

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
«ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

С.Ю. Погорелов, В.Л. Хавин, С.Ю. Шергин, Н.В. Кравцова

РАСЧЕТ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ  
НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

Учебно-методическое пособие  
по курсу «СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»  
для студентов машиностроительных специальностей

Утверждено  
редакционно-издательским  
советом университета,  
протокол № 1 от 22.06.2017 г.

Харьков  
НТУ «ХПИ»  
2017

УДК 620.17

ББК 30.121

Р 45

*Рецензенты:*

*С.О. Вамболь*, д-р техн. наук, проф., зав. каф. прикладной механики  
Национального университета гражданской защиты Украины;  
*Н.А. Ткачук*, д-р техн. наук, проф., зав. каф. теорий и систем автоматизирован-  
ного проектирования механизмов и машин  
Национального технического университета «ХПИ».

Посібник містить розрахунки оболонок обертання на міцність по безмоментній теорії при складному навантаженні. Розглянуто аналіз напружено-деформованого стану в точці та оцінку міцності при складному деформуванні, що дозволяє розраховувати різні практичні завдання.

Призначено для студентів машинобудівних спеціальностей.

**Р 45** Расчет оболочек вращения на прочность при сложном нагружении : учеб.-метод. пособие / С. Ю. Погорелов, В. Л. Хавин, С. Ю. Шергин, Н. В. Кравцова. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2017. – 65 с. – На рус. яз.

ISBN

Пособие содержит расчеты оболочек вращения на прочность по безмоментной теории при сложном нагружении. Рассмотрен анализ напряженно-деформированного состояния в точке и оценка прочности при сложном деформировании, что позволяет решать различные практические задачи.

Предназначено для студентов машиностроительных специальностей.

Ил. 22. Табл. 3. Библиогр. 5 наим.

УДК 620.17

ББК 30.121

ISBN

© С.Ю. Погорелов, В.Л. Хавин,  
С.Ю. Шергин, Н.В. Кравцова, 2017

## Вступление

В различных отраслях современной промышленности – химическом машиностроении, энергомашиностроении, судостроении, авиастроении, строительстве и т.д. нашли широкое применение тонкостенные оболочечные конструкции. Повышенные требования к прочности и жесткости этих конструкций с одновременным условием снижения их материалоемкости приводит к необходимости проводить анализ напряженно-деформированного состояния тонкостенных оболочек вращения при сложном нагружении с последующей оптимизацией конструкции.

В процессе эксплуатации оболочечные конструкции подвергаются воздействию различных видов внешнего нагружения. При этом во всех точках этих конструкций возникают разнообразные сочетания механических напряжений (различные виды напряженно-деформированного состояния). Поэтому инженер-конструктор должен уметь проводить анализ напряженного состояния в любых точках оболочечной конструкции с целью оценки прочности при напряженном состоянии любой сложности.

Данное пособие посвящено элементам анализа напряженно-деформированного состояния в точке оболочечной конструкции и оценке ее прочности при сложном напряженном состоянии.

Пособие состоит из трех разделов. В первом разделе пособия рассматриваются основы теории оболочек, рассчитываемых по безмоментной теории и сложном нагружении, приводятся зависимости для определения напряжений в оболочках различной геометрии.

Во втором разделе пособия рассмотрены основы теории напряженно-деформированного состояния в точке. Формулируется обобщенный закон Гука, связывающий компоненты напряженного и деформированного состояния при сложном нагружении, рассматриваются гипотезы предельных напряженных состояний

В третьем разделе пособия приводится порядок и примеры выполнения двух задач расчетно-проектировочного задания.

## 1. ОСНОВЫ РАСЧЕТА ОБОЛОЧЕК ПО БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ

Для определения напряжений в тонкостенных замкнутых конструкциях преимущественно используется так называемая безмоментная («мембранная») теория оболочек [1]. По этой теории стенки сосуда рассматриваются как весьма тонкие оболочки («мембраны»), не воспринимающие изгибающих моментов.

Сосуды, рассчитываемые по безмоментной теории, должны удовлетворять обязательным условиям:

- 1) сосуды должны быть тонкостенными (толщина стенок не превышает одной двадцатой части диаметра сосуда);
- 2) форма сосуда обязательно должна представлять собой тело вращения;
- 3) нагрузка должна быть распределённой (например, газовое или гидростатическое давление), симметричной относительно оси вращения, плавно изменяться и не иметь резких скачков.

Совокупность этих трёх условий позволяет принять гипотезу равномерного распределения напряжений по толщине стенки, т.е. стенка работает только на растяжение или сжатие.

На рис. 1.1 изображена симметричная оболочка толщиной  $h$ , из которой двумя парами меридиональных и нормальных к ним сечений выделен бесконечно малый элемент поверхности  $abcd$ . Здесь  $\rho_m$  – радиус кривизны дуги меридиана срединной поверхности оболочки ( $\rho_m = bO_1$ ),  $\rho_\theta$  – радиус кривизны сечения, перпендикулярного дуге меридиана ( $\rho_\theta = bO$ ),  $ab = ds_2$ ,  $ac = ds_1$ . Оболочка находится под действием внутреннего давления  $P$ , которое может меняться по высоте, но будет одинаковым во всех точках плоскости, перпендикулярной к оси оболочки (осесимметричное давление).

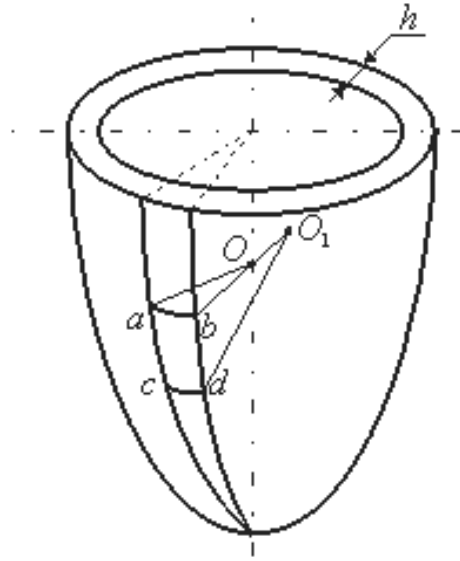


Рисунок 1.1

Рассмотрим напряженное состояние выделенного элемента *abcd* (рис.1.2).

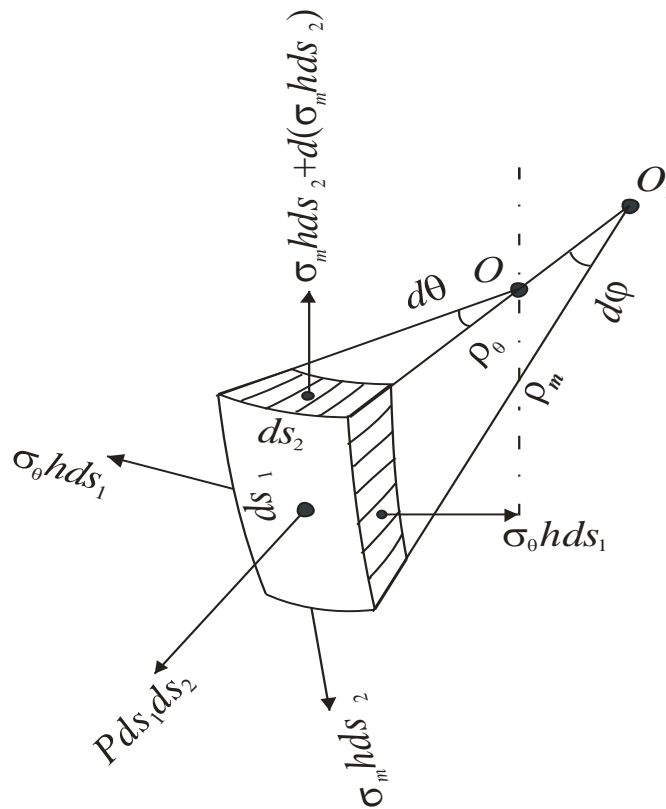


Рисунок 1.2

На его гранях возникают меридиональные ( $\sigma_m$ ) и окружные напряжения ( $\sigma_\theta$ ). Умножая эти напряжения на площади граней элемента, получаем силы, проецируя которые на нормаль к поверхности, записываем уравнение равновесия элемента:

$$P \cdot ds_1 \cdot ds_2 - \sigma_m \cdot h \cdot ds_2 \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} - [\sigma_m \cdot h \cdot ds_2 + d(\sigma_m \cdot h \cdot ds_2)] \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} - 2 \cdot \sigma_\theta \cdot h \cdot ds_1 \cdot \sin \frac{d\theta}{2} = 0.$$

Так как синус малого угла равен самому углу и, учитывая соотношения  $d\varphi = ds_1 / \rho_m$ ,  $d\theta = ds_2 / \rho_\theta$ , окончательно получаем:

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_\theta}{\rho_\theta} = \frac{P}{h}.$$

Это соотношение называется *уравнением Лапласа*.

Напряжения  $\sigma_m$  и  $\sigma_\theta$  являются главными напряжениями. Третье главное напряжение, действующее по нормали к поверхности оболочки, равно давлению  $P$ , значительно меньше первых двух и им пренебрегают (т.е. считают его равным нулю).

Рассмотрим определение напряжений в различных оболочках, находящихся под действием внутреннего давления  $P$ .

### 1.1. Цилиндрическая оболочка

Возможны два варианта: оболочка с днищами или без них.

