соответствует некоторый сдвиг $\beta_2^{(0)}$ в показаниях прибора, определяемый как частное решение уравнения (4)

$$\beta_2^{(0)} = [k_{01}n_2^2 + k_{02}n_1^2 + n_1^2 n_2^2]_c^{-1}.$$

Таким образом, прибор будет выдавать сигнал $\beta_0 + \beta_2^{(0)}$, пропорциональный угловой скорости $\omega_z + \Delta\omega$, где $\Delta\omega$ определяет динамическую ошибку ДУС.

Определяя сдвиг нуля прибора, полагаем $\beta_{0i} = 0$.

Систематическая погрешность прибора во втором приближении соответствует ложной угловой скорости $\Delta\omega$, определяемой по формуле

$$\begin{gathered}
2\Delta\omega = [H_1(c_2 + 2k_2) - H_2(c_1 + 2k_1)]^{-1}\{\{[H_2(c_1 + 2k_1) + \\
+ H_1(c_2 + 2k_2)]\,\gamma\rho_\theta\rho_\psi = \sin(\delta_\theta - \delta_\psi) + [R_1(c_2 + 2k_2) - \\
- R_2(c_1 + 2k_1)]\,\gamma^2\rho_\theta\rho_\varphi\cos(\delta_\theta - \delta_\varphi) - \gamma\rho_\theta[(\gamma^4 - \gamma_c^2 + e)^2 + \\
+ \gamma^2(\gamma^2 b - d)^2]^{-1/2}\{[H_1(c_2 + 2k_2)F_1 + H_2(c_1 + 2k_1)F_2] \times \\
\times \cos(\delta_\psi - \delta_\theta + \varepsilon) + [H_1(c_2 + 2k_2)L_1 + H_2(c_1 + 2k_1)L_2] \times \\
\times \cos(\delta_\varphi - \delta_\theta + \varepsilon) + [H_1(c_2 + 2k_2)D_1 + H_2(c_2 + 2k_1)D_2] \times \\
\times \sin(\delta_\psi - \delta_\theta + \varepsilon) + [H_1(c_2 + 2k_2)E_1 + H_2(c_1 + \\
+ 2k_1)E_2]\sin(\delta_\varphi - \delta_\theta + \varepsilon)\}\}\},
\end{gathered}$$

где $F_i = -2h_j\gamma^2\rho_\psi$; $L_i = \rho_\varphi[H_i B_i^{-1}(c_i B_i^{-1} + k_j B_j^{-1}) + k_i H_j B_i^{-1} B_j^{-1}]$; $D_i = -\gamma^2\rho_\psi[\gamma^2 - B_j^{-1}(c_j + k_j) + k_i B_i^{-1}]$; $E_i = 2h_j H_i B_i^{-1}\rho_\varphi$, $i = 1, 2$; $j = 2, 1$.

Рассмотрим числовой пример. Пусть $H_1 = 2{,}09 \cdot 10^{-1}$ Н · м · с; $H_2 = -2{,}11 \cdot 10^{-1}$ Н · м · с; $c_1 = 1{,}2 \cdot 10^{-1}$ Н · м; $c_2 = 1{,}22 \cdot 10^{-1}$ Н × × м; $k_1 = k_y k_{\text{дм}\,1} = 0{,}3$ Н · м; $k_2 = 0{,}304$ Н · м; $\gamma = 0{,}5$ с$^{-1}$, $\rho_\theta = \pi/36 = 5^0$; $\rho_\varphi = \rho_\psi = 1^0 = \pi/180$. Тогда $\Delta\omega \approx 0{,}94 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$.

Для условий приведенного примера обычный ДУС имеет сдвиг нуля, соответствующий величине ложной угловой скорости $\Delta\omega$ приблизительно на два порядка большей.

