (6.10)$$

$$m_Y = (V_{MT} - V_X) \rho_Y. \quad (6.11)$$

Ентальпія рідкого і пароподібного холодоагенту

$$i_X^{BX} = i_X(\theta_{MT}, P_{MT}, \xi_X); \quad (6.12)$$

$$i_X^{ВІХ} = i_X(P_{MT}, \xi_X); \quad (6.13)$$

$$i_X^{ВІХ} = i_Y(P_{MT}, \xi_Y). \quad (6.14)$$

Густина рідини і пари у насиченому стані

$$\rho_X = \rho_X(P_{MT}, \xi_X); \quad (6.15)$$

$$\rho_Y = \rho_Y(P_{MT}, \xi_Y). \quad (6.16)$$

У рівняннях (6.1 – 6.16) прийняті наступні позначення:  $m_X, m_Y, m_m$  – маса рідкої, парової фаз і металу труб, кг;  $G_X^{BX}, G_Y^{ВІХ}, G_X^{ВІХ}$  – витрата рідкого холодоагенту на вході, пара холодоагенту на виході випарника і флегми, кг/с;  $i_X^{BX}, i_Y^{ВІХ}, i_X^{ВІХ}$  – ентальпія рідкого холодоагенту на вході, па-

ри холодоагенту на виході випарника і флегми, Дж/кг;  $Q_{MT}, Q_B$  – тепловий потік з боку міжтрубного і усередині трубного простору, Вт;  $t$  – час, с;  $\xi_X^{BX}, \xi_Y^{BIX}, \xi_X^{BIX}$  – концентрація рідкого холодоагенту на вході, пари холодоагенту на виході випарника і флегми, кг/кг;  $\rho_X, \rho_Y, \rho_{Ц}$  – густина рідкого і пари холодоагенту та середня густина циркуляційного газу, кг/м<sup>3</sup>;  $c_{Ц}, c_K, c_m, c_{П}, c_{Г}$  – середня теплоємність циркуляційного газу, конденсату, металу труб, пари аміаку і газової фази циркуляційного газу, Дж/кг·К;  $r$  – середня теплота конденсації, Дж/кг;  $G_{Г}^{BIX}, G_{К}^{BIX}, G_{К}$  – витрата газової фази циркуляційного газу на виході, рідкої фази циркуляційного газу на вході випарника і конденсату, кг/с;  $\theta_{Ц}^{cp}, \theta_{Ц}^{BX}, \theta_{Ц}^{BIX}, \theta^{CT}, \theta_{MT}$  – температура середня циркуляційного газу, на вході, виході випарника і стінки та холодоагенту у міжтрубному просторі, °С;  $V_{MT}, V_X$  – об’єм міжтрубного простору та рідини у ньому, м<sup>3</sup>.

Аналіз наведених залежностей свідчить, що розв’язання системи рівнянь (6.1 – 6.16) вимагає визначення таких параметрів зв’язку як коефіцієнти тепловіддачі з боку міжтрубного простору  $\alpha_{MT}$  та з боку циркуляційного газу  $\alpha_{Ц}$ . У зв’язку із значною невизначеністю цих коефіцієнтів, особливо для  $\alpha_{Ц}$ , необхідно вирішення задачі статичної ідентифікації процесу теплообміну в умовах конденсації продукційного аміаку з циркуляційного газу.

### 6.3. СТАТИЧНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПРОЦЕСУ

Статична ідентифікація теплообміну в процесі конденсації продукційного аміаку з циркуляційного газу проводилась за результатами пасивного реєстраційного експерименту для випарника, за якого була сформована вибірка з чотирнадцяти режимів. Експериментальні дані по восьми з цих режимів роботи випарника зведені в табл. 6.1.

**Алгоритм ідентифікації**, узагальнена блок-схема якого представлена на рис. 6.1, складається з трьох основних етапів. На першому етапі за отриманими експериментальними даними після прийняття припущень та обмежень визначаються величини теплового потоку  $Q_0$  (холодопроду-

ктивність), витрати рідкого аміаку у циркуляційному газі на вході випарника  $G_K^{BX}$ , сконденсованого аміаку  $G_K$ , середня кількість сконденсованого аміаку  $G_{СК}$ , а також коефіцієнти тепловіддачі  $\alpha_{MT}, \alpha_{Ц}$  і теплопередачі  $K$  (Вт/м<sup>2</sup>К) за загально відомими рівняннями:

$$\alpha_{MT} = 2,2q_F^{0,7} P_{MT}^{0,21}; \quad (6.17)$$

$$\alpha_{Ц} = AW^{0,8} d_{BH}^{-0,2}; \quad (6.18)$$

$$W = v_{Ц} \rho_{Ц} / (S_{TP} \cdot 3600); \quad (6.19)$$

$$K = Q_0 / F \Delta \theta^{CP}; \quad (6.20)$$

$$A = 16,28 \frac{\lambda_{Ц}}{\mu_{Ц}^{0,8}} \left( \frac{Pr}{0,73} \right)^{0,4}, \quad (6.21)$$

де  $W$  – вагова швидкість циркуляційного газу, кг/м<sup>2</sup>·с;  $d_{BH} = 0,015$  м – внутрішній діаметр теплообмінних труб;  $S_{TP} = 0,0928$  м<sup>2</sup> – переріз трубного простору;  $q_F$  – питомий тепловий потік, Вт/м<sup>2</sup>;  $\lambda_{Ц}$  – теплопровідність середня циркуляційного газу, Вт/м·К;  $\mu_{Ц}$  – середня динамічна в'язкість циркуляційного газу, Па·с,  $v$  – витрата циркуляційного газу, нм<sup>3</sup>/год.

При цьому загальна величина коефіцієнту термічного опору  $R_T$  забруднень та стінок труб ( $R_3 + R^{CT}$ ) визначається з наступного рівняння:

$$K = 1 / \left( \frac{1}{\alpha_{Ц}} + \frac{1}{\alpha_{MT}} + R_3 + R^{CT} \right). \quad (6.22)$$

На другому етапі здійснюється порівняння експериментальних показників ефективності теплообміну з проектними і у разі значної їх розбіжності має бути проведений аналіз по такій невідповідності з висуненням припущень та остаточне визначення рівнянь для розрахунку коефіцієнтів тепловіддачі, термічного опору і теплопередачі.

Таблиця 6.1.

## Експериментальні дані по режимам роботи випарника

№ режиму	Циркуляційний газ (трубний простір)									Концентрація холодоагенту на вході випарника, $\xi^{BX}_x$	Холодоагент, що кипить (міжтрубний простір)			Виграта холодоагенту на вході $G^{BX}_x$ , т/ГОД
	Виграта $v_{ц}$ , $\text{нм}^3/\text{ГОД}$	Тиск $P_{ц}$ , МПа	Температура, °С		Склад на вході $\alpha_i^{BX}$ , % об.						Температура $\theta_{\text{МТ}}$ , °С	Тиск $P_{\text{МТ}}$ , МПа	Виграта флегми $G^{BX}_x$ , т/ГОД	
			Входу $\theta^{BX}_{ц}$	Виходу $\theta^{ВІХ}_{ц}$	Водень	Азот	Метан	Аргон	Аміак					
1	319614	24,2	16	-5	55,7	18,9	8,4	6,9	10,1	0,989	-13	0,19	0,902	15,995
2	316233	23,0	23	-1	56,0	18,9	8,3	6,9	9,9	0,991	-8	0,25	1,158	19,174
3	310500	23,8	13	-11	56,5	19,4	8,5	5,9	8,7	0,993	-18	0,16	0,607	16,609
4	317404	23,0	18	-6	56,2	20,0	8,4	7,3	8,1	0,995	-13	0,20	0,397	17,313
5	315433	22,7	18	-6	56,8	17,6	8,8	6,8	10,0	0,995	-13	0,20	0,465	17,507
6	321702	23,0	15	-8	55,6	19,2	8,7	6,7	9,8	0,993	-15	0,17	0,54	16,885
7	311715	23,5	13	-1	57,2	19,0	8,0	6,9	8,9	0,997	-8	0,20	0,102	10,878
8	320024	23,8	18	4	56,2	19,5	7,7	6,8	9,8	0,996	-2	0,25	0,142	10,41

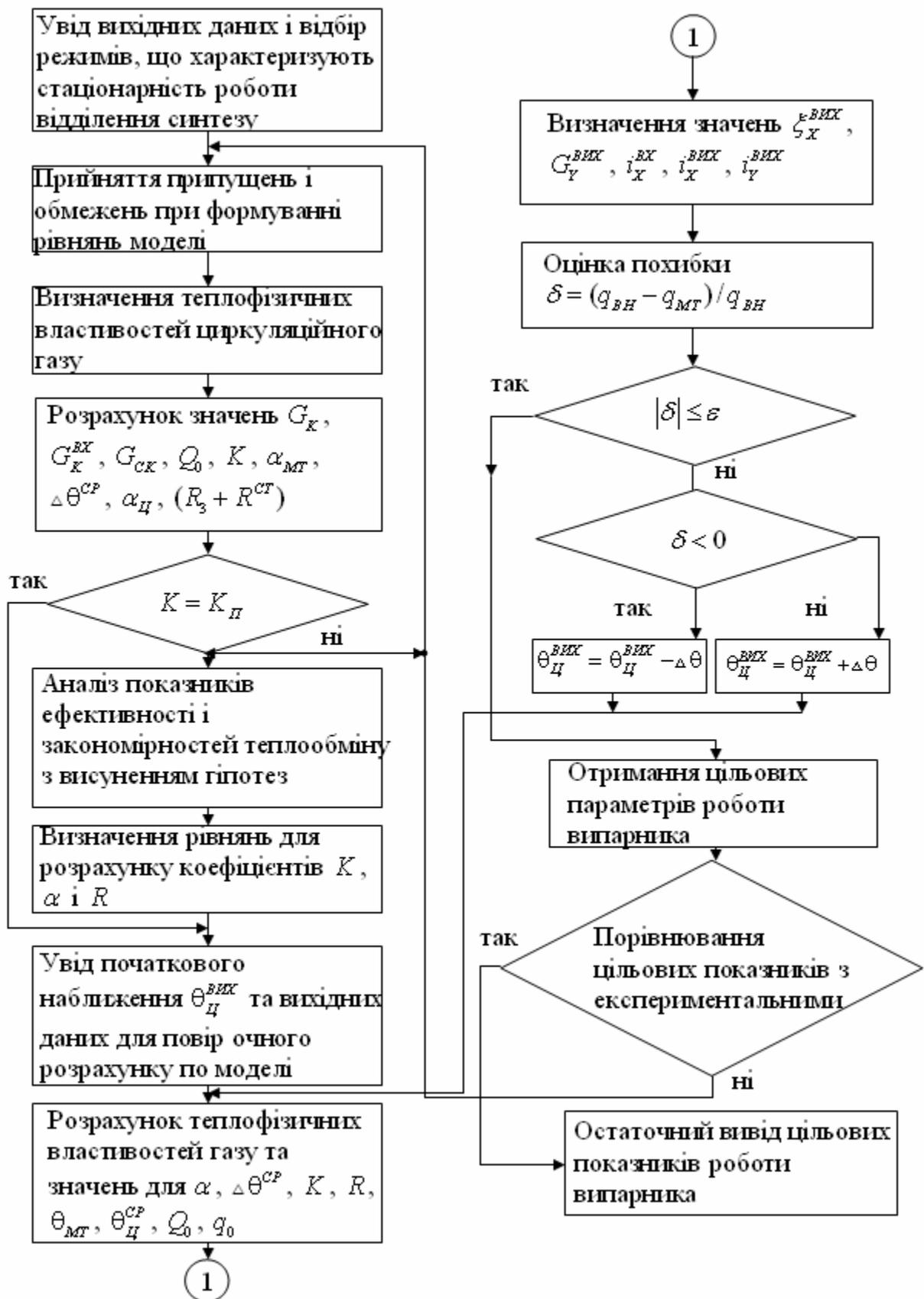


Рис. 6.1. Узагальнена блок-схема алгоритму статичної ідентифікації випарника.