1) Оболочка без днища

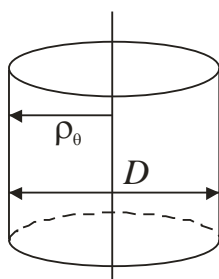


Рисунок 1.3

так как  $\sigma_m = 0$ ,  $\rho_m \rightarrow \infty$  (радиус кривизны меридиана), то  $\frac{\sigma_m}{\rho_m} \rightarrow 0$ ,  $\rho_\theta = \frac{D}{2}$ ,

( $D$  – средний диаметр оболочки)

Из уравнения Лапласа следует:

$$\frac{2\sigma_{\theta}}{D} = \frac{P}{h} \Rightarrow \sigma_{\theta} = \frac{P \cdot D}{2h}.$$

## 2) Оболочка с днищами

Равнодействующая от внутреннего давления, приходящегося на днище:

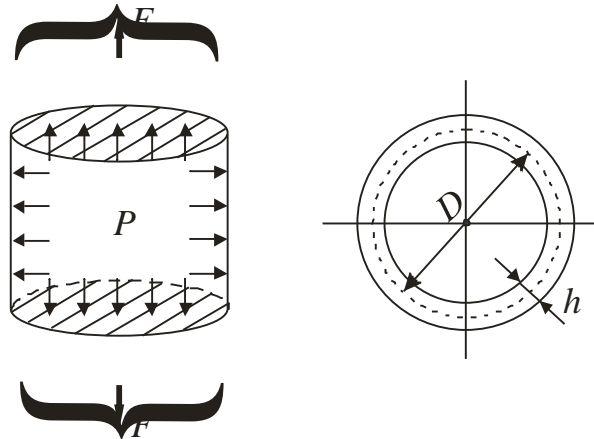


Рисунок 1.4

$F = P \cdot \frac{\pi D^2}{4}$ . Форма днища не существенна (плоская, коническая, сферическая).

Площадь поперечного сечения оболочки:

$A = h \cdot \pi \cdot D$ , равнодействующая  $F$  может быть определена так:

$$F = \sigma_m \cdot A = \sigma_m \cdot h\pi D.$$

Приравнявая выражения для  $F$ , получаем

$$P \cdot \frac{\pi D^2}{4} = \sigma_m \cdot h\pi D.$$

Отсюда меридиональные напряжения равны  $\sigma_m = \frac{PD}{4h}$ , а окружные, как

показано в предыдущем примере:  $\sigma_{\theta} = \frac{\rho D}{2h}$ .

## 1.2. Сферическая оболочка

В этом случае  $\rho_m = \rho_{\theta} = \frac{D}{2}$  и  $\sigma_m = \sigma_{\theta}$ .

Из уравнения Лапласа следует:  $\sigma_m = \sigma_{\theta} = \frac{PD}{4h}$ .

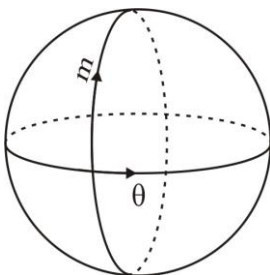


Рисунок 1.5

Зависимости получены при действии внутреннего давления. Для внешнего давления необходимо поменять знак  $P$ .

### 1.3. Коническая оболочка

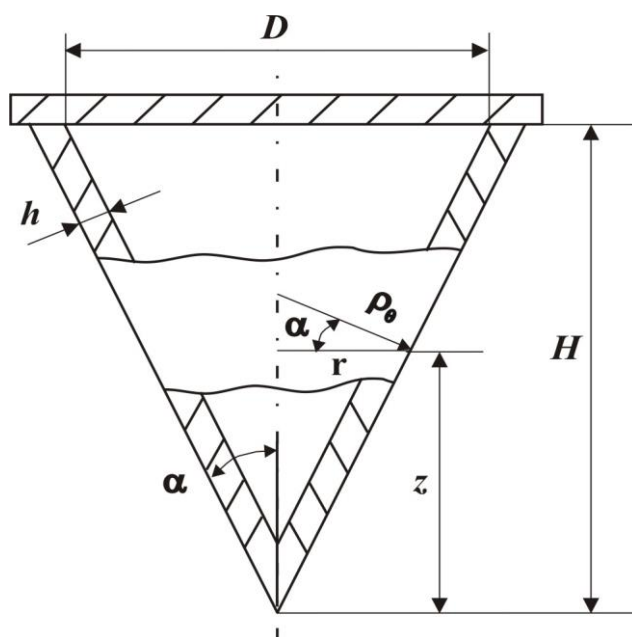


Рисунок 1.6

Оболочка находится под действием внутреннего давления  $P$ .

$$\text{Здесь } \rho_m = \infty, \rho_\theta = \frac{r}{\cos \alpha} = \frac{z \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}.$$

Записав уравнение равновесия ( $\Sigma Z = 0$ ), получим:  $\sigma_m = \frac{PDz}{4hH \cos \alpha}$ .

Из уравнения Лапласа следует:  $\sigma_\theta = \frac{PDz}{2hH \cos \alpha}$ .

Заметим, что в конической оболочке, так же, как и в цилиндрической, выполняется соотношение между окружным и меридиональным напряжениями:  $\sigma_\theta = 2\sigma_m$ .

## 2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ

### 2.1. Понятие о напряжённом состоянии и компонентах тензора напряжений в точке

**Напряжённое состояние в точке тела** – это совокупность нормальных и касательных напряжений на множестве плоскостей, проходящих через данную точку тела.

Для полного анализа напряжённого состояния в точке достаточно знать нормальные и касательные напряжения на трёх произвольных взаимно перпендикулярных площадках.

Вырежем тремя парами взаимно перпендикулярных плоскостей в окрестностях рассматриваемой точки тела бесконечно малый параллелепипед (рис. 2.1) и покажем напряжения, действующие на его гранях.

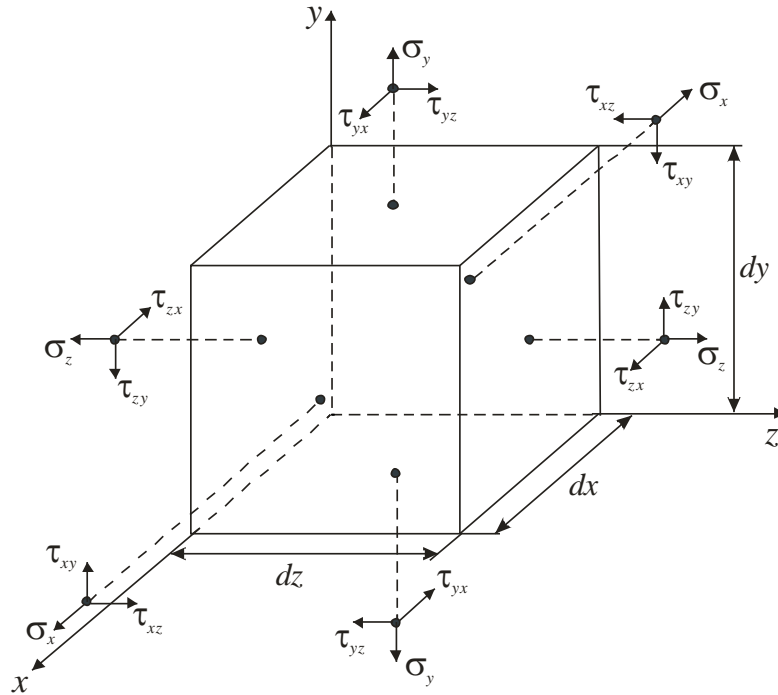


Рисунок 2.1

Нормальные напряжения  $\sigma$  имеют индекс оси, совпадающий с нормалью к площадке, касательные  $\tau$  – два индекса: первый – это индекс нормали к площадке, второй – индекс показывает, параллельно какой координатной оси действует касательное напряжение.

Нормальные напряжения  $\sigma$  считаются положительными, если они направлены в сторону внешней нормали к площадке, на которой действуют.

Касательные напряжения  $\tau$  считаются положительными, если они дают на соответствующую ось проекции такого же знака, как и положительные нормальные, действующие на этой площадке.

Общее количество компонент напряжений, описывающих напряжённое состояние в точке на выбранных площадках, – шесть, так как касательные напряжения подчиняются закону парности касательных напряжений [2]:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx};$$

$$\tau_{yx} = \tau_{zy};$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

Для компактного описания напряжённого состояния в точке вводится математическое понятие тензора напряжений, задаваемого матрицей тензора напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Тензор напряжений может быть разложен на шаровой тензор  $\dot{\sigma}_{\sigma}^0$  (гидростатическая составляющая) и девиатор  $D_{\sigma}$ :  $\dot{\sigma}_{\sigma} = \dot{\sigma}_{\sigma}^0 + D_{\sigma}$ .

Шаровой тензор имеет вид

$$\dot{\sigma}_{\sigma}^0 = \begin{pmatrix} \sigma_{\hat{1}\hat{1}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\hat{1}\hat{1}} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\hat{1}\hat{1}} \end{pmatrix},$$

где  $\sigma_{\text{ОКТ}}$  – октаэдрическое напряжение, вычисляемое по зависимости

$$\sigma_{\hat{1}\hat{1}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}.$$

Тогда девиатор напряжений определим как

$$D_{\sigma} = T_{\sigma} - \dot{\sigma}_{\sigma}^0 = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_{\hat{1}\hat{1}} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_{\hat{1}\hat{1}} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{\hat{1}\hat{1}} \end{pmatrix}.$$

## 2.2. Пример формирования матрицы тензора напряжений

Рассмотрим формирование матрицы тензора напряжений в точках  $B$  и  $C$  бруса квадратного сечения при совместном действии растяжения и кручения (рис. 2.2).