Список литературы: 1. *Лунц Я. Л.* Ошибки гироскопических приборов. — Л.: Судостроение, 1968. — 231 с. 2. *Одинцов А. А.* Метод автокомпенсации влияния внешних помех, действующих на гироскопы и маятниковые акселерометры.— В кн.: Автоматика и приборостроение. К.: Техніка, 1973, с. 87 — 94.

Поступила в редколлегию 04.10.82.

УДК 518.61

Ю. Ф. СЕНЧУК, канд. физ.-мат. наук

ОБ ОДНОМ ПРЯМОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Прямые численные методы решения уравнений эллиптического типа делятся на две основные группы. В методах первой группы замена частных производных отношениями конечных разностей производится непосредственно в исходном уравнении, а второй — в соответствующем вариационном функционале. В монографии [1] предложен один метод второй группы, основанный на идее динамического программирования. В работах [2, 3] он обобщается на случай равномерной и неравномерной прямоугольных сеток.

В статье обобщается один из методов первой группы [1] на случай прямоугольной сетки.

Обращаясь к задаче Дирихле, будем искать решение уравнения Лапласа $\nabla^2 u(x, y) = 0$ в области $D = \{(x, y) : 0 < x < a;\ 0 < y < b\}$ при граничном условии первого рода. Покрывая область D равномерной прямоугольной сеткой с ячейками $h \times l$ $(a = nh,\ b = ml)$, придем к следующему конечно-разностному уравнению

$$\frac{u_{i+1,\ j} - 2u_{ij} + u_{i-1,\ j}}{h^2} + \frac{u_{i,\ j+1} - 2u_{ij} + u_{i,\ j-1}}{l^2} = 0. \qquad (1)$$

Полагая $\beta = l/h$, перепишем уравнение (1) так:

$$\beta^2 u_{i+1,\ j} + u_{i,\ j+1} - 2(\beta^2 + 1)\, u_{ij} + \beta^2 u_{i-1,\ j} + u_{i,\ j-1} = 0. \qquad (2)$$

Вводя $(m - 1)$-мерные векторы $u_k = (u_{k1},\ u_{k2},\ \ldots,\ u_{k,\ m-1})$, $r_k = (u_{k0},\ 0,\ \ldots,\ 0,\ u_{km})$ и квадратную матрицу $(m - 1)$-го порядка $Q = (q_{ij})$, где

$$q_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j, \\ -1, & |i - j| = 1, \\ 0 & \text{для всех остальных } i,\ j, \end{cases}$$

получим из уравнения (2)

$$\beta^2 u_{k+1} - 2\beta^2 u_k + \beta^2 u_{k-1} - Q u_k + r_k = 0. \qquad (3)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде $u_{k+1} = A_k u_k + b_k$ (4).

Подставляя формулу (4) в уравнение (3), находим

$$\begin{cases} A_{k-1} = \beta^2 (2\beta^2 E + Q - \beta^2 A_k)^{-1}, \\ b_{k-1} = A_{k-1}(b_k + r_k/\beta^2). \end{cases} \qquad (5)$$

Из формулы (4) имеем $u_n = A_{n-1}u_{n-1} + b_{n-1}$, а так как u_n не зависит от u_0, то должно быть $A_{n-1} = 0$, $b_{n-1} = u_n$ **(6).**

Формулы (5) с начальными условиями (6) и формула (4) полностью описывают алгоритм решения задачи.

Для доказательства корректности алгоритма обозначим $B_{k+1} = \beta^2 (E - A_k)$, $(k \leqslant n - 1)$. Тогда [3] $0 < B_k < E$, а значит $0 < A_k < E$, $k \leqslant n - 2$ **(7).** Отсюда следует неособенность всех матриц $2\beta^2 E + Q - \beta^2 A_k$, а значит процесс корректен.