Наприкінці (третій етап) передбачено проведення повірного розрахунку системи рівнянь у статичному режимі, яка на відміну від системи (6.1 – 6.7) прийме наступний вигляд:

$$G_X^{BX} = G_Y^{BIX} + G_X^{BIX}; \quad (6.23)$$

$$Q_{MT} = G_X^{BX} i_X^{BX} + G_Y^{BIX} i_Y^{BIX} - G_X^{BX} i_X^{BX}; \quad (6.24)$$

$$G_X^{BX} \xi_X^{BX} = G_X^{BIX} \xi_X^{BIX} + G_Y^{BIX} \xi_Y^{BIX}; \quad (6.25)$$

$$Q_B = G_{\Gamma} c_{\Gamma} (\theta_{\Pi}^{BX} - \theta_{\Pi}^{BIX}) + (G_K^{BX} + 0,5 G_K) \times \\ \times c_K (\theta_{\Pi}^{BX} - \theta_{\Pi}^{BIX}) + G_K r + G_{\Pi}^{BIX} c_{\Pi} (\theta_{\Pi}^{BX} - \theta_{\Pi}^{BIX}); \quad (6.26)$$

$$Q_{MT} = \alpha_{MT} F_{MT} (\theta^{CT} - \theta_{MT}); \quad (6.27)$$

$$Q_B = \alpha_{\Pi} F_B (\theta_{\Pi}^{CP} - \theta_{\Pi}^{CT}); \quad (6.28)$$

$$Q_{CT} = F^{CT} (\theta_{\Pi}^{CT} - \theta_{MT}^{CT}) / (R_3 + R^{CT}), \quad (6.29)$$

де  $\theta_{\Pi}^{CT}$  і  $\theta_{MT}^{CT}$  – температура стінки труб відповідно з боку циркуляційного газу і міжтрубного простору, °С,  $F^{CT}$  – середня поверхня труб, м<sup>2</sup>.

За результатами розрахунку цільових показників роботи випарника визначається похибка їх у порівнянні з експериментальними даними. Завдання початкового наближення встановлювалось за умови  $\theta_{\Pi}^{BIX} < \theta_{\Pi}^{BX} - 5$ , а величина похибки  $\varepsilon$  для прискорення циклу розрахунку приймалась на рівні 0,2 %. Крок наближення  $\Delta\theta$  складав 0,2°С.

**Дослідження показників ефективності процесу** в умовах конденсації аміаку з циркуляційного газу здійснювалось за експериментальними даними наведеними у табл. 6.1. Окремі результати розрахунків показників ефективності теплообміну за рівняннями (6.8, 6.17 – 6.22) зведені до табл. 6.2, номери режимів у якій відповідають номерам табл. 6.1.

Порівняння значень  $K$ , наведених у табл. 6.2, і проектного 1130,5 Вт/м<sup>2</sup>К, розрахованого за формулами (6.17, 6.18 і 6.22), свідчить, що у реальних умовах коефіцієнт теплопередачі в середньому більш ніж у 1,5 рази менше. Цим у здебільшому обумовлена і менша величина теплового потоку (5 МВт в середньому) по відношенню до проектного зна-

чення (6,28 МВт). Така невідповідність, як засвідчує аналіз літератури, може бути пов'язана з наявністю додаткового термічного опору конденсату. Отримані розрахункові показники дозволили з'ясувати, що дійсно між загальним термічним опором  $R_T$  і середньою витратою конденсату  $G_{СК}$  існує не випадкова залежність (рис. 6.2).

Табл. 6.2

Експериментальні показники ефективності теплообміну випарника

№ режису	Питомий тепловий потік $q_F, \text{кВт/м}^2$	Середня витрата аміачного конденсату $G_{СК}, \text{т/год}$	Коефіцієнт тепловіддачі з боку міжтрубного простору $\alpha_{MT}, \text{Вт/м}^2\text{К}$	Коефіцієнт тепловіддачі з боку циркуляційного газу $\alpha_{Ц}, \text{Вт/м}^2\text{К}$	Загальний термічний опір стінок труб і забруднень $R_T \cdot 10^4, \text{м}^2\text{К/Вт}$	Коефіцієнт теплопередачі $K, \text{Вт/м}^2\text{К}$	Середньологарифмічна різниця температур $\Theta_{СР}, \text{°С}$
1	8,84	19,11	1310,3	3917,3	8,2631	541,6	16,31
2	10,64	16,78	1581,6	3889,6	6,6236	660,4	16,12
3	9,38	15,88	1317,1	4176,3	7,2141	581,3	16,12
4	10,05	13,21	1448,8	3929,7	5,3671	673,8	14,91
5	10,08	17,66	1453,2	3779,7	6,4540	625,7	16,12
6	9,65	18,54	1360,5	3932,1	6,4841	610,1	15,81
7	6,52	15,82	1069,3	3783,9	5,1315	584,2	11,14
8	6,22	17,37	1085,3	3915,8	6,9836	533,2	11,66

Проведення кореляційного і регресійного аналізу з використанням пакету Statistka дозволило встановити апроксимуюче рівняння:

$$R_T = (256,64 - 9,40232G_{СК} + 1,66742G_{СК}^2) \cdot 10^{-6}. \quad (6.30)$$

Коефіцієнт регресії для рівняння (6.30) склав 0,78, а середньоквадратичне відхилення розрахункового значення відносно експериментального не перевищує  $10^{-4} \text{ м}^2\text{К/Вт}$ . Перевірка адекватності по критерію Фішера довела, що дисперсії залишкова і відносно середнього відрізняються

ся не випадково, а похибка апроксимації не перевищує 15 %. Аналіз рівняння (6.30) та графічної залежності дозволив визначити і реальні відокремлені від конденсаційного опору суто показники термічного опору забруднень і стінок, який становить  $256,64 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2\text{К/Вт}$ .

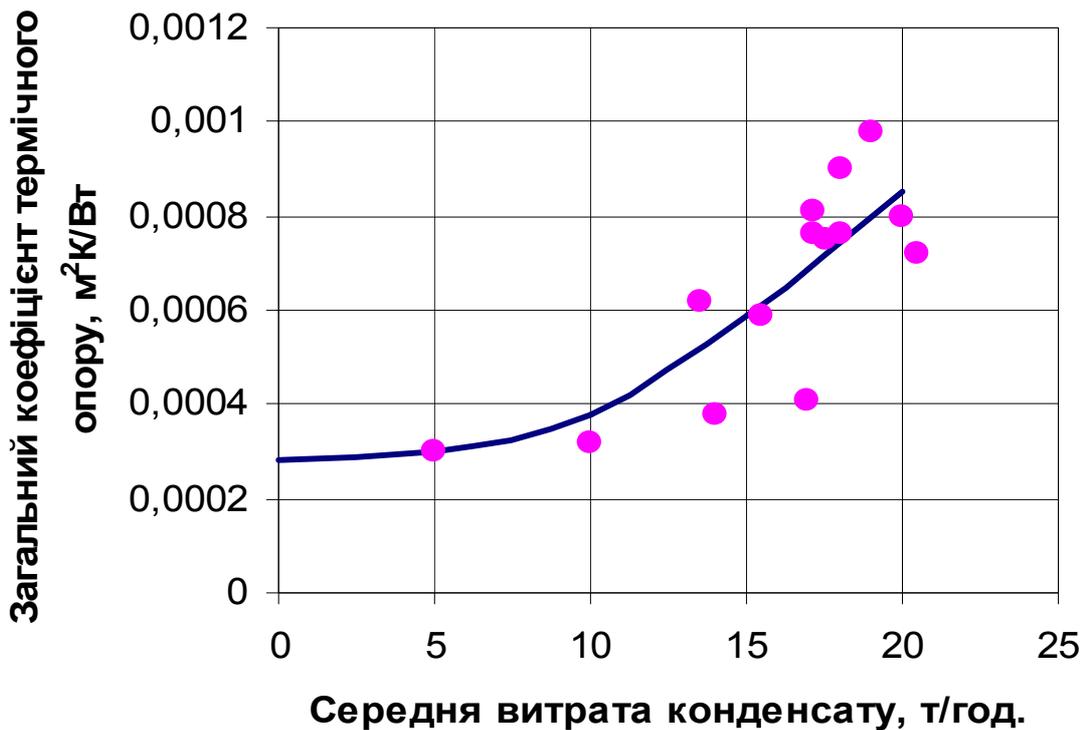


Рис. 6.2. Залежність загального коефіцієнту термічного опору  $R_T$  від середньої кількості сконденсованого аміаку  $G_{CK}$ .

При цьому коефіцієнт тепловіддачі з боку циркуляційного газу визначиться рівнянням:

$$\alpha_{Ц} = 10^6 / (-9,40232G_{CK} + 1,66742G_{CK}^2). \quad (6.31)$$

Враховуючі рівняння (6.22 і 6.31) отримаємо скориговану формулу Краусольда для розрахунку  $\alpha_{Ц}$  при конденсації аміаку під підвищеним тиском понад 20 МПа і наявності інертів:

$$\alpha_{Ц} = \frac{AW^{0,8}d_{BH}^{-0,2}}{1 + (1,66742G_{CK}^2 - 9,40232G_{CK})AW^{0,8}d_{BH}^{-0,2}}. \quad (6.32)$$

Отже, проведені експериментальні дослідження підтвердили існуючі теоретичні положення, що за умов конденсації пари з парогазової суміші загальний термічний опір з боку циркуляційного газу є складною функцією і визначається як термічним опором конденсату, так і термічним опором підводу теплоти конвекцією до поверхні конденсації  $R_\delta$  (дифузійний термічний опір). Проте проведені дослідження не пояснюють, яка відбувається конденсація – крапельна чи плівкова конденсація. Тому подальші дослідження мають бути спрямовані на встановлення закономірностей теплообміну в процесі конденсації.

**Визначення закономірностей процесів** з метою з'ясування виду конденсації, що відбувається в процесі охолодження циркуляційного газу, здійснювалось шляхом підтвердження припущення про протікання крапельної конденсації. Для цього за експериментальними даними табл. 6.1 розраховувалась конденсаційна складова  $R_K = 1/\alpha_K$  і складова обумовлена конвективним теплообміном  $R_\delta = 1/\alpha_\Pi$  за рівнянням (6.18). Коефіцієнт тепловіддачі з боку міжтрубного простору  $\alpha_{MT}$  у зоні розвиненого бульбашкового кипіння холодоагенту розраховувався як і раніше за формулою (6.17). Середня температура циркуляційного газу  $\theta_\Pi$ , температура стінки з боку циркуляційного газу  $\theta_{\Pi}^{CT}$  і киплячого холодоагенту  $\theta_{MT}^{CT}$ , температура поверхні конденсату  $\theta_\Pi$  та термічний опір конденсату визначались за наступними формулами:

$$\theta_{\Pi}^{CT} = \theta_{MT} + \Delta\theta^{CP}; \quad (6.33)$$

$$\theta_M^{CT} = \theta_{MT} + q_F / \alpha_{MT}; \quad (6.34)$$

$$\theta_\Pi = \theta_\Pi - q_F / \alpha_\Pi; \quad (6.35)$$

$$\theta_{\Pi}^{CT} = \theta_{MT}^{CT} + q_F (R^{CT} + R_3); \quad (6.36)$$

$$R_K = (\theta_\Pi - \theta_{\Pi}^{CT}) / q_F. \quad (6.37)$$

З урахуванням уведених позначень коефіцієнт теплопередачі для випарника відзначатиметься рівнянням:

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{MT}} + R_K + R_3 + R^{CT} + \frac{1}{\alpha_{Ц}}}. \quad (6.38)$$

Окремі результати розрахунків за рівняннями (6.33 – 6.37) та узагальнення даних пошукових досліджень для середнього коефіцієнту тепловіддачі при крапельній конденсації зведені до табл. 6.3, номери режимів у якій відповідають номерам табл. 6.1 і 6.2.

Обробка даних табл. 6.3 дозволила встановити функціональну залежність у двох областях умовної швидкості росту конденсованої фази  $\omega_K$  для коефіцієнту тепловіддачі  $\alpha_K$ :

$$Nu_K = C\omega_K^{-n}, \quad (6.39)$$

де  $C = 1,603$  і  $n = 0,578$  для  $\omega_K = 0,6 \div 2$  м/с;  $C = 0,1417$  і  $n = 4,2218$  для  $\omega_K < 0,6$  м/с.