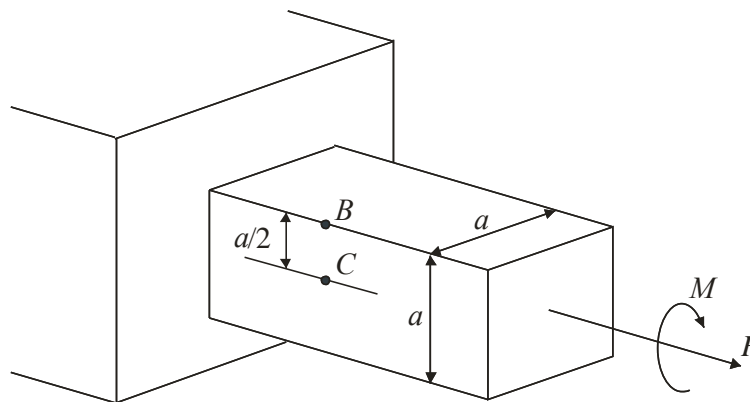


Рисунок 2.2

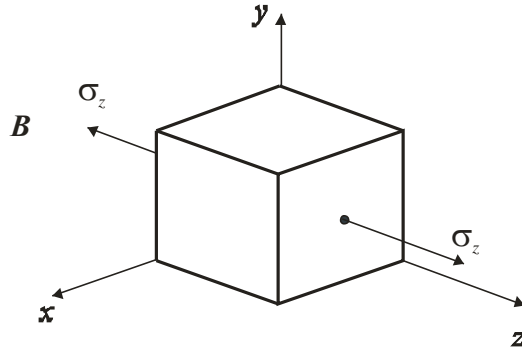


Рисунок 2.3

Компоненты напряженного состояния в точке  $B$  показаны на рис. 2.3. Здесь касательные напряжения отсутствуют, а нормальные напряжения  $\sigma_z$  вычисляются по зависимости  $\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{F}{a^2}$ , а тензор напряжений в точке  $B$  выглядит следующим образом:

$$T_{\sigma B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F}{a^2} \end{pmatrix}.$$

Компоненты напряженного состояния в точке  $C$  показаны на рис. 2.4.

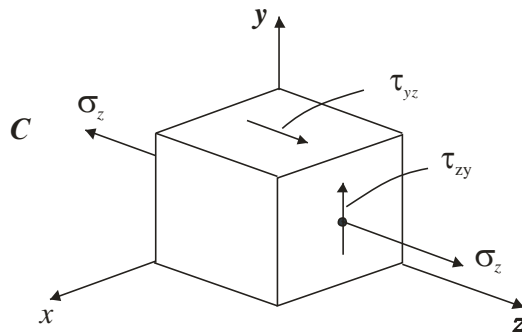


Рисунок 2.4

Здесь касательные напряжения определяются по зависимости  $\tau_{zy} = \frac{M \hat{e}}{W \hat{e}} = \frac{M}{0,208 a^3}$ , а нормальные напряжения  $\sigma_z$  вычисляются в виде  $\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{F}{a^2}$ , тогда тензор напряжений в точке  $C$  выглядит следующим образом:

$$T_{\sigma C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{0,208 a^3} \\ 0 & \frac{M}{0,208 a^3} & \frac{F}{a^2} \end{pmatrix}.$$

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ НА ПРОИЗВОЛЬНОЙ НАКЛОННОЙ ПЛОЩАДКЕ

Покажем, что по известным компонентам напряжённого состояния, действующим на трёх взаимно перпендикулярных площадках  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ , можно однозначно определить компоненты вектора полного напряжения на произвольной наклонной площадке  $P_x, P_y, P_z$  (рис. 3.1).

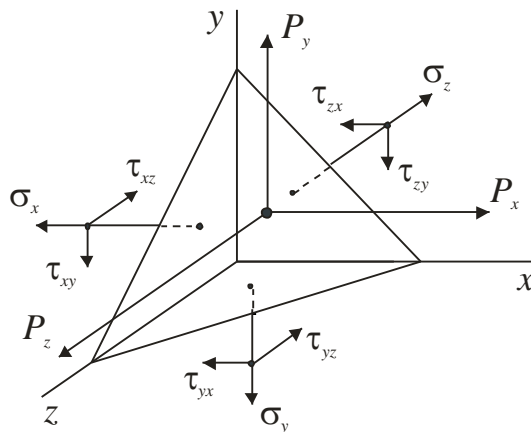


Рисунок 3.1

Ориентация площадки задана направляющими косинусами между осями координат и вектором  $\nu$  нормали к площадке:

$$\begin{aligned} l &= \cos(x, \nu), \\ m &= \cos(y, \nu), \\ n &= \cos(z, \nu). \end{aligned}$$

При этом выполняется зависимость:  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ .

Связь между площадью наклонной площадки  $A$  и площадями координатных площадок, к которым нормальными являются оси  $x, y, z$ , задаётся соотношениями:

$$A_x = l \cdot A,$$

$$A_y = m \cdot A,$$

$$A_z = n \cdot A.$$

Запишем уравнение равновесия для элементарного тетраэдра (рис. 3.1):

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0.$$

Получаем связь между компонентами напряжённого состояния на координатных площадках и компонентами вектора полного напряжения на наклонной площадке [2]:

$$\begin{cases} P_x = \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n; \\ P_y = \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot n; \\ P_z = \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n. \end{cases} \quad (1)$$

#### 4. ПОНЯТИЕ О ГЛАВНЫХ ПЛОЩАДКАХ И ГЛАВНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ. КЛАССИФИКАЦИЯ ТИПОВ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ. ОКТАЭДРИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ, ИНТЕНСИВНОСТЬ НАПРЯЖЕНИЙ

Следует отметить, что среди всего множества площадок могут быть площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения [3]. Такие площадки называются *главными площадками*, а действующие на них напряжения – *главными напряжениями*.

Нумерация главных напряжений (рис. 4.1) осуществляется в соответствии с неравенством  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Оси 1, 2, 3 – главные оси.

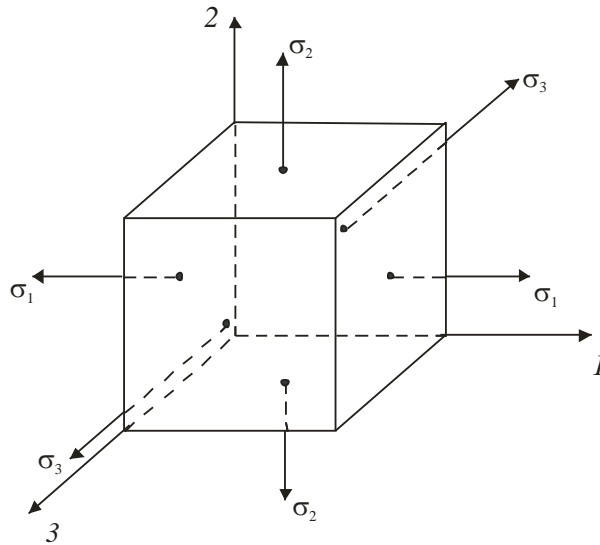


Рисунок 4.1

Различают 3 типа напряжённого состояния в точке:

1) *одноосное (линейное)* напряжённое состояние. (Одно из главных напряжений отличное от нуля:  $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$  или  $\sigma_3 \neq 0, \sigma_1 = \sigma_2 = 0$ );

2) *двухосное (плоское)* напряжённое состояние. (Два главных напряжения отличны от нуля:  $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0$  или  $\sigma_1 = 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$ , или  $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 \neq 0$ );

3) *трёхосное (объёмное)* напряжённое состояние. (Все три главных напряжения отличны от нуля:  $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$ ).

Линейное напряжённое состояние называют простым напряжённым состоянием, а плоское и объёмное – сложными напряжёнными состояниями.

Предположим, что наклонная площадка (рис. 2.1) является главной площадкой, тогда компоненты вектора полного напряжения на этой площадке:

$$\begin{aligned} P_x &= P \cdot l, \\ P_y &= P \cdot m, \\ P_z &= P \cdot n \end{aligned}$$

представляют собой главные напряжения, а система уравнений (1) позволяет определить направляющие косинусы  $l, m, n$  этой главной площадки из уравнения

$$\begin{cases} (\sigma_x - P)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n = 0; \\ \tau_{yx}l + (\sigma_y - P)m + \tau_{yz}n = 0; \\ \tau_{zx}l + \tau_{zy}m + (\sigma_z - P)n = 0. \end{cases} \quad (2)$$

При этом выполняется зависимость  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ .

Чтобы система уравнений (2) имела нетривиальное решение, отличное от нулевого, необходимо, чтобы определитель системы равнялся нулю [4]:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - P & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - P & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - P \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, перейдём к кубическому уравнению

$$P^3 - P^2 I_1 + P I_2 - I_3 = 0,$$

решение которого позволит определить главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

Здесь  $I_1, I_2, I_3$  – инварианты тензора напряжений, т.е. величины для данной точки постоянные, не зависящие от ориентации координатных площадок [3]:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yx}^2 - \tau_{zx}^2,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

По известным главным напряжениям можно определить максимальные касательные напряжения:  $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ .

Площадка, на которой действует  $\tau_{\max}$ , параллельна главному напряжению  $\sigma_2$  и равнонаклонена к направлениям  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  (рис. 4.2).