Докажем теперь устойчивость процесса. Пусть на некотором шаге вместо матрицы A_k мы получили некоторую матрицу $\tilde{A}_k = A_k + \Delta_k$, где Δ_k — малая ошибка. Тогда

$\tilde{A}_{k-1} = \beta^2 (2\beta^2 E + Q - \beta^2 \tilde{A}_k)^{-1}$, откуда легко следует, что $\Delta_{k-1} = A_{k-1}\Delta_k \tilde{A}_{k-1}$. Так как Δ_k мало, то $\Delta_{k-1} \approx A_{k-1}\Delta_k A_{k-1}$. Поэтому

$\|\Delta_{k-1}\| \leqslant \|A_{k-1}\|^2 \|\Delta_k\|$. Но из неравенства (7) следует, что $\|A_{k-1}\| < 1$, а значит, $\|\Delta_{k-1}\| < \|\Delta_k\|$, т. е. небольшая ошибка, допущенная на некотором шаге, в дальнейшем не увеличивается. Точно так же, предположив, что векторы b_k и u_k найдены с некоторыми ошибками δ_k, ε_k, получим $\|\delta_{k-1}\| < \|\delta_k\|$, $\|\varepsilon_k\| < \|\varepsilon_{k-1}\|$. Тем самым доказывается устойчивость процесса по отношению к малым ошибкам промежуточных вычислений.

Рассмотрим теперь уравнение Лапласа в том же прямоугольнике, но с комбинированными граничными условиями

$$u(x, 0) = f_1(x); \quad u(x, b) = f_2(x);$$
$$\frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial u(a, y)}{\partial x} = 0.$$

В этом случае справедливы равенства (2), (3), только теперь u_0, u_n неизвестны. Однако последнее граничное условие с точностью до $O(h^3)$ дает $u_{n+1} = u_{n-1}$, в результате чего соотношение (3) при $k = n$ запишется в виде

$$2\beta^2 u_{n-1} - 2\beta^2 u_n - Qu_n + r_n = 0,$$

откуда

$$u_n = (2\beta^2 E + Q)^{-1} (2\beta^2 u_{n-1} + r_n).$$

С другой стороны, $u_n = A_{n-1}u_{n-1} + b_{n-1}$; тогда

$$A_{n-1} = 2\beta^2 (2\beta^2 E + Q)^{-1}, \quad b_{n-1} = (2\beta^2 E + Q)^{-1} r_n. \tag{8}$$

Далее, исходя из начальных условий (8), по формулам (5) последовательно находим A_{n-2}, b_{n-2}; A_{n-3}, b_{n-3}; ...; A_0, b_0. Теперь, чтобы использовать формулу (4), заметим, что в силу граничного условия на левой стороне с точностью до $O(h^3)$ будет $u_{-1} = u_1$, и тогда уравнение (3) при $n = 0$ дает $2\beta^2 u_1 - 2\beta^2 u_0 - Qu_0 + r_0 = 0$. Решая это уравнение совместно с уравнением $u_1 = A_0 u_0 + b_0$, находим $u_0 = [2\beta^2 (E - A_0) + Q]^{-1} (2\beta^2 b_0 + r_0)$ **(9)** (неособенность матрицы $2\beta^2 (E - A_0) + Q$ следует из неравенства (7)).

После вычисления u_0 по формуле (9) последовательно находим u_1, u_2, ..., u_n на основании формулы (4). Корректность и устойчивость данного алгоритма очевидны.

Описанный прием можно применить и к решению уравнения более общего вида: $\nabla^2 u - g(x, y) u + \varphi(x, y) = 0$ с неоднородными граничными условиями третьего рода.

Список литературы: 1. *Беллман Р., Энджел Э.* Динамическое программирование и уравнения в частных производных. — М.: Мир, 1974. — 207 с. 2. *Сенчук Ю. Ф.* Об одном численном методе решения задачи Дирихле для прямоугольника. — Л., 1981. — 6 с. — Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 732 — 81 Деп. 3. *Сенчук Ю. Ф.* Обобщение одного сеточного метода решения уравнения эллиптического типа. — Л., 1982. — 12 с. — Рукопись деп. в ВИНИТИ № 952—82 Деп.

Поступила в редколлегию 12.11.82.