У рівнянні (6.39) критерій Нуссельта  $Nu_K$  та умовна швидкість  $\omega_K$  розраховувались за формулами:

$$\omega_K = \frac{\lambda_K (\theta_{Ц} - \theta_{Ц}^{CT})}{r_K \rho_K R_{KP}}; \quad (6.40)$$

$$Nu_K = \alpha_K R_{KP} / \lambda_K; \quad (6.41)$$

$$R_{KP} = \frac{2\sigma_K (\theta_{Ц} + 273)}{r_K \rho_K (\theta_{Ц} - \theta_{Ц}^{CT})}, \quad (6.42)$$

де  $R_{KP}$  – критичний радіус кривизни поверхні розділу фаз,  $m$ ;  $\lambda_K, \rho_K, r_K, \sigma_K$  – відповідно теплопровідність, густина, теплота конденсації і поверхневий натяг при середній температурі конденсату.

Коефіцієнт множинної регресії для залежності (6.39) у відповідних областях  $\omega_K$  склав 0,7 і 0,95, а середня похибка розрахунків  $\alpha_K$  не пере-

вищує 10 %. Графічна залежність для  $Nu_K$ , побудована за експериментальними даними табл. 6.3, представлена на рис. 6.3.

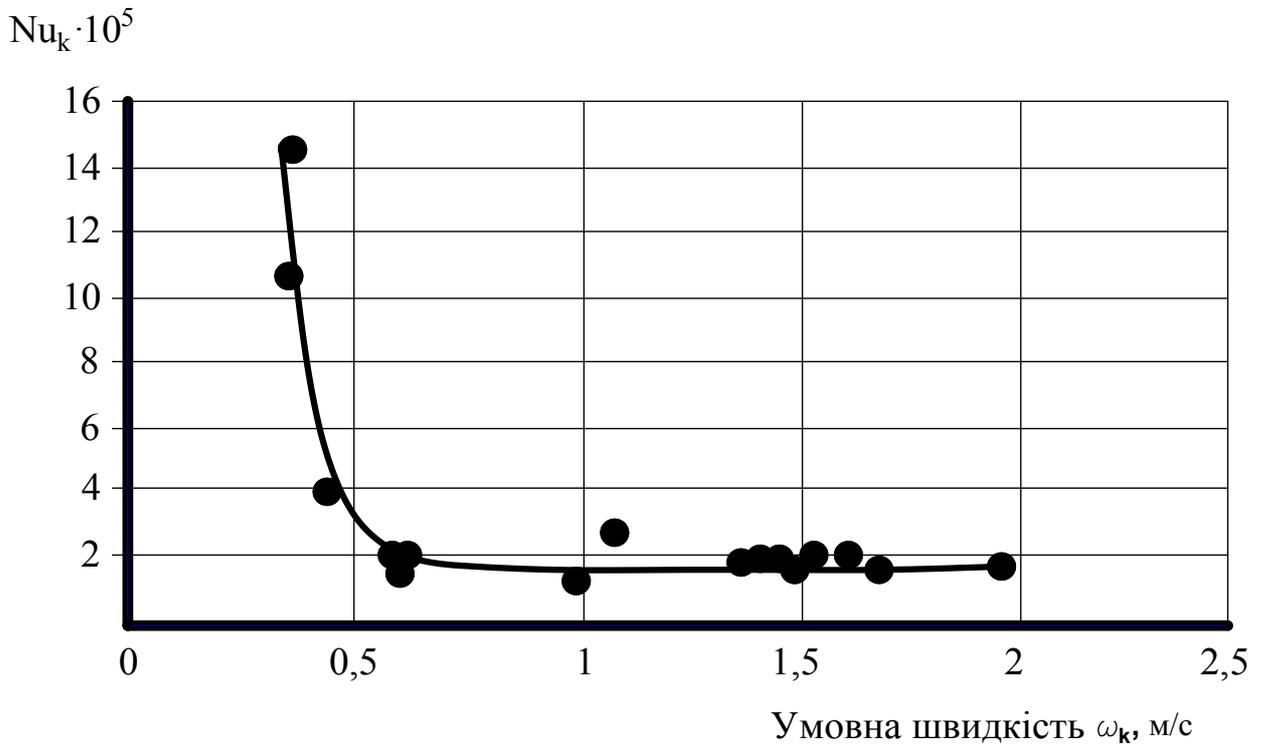


Рис. 6.3 Залежність тепловіддачі при крапельній конденсації від умовної швидкості росту конденсованої фази.

Форма кривої, представленої на рис. 6.3, з наявністю зламів характерна, яка свідчить про аналіз літератури, для крапельної конденсації, що підтверджує висунуте припущення, і пояснюється суттєвим лімітуванням умовної швидкості росту конденсованої фази температурним напором  $\Delta\theta_K = \theta_{Ц} - \theta_{Ц}^{CT}$ .

Таблиця 6.3.

Результати розрахунків в процесі пошукових досліджень для визначення середнього коефіцієнту тепловіддачі при крапельній конденсації

№ режиму	Коефіцієнт тепловіддачі при крапельній конденсації $\alpha_k$ , Вт/м <sup>2</sup> К	Середня різниця температур $(\theta_{\text{п}} - \theta_{\text{ц}}^{\text{сг}})$ переохолодження, °С	Середня температура поверхні конденсату $\theta_{\text{п}}$ , °С	Критичний радіус кривизни поверхні розподілу фаз $R_{\text{кр}} \cdot 10^9$ , м	Умовна швидкість росту конденсованої фази $\omega_k$ , м/с	Критерій Нусельта при крапельній конденсації $Nu_k \cdot 10^5$	Критерій швидкості росту конденсованої фази $Re^* \cdot 10^3$	Відношення $(Nu_k / \lambda_k^{1,3} Pr_k^{0,33}) \cdot 10^3$	Число $\lambda_k \cdot 10^3$	Критерій Прандтля $Pr_k$
1	1759,8	7,28	1,05	2,499	1,948	0,813	12,746	0,151	10,74	2,093
2	2722,7	6,65	5,38	2,795	1,598	1,435	11,782	0,377	6,69	2,121
3	2151,7	6,51	-4,12	2,962	1,465	1,154	11,306	0,157	11,16	2,034
4	3570,4	5,37	0,35	3,428	1,047	2,262	9,402	0,591	6,72	2,093
5	2572,2	6,59	0,45	2,796	1,576	1,329	11,537	0,348	6,72	2,093
6	2552,5	6,22	-1,65	3,041	1,392	1,421	10,859	0,195	11,08	2,059
7	3898,3	3,39	1,42	5,361	0,422	3,886	5,941	0,548	10,81	2,104
8	2263,8	5,94	8,07	2,969	1,337	1,283	10,591	0,332	6,74	2,138

За існуючої теорії крапельної конденсації, викладеній в монографії В.П. Ісаченко, при первинному стиканні пари з поверхнею стінки швидко утворюється тонка плівка, яка набуває особливих властивостей відмінних від властивостей цієї ж рідини удалині від границі розподілу фаз. Товщина цієї плівки неоднакова по поверхні і дорівнює або менше висоти виступів природної шорсткості теплообмінних труб. За таких умов термічний опір конденсату миттєво зростає, а коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha_K$  падає. Підвищення швидкості конденсації з ростом  $\Delta\theta_K$  і збільшення конденсованої фази призводить до утворення більш товстої (краплі) плівки. По мірі росту краплі безперервно з'єднуються, звільняючи якусь частину поверхні труб. Завдяки багатократного злиття і неперервного процесу конденсації краплі збільшуються до відривного розміру, за якого вони утягуються потоком циркуляційного газу. Внаслідок цього і утворюється туманоподібний газовий потік, що пояснює спостереження за характером потоку, виявлені Ларсоном-Блеком. При цьому термічний опір конденсату у зв'язку з частковим оголенням труб від крапель сприяє меншому впливу термічного опору конденсату на процес тепловіддачі. Отже за  $\omega_K < 0,6$  м/с відбувається своєрідна криза крапельної конденсації, а інтенсифікуючий вплив швидкості газового потоку обумовлює її прискорення.

Слід відзначити, що спроба покращення точності розрахунку  $\alpha_K$  яка рекомендується в літературі, шляхом уведення поправки  $\pi_K$ , що характеризує відношення термокапілярних сил до сил в'язкості, призвело до погіршення точності визначення  $\alpha_K$ , за якого похибка обчислень складає 18 %. Таке зниження точності пояснюється тим, що за підвищеного тиску відсутній вплив цієї поправки.

Порівняння наведених у табл. 6.4, експериментальних показників та отриманих за математичною моделлю свідчить, що похибка обчислень не перевищує похибки апроксимації  $\alpha_K$  за формулою (6.39), тобто 10 %. Така збіжність дозволяє зробити висновок про можливість її застосування як для діагностики режимів роботи випарника в процесі створення більш ефективного технологічного оформлення АХУ, так і для оптимізації роботи випарника за рахунок визначення оптимальної витрати флегми.

Експериментальні та розраховані за математичною моделлю показники роботи випарника

№ режимів	Параметри за експериментальними даними					Параметри, розраховані за математичною моделлю				
	Холодопродуктивність $Q_0$ , МВт·год	Коефіцієнт теплопередачі $K$ , Вт/м <sup>2</sup> К	Температура циркуляційного газу із випарника $\theta_{ц}^{вих}$ , °С	Витрата флегми $G_X^{вих}$ , т/год	Температура кипіння холодоагенту $\theta_{мт}$ , °С	Холодопродуктивність $Q_0$ , МВт·год	Коефіцієнт теплопередачі $K$ , Вт/м <sup>2</sup> К	Температура циркуляційного газу із випарника $\theta_{ц}^{вих}$ , °С	Температура кипіння холодоагенту $\theta_{мт}$ , °С	
1	4,59	541,6	-5	0,902	-13	4,6	554,8	-4,9	-14,4	
2	5,53	660,4	-1	1,158	-8	5,54	643,7	-1,3	-10,1	
3	4,87	581,3	-11	0,607	-18	4,89	616,3	-10,9	-19,0	
4	5,22	673,8	-6	0,397	-13	5,24	703,4	-6,1	-12,6	
5	5,24	625,7	-6	0,465	-13	5,27	594,9	-5,8	-14,0	
6	5,01	610,1	-8	0,54	-15	5,02	575,3	-7,5	-16,5	
7	3,38	584,2	-3	0,105	-8	3,36	553,8	-2,7	-8,2	
8	3,23	533,2	+4	0,131	-2	3,24	534,9	+3,9	-2,07	

#### 6.4. ОПТИМІЗАЦІЯ РЕЖИМНИХ ПАРАМЕТРІВ ПРОЦЕСУ

**Вибір цільової функції** завжди пов'язаний з наявністю специфічних екстремальних властивостей об'єкту, які необхідно враховувати при розгляді конкретної задачі в контексті економічної ефективності процесу. Урахування цих властивостей дозволяє спростити вирішення загальної оптимальної задачі відділення синтезу до якого входить випарник шляхом виділення у ній часткової задачі, а саме у вирішенні задачі мінімізації температури охолодження циркуляційного газу (температури вторинної конденсації), яка визначається оптимальною витратою флегми. Вибір цієї температури у якості критерію оптимізації обумовлений її впливом згідно досліджень А.К. Бабіченка на економічну ефективність, зниження якої навіть на 1°С сприяє зменшенню споживання на спалювання приро-

днога газу для виробництва у допоміжному паровому котлу водяної пари, необхідної для приводу компресорної системи відділення синтезу, на 220 тис.нм<sup>3</sup> за рік.

Аналіз експериментальних даних, представлених у табл. 6.1, свідчить, що основний збурюючий вплив на роботу випарника чинять такі вхідні фактори як температура циркуляційного газу на вході, тиск холодоагенту у міжтрубному просторі, концентрація і витрата холодоагенту на вході. Тому в процесі пошуку екстремуму функції температури  $\theta_{\text{ц}}^{\text{ВІХ}}$  вище перелічені параметри можуть бути обрані у якості незалежних змінних.