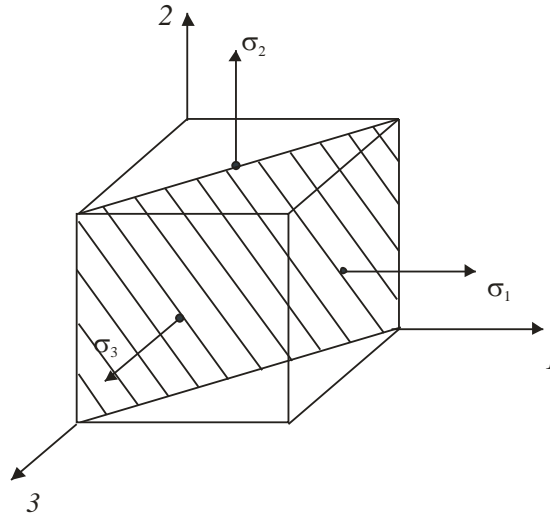


Рисунок 4.2

Нормальное напряжение на октаэдрической площадке, равнонаклонённой ко всем главным осям  $1, 2, 3$ , определяется зависимостью  $\sigma_{\hat{1}\hat{e}\hat{o}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ , касательное октаэдрическое напряжение определяется по формуле:

$$\tau_{\hat{1}\hat{e}\hat{o}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

Если напряжённое состояние сложное (плоское или объемное), т.е. два или три главных напряжения отличны от нуля, возникает вопрос о сравнительной мере интегральной оценки уровня напряжённого состояния в точке. Одной из таких мер является интенсивность напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + \sigma(\sigma_z - \sigma_x)^2 + \sigma(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \end{aligned}$$

## 5. ЗАКОН ГУКА ПРИ ОБЪЕМНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ (ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА)

### 5.1. Формулировка закона Гука

Для линейного напряжённого состояния ( $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ), формула закона Гука имеет вид  $\sigma_1 = E\varepsilon_1$ . Деформации  $\varepsilon_2, \varepsilon_3$  определяются из-

вестными зависимостями:  $\varepsilon_2 = -\mu\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_3 = -\mu\varepsilon_1$ , где  $E$  – модуль продольной упругости,  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

При сложном (трёхосном) напряжённом состоянии закон Гука связывает компоненты напряженного и деформированного состояния в точке, в которой имеет место линейно-упругое деформирование. Пусть известны главные площадки (главные направления) и главные напряжения. Направления главных относительных деформаций  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  совпадают с главными направлениями для напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ .

По принципу суперпозиции

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \varepsilon_1(\sigma_1) + \varepsilon_1(\sigma_2) + \varepsilon_1(\sigma_3) = \\ &= \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].\end{aligned}$$

Аналогичные соотношения имеем для  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$ . В этом случае обобщённый закон Гука для изотропного тела для главных направлений имеет вид

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)], \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{cases}$$

Для произвольно ориентированных координатных площадок имеем:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)], \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]. \end{cases}$$

К зависимостям закона Гука, связывающим  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  и  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ , следует добавить зависимости, связывающие  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  и  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  [3]:

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \end{cases}$$

где  $G$  – модуль сдвига;  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{zx}$  – угловые деформации. При этом существует зависимость между модулем упругости  $E$  и модулем сдвига  $G$  [3]:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

## 5.2. Пример определения компонент напряженного и деформированного состояния с применением обобщенного закона Гука

В массивной недеформируемой плите вырезан сквозной паз шириной и глубиной по 1 см (рис. 5.1). В этот паз без зазора вставлен куб из дюралюминия размером  $1 \times 1 \times 1$  см, который нагружается силой 8 кН. Для дюралюминия коэффициент Пуассона  $\mu = 0,33$ , модуль упругости  $E = 7 \cdot 10^4$  МПа.

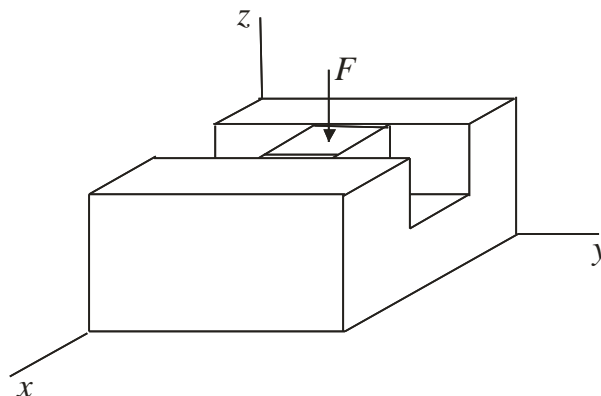


Рисунок 5.1

Так как процессу деформирования куба вдоль оси  $y$  ничто не мешает, а в направлении оси  $x$  деформирование практически невозможно, то  $\varepsilon_x = 0$ ,  $\sigma_y = 0$ . Нормальное напряжение на площадке  $z$  вычисляем по формуле

$$\sigma_z = -\frac{F}{A} = -\frac{8 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^{-4}} = -8 \cdot 10^7 \text{ Па} = -80 \text{ МПа}.$$

Закон Гука для объёмного напряженного состояния имеет вид:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)], \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], \end{cases}$$

отсюда находим напряжение  $\sigma_x$  и деформации  $\varepsilon_y, \varepsilon_z$ :

$$\sigma_x = \mu(\sigma_z + \sigma_y) = 0,33(-8 \cdot 10^7) = -2,64 \cdot 10^7 \text{ Па} = -26,4 \text{ МПа}.$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [-\mu(\sigma_z + \sigma_x)] = \frac{1}{7 \cdot 10^4} [-0,33(-80 - 26,4)] = 5 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x)] = \frac{1}{7 \cdot 10^4} [-80 - 0,33(-26,4)] = -10 \cdot 10^{-4}.$$

Расставим индексы для главных напряжений и главных деформаций:

$$\sigma_1 = \sigma_y = 0, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_y = 5 \cdot 10^{-4},$$

$$\sigma_2 = \sigma_x = -26,4 \text{ МПа}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_x = 0,$$

$$\sigma_3 = \sigma_z = -80 \text{ МПа}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_z = -10 \cdot 10^{-4}.$$

## 6. УДЕЛЬНАЯ ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ УПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ В ТОЧКЕ

**Потенциальная энергия деформации** – это энергия, которая накапливается в теле при его упругом деформировании. Например, в результате растяжения консольного стержня силой  $F$  (рис. 6.1, а) процесс деформирования осуществляется в упругой области (заштрихованная часть диаграммы растяжения), (рис. 6.1, б).

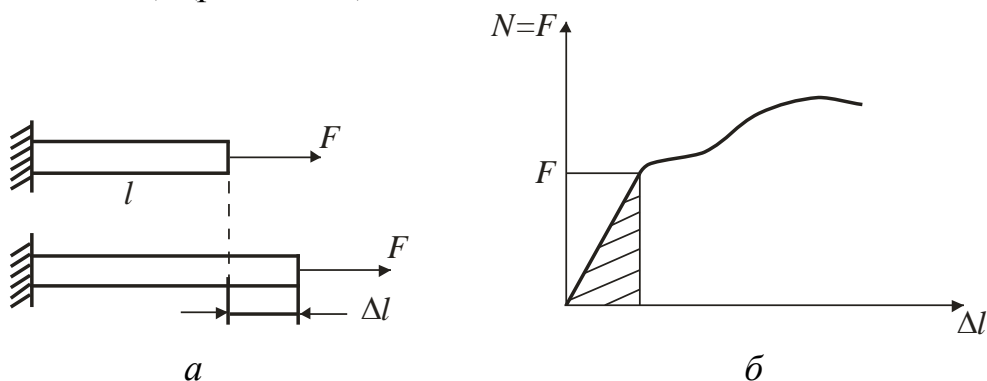


Рисунок 6.1

Потенциальная энергия деформации численно равна работе внутренних усилий, затраченной в процессе упругой деформации тела (заштрихованная область диаграммы):  $U_{\Pi} = \frac{1}{2} N \cdot \Delta l = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l$ . Подставляя сюда зависимость для  $\Delta l$  ( $\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{Fl}{EA}$ ; [1]), окончательно получаем:

$$U_{\Pi} = \frac{1}{2} F \cdot \frac{Fl}{EA} = \frac{1}{2} \frac{F^2 l}{EA}.$$

Удельная потенциальная энергия, т.е. энергия, приходящаяся на единицу объёма, вычисляется так:  $u = \frac{U_{\Pi}}{V} = \frac{1}{2} \frac{F^2 l}{EA} \cdot \frac{1}{lA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{A} \cdot \frac{F}{AE} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon$ .

В случае объёмного напряжённого состояния удельная потенциальная энергия на основе принципа суперпозиции может быть определена следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \sigma_3 \varepsilon_3 = \\ &= \frac{1}{2E} \left[ \sigma_1 (\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)) + \sigma_2 (\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)) + \sigma_3 (\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)) \right] = \\ &= \frac{1}{2E} \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \right]. \end{aligned}$$

При деформировании бесконечно малого элемента (рис.4.1) изменяется не только его объем, но и форма. Поэтому удельную потенциальную энергию деформации можно представить в виде суммы двух составляющих:  $u = u_v + u_{\phi}$ . Здесь  $u_v$  – удельная потенциальная энергия изменения

объёма:  $u_v = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$ ,  $u_{\phi}$  – удельная потенциальная энергия

формоизменения [2]:  $u_{\phi} = \frac{1+\mu}{3A} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1)$ .

## 7. ГИПОТЕЗЫ ПРЕДЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЙ (ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ)

Различают три возможных варианта состояния материала в точке в процессе деформирования: упругое, пластическое и разрушение.

Наступление пластического состояния при одноосном напряжённом состоянии (растяжение–сжатие) характеризуется достижением действующей

щих напряжений предела текучести  $\sigma_0$ , момент разрушения определяется достижением напряжениями предела прочности  $\sigma_{\dot{\tau}}$  (временного сопротивления  $\sigma_{\hat{a}}$ ). Достижение действующим напряжением величины  $\sigma_T$  или  $\sigma_{\hat{a}}$  при одноосном состоянии определяется как исчерпание соответствующего ресурса по росту напряжений, поэтому напряжённые состояния, соответствующие условиям  $\sigma = \sigma_T$  или  $\sigma = \sigma_B$ , являются недопустимыми и объединяются общим названием *предельные состояния*.