**Алгоритм оптимізації** у вигляді блок-схеми, представлений на рис. 6.4 і передбачає пошук екстремуму функції  $\theta_{\text{к}}^{\text{ВІХ}}$  безградієнтним методом сканування, який за характером найбільш придатний для оптимізації діючих промислових об'єктів. Це пов'язано насамперед похибками при вимірюваннях, що характеризують значення цільової функції для діючого об'єкта, які можуть привести до суттєвих помилок у визначенні напрямку руху до оптимуму за допомогою градієнтних методів, оскільки при розрахунку похідної як різниці значень критерію оптимальності величина помилки може досягати сотень відсотків навіть за невеликої відносної похибки обчислень критерію оптимальності. Застосований згідно блок-схеми метод сканування гарантує за рахунок достатньої щільності кроку пошуку визначення глобального оптимуму для всієї області зміни незалежних параметрів і незалежно від виду оптимізуємої функції.

Представлений алгоритм на відміну від загально відомих дозволяє визначити як поверхню трубок  $F$ , так і їх кількість  $n$ , занурених у рідкій холодоагент, а отже і зміну рівня рідини.

**Результати обчислень з визначенням структури системи керування.** Згідно розробленого алгоритму проведені дослідження по визначенню оптимального значення витрати флегми  $G_{\text{х}}^{\text{ВІХ}}$  в умовах зміни перелічених вище незалежних збурюючих факторів. На рис. 6.5 наведені лише окремі статичні характеристики випарника, що визначають екстремальне значення цільової функції за вихідних даних режиму 3 табл. 6.1 і обмеження по витраті холодоагенту на вході випарника на рівні 18 т/год.

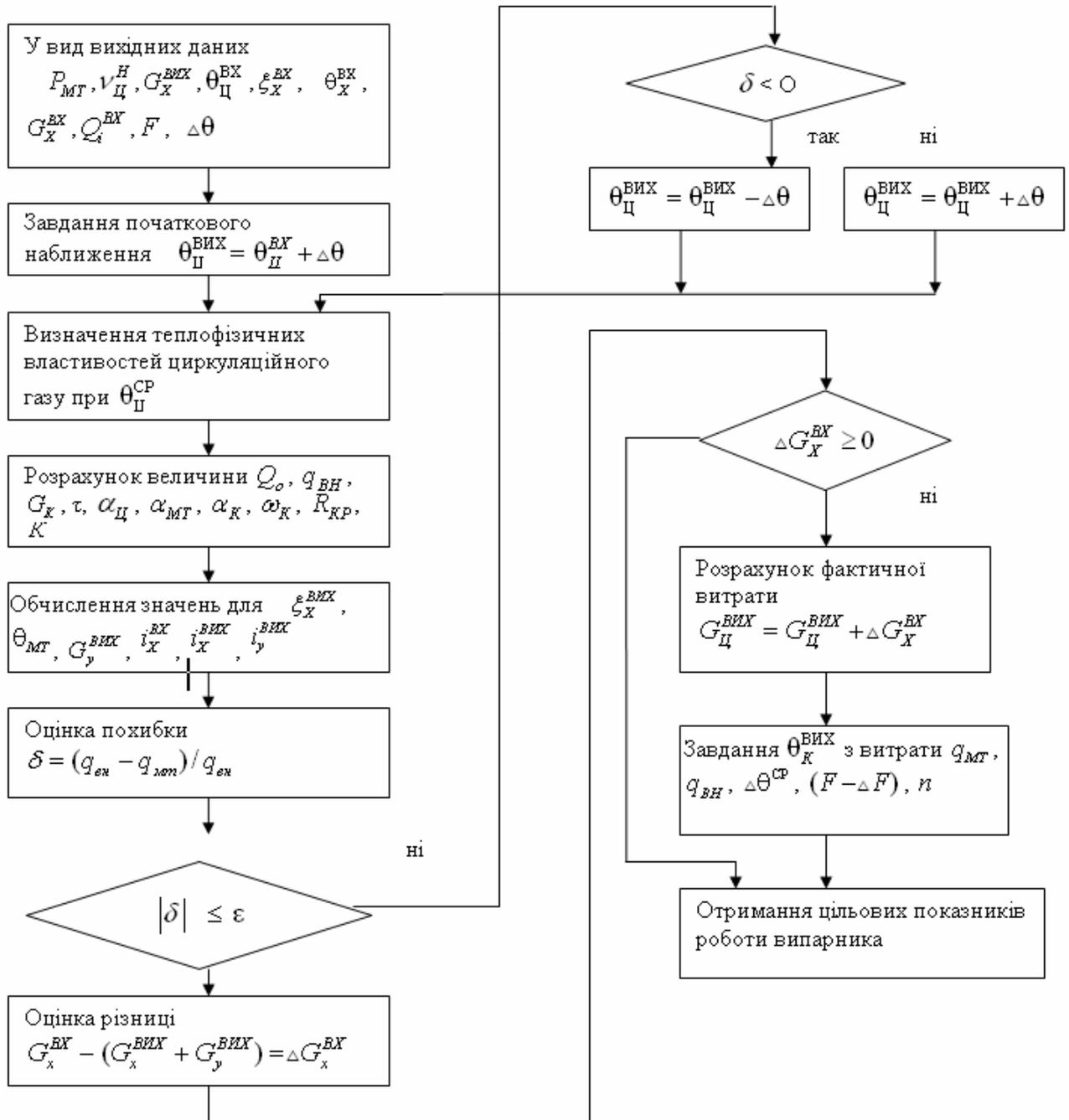


Рис. 6.4. Блок-схема алгоритму пошуку екстремуму функції  $Q_0$  для випарника з визначенням оптимальної витрати флегми  $G_X^{BIX}$ .

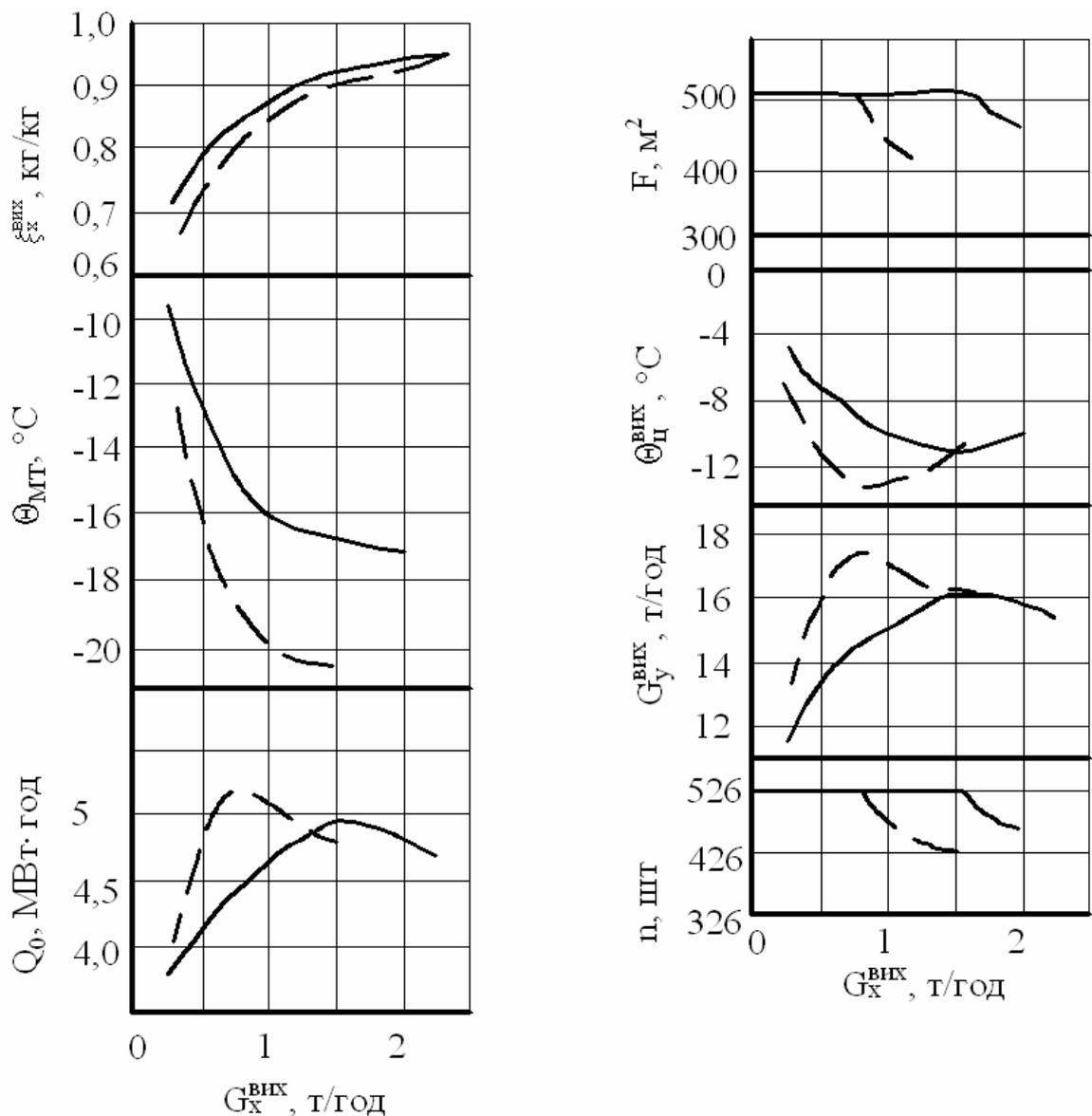


Рис. 6.5. Статичні характеристики показників роботи випарника АХУ в умовах зміни витрати флегми  $G_X^{\text{ВІХ}}$  за різного тиску кипіння  $P_{MT}$ :  
 -----  $P_{MT}=0,16$  МПа;    ———  $P_{MT}=0,2$  Мпа.

Аналіз наведених залежностей свідчить, що по таких показниках як холодопродуктивність  $Q_0$  і температура циркуляційного газу на виході випарника  $\theta_{\text{Ц}}^{\text{ВІХ}}$  статичні характеристики мають екстремальний вигляд, що обумовлено екстремальною залежністю витрати холодоагенту  $G_Y^{\text{ВІХ}}$ , збільшення випаровування якої за рахунок зниження температури кипіння  $\theta_{MT}$  сприяє зниженню температури  $\theta_{\text{Ц}}^{\text{ВІХ}}$  і підвищенню холодопродуктивності  $Q_0$ . Так за постійності  $P_{MT}=0,16$  МПа підвищення витрати флег-

ми  $G_X^{\text{ВІХ}}$  з 0,6 т/год до 0,8 т/год, що визначає мінімальне значення  $\theta_{\text{Ц}}^{\text{ВІХ}} = -13^\circ\text{C}$ , призводить до збільшення середньої концентрації  $\xi_X^{\text{ВІХ}}$  від 0,8013 кг/кг до 0,8392 кг/кг, а це в свою чергу викликає зменшення температури кипіння холодоагенту з  $-17,76^\circ\text{C}$  до  $-19^\circ\text{C}$ . Завдяки цьому відбувається підвищення середньої різниці температур  $\Delta\theta$  та витрати холодоагенту, що випаровується з 16,62 т/год до 17,2 т/год і, як наслідок, збільшення холодопродуктивності від 5 МВт до 5,25 МВт. Подальше збільшення витрати флегми до 1 т/год, незважаючи на зменшення  $\theta_{\text{МТ}}$  та збільшення середньої різниці температур  $\Delta\theta$  за умови обмеження  $G_X^{\text{ВІХ}}$  викликає зменшення холодоагенту, що випаровується,  $G_Y^{\text{ВІХ}}$  до 17 т/год і зниження кількості трубок  $n$ , занурених у рідкий холодоагент на 72 шт, що призводить до падіння ефективної поверхні теплообміну з  $520 \text{ м}^2$  до  $448,8 \text{ м}^2$ , холодопродуктивності до 5,12 МВт та збільшення температури  $\theta_{\text{Ц}}^{\text{ВІХ}}$  до  $-12,5^\circ\text{C}$ .

Результати пошуку екстремуму за підвищеного тиску  $P_{\text{МТ}}=0,2 \text{ МПа}$  за тих самих вихідних умов свідчить, що відбувається зміщення екстремуму у бік більшої витрати флегми, тобто до  $G_X^{\text{ВІХ}}=1,65 \text{ т/год}$ , а отже для забезпечення мінімальної температури циркуляційного газу на виході випарника треба більш ефективно проводити процес дренирування флегми. За такої умови температура  $\theta_{\text{Ц}}^{\text{ВІХ}}$  може бути знижена до  $-11^\circ\text{C}$ , а холодопродуктивність підвищена до 4,87 МВ.

Ідентичним чином проведено комп'ютерне моделювання впливу і інших збурюючих факторів на величину оптимальної витрати флегми, зокрема, температури циркуляційного газу і концентрації аміаку у потоці холодоагенту на вході випарника, збільшення яких сприяє зміщенню екстремуму цільової функції у бік менших значень витрати флегми. Встановлений екстремальний характер статичних характеристик для температури  $\theta_{\text{Ц}}^{\text{ВІХ}}$  і холодопродуктивності  $Q_0$  обумовлює необхідність побудови системи екстремального керування температурним режимом випарника за рахунок зміни витрати флегми.

Керування сучасними агрегатами синтезу аміаку здійснюється мікропроцесорним комплексом TDC – 3000 (фірма «Honeywell»), за допомо-

гою якого можливо застосувати супервізорний режим керування, а пошук екстремуму цільової функції і визначення оптимальної витрати флегми у якості завдання організувати безградієнтним методом крокового пошуку з використанням будьякого алгоритму одномірного пошуку, отримуючи безперервно інформаційні сигнали по вхідних параметрах і збурюючих факторах. Однак остаточне визначення структури системи керування вимагає, як вже відзначалось, знання динамічних властивостей об'єкту. Особливо це стосується інерційності об'єкту, значимість якої вносить суттєву складність у процес пошуку екстремуму.

## 6.5. ВИЗНАЧЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ОБ'ЄКТУ КЕРУВАННЯ

Розрахунок динамічних характеристик шляхом розв'язання системи нелінійних рівнянь (6.1 – 6.16) здійснювався із застосуванням методу лінеаризації. Лінеаризована система рівнянь після відповідних перетворень може бути представлена у наступному вигляді:

$$a_1 \frac{d\Delta V_X}{dt} + a_2 \frac{d\Delta\theta_{MT}}{dt} + a_3 \frac{d\Delta\xi_X}{dt} = \Delta G_X^{BX} - \Delta G_Y^{BIX} - \Delta G_X^{BIX}; \quad (6.43)$$

$$a_4 \frac{d\Delta V_X}{dt} + a_5 \frac{d\Delta\theta_{MT}}{dt} + a_6 \Delta\theta_{MT} + a_7 \frac{d\Delta\xi_X}{dt} + a_8 \Delta\xi_X - a_9 \Delta\theta^{CT} = a_{10} \Delta\xi_X^{BX} + a_{11} G_X^{BX} - a_{12} \Delta G_Y^{BIX} - a_{13} G_X^{BIX}; \quad (6.44)$$

$$a_{14} \frac{d\Delta\theta_{II}^{BIX}}{dt} + a_{15} \Delta\theta_{II}^{BIX} - a_{16} \Delta\theta^{CT} - a_{17} \Delta\theta_{MT} - a_{18} \frac{d\Delta\theta_{MT}}{dt} = a_{19} \frac{d\Delta\theta_{II}^{BX}}{dt} + a_{20} \Delta\theta_{II}^{BX} + a_{21} \Delta v_{II} + a_{22} \Delta P_{II} + a_{23} \Delta a_{NH_3}^{BX} + a_{24} \Delta a_{H_2}^{BX} + a_{25} \Delta a_{N_2}^{BX} + a_{26} \Delta a_{CH_4}^{BX} + a_{27} \Delta a_{A_2}^{BX}; \quad (6.45)$$

$$a_{28} \frac{d\Delta V_X}{dt} + a_{29} \frac{d\Delta\theta_{MT}}{dt} + a_{30} \frac{d\Delta\xi_X}{dt} + a_{31} \Delta\xi_X = a_{32} \Delta\xi_X^{BX} + a_{33} \Delta G_X^{BX} - a_{34} \Delta G_X^{BIX} - \Delta M_Y^{BIX}; \quad (6.46)$$

$$a_{35} \frac{d\theta^{CT}}{dt} + a_{36} \Delta\theta^{CT} - a_{37} \Delta\theta_{II}^{BIX} - a_{38} \Delta\theta_{MT} = a_{39} \Delta\theta_{II}^{BX}. \quad (6.47)$$

У системі лінеаризованих рівнянь (6.43 – 6.47) коефіцієнти  $a_1 \div a_{39}$ , що залежать від конструктивних характеристик та робочих параметрів випарника в усталеному стані дорівнюють:

$$a_1 = \rho_X - \rho_Y; \quad (6.48)$$

$$a_2 = \left[ V_{\text{MT}} \frac{\partial \rho_Y}{\partial P} + V_X \frac{\partial (\rho_X - \rho_Y)}{\partial P} \right] \frac{\partial P}{\partial \theta}; \quad (6.49)$$

$$a_3 = V_X \frac{\partial \rho_X}{\partial \xi_X} + \frac{\partial P}{\partial \xi_X} \left( V_X \frac{\partial \rho_X}{\partial P} + V_Y \frac{\partial \rho_Y}{\partial P} \right); \quad (6.50)$$

$$a_4 = i_X^{\text{ВИХ}} \rho_X - i_Y^{\text{ВИХ}} \rho_Y; \quad (6.51)$$

$$a_5 = \frac{\partial P}{\partial \theta} \left( i_X^{\text{ВИХ}} V_X \frac{\partial \rho_X}{\partial P} + m_X \frac{\partial i_X^{\text{ВИХ}}}{\partial P} + i_Y^{\text{ВИХ}} V_Y \frac{\partial \rho_Y}{\partial P} + m_Y \frac{\partial i_Y^{\text{ВИХ}}}{\partial P} \right); \quad (6.52)$$

$$a_6 = \frac{\partial P}{\partial \theta} \left( G_Y^{\text{ВИХ}} \frac{\partial i_Y^{\text{ВИХ}}}{\partial P} + G_X^{\text{ВИХ}} \frac{\partial i_X^{\text{ВИХ}}}{\partial P} - G_X^{\text{ВХ}} \frac{\partial i_X^{\text{ВХ}}}{\partial P} \right) - G_X^{\text{ВХ}} \frac{\partial i_X^{\text{ВХ}}}{\partial \theta} + \alpha_{\text{MT}} F_{\text{MT}}; \quad (6.53)$$

$$a_7 = \frac{\partial P}{\partial \xi_X} \left( i_X^{\text{ВИХ}} V_X \frac{\partial \rho_X}{\partial P} + m_X \frac{\partial i_X^{\text{ВИХ}}}{\partial P} + i_Y^{\text{ВИХ}} V_Y \frac{\partial \rho_Y}{\partial P} + m_Y \frac{\partial i_Y^{\text{ВИХ}}}{\partial P} \right) + i_X^{\text{ВИХ}} V_X \frac{\partial \rho_X}{\partial \theta} + m_X \frac{\partial i_X^{\text{ВИХ}}}{\partial \xi_X}; \quad (6.54)$$

$$a_8 = \frac{\partial P}{\partial \xi_X} \left( G_Y^{\text{ВИХ}} \frac{\partial i_Y^{\text{ВИХ}}}{\partial P} + G_X^{\text{ВИХ}} \frac{\partial i_X^{\text{ВИХ}}}{\partial P} - G_X^{\text{ВХ}} \frac{\partial i_X^{\text{ВХ}}}{\partial P} \right) + G_X^{\text{ВИХ}} \frac{\partial i_X^{\text{ВИХ}}}{\partial \xi_X}; \quad (6.55)$$

$$a_9 = \alpha_{\text{MT}} F_{\text{MT}}; \quad (6.56)$$

$$a_{10} = G_X^{\text{ВХ}} \frac{\partial i_X^{\text{ВХ}}}{\partial \xi_X}; \quad (6.57)$$

$$a_{11} = i_X^{\text{ВХ}}; \quad (6.58)$$

$$a_{12} = i_Y^{\text{ВИХ}}; \quad (6.59)$$

$$a_{13} = i_X^{\text{ВИХ}}; \quad (6.60)$$

$$a_{14} = \rho_{\Pi} C_{\Pi} V_B; \quad (6.61)$$

$$a_{15} = \left( G_{\Gamma} C_{\Gamma} - G_K^{\text{BX}} C_K - 0,5 G_K C_K + G_{\Pi}^{\text{ВІХ}} C_{\Pi} + \alpha_{\Pi} F_B \right) \times$$

$$\times \left[ \frac{(\theta_{\Pi}^{\text{BX}} - \theta_{\Pi}^{\text{ВІХ}})}{(\theta_{\Pi}^{\text{ВІХ}} - \theta_{\text{MT}}) \left( \ln \frac{\theta_{\Pi}^{\text{BX}} - \theta_{\text{MT}}}{(\theta_{\Pi}^{\text{ВІХ}} - \theta_{\text{MT}})} \right)^2} - \frac{1}{\ln \frac{\theta_{\Pi}^{\text{BX}} - \theta_{\text{MT}}}{\theta_{\Pi}^{\text{ВІХ}} - \theta_{\text{MT}}}} \right] \quad (6.62)$$

$$- C_n \rho_{NH_3}^H \frac{v_{\Pi}}{P_{\Pi}} \cdot \frac{\partial P_{NH_3}}{\partial \theta} (\theta_{\Pi}^{\text{BX}} - \theta_{\Pi}^{\text{ВІХ}}) + (r_K + 0,5 C_K \theta_{\Pi}^{\text{BX}} - 0,5 C_K \theta_{\Pi}^{\text{ВІХ}}) \times$$

$$\times \rho_{NH_3}^H \frac{v_{\Pi}}{P_{\Pi}} \cdot \frac{\partial P_{NH_3}}{\partial \theta} - 0,5 G_K \frac{\partial r_K}{\partial \theta};$$

$$a_{16} = \alpha_{\Pi} F_B; \quad (6.63)$$

$$a_{17} = \left[ 1 - \frac{(\theta_{\Pi}^{\text{BX}} - \theta_{\Pi}^{\text{ВІХ}})^2}{(\theta_{\Pi}^{\text{BX}} - \theta_{\text{MT}})(\theta_{\Pi}^{\text{ВІХ}} - \theta_{\text{MT}}) \left( \ln \frac{\theta_{\Pi}^{\text{BX}} - \theta_{\text{MT}}}{\theta_{\Pi}^{\text{ВІХ}} - \theta_{\text{MT}}} \right)^2} \right] \alpha_{\Pi} F_B; \quad (6.64)$$

$$a_{18} = \left[ 1 - \frac{(\theta_{\Pi}^{\text{BX}} - \theta_{\Pi}^{\text{ВІХ}})^2}{(\theta_{\Pi}^{\text{BX}} - \theta_{\text{MT}})(\theta_{\Pi}^{\text{ВІХ}} - \theta_{\text{MT}}) \left( \ln \frac{\theta_{\Pi}^{\text{BX}} - \theta_{\text{MT}}}{\theta_{\Pi}^{\text{ВІХ}} - \theta_{\text{MT}}} \right)^2} \right] \rho_{\Pi} C_{\Pi} V_B; \quad (6.65)$$

$$a_{19} = \left[ \frac{\theta_{\Pi}^{\text{BX}} - \theta_{\Pi}^{\text{ВІХ}}}{(\theta_{\Pi}^{\text{ВІХ}} - \theta_{\text{MT}}) \left( \ln \frac{\theta_{\Pi}^{\text{BX}} - \theta_{\text{MT}}}{\theta_{\Pi}^{\text{ВІХ}} - \theta_{\text{MT}}} \right)^2} - \frac{1}{\ln \frac{\theta_{\Pi}^{\text{BX}} - \theta_{\text{MT}}}{\theta_{\Pi}^{\text{ВІХ}} - \theta_{\text{MT}}}} \right] \rho_{\Pi} C_{\Pi} V_B; \quad (6.66)$$