Важнейшей задачей инженерного расчёта является оценка работоспособности детали по известному напряжённому состоянию.

При одноосном напряжённом состоянии экспериментально устанавливаются значения предельных напряжений, соответствующих началу разрушения ( $\sigma_{\hat{a}}$ ) или возникновению недопустимых остаточных пластических деформаций ( $\sigma_T$ ), и безопасными являются напряжённые состояния, подчиняющиеся условиям:  $\sigma < \sigma_T$  (по критерию накопления остаточных деформаций) или  $\sigma < \sigma_{\hat{a}}$  (по критерию разрушения).

Для сложного напряжённого состояния экспериментальный путь оценки достижения предельного состояния в точке (текучести или разрушения) практически сложно реализовать из-за технических трудностей, возникающих при проведении таких испытаний и значительного их объёма.

Другой путь оценки достижения предельного состояния – введение гипотез о преимущественном влиянии на прочность (текучесть) материала того или иного фактора, при этом полагают, что предельное состояние материала при любом напряжённом состоянии наступит только тогда, когда величина данного фактора достигнет некоторого предельного значения.

Так как напряжённое состояние может иметь бесконечное количество комбинаций  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , то вводится понятие эквивалентного напряжённого состояния (эквивалентных напряжений). При этом применение гипотезы для оценки наступления предельного состояния позволяет математически формализовать переход от сложного напряжённого состояния к *эквивалентному одноосному напряжённому состоянию* (одноосному растяжению).

*Эквивалентное напряжение*  $\sigma_{\hat{a}}$  – это такое растягивающее напряжение, которое следует создать в материале, чтобы это напряжённое

состояние было равноопасным исходному сложному напряженному состоянию.

**Коэффициент запаса** при сложном напряжённом состоянии – это число, показывающее, во сколько раз следует одновременно увеличить все компоненты напряжённого состояния, чтобы оно стало предельным.

В настоящее время известно несколько, хронологически появившихся одна за другой, гипотез предельных напряжённых состояний, называемых гипотезами прочности.

### **7.1. Первая гипотеза прочности**

#### **(гипотеза наибольших нормальных напряжений)**

Согласно этой гипотезе, выдвинутой Галилеем (XVII в.), преимущественное влияние на прочность конструкции оказывает величина наибольшего нормального напряжения  $\sigma_1$  (или  $\sigma_3$ ), а два других главных напряжения не учитываются.

Опытная проверка показывает, что эта гипотеза прочности непригодна для большинства материалов и напряженных состояний и даёт удовлетворительные результаты лишь для весьма хрупких материалов (камень, кирпич).

### **7.2. Вторая гипотеза прочности**

#### **(гипотеза наибольших линейных деформаций)**

Согласно этой гипотезе, предложенной Мариоттом в 1682 г., в качестве критерия наступления предельного состояния принимается наибольшая по абсолютной величине линейная деформация.

Опытная проверка этой гипотезы также показала, что она не применима для большинства материалов и даёт удовлетворительные результаты лишь для хрупких материалов.

### **7.3. Третья гипотеза прочности**

#### **(гипотеза наибольших касательных напряжений)**

Согласно третьей гипотезе прочности, предложенной Кулоном (1773 г.), в качестве критерия предельного состояния (наступления текучести) принимается величина наибольшего касательного напряжения. Считается, что наступление текучести в общем случае напряженного состояния имеет ме-

сто тогда, когда наибольшее касательное напряжение  $\tau_{\max}$  достигает своего предельного значения  $\tau_T$ . Последнее определяется в момент достижения текучести при простом растяжении.

Условие прочности в этом случае имеет вид:  $\tau_{\max} \leq [\tau] = \frac{\tau_T}{n_T}$ . Так

как  $\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ ,  $\tau_T = \frac{1}{2}\sigma_T$ , то условие прочности можно выразить

через главные напряжения:  $\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$ ,  $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}$ . Эквивалентное напря-

жение по третьей гипотезе:  $\sigma_{\text{экв}}^{222} = \sigma_1 - \sigma_3$ , а условие прочности:  $\sigma_{\text{экв}}^{222} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$ .

Третья гипотеза прочности, в общем, хорошо подтверждается опытами для пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие.

Недостаток третьей гипотезы заключается в том, что она не учитывает среднего по величине главного напряжения  $\sigma_2$ , которое может быть значительным и оказывать некоторое влияние на состояние материала.

#### 7.4. Четвёртая гипотеза прочности

##### (гипотеза удельной потенциальной энергии формоизменения)

Авторы этой гипотезы – М. Хубер, Р. Мизес, Г. Генке – в качестве критерия наступления предельного состояния (потери прочности) предложили использовать величину удельной потенциальной энергии формоизменения.

Предполагается, что предельное состояние (текучесть) наступает тогда, когда удельная потенциальная энергия формоизменения достигает своего предельного значения. Последнее можно определить при простом растяжении в момент наступления текучести.

Условие наступления текучести:  $u_{\phi} = \left( u_{\phi} \right)_T$ . Удельная потенциальная энергия формоизменения при сложном напряжённом состоянии:

$$u_{\phi} = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1).$$

При одноосном напряжённом состоянии (растяжении) в момент наступления текучести ( $\sigma_1 = \sigma_T, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) имеем:  $\left(u_{\delta}\right)_T = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_T^2$ . Следовательно, условие возникновения текучести можно записать в виде

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \sigma_T.$$

Тогда эквивалентное напряжение запишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{у\text{e}a}}^{\text{Y}} &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]}. \end{aligned}$$

Условие прочности по четвёртой гипотезе прочности имеет вид:

$$\sigma_{\text{у\text{e}a}}^{\text{Y}} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} \quad \text{или} \quad \sigma_{\text{у\text{e}a}}^{\text{Y}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]} \leq [\sigma].$$

Опыты хорошо подтверждают четвёртую гипотезу для пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие.

### 7.5. Гипотеза прочности Мора

Данная гипотеза была предложена О.Мором в начале XX в. и основывается на предположении, что прочность материалов в общем случае напряжённого состояния зависит, главным образом, от величины и знака наибольшего  $\sigma_1$  и наименьшего  $\sigma_3$  главных напряжений, а среднее по величине главное напряжение  $\sigma_2$  лишь незначительно влияет на прочность. Эквивалентное напряжение по гипотезе Мора вычисляется так:

$$\sigma_{\text{у\text{e}a}}^{\text{M}} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \cdot \sigma_3 \leq [\sigma_+],$$

где  $[\sigma_+]$  и  $[\sigma_-]$  – допустимые напряжения при растяжении и сжатии соответственно. При одинаковом сопротивлении материала растяжению и сжатию ( $[\sigma_+] = [\sigma_-]$ ) расчётная формула совпадает с формулой, полученной по третьей гипотезе прочности. Гипотеза пригодна как для хрупких, так и для пластичных материалов.

Для практических расчётов следует использовать:

а) четвёртую гипотезу (или третью) – для пластичных материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию;

б) гипотезу Мора – для материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию (как правило, хрупких).

Первая и вторая гипотезы прочности дают значительные погрешности и в настоящее время не применяются.

## **8. РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНОЕ ЗАДАНИЕ**

При изучении разделов «Основы теории напряжённого состояния в точке» и «Основы теории безмоментных оболочек» в курсе «Сопротивление материалов» ставится цель научить студентов проводить анализ напряженно-деформированного состояния в опасных точках конструкций и на этой основе решать задачи оценки прочности и жесткости, подбора материалов и нахождения геометрических параметров элементов конструкций машин и механизмов.

Согласно требованиям курса «Сопротивление материалов» студентам предлагается выполнить расчетно-проектировочное задание (РПЗ) по темам: «Основы теории напряжённого состояния в точке» и «Основы теории безмоментных оболочек». Выполняя это задание, студент учится определять положение опасных точек в конструкции, находить параметры напряженно-деформированного состояния (НДС) в них, оценивать тип напряженного состояния в точке, находить главные площадки и главные напряжения, выбирать одну из существующих гипотез прочности. Применяя навыки анализа НДС в точке, студентом проводится оценка прочности цилиндрической оболочки.

### **8.1. Содержание расчетно-проектировочного задания**

Расчетно-проектировочное задание состоит из трех этапов:

1. Решение двух задач, оформление их согласно требованиям кафедры «Сопротивление материалов».
2. Написание контрольной работы по теме РПЗ.
3. Защита работы, заключающаяся в беседе студента с преподавателем по теме РПЗ и ответах на контрольные вопросы.

**Цель задания** – проведение анализа НДС в точке, оценка прочности цилиндрической оболочки при сложном нагружении.

### **РПЗ состоит из двух задач:**

1. *Анализ НДС в точке.* По заданным компонентам напряжённого состояния в точке необходимо найти величины главных напряжений и главных деформаций, вычислить эквивалентные напряжения и подобрать материал конструкции [5].

Варианты исходных данных приведены в приложении 1.

2. *Оценка прочности цилиндрической оболочки.* Для цилиндрической оболочки с днищами, имеющей диаметр срединной поверхности  $D$  и толщину стенки  $h$ , нагруженной внутренним давлением  $P$ , продольной силой  $F$ , крутящим  $M_K$  и изгибающим  $M_{II}$  моментами, найти внутренние усилия в опасном сечении, определить максимальные напряжения, вычислить эквивалентные напряжения и определить коэффициент запаса конструкции.

Расчетная схема оболочки показана на рис.8.3, а, численные данные приведены в приложении 2.