$$\begin{aligned}
a_{20} = & G_{\Gamma} C_{\Gamma} + G_K^{\text{BX}} C_K + 0,5 G_K C_K + G_{\Pi}^{\text{BIX}} C_{\Pi} - C_K \rho_{\text{NH}_3}^H \times \\
& \left( \theta_{\Pi}^{\text{BX}} - \theta_{\Pi}^{\text{BIX}} \right) \frac{v_{\Pi}}{P_{\Pi}} \cdot \frac{\partial P_{\text{NH}_3}}{\partial \theta} + 0,5 G_K \frac{\partial r_K}{\partial \theta} - \alpha_{\Pi} F_B \times \\
& \times \left[ \frac{1}{\ln \frac{\theta_{\Pi}^{\text{BX}} - \theta_{\text{MT}}}{\theta_{\Pi}^{\text{BIX}} - \theta_{\text{MT}}}} - \frac{(\theta_{\Pi}^{\text{BX}} - \theta_{\Pi}^{\text{BIX}})}{(\theta_{\Pi}^{\text{BIX}} - \theta_{\text{MT}}) \left( \ln \frac{\theta_{\Pi}^{\text{BX}} - \theta_{\text{MT}}}{(\theta_{\Pi}^{\text{BIX}} - \theta_{\text{MT}})} \right)^2} \right] + \\
& + \rho_{\text{NH}_3}^H \frac{v_{\Pi}}{P_{\Pi}} \cdot \frac{\partial P_{\text{NH}_3}}{\partial \theta} \left( r_K + 0,5 C_K \theta_{\Pi}^{\text{BX}} - 0,5 C_K \theta_{\Pi}^{\text{BIX}} \right);
\end{aligned} \tag{6.67}$$

$$\begin{aligned}
a_{21} = & C_K \left( \theta_{\Pi}^{\text{BX}} - \theta_{\Pi}^{\text{BIX}} \right) \rho_{\text{NH}_3}^H + \left( a_{\text{NH}_3}^{\text{BX}} - \frac{P_{\text{NH}_3}^{\text{BX}}}{P_{\Pi}} \right) + C_{\Pi} \rho_{\text{NH}_3}^H \left( \theta_{\Pi}^{\text{BX}} - \theta_{\Pi}^{\text{BIX}} \right) \times \\
& \times \frac{P_{\text{NH}_3}}{P_{\Pi}} + \rho_{\text{NH}_3}^H \frac{(P_{\text{NH}_3}^{\text{BX}} - P_{\text{NH}_3}^{\text{BIX}})}{P_{\Pi}} + C_{\Gamma} \left( \theta_{\Pi}^{\text{BX}} - \theta_{\Pi}^{\text{BIX}} \right) (1 - a_{\text{NH}_3}^{\text{BX}}) \times \\
& \times \left( a_{\text{H}_2}^{\text{BX}} \rho_{\text{H}_2}^H + a_{\text{N}_2}^{\text{BX}} \rho_{\text{N}_2}^H + a_{\text{CH}_4}^{\text{BX}} \rho_{\text{CH}_4}^H + a_{\text{Ar}}^{\text{BX}} \rho_{\text{Ar}}^H \right);
\end{aligned} \tag{6.68}$$

$$\begin{aligned}
a_{22} = & C_K \left( \theta_{\Pi}^{\text{BX}} - \theta_{\Pi}^{\text{BIX}} \right) v_{\Pi} \rho_{\text{NH}_3}^H \frac{P_{\text{NH}_3}^{\text{BX}}}{P_{\Pi}^2} - C_{\Pi} \left( \theta_{\Pi}^{\text{BX}} - \theta_{\Pi}^{\text{BIX}} \right) \times \\
& \times \rho_{\text{NH}_3}^H v_{\Pi} \frac{P_{\text{NH}_3}^{\text{BX}}}{P_{\Pi}^2} - \left( r_K + 0,5 C_K \theta_{\Pi}^{\text{BX}} - 0,5 C_K \theta_{\Pi}^{\text{BIX}} \right) \rho_{\text{NH}_3}^H v_{\Pi} \frac{P_{\text{NH}_3}^{\text{BX}} - P_{\text{NH}_3}^{\text{BIX}}}{P_{\Pi}^2};
\end{aligned} \tag{6.69}$$

$$\begin{aligned}
a_{23} = & C_K \left( \theta_{\Pi}^{\text{BX}} - \theta_{\Pi}^{\text{BIX}} \right) v_{\Pi} \rho_{\text{NH}_3}^H - C_{\Gamma} v_{\Pi} \left( \theta_{\Pi}^{\text{BX}} - \theta_{\Pi}^{\text{BIX}} \right) \times \\
& \times \left( a_{\text{H}_2}^{\text{BX}} \rho_{\text{H}_2}^H + a_{\text{N}_2}^{\text{BX}} \rho_{\text{N}_2}^H + a_{\text{CH}_4}^{\text{BX}} \rho_{\text{CH}_4}^H + a_{\text{Ar}}^{\text{BX}} \rho_{\text{Ar}}^H \right);
\end{aligned} \tag{6.70}$$

$$a_{24} = C_{\Gamma} \rho_{\text{H}_2}^H v_{\Pi} \left( 1 - a_{\text{NH}_3}^{\text{BX}} \right) \left( \theta_{\Pi}^{\text{BX}} - \theta_{\Pi}^{\text{BIX}} \right); \tag{6.71}$$

$$a_{25} = C_{\Gamma} \rho_{\text{N}_2}^H v_{\Pi} \left( 1 - a_{\text{NH}_3}^{\text{BX}} \right) \left( \theta_{\Pi}^{\text{BX}} - \theta_{\Pi}^{\text{BIX}} \right); \tag{6.72}$$

$$a_{26} = C_{\Gamma} \rho_{\text{CH}_4}^H v_{\Pi} \left( 1 - a_{\text{NH}_3}^{\text{BX}} \right) \left( \theta_{\Pi}^{\text{BX}} - \theta_{\Pi}^{\text{BIX}} \right); \tag{6.73}$$

$$a_{27} = C_{\Gamma} \rho_{\text{Ar}}^H v_{\Pi} \left( 1 - a_{\text{NH}_3}^{\text{BX}} \right) \left( \theta_{\Pi}^{\text{BX}} - \theta_{\Pi}^{\text{BIX}} \right); \tag{6.74}$$

$$a_{28} = \frac{\partial P}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \rho_Y}{\partial P} V_Y + \frac{\partial \rho_X}{\partial P} V_X \xi_X \right); \quad (6.75)$$

$$a_{29} = \xi_X \rho_X - \rho_Y; \quad (6.76)$$

$$a_{30} = \frac{\partial P}{\partial \xi_X} \left( V_Y \frac{\partial \rho_Y}{\partial P} + \xi_X V_X \frac{\partial \rho_X}{\partial P} \right) + m_X + \xi_X V_X \frac{\partial \rho_X}{\partial \xi_X}; \quad (6.77)$$

$$a_{31} = G_X^{\text{ВХ}}; \quad (6.78)$$

$$a_{32} = G_X^{\text{ВХ}}; \quad (6.79)$$

$$a_{33} = \xi_X^{\text{ВХ}}; \quad (6.80)$$

$$a_{34} = \xi_X^{\text{ВХ}}; \quad (6.81)$$

$$a_{35} = C_m m_m; \quad (6.82)$$

$$a_{36} = \alpha_{\text{Ц}} F_B + \alpha_{\text{МТ}} F_{\text{МТ}}; \quad (6.83)$$

$$a_{37} = \left[ \frac{\theta_{\text{Ц}}^{\text{ВХ}} - \theta_{\text{Ц}}^{\text{ВІХ}}}{(\theta_{\text{Ц}}^{\text{ВХ}} - \theta_{\text{МТ}}) \left( \ln \frac{\theta_{\text{Ц}}^{\text{ВХ}} - \theta_{\text{МТ}}}{\theta_{\text{Ц}}^{\text{ВІХ}} - \theta_{\text{МТ}}} \right)^2} - \frac{1}{\ln \frac{\theta_{\text{Ц}}^{\text{ВХ}} - \theta_{\text{МТ}}}{\theta_{\text{Ц}}^{\text{ВІХ}} - \theta_{\text{МТ}}}} \right] \alpha_{\text{Ц}} F_B; \quad (6.84)$$

$$a_{38} = \alpha_{\text{МТ}} F_{\text{МТ}} - \alpha_{\text{Ц}} F_B \times$$

$$\times \left[ 1 - \frac{(\theta_{\text{Ц}}^{\text{ВХ}} - \theta_{\text{Ц}}^{\text{ВІХ}})^2}{(\theta_{\text{Ц}}^{\text{ВХ}} - \theta_{\text{МТ}})(\theta_{\text{Ц}}^{\text{ВІХ}} - \theta_{\text{МТ}}) \left( \ln \frac{\theta_{\text{Ц}}^{\text{ВХ}} - \theta_{\text{МТ}}}{\theta_{\text{Ц}}^{\text{ВІХ}} - \theta_{\text{МТ}}} \right)^2} \right]; \quad (6.85)$$

$$a_{39} = \alpha_{\text{Ц}} F_B \left[ \frac{1}{\ln \frac{\theta_{\text{Ц}}^{\text{ВХ}} - \theta_{\text{МТ}}}{\theta_{\text{Ц}}^{\text{ВІХ}} - \theta_{\text{МТ}}}} - \frac{(\theta_{\text{Ц}}^{\text{ВХ}} - \theta_{\text{Ц}}^{\text{ВІХ}})}{(\theta_{\text{Ц}}^{\text{ВХ}} - \theta_{\text{МТ}}) \left( \ln \frac{\theta_{\text{Ц}}^{\text{ВХ}} - \theta_{\text{МТ}}}{(\theta_{\text{Ц}}^{\text{ВІХ}} - \theta_{\text{МТ}})} \right)^2} \right], \quad (6.86)$$

де  $P_{\text{NH}_3}$  – парціальний тиск аміаку у циркуляційному газі, МПа.

В отриманій системі рівнянь (6.43 – 6.47) величини  $\Delta V_X$ ,  $\Delta v_{\text{Ц}}$ ,  $\Delta \theta_{\text{Ц}}^{\text{ВХ}}$ ,  $\Delta P_{\text{Ц}}$ ,  $\Delta a_i^{\text{ВХ}}$ ,  $\Delta G_X^{\text{ВХ}}$  і  $\Delta \xi_X^{\text{ВХ}}$  є незалежними параметрами і можуть змінюватись незалежно один від одного, а визначаємі параметри це  $\Delta G_X^{\text{ВІХ}}$ ,  $\theta_{\text{МТ}}$ ,  $\Delta \xi_X^{\text{ВІХ}}$ ,  $\Delta G_Y^{\text{ВІХ}}$ ,  $\Delta \theta_{\text{Ц}}^{\text{ВІХ}}$  і  $\Delta \theta^{\text{СТ}}$ . Слід відзначити, що у залежності від постановки задачі досліджень можливо здійснювати вибіркочку перестановку незалежних параметрів у визначаємі та навпаки, що свідчить про універсальність розробленої математичної моделі.

Розв'язання лінеаризованої системи диференціальних рівнянь (6.43 – 6.47) може бути виконано, як вже відзначалось, із застосуванням перетворення Лапласу, що забезпечить отримання системи алгебраїчних рівнянь. Безпосередньо визначення передатної функції становить доволі громіздке завдання. Тому значно простіше спочатку визначити динамічні характеристики по тому чи іншому каналу регулювання, а далі провести ідентифікацію отриманих характеристик, застосувавши один із методів апроксимації (наприклад метод Симою), викладених у розділі 5.

Визначення динамічних характеристик передбачає розв'язання системи алгебраїчних рівнянь, яке доцільно виконати, застосувавши теорему Крамера, а потім перейти від зображень до оригіналу. На рис. 6.6 наведені динамічні характеристики випарника, отримані по каналу збурення витратою флегми  $\Delta G_X^{\text{ВІХ}} = 0,14$  кг/с, які дозволяють більш ретельно проаналізувати динамічні процеси, що відбуваються у ньому.

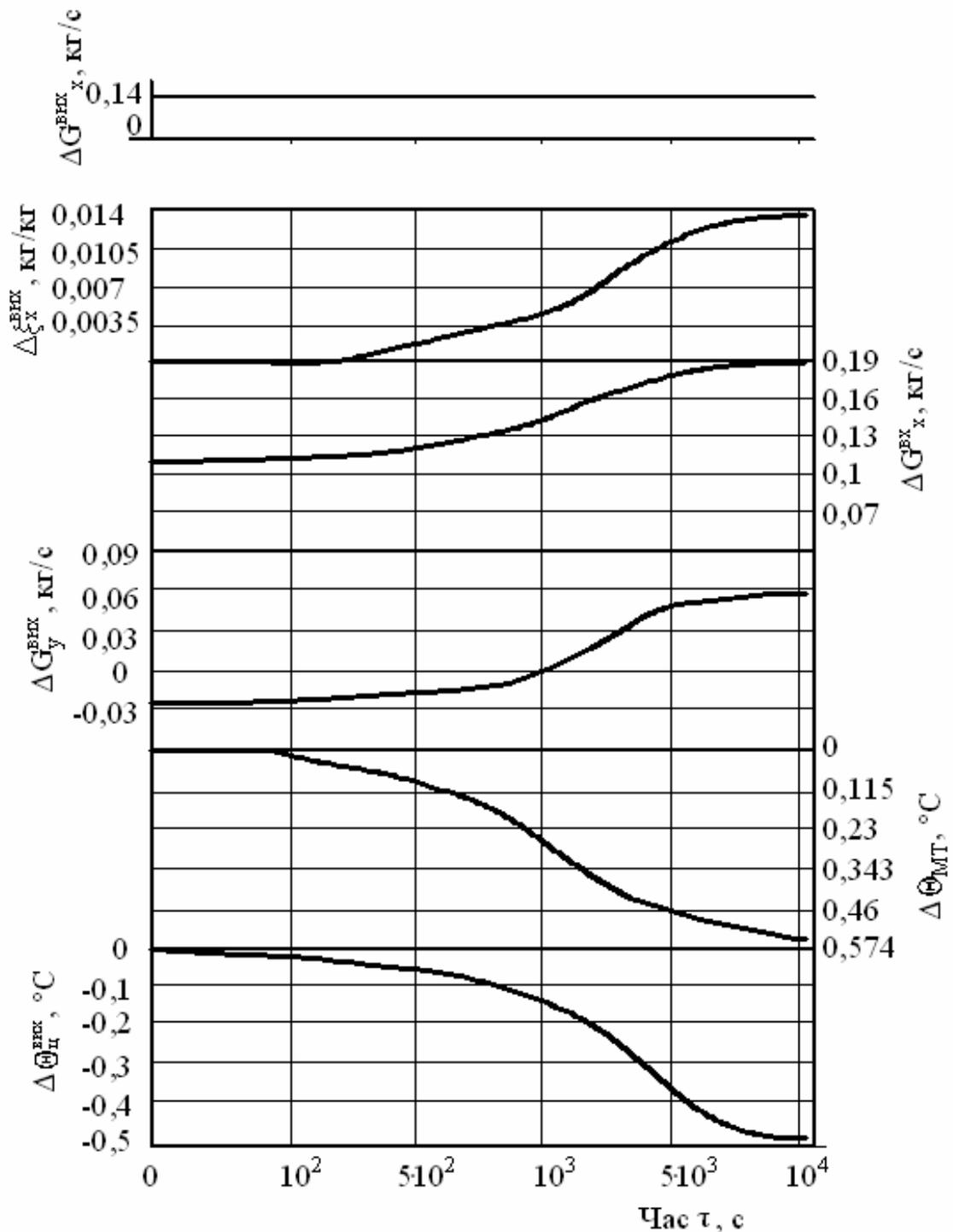


Рис. 6.6. Динамічні характеристики випарника по каналу збурення витратою флегми  $\Delta G_X^{BX}$  за початкового усталеного стану:  
 $\xi_X^{BX}=0,91$  кг/кг;  $G_X^{BX}=15$  т/год;  $\xi_X^{BX}=0,984$  кг/кг;  $\theta_X^{BX}=30^\circ\text{C}$ ;  
 $P_{MT}=0,176$  МПа;  $G_X^{BX}=2,5$  т/год;  $\theta_{Ц}^{BX}=10^\circ\text{C}$ ;  $P_{Ц}=21,6$  МПа;  $V_X=70\%$ ;  
 $v_r=297703$  нм<sup>3</sup>/год;  $a_{H_2}^{BX}=55,4\%$  об.;  $a_{N_2}^{BX}=18,2\%$  об.;  $a_{CH_4}^{BX}=7,7\%$  об.;  
 $a_{Ar}^{BX}=7,7\%$  об.;  $a_{NH_3}^{BX}=11\%$  об.;  $\theta_{Ц}^{BX}=-10^\circ\text{C}$ .

Аналіз цих характеристик свідчить, що з підвищенням витрати флегми на 0,14 кг/с за постійності тиску кипіння холодоагенту  $P_{MT}$  концентрація аміаку  $\xi_X^{BIX}$  у міжтрубному просторі збільшується на 0,01359 кг/кг, за якої знижується температура кипіння  $\theta_{MT}$  на 0,574°C так і температура циркуляційного газу на виході випарника  $\theta_{\Pi}^{BIX}$  на 0,74°C. Збільшення витрати флегми обумовлює необхідність підвищення витрати холодоагенту  $G_X^{BX}$ , що надходить до випарника, на 0,1881 кг/с, що забезпечує збільшення і кількості пароподібного аміаку  $\Delta G_Y^{BIX}$ , що випаровується, на 0,0481 кг/с з метою зберігання постійності тиску. Слід відзначити, що останнє може бути досягнуто лише із більш інтенсивним поглинанням пари аміаку з випарника, тобто необхідно більш інтенсивно відводити теплоту абсорбції.

Як відомо, основними параметрами настроювання алгоритму екстремального керування є величина зони нечутливості  $\delta$  і припустима швидкість зміни вихідного сигналу  $\omega$ . Перший параметр визначають із сімейства вже отриманих статичних характеристик (рис. 6.5) і може бути встановлений на рівні 0,5°C, а другий – з динамічних характеристик, що можуть бути отримані за допомогою вищенаведеної математичної моделі. Згідно рис. 6.6 випарник завдяки великій металоемності має достатню інерційність. Перехідний процес завершується майже за одну годину, тому параметр  $\omega$  у відповідності з рис. 6.6 має бути встановленим на рівні не більше 0,25 год<sup>-1</sup>.

Таким чином, експериментально-аналітичний підхід створення математичної моделі дозволяє визначити як статичні, так і динамічні характеристики об'єкту за різними каналами збурюючих впливів, що важливо при проектуванні систем керування типових об'єктів, а в процесі експлуатації – керувати як режими роботи, так і корегувати параметри настройки регулюючих пристроїв. Виконання статичної ідентифікації дозволяє більш глибоко вивчити процеси, що відбуваються в об'єкті, а отримані рівняння для параметрів зв'язку використати в ході проектування того чи іншого технологічного обладнання.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Автоматизация технологических процессов пищевых производств / под ред. Е. Б. Карпина. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Агропромиздат, 1985. – 536 с.
2. Автоматическое управление в химической промышленности: учеб. для вузов / под ред. Е. Г. Дудникова. – М. : Химия, 1987. – 368 с.
3. Автоматизація технологічних процесів і виробництв харчової промисловості : підручник / А. П. Ладанюк та ін. – К. : Аграрна освіта, 2001. – 224 с.
4. Аналитические методы описания объектов управления с сосредоточенными параметрами: учеб. пособие / Р. Я. Ладиев и др. – К. : КПИ, 1973. – 131 с.
5. Анисимов, И. В. Математическое моделирование и оптимизация ректификационных установок / И. В. Анисимов, В. И. Бодров, В. Б. Покровский. – М. : Химия, 1975. – 216 с.
6. Анисимов, И. В. Автоматическое регулирование процесса ректификации / И. В. Анисимов. – М. : Изд-во нефтяной и горно-топливной лит-ры, 1961. – 180 с.
7. Бабиченко, А. К. Идентификация и математическое моделирование испарителя абсорбционной холодильной установки агрегата синтеза аммиака / А. К. Бабиченко, В. И. Тошинский, Ю. К. Бабиченко, И. Л. Красников // Вестник ХГПУ. – 2000. – Вып. 78. – С. 62 – 64.
8. Бабіченко, А. К. Оптимальне керування процесом охолодження циркуляційного газу у випарниках абсорбційних холодильних установок агрегата синтезу аміаку / А. К. Бабіченко, В. І. Тошинський, Ю. А. Бабіченко // Інтегровані технології та енергозбереження. – 2000. – № 3. – С. 105 – 113.
9. Бабіченко, А. К. Закономірності теплообміну в процесі конденсації продукційного аміаку з циркуляційного газу у випарниках агрегатів синтезу / А. К. Бабіченко // Інтегровані технології та енергозбереження. – 2010. – № 1. – С. 47 – 51.
10. Бабиченко, А. К. Исследование процесса теплообмена при конденсации продукционного аммиака в испарителях крупнотоннажных аг-

регатов синтеза / А. К. Бабиченко, В. И. Вельма // Сучасні досягнення фармацевтичної технології : матеріали першої наук. - практ. конф. з між-нар. участю, 20 – 21 листоп 2008 р. – Х. : НфаУ, 2008 – С. 4 – 5.

11. Балакирев, В. С. Экспериментальное определение динамических характеристик промышленных объектов управления / В. С. Балакирев, Е. Г. Цирлин, Е. Г. Дудников. – М. : Энергия, 1967. – 232 с.

12. Беспалов, А.В. Системы управления химико-технологическими процессами: учебник для вузов / А. В. Беспалов, Н. И. Харитонов. – М. : Академкнига, 2007. – 696 с.

13. Беспалов, А.В. Задачник по системам управления химико-технологическими процессами : учеб. пособие для вузов/ А. В. Беспалов, Н. И. Харитонов. – М. : Академкнига, 2005. – 307 с.

14. Бондар, А. Г. Планирование эксперимента при оптимизации процессов химической технологии (алгоритмы и примеры) / А. Г. Бондарь, Г. А. Статюха, И. А. Потяженко. – К. : Вища школа, 1980. – 264 с.

15. Бондар, А. Г. Математическое моделирование в химической технологии / А. Г. Бондар. – К. : Вища школа, 1973. – 280 с.

16. Вавиловский, В. И. Теоретические основы инженерного проектирования автоматических систем / В. И. Вавиловский, А. И. Рыбаков. – Новокузнецк : СибГИУ, 2007. – 43 с.

17. Втюрин, В. А. Системы управления химико-технологическими процессами : учебное пособие/ В. А. Втюрин. – СПб., 2010. – 179 с.

18. Гартман, Т. Н. Основы компьютерного моделирования химико-технологических процессов: учеб. пособие для вузов / Т. Н. Гартман, Д. В. Клушин. – М. : Академкнига, 2006. – 416 с.

19. Гунич, С. В. Математическое моделирование и расчет на ЭВМ химико-технологических процессов. Примеры и задачи : учебн. пособие / С. В. Гунич. – Иркутск : ИрГТУ, 2010. – 216 с.

20. Дворецкий, С.И. Компьютерное моделирование и оптимизация технологических процессов и оборудования : учеб. пособие для студ. высш. учебн. заведений/ С. И. Дворецкий, А. Ф. Егоров, Д. С. Дворецкий. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. ун-та, 2003. – 224 с.

21. Дейч, А. М. Методы идентификации динамических объектов/ А. М. Дейч. – М. : Энергия, 1979. – 240 с.

22. Дианов, В. Г. Автоматизация производственных процессов нефтеперерабатывающей и нефтехимической промышленности: учеб. пособие. / В. Г. Дианов. – М. : Химия, 1968. – 327 с.
23. Дианов, В. Г. Автоматическое регулирование и регуляторы в химической промышленности / В. Г. Дианов. – М. : Химия, 1978. – 376 с.
24. Дилигенская, А. Н. Идентификация объектов управления: учеб. пособие / А. Н. Дилигенская. – Самара : Самар. ун-т, 2009. – 136 с.
25. Ефимов, В. Т. Повышение эффективности абсорбционных холодильных установок в агрегате синтеза аммиака большой мощности / В. Т. Ефимов, А. К. Бабиченко, С. А. Ерощенко // Холодильная техника, 1979. – № 2. – С. 23 – 26.
26. Ефимов, В. Т. Влияние температуры вторичной конденсации на энергетические показатели работы агрегата синтеза аммиака большой единичной мощности / В. Т. Ефимов, В. И. Атрощенко, А. К. Бабиченко // Журнал прикладной химии, 1979. – Т. 52, Вып. 12. – С. 2732 – 2735.
27. Закгейм, А. Ю. Введение в моделирование химико-технологических процессов / А. Ю. Закгейм. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Химия, 1982. – 288 с.
28. Ідентифікація та моделювання технологічних процесів: підручник для студ. висш. навч. закладів/ П. П. Рожков та ін.; за ред. І. О. Фурмана. – Х. : Факт, 2007. – 240 с.
29. Иванова, Г. В. Автоматизация технологических процессов основных химических производств : метод. пособие/ Г. В. Иванова. – СПб. : ГТИ(ТУ). – 2003. – Ч. 1. – 70 с.
30. Иванова, Г. В. Автоматизация технологических процессов основных химических производств: метод. пособие/ Г. В. Иванова. – СПб. : ГТИ(ТУ). – 2003. – Ч. 2. – 70 с.
31. Исаченко, В. П. Теплопередача : учебн. [для студ. энергетических вузов] / В. П. Исаченко, В. А. Осипова, А. С. Сукомел. – М. : Энергия, 1975. – 448 с.
32. Казаков, А. В. Основы автоматики и автоматизации химических производств : учеб. пособие для вузов / А. В. Казаков, М. В. Кулаков, Ю. К. Мелюшев. – М. : Машиностроение, 1970. – 376 с.