## **8.2. Порядок выполнения задания**

### **Задача 1. Провести анализ НДС в точке, следуя плану.**

1. Выписать для заданного варианта численные данные.
2. Представить напряжённое состояние в виде тензора напряжений и графически.
3. Разложить тензор напряжений на шаровой тензор напряжений и на девиатор напряжений.
4. Вычислить инварианты тензора напряжений.
5. Составить и решить характеристическое уравнение тензора напряжений, проверить решение по инвариантам.
6. Вычислить эквивалентные напряжения.
7. Подобрать материал по заданному коэффициенту запаса по текучести ( $n_T = 1,5$ ).

### **Задача 2. Оценить прочность цилиндрической оболочки.**

1. Выписать для заданного варианта численные данные.
2. Определить геометрические характеристики кольцевого сечения оболочки.
3. Определить компоненты напряженного состояния в опасном сечении.

4. Провести анализ напряжённого состояния в опасных точках.
5. Вычислить главные напряжения.
6. Определить эквивалентное напряжение.
7. Найти коэффициент запаса по текучести.

### 8.3. Примеры решения задач

#### 8.3.1. Образец решения задачи 1

**Дано:**

$$\sigma_x = -100 \text{ МПа}, \sigma_y = -150 \text{ МПа}, \sigma_z = 30 \text{ МПа},$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0, \tau_{zy} = -107,2 \text{ МПа}, n_T = 1,5.$$

**Необходимо:** провести анализ напряжённо-деформированного состояния в точке, подобрать материал.

**Решение:**

1. Представляем заданное напряжённое состояние (рис. 8.1) в виде тензора напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 & 0 & 0 \\ 0 & -150 & -107,2 \\ 0 & -107,2 & 30 \end{pmatrix}.$$

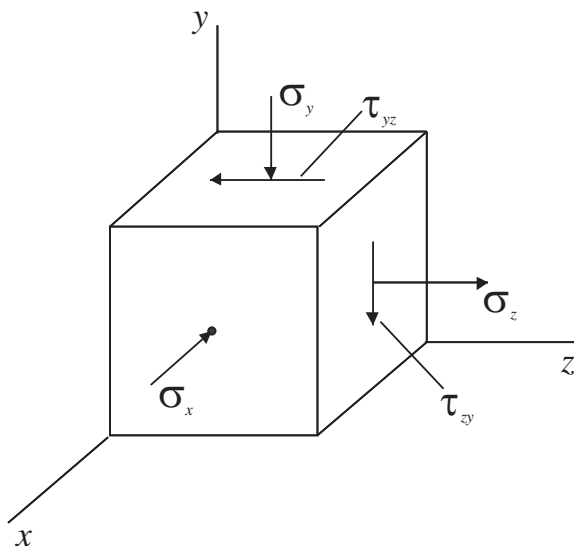


Рисунок 8.1

2. Раскладываем тензор напряжений на шаровой тензор напряжений и на девиатор напряжений.

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}^0 + D_{\sigma}$$

Для этого разложения вычислим октаэдрическое нормальное напряжение:

$$\sigma_{\hat{1}\hat{e}\hat{o}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{-100 + (-150) + 30}{3} = -73,33 \text{ МПа}.$$

Шаровой тензор напряжений имеет вид:

$$\dot{\sigma}^0 = \begin{pmatrix} \sigma_{\hat{1}\hat{e}\hat{o}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\hat{1}\hat{e}\hat{o}} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\hat{1}\hat{e}\hat{o}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -73,33 & 0 & 0 \\ 0 & -73,33 & 0 \\ 0 & 0 & -73,33 \end{pmatrix}.$$

Девииатор напряжений:

$$D_{\sigma} = T_{\sigma} - T_{\sigma}^0 = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_{\text{ОКТ}} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_{\text{ОКТ}} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{\text{ОКТ}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -26,67 & 0 & 0 \\ 0 & -76,67 & -107,2 \\ 0 & -107,2 & 103,33 \end{pmatrix}.$$

Графически это изображено на рис. 8.2:

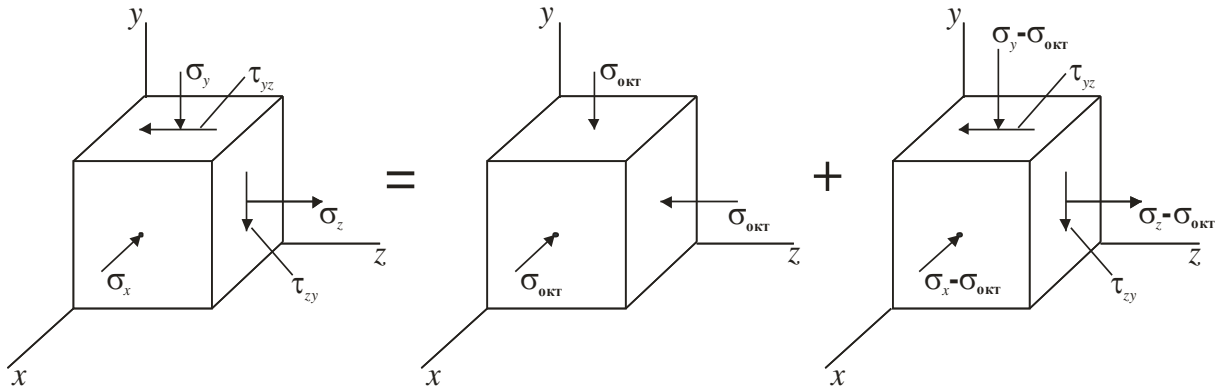


Рисунок 8.2

3. Вычисляем инварианты тензора напряжений:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -100 - 150 + 30 = -220 \text{ МПа}$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zy}^2 = (-100)(-150) + (-150)30 - (-100) - (-107,2)^2 \approx -3992 \approx -3,99 \cdot 10^3 \text{ (МПа)}^2$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = (-100)(-150)30 - (-100) \cdot (-107,2)^2 = 1599184 = 15,99 \cdot 10^5 \text{ (МПа)}^3$$

4. Составляем и решаем характеристическое уравнение тензора напряжений, проверяем решение по инвариантам.

Из анализа исходного напряжённого состояния (рис.8.1) видно, что площадка  $x$  является главной площадкой, и характеристическое уравнение (кубическое) принимает вид:

$$\begin{vmatrix} P - \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & P - \sigma_y & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & P - \sigma_z \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{или } (P - \sigma_x) \cdot [P^2 - (\sigma_z + \sigma_y)P + (\sigma_z \sigma_y - \tau_{zy}^2)] = 0.$$

Тогда корни уравнения будут:  $P_1 = \sigma_x = -100$  МПа,

$$P_{2,3} = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_y + \sigma_z) \pm \sqrt{(\sigma_y + \sigma_z)^2 - 4(\sigma_z \sigma_y - \tau_{zy}^2)} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ (-150 + 30) \pm \sqrt{(-150 + 30)^2 - 4(30(-150) - (-107,2)^2)} \right] = \frac{1}{2} [-120 \pm 280],$$

$$P_2 = 80 \text{ МПа}, P_3 = -200 \text{ МПа}.$$

Расставим индексы главных напряжений (в соответствии с условием  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ):

$$\sigma_1 = P_2 = 80 \text{ МПа}, \sigma_2 = P_1 = -100 \text{ МПа}, \sigma_3 = P_3 = -200 \text{ МПа}.$$

Вычислим инварианты тензора напряжений через главные напряжения:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 80 + (-100) + (-200) = -220 \text{ МПа},$$

$$I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 = 80(-100) + (-100)(-200) + (-200)80 =$$

$$= -4 \cdot 10^3 \text{ (МПа)}^2,$$

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = 80(-100)(-200) = 16 \cdot 10^5 \text{ (МПа)}^3.$$

Сопоставив величины инвариантов, убедимся в их хорошем совпадении:  $-220 = -220$ ;  $-3,99 \cdot 10^3 \cong -4 \cdot 10^3$ ;  $15,99 \cdot 10^5 \cong 16 \cdot 10^5$ .

Таким образом, величины главных напряжений найдены правильно.

5. Вычисляем эквивалентные напряжения.

Так как в рассматриваемой точке имеет место сложное напряженное состояние, проверку прочности и определение коэффициента запаса по текучести следует вести по эквивалентным напряжениям, используя гипотезы предельных состояний:

а) по гипотезе наибольших касательных напряжений получаем:

$$\sigma_{\text{у}}^{\text{22}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 80 - (-200) = 280 \text{ МПа};$$

б) по гипотезе удельной потенциальной энергии формоизменения:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{у}}^{\text{2Y}} &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (80 - (-100))^2 + (-100 - (-200))^2 + (-200 - 80)^2 \right]} = 246 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

6. Подбираем материал по заданному коэффициенту запаса по текучести.

Коэффициент запаса по текучести  $n_T = 1,5$ . Из условия прочности следует, что предел текучести материала:  $\sigma_T \geq \sigma_{\text{у}} \cdot n_T$ . Применяя гипотезу наибольших касательных напряжений, получаем  $\sigma_T \geq 280 \cdot 1,5 = 420 \text{ МПа}$ . Из справочных данных (приложение 3) подбираем сталь Ст 60 ( $\sigma_T = 420 \text{ МПа}$ ).

По гипотезе удельной потенциальной энергии формоизменения предел текучести будет:  $\sigma_T \geq 246 \cdot 1,5 = 369 \text{ МПа}$ . Подходящий материал – Ст 50 ( $\sigma_T = 380 \text{ МПа}$ ).

### 8.3.2. Образец выполнения задачи 2

**Дано:**

Внешняя сила  $F = -8 \text{ МН}$ .

Изгибающий момент  $M_{\text{И}} = 4 \text{ МНм}$ .

Крутящий момент  $M_{\text{К}} = 5 \text{ МНм}$ .

Давление  $P = 3 \text{ МПа}$ .

Диаметр срединной поверхности оболочки  $D = 2000 \text{ мм}$ .

Толщина оболочки  $h = 25 \text{ мм}$

Предел текучести при растяжении и сжатии:

$\sigma_{\text{ТР}} = 350 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{\text{ТС}} = 400 \text{ МПа}$ .

**Необходимо:** определить коэффициент запаса по текучести для цилиндрической оболочки.

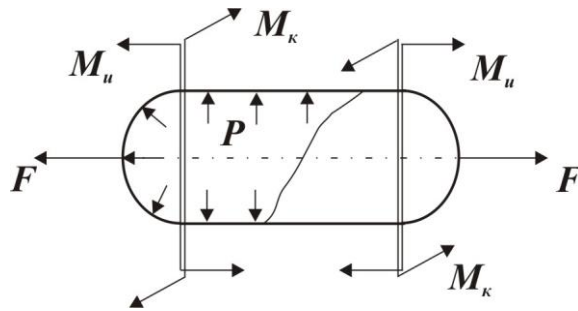


Рисунок 8.3

**Решение:**

1. Определяем геометрические характеристики кольцевого сечения оболочки.

Внутренний диаметр кольца (рис. 8.4) равен:  
 $D_B = D - h = 2000 - 25 = 1975 \text{ мм} = 1,975 \text{ м}$ , а наружный диаметр:

$$D_H = D + h = 2000 + 25 = 2025 \text{ мм} = 2,025 \text{ м}.$$

Находим коэффициент  $c$ :

$$c = \frac{D_B}{D_H} = \frac{1975}{2025} = 0,975.$$

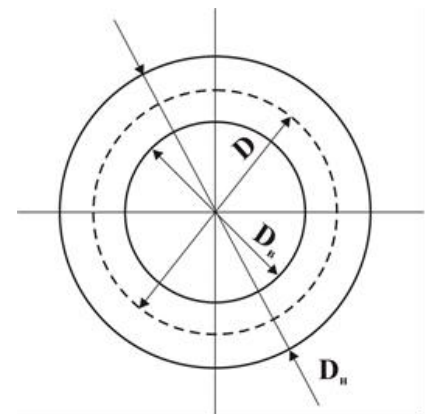


Рисунок 8.4

Площадь поперечного сечения:

$$A = \frac{\pi D_H^2}{4} (1 - c^2) = \frac{3,14 \cdot 2,025^2}{4} (1 - 0,975^2) = 0,159 \text{ м}^2.$$

Вычисляем осевой  $W_x$  и полярный  $W_p$  моменты сопротивления кольца:

$$W_x = \frac{\pi D_H^3}{32} (1 - c^4) = \frac{3,14 \cdot 2,025^3}{32} (1 - 0,975^4) = 7,84 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3;$$

$$W_p = \frac{\pi D_H^3}{16} (1 - c^4) = 2W_x = 15,68 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3.$$

2. Определяем компоненты напряженного состояния в опасном сечении.

На рис. 8.5 показаны внутренние усилия и эпюры распределения напряжений по высоте сечения

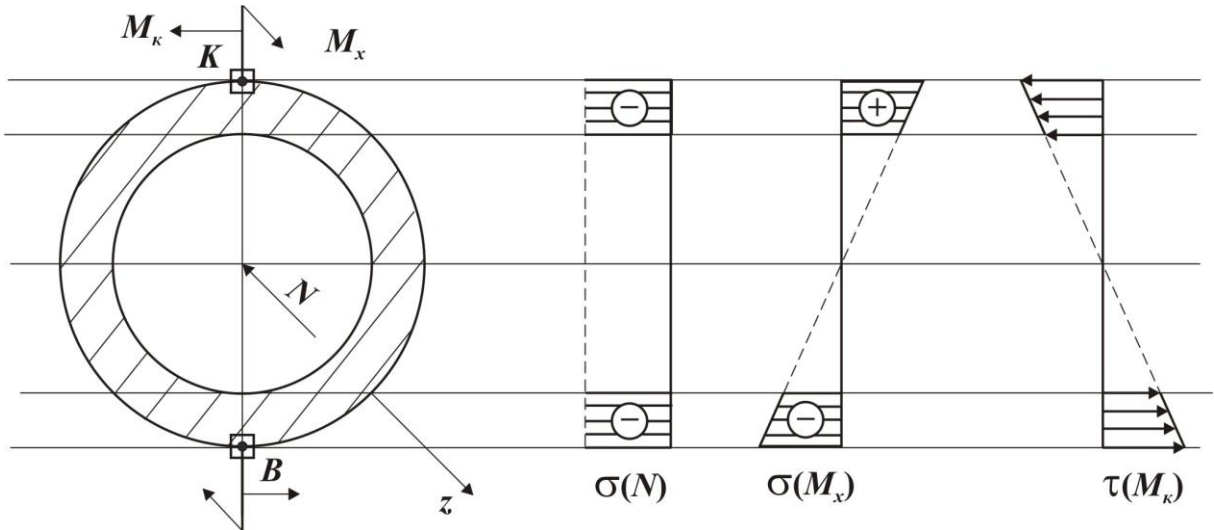


Рисунок 8.5

Вычисляем напряжения, вызванные продольной силой:

$$\sigma(N) = \frac{N}{A} = \frac{F}{A} = \frac{-8}{0,159} = -50,3 \text{ МПа};$$

максимальные напряжения от изгибающего момента:

$$\sigma_{\max}(M_x) = \frac{M_x}{W_x} = \frac{4}{7,8 \cdot 10^{-2}} = 51,3 \text{ МПа}.$$

Максимальные напряжения при кручении:

$$\tau_{\max}(M_k) = \frac{M_k}{W_p} = \frac{5}{15,68 \cdot 10^{-2}} = 31,9 \text{ МПа}.$$

Внутреннее давление в оболочке вызывает меридиональное  $\sigma_m$  и окружное  $\sigma_\theta$  напряжения:

$$\sigma_m = \frac{p \cdot D}{4h} = \frac{3 \cdot 2000}{4 \cdot 25} = 60 \text{ МПа}; \quad \sigma_\theta = \frac{p \cdot D}{2h} = \frac{3 \cdot 2000}{2 \cdot 25} = 120 \text{ МПа}.$$

3. Проводим анализ напряжённого состояния в опасных точках.

Анализируя эпюры напряжений (рис. 8.5), определяем положение опасных точек в сечении – это точки  $K$  и  $B$ . На рис. 8.6 изображена опасная точка  $K$  и действующие на ее гранях напряжения.

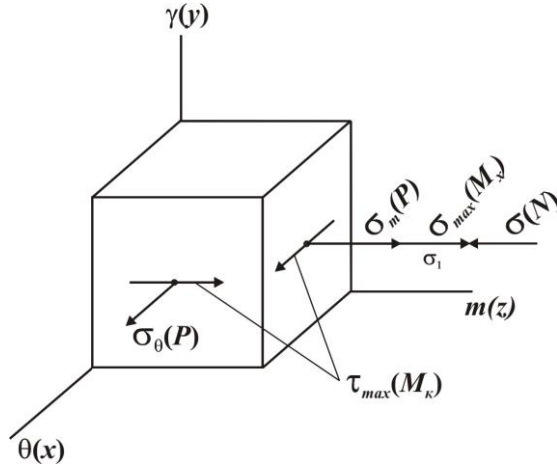


Рисунок 8.6

Вычисляем величины компонент напряженного состояния в опасной точке  $K$ :

$$\sigma_x = \sigma_\theta(p) = 120 \text{ МПа},$$

$$\sigma_y = 0,$$

$$\sigma_z = \sigma_m(p) + \sigma_{\max}(M_x) - \sigma(N) = 60 + 51,3 - 50,3 = 61 \text{ МПа},$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{\max}(M_k) = 31,9 \text{ МПа}, \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0.$$

4. Вычисляем главные напряжения.

Тензор напряжений для опасной точки имеет вид:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 31,9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 31,9 & 0 & 61 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что площадка  $y$  является главной площадкой, и характеристическое уравнение тензора напряжений запишется так:

$$(0 - P)[(\sigma_x - P)(\sigma_z - P) - \tau_{xz}^2] = 0,$$

$$\text{или } (0 - P) \cdot [P^2 - (\sigma_z + \sigma_x)P + (\sigma_z \sigma_x - \tau_{xz}^2)] = 0.$$

Корни этого уравнения будут:  $P_1 = 0, P_2 = 134 \text{ МПа}, P_3 = 47 \text{ МПа}$ .

Расставим индексы главных напряжений. Учитывая правило:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ,

получаем:  $\sigma_1 = 134 \text{ МПа}, \sigma_2 = 47 \text{ МПа}, \sigma_3 = 0$ .

5. Определяем эквивалентное напряжение.

Так как  $\sigma_{TP} \neq \sigma_{TC}$ , эквивалентные напряжения следует определять по теории Мора:  $\sigma_{\text{уеа}}^M = \sigma_1 - m\sigma_3$ , где  $m = \frac{\sigma_{TP}}{\sigma_{TC}} = \frac{350}{400} = 0,875$ , тогда

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^M = \sigma_1 - m\sigma_3 = 134 - 0,875 \cdot 0 = 134 \text{ МПа.}$$

6. Находим коэффициент запаса по текучести:  $n_T = \frac{\sigma_{TP}}{\sigma_{\text{ЭКВ}}^M} = \frac{350}{134} = 2,6$ .

На рис. 8.7 изображена опасная точка  $B$  и действующие на ее гранях напряжения.