33. Кафаров, В. В. Математическое моделирование основных процессов химических производств: учеб. для вузов / В. В. Кафаров, М. Б. Глебов. – М. : Высш. шк., 1991. – 400 с.
34. Кафаров, В. В. Принципы математического моделирования химико-технологической систем / В. В. Кафаров, М. Е. Мешалкин. – М. : Химия, 1974. – 345 с.
35. Комиссарчик, В. Ф. Автоматическое регулирование технологических процессов : учеб. пособие / В. Ф. Комиссарчик. – Тверь : изд-во Тверского гос. техн. ун-та, 2001. – 248 с.
36. Кузьменко, В. В. Моделювання технологічних процесів / В. В. Кузьменко. – К. : Фенікс, 2008. – 160 с.
37. Кубрак, А. І. Програмування та розрахунок автоматичних систем / А. І. Кубрак, Л. Д. Ярошук. – К. : Вища школа, 1992. – 366 с.
38. Липатников, Г.А. Автоматическое регулирование объектов теплоэнергетики : учеб. пособие / Г. А. Липатников, М. С. Гузеев. – Владивосток, 2007. – 136 с.
39. Лоссиевский, В. Л. Основы автоматического регулирования технологических процессов/ В. Л. Лоссиевский. – М., 1949. – 226 с.
40. Методы расчетов по технологии связанного азота : учеб. пособие для студентов хим.-техн. ин-в. и фак. / В. И. Атрощенко, В. И. Конвисар, И. И. Гельперин и др.; под ред. В. И. Атрощенко. – К. : Вища школа, 1978. – 312 с.
41. Основи вимірювань і автоматизації технологічних процесів : підруч. для студ. висш. навч. закладів / А. К. Бабіченко та ін.; за ред. А. К. Бабіченко. – Х. : Вид-во ТОВ С.А.М., 2009. – 616 с.
42. Остапенко, Ю. О. Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів керування: підруч. / Ю. О. Остапенко. – К. : Задруга, 1999.–424 с.
43. Остапчук, Н. В. Основы математического моделирования процессов пищевых производств: учеб. пособие / Н. В. Остапчук. – 2-е изд., перераб. и доп. – К. : Вища шк., 1991. – 367 с.
44. Парсункин, Б. М. Идентификация параметров объектов управления по экспериментальным динамическим характеристикам: учеб. пособие / Б. М. Парсункин, Н. М. Баженов, В. М. Дубинин. – Магнитогорск : МГМА, 1998. – 95 с.

45. Полоцкий, Л. М. Автоматизация химических производств. Теория, расчет и проектирование систем автоматизации / Л. М. Полоцкий, Г. И. Лапшенков. – М. : Химия, 1982. – 296 с.
46. Парсункин, М. А. Расчет и моделирование автоматических систем регулирования в среде MATHCAD: учеб. пособие / М. А. Парсункин. – М. : МЭИ, 2004. – 112 с.
47. Потрашков, В. И. Автоматизация химических процессов химической промышленности: учеб. пособие / В. И. Потрашков. – К. : Міністерства освіти України, 1996. – 148 с.
48. Проектування систем автоматизації технологічних процесів: навч. посібник / В. І. Тошинський та ін. – Х. : НТУ" ХПІ", 2006. – 412 с.
49. Растрингин, Л. А. Введение в идентификацию объектов управления / Л. А. Растрингин, Н. Е. Маджаров. – М. : Энергия, 1977. – 216 с.
50. Ротач, В. Я. Теория автоматического управления теплоэнергетическими процессами : учебн. для вузов / В. Я. Ротач. – М. : Энергоатомиздат, 1985. – 296 с.
51. Симою, М.П. Определение коэффициентов передаточных функций линеаризованных звеньев и систем регулирования / М. П. Симою // Автоматика и телемеханика, 1957. – № 6. – С. 514 – 527.
52. Самойлов, Н. А. Моделирование в химической технологии и расчет реакторов: учеб. пособие / Н. А. Самойлов. – Уфа : монография, 2005. – 224 с.
53. Семенов, А. Д. Идентификация объектов управления : учеб. пособие / А. Д. Семенов, Д. В. Артамонов, А. В Брюхачев. – Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2003. – 211с.
54. Стефани, Е. П. Основы расчета настройки регуляторов теплоэнергетических процессов / Е. П. Стефани. – М. : Энергия, 1972. – 376 с.
55. Стенсель, Й.І. Автоматика та автоматизація хіміко-технологічних процесів / Й. І. Стенцель. – Луганськ : вид-во Східноукр.ун-ту ім. В. Даля, 2004. – 376 с.
56. Стенцель, Й. І. Математичне моделювання технологічних об'єктів керування / Й. І. Стенцель. – К. : ІСДО, 1993. – 276 с.
57. Френкс, Р. Математическое моделирование в химической технологии / Р. Френкс. – М. : Химия, 1971. – 272 с.

58. Системный анализ и принятие решений. Математическое моделирование и оптимизация объектов химической технологии в Mathcad и Excel / В. А. Холоднов, В. П. Решетиловский, М. Ю. Лебедева, Е. С. Боровинская. СПб. : СПГТИ (ТУ), 2007. – 433 с.

59. Хоршев, В. И. Математические модели объектов управления / В. И. Хоршев. – М. : МИТХТ, 2001. – 75 с.

60. Чекрыжов, С.Г. Автоматизации типовых процессов химических производств : учеб. пособие / С.Г. Чекрыжов. – Кохтла-Ярве, 2007. – 151 с.

61. Шински, Ф. Системы автоматического регулирования химико-технологических процессов / Ф. Шински; пер с англ. под ред. Н. И. Гельперина. – М. : Химия, 1974. – 336 с.

62. Широкий Д. К. Расчет параметров промышленных систем регулирования. Справочное пособие / Д. К. Широкий, О. Д.Куриленко. – К. : Техника, 1972. – 232 с.

## ЗМІСТ

Передмова.....	3
1. Метод моделювання і його застосування ( <i>Красніков І.Л., Подустов М.О.</i> ).....	5
1.1. Основні поняття.....	5
1.2. Фізичне моделювання.....	8
1.3. Математичне моделювання.....	10
Різноманіття математичних моделей (11). Методи побудови математичних моделей (13).	
2. Загальна характеристика технологічних процесів як об'єктів керування ( <i>Красніков І.Л., Вельма В.І.</i> ).....	19
2.1. Загальна структура об'єкту керування.....	19
2.2. Класифікація об'єктів керування.....	21
2.3. Основні властивості об'єктів керування.....	24
Акумулююча здатність (24). Самовирівнювання (25). Швидкодія об'єкту керування (28). Запізнювання (29). Передатна функція (31).	
3. Принципи аналітичного методу математичного моделювання ( <i>Красніков І.Л., Бабіченко А.К., Зайцев О.І.</i> ).....	34
3.1. Блоковий принцип.....	34
3.2. Принцип збереження маси та енергії.....	34
3.3. Принцип типізації гідродинамічних моделей потоків.....	37
Модель ідеального перемішування (38). Модель ідеального витіснення (39). Дифузійна модель (40). Коміркова модель (42). Комбінована модель (43).	
3.4. Застосування принципу типізації гідродинаміки потоків для реалізації математичних моделей.....	45
Теплообмінники (45). Хімічні реактори (51). Абсорбери (56).	
4. Аналітичний метод математичного моделювання у визначені динамічних властивостей об'єктів керування ( <i>Красніков І.Л., Бабіченко А.К.</i> ).....	60
4.1. Лінеаризація як метод розв'язання рівнянь математичної моделі.....	60

4.2. Об'єкти транспортування речовин.....	64
Об'єкт транспортування газу і рідини (64). Стрічковий дозатор (67).	
4.3. Газові ресивери.....	69
Одноємнісний ресивер (69). Двоємнісний ресивер (71).	
4.4. Рідинні ресивери.....	74
Ресивери з вільним витокком рідини (74). Ресивер з примусовим виходом рідини (77). Ресивери змішування компонентів (79)	
4.5. Теплообмінники змішування.....	85
Теплообмінник змішування з одним параметром регулювання (85). Теплообмінник змішування з двома параметрами регулювання (87).	
4.6. Рекуперативні теплообмінники.....	89
Теплообмінник-реактор з водяною оболонкою (89). Теплообмінник типу "труба в трубі" (91). Теплообмінники із зміною агрегатного стану речовин (97)	
4.7. Хімічні реактори.....	106
4.8. Біохімічні реактори.....	114
4.9. Масообмінні апарати.....	118
Випарний апарат (119). Ректифікаційна установка (123). Абсорбційна установка (129). Барабанна сушарка (133). Кристалізатор (138).	
5. Експериментальний метод математичного моделювання у визначенні динамічних властивостей об'єктів керування ( <i>Бабіченко А.К., Красніков І.Л., Бабіченко Ю.А.</i> ).....	141
5.1 Ідентифікація лінійних динамічних об'єктів за часовими характеристиками.....	141
Методика отримання перехідних характеристик (141). Згладжування експериментальних перехідних характеристик (143). Апроксимація перехідних характеристик (145). Методи апроксимації (147).	
5.2 Графоаналітичні методи апроксимації лінійних об'єктів керування за часовими характеристиками.....	147
Наближення через аперіодичні ланки першого і другого порядку (147). Метод послідовного логарифмування (151). Метод	

Ормана (153). Метод Ольденбурга-Сарторіуса (158). Метод Андерсона (160). Метод В. Стрейца (162). Метод додаткових членів (165). Наближення через інтегруючі ланки з запізнюванням для об'єктів без самовирівнювання (169).	
5.3 Чисельні методи апроксимації лінійних об'єктів керування..	171
Наближення через аперіодичні ланки (172). Метод Сімою (175).	
5.4. Ідентифікація об'єктів за частотними характеристиками.....	179
6. Експериментально-аналітичний метод математичного моделювання об'єктів керування і можливості його застосування (Бабіченко А.К, Бабіченко Ю.А.).....	186
6.1. Аналіз особливостей апаратурно-технологічного оформлення процесу і постановка задач досліджень.....	187
6.2. Побудова математичної моделі.....	188
6.3. Статична ідентифікація процесу.....	190
Алгоритм ідентифікації (190). Дослідження показників ефективності процесу (194). Визначення закономірностей процесів (197).	
6.4. Оптимізація режимних параметрів процесу.....	202
Вибір цільової функції (202). Алгоритм оптимізації (203). Результати обчислень з визначенням структури системи керування (203).	
6.5. Визначення динамічних властивостей об'єкту керування....	207
Список літератури.....	215

Навчальне видання

Математичне моделювання об'єктів керування хімічних і  
фармацевтичних виробництв

Навчальний посібник

КРАСНІКОВ Ігор Леонідович  
БАБІЧЕНКО Анатолій Костянтинович  
ВЕЛЬМА Володимир Іванович  
ПОДУСТОВ Михайло Олексійович  
ЗАЙЦЕВ Олександр Іванович  
БАБІЧЕНКО Юлія Анатоліївна

В авторській редакції

Друкарня ТОВ "С.А.М"

Друк офсетний

Підп. до друку 14.11.2014 р. Формат 60x84 1/16

Папір – офсет. Друк. – офсет. Гарнітура Times.

Ум. друк. арк. 15.47. Обл.-вид. арк. 14. Тираж – 350 прим.

Зам. № 147. Ціна договірна

61002, Харків, вул. Пушкінська, 52-Б