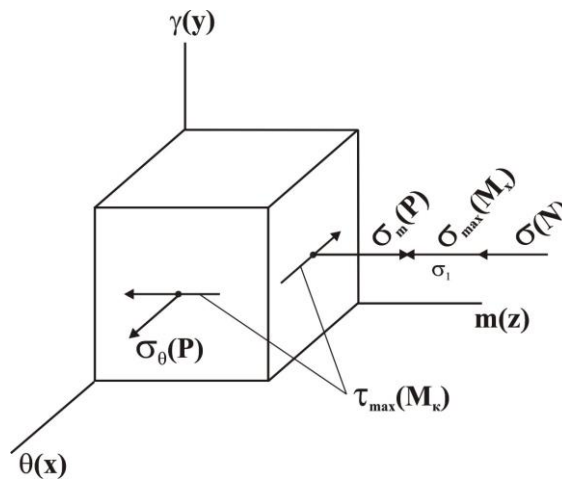


Рисунок 8.7

Вычисляем величины компонент напряженного состояния в опасной точке  $B$ :

$$\sigma_x = \sigma_\theta(p) = 120 \text{ МПа,}$$

$$\sigma_y = 0,$$

$$\sigma_z = \sigma_m(p) - \sigma_{\text{max}}(M_x) - \sigma(N) = 60 - 51,3 - 50,3 = -41,6 \text{ МПа,}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{\text{max}}(M_k) = 31,9 \text{ МПа,}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0.$$

4. Вычисляем главные напряжения.

Тензор напряжений для опасной точки имеет вид:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 31,9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 31,9 & 0 & -41,6 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что площадка  $y$  является главной площадкой, и характеристическое уравнение тензора напряжений запишется так:

$$(0 - P) \left[ (\sigma_x - P)(\sigma_z - P) - \tau_{xz}^2 \right] = 0,$$

или  $(0 - P) \cdot \left[ P^2 - (\sigma_z + \sigma_x)P + (\sigma_z \sigma_x - \tau_{xz}^2) \right] = 0.$

Корни этого уравнения будут:  $P_1 = 0, P_2 = 126 \text{ МПа}, P_3 = -48 \text{ МПа}.$

Расставим индексы главных напряжений. Учитывая правило:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3,$  получаем:  $\sigma_1 = 126 \text{ МПа}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -48 \text{ МПа}.$

5. Определяем эквивалентное напряжение.

Так как  $\sigma_{\text{ТР}} \neq \sigma_{\text{ТС}},$  эквивалентные напряжения следует определять по тео-

рии Мора:  $\sigma_{\text{экв}}^{\text{М}} = \sigma_1 - m\sigma_3,$  где  $m = \frac{\sigma_{\text{ТР}}}{\sigma_{\text{ТС}}} = \frac{350}{400} = 0,875,$  тогда

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{М}} = \sigma_1 - m\sigma_3 = 126 - 0,875(-48) = 168 \text{ МПа}$$

6. Находим коэффициент запаса по текучести.

$$n_{\text{T}} = \frac{\sigma_{\text{ТР}}}{\sigma_{\text{экв}}^{\text{М}}} = \frac{350}{168} = 2,1.$$

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### Приложение 1

#### Исходные данные к задаче 1

I	Напряжения, МПа					
	$\sigma_x$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$	$\sigma_y$	$\tau_{yz}$	$\sigma_z$
1	-40,0	0	0	51,2	6,8	88,8
2	-50,0	0	0	41,8	10,3	98,2
3	-100,0	0	0	-19,5	-49,5	79,5
4	-40,0	0	0	32,4	13,7	107,6
5	-50,0	0	0	23,0	17,1	117,0
6	80,0	0	0	-42,9	-15,3	-17,1
7	-60,0	0	0	13,6	20,5	126,4
8	-130,0	0	0	41,2	-6,8	78,8
9	60,0	0	0	15,9	-14,1	44,1
10	-110,0	0	0	31,8	-10,3	88,2
11	-60,0	0	0	22,4	-13,7	97,6
12	60,0	0	0	-50,5	-56,4	-9,5
13	-50,0	0	0	13,0	-17,1	107,0
14	-80,0	0	0	-5,8	23,9	125,8
15	120,0	0	0	-43,7	-37,6	-16,3
16	-100,0	0	0	43,2	18,8	56,8
17	-80,0	0	0	39,7	28,2	60,3
18	70,0	0	0	-75,0	-53,6	15,0
19	-60,0	0	0	36,3	37,6	63,7
20	-80,0	0	0	29,5	56,4	70,5
21	80,0	0	0	-72,4	-42,4	12,4
22	-100,0	0	0	26,1	65,8	73,9
23	-100,0	0	0	33,2	-18,8	46,8
24	-80,0	0	0	24,3	-30,6	75,7
25	-80,0	0	0	19,5	-56,4	60,5
26	-100,0	0	0	16,1	65,8	63,9
27	-60,0	0	0	30,7	-23,0	69,3
28	130,0	0	0	23,2	-18,8	36,8
29	170,0	0	0	12,9	47,0	47,1
30	-70,0	0	0	37,1	15,3	62,9

Продолжение приложения 1

II	Напряжения, МПа					
	$\sigma_x$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$	$\sigma_y$	$\tau_{yz}$	$\sigma_z$
1	-60,0	0	0	52,7	10,0	87,3
2	-100,0	0	0	44,0	15,0	96,0
3	-60,0	0	0	60,0	17,3	80,0
4	-90,0	0	0	35,4	20,0	104,6
5	-50,0	0	0	26,7	25,0	113,3
6	-80,0	0	0	55,0	26,0	85,0
7	-50,0	0	0	18,0	30,0	122,0
8	-120,0	0	0	42,7	-10,0	77,3
9	-60,0	0	0	50,0	-34,6	90,0
10	-100,0	0	0	34,0	-15,0	86,0
11	-70,0	0	0	25,4	-20,0	94,6
12	-60,0	0	0	45,0	43,3	95,0
13	-60,0	0	0	16,7	-25,0	103,3
14	-80,0	0	0	36,1	65,8	83,9
15	-70,0	0	0	40,0	52,0	100,0
16	-120,0	0	0	40,0	-17,3	60,0
17	-60,0	0	0	50,0	26,0	65,0
18	-80,0	0	0	45,0	26,0	75,0
19	-70,0	0	0	30,0	34,6	70,0
20	-90,0	0	0	20,0	52,0	80,0
21	-80,0	0	0	40,0	-34,6	80,0
22	-100,0	0	0	15,0	60,6	85,0
23	-80,0	0	0	30,0	-17,3	50,0
24	-70,0	0	0	35,0	-43,3	85,0
25	-90,0	0	0	10,0	-52,0	70,0
26	-70,0	0	0	-20,6	35,0	100,6
27	-60,0	0	0	22,7	10,0	57,3
28	120,0	0	0	20,0	17,3	40,0
29	140,0	0	0	-13,3	25,0	73,3
30	-90,0	0	0	57,1	15,3	82,9

Продолжение приложения 1

III	Напряжения, МПа					
	$\sigma_x$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$	$\sigma_y$	$\tau_{yz}$	$\sigma_z$
1	-50,0	0	0	54,7	12,9	85,3
2	-90,0	0	0	47,0	19,3	93,0
3	-70,0	0	0	50,7	23,0	89,3
4	-80,0	0	0	39,4	25,7	100,6
5	-90,0	0	0	31,7	32,2	108,3
6	-60,0	0	0	44,3	-30,6	95,7
7	-100,0	0	0	24,0	38,6	116,0
8	-110,0	0	0	44,7	-12,9	75,3
9	-70,0	0	0	37,8	38,3	102,2
10	-90,0	0	0	37,0	-19,3	83,0
11	-80,0	0	0	29,4	25,7	90,6
12	-80,0	0	0	31,4	-46,0	108,6
13	-100,0	0	0	21,7	-32,2	98,3
14	-70,0	0	0	25,0	60,6	95,0
15	-90,0	0	0	47,1	-15,3	72,9
16	-60,0	0	0	32,7	10,0	67,3
17	-100,0	0	0	24,0	15,0	76,0
18	-70,0	0	0	40,7	-23,0	79,3
19	-100,0	0	0	15,4	20,0	84,6
20	80,0	0	0	-82,0	30,0	22,0
21	-100,0	0	0	34,3	-30,6	85,7
22	120,0	0	0	-90,6	35,0	30,6
23	110,0	0	0	-83,7	25,6	13,7
24	-80,0	0	0	27,8	-38,3	92,2
25	-140,0	0	0	-12,0	-30,0	92,0
26	140,0	0	0	-47,3	-10,0	-12,7
27	-80,0	0	0	15,0	53,6	105,0
28	140,0	0	0	-30,6	-35,0	90,6
29	150,0	0	0	-22,0	30,0	82,0
30	-60,0	0	0	35,9	14,1	64,1

Продолжение приложения 1

IV	Напряжения, МПа					
	$\sigma_x$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$	$\sigma_y$	$\tau_{yz}$	$\sigma_z$
1	-80,0	0	0	55,9	14,1	84,1
2	-80,0	0	0	48,8	21,2	91,2
3	-100,0	0	0	28,8	21,2	71,2
4	-70,0	0	0	41,7	28,3	98,3
5	-80,0	0	0	34,6	35,4	105,4
6	-80,0	0	0	21,7	28,3	78,3
7	-90,0	0	0	27,6	42,4	112,4
8	-100,0	0	0	45,9	-14,1	74,1
9	100,0	0	0	-76,0	38,6	16,0
10	-60,0	0	0	38,8	-21,2	81,2
11	-90,0	0	0	31,7	-28,3	88,3
12	180,0	0	0	30,0	100,0	-120,0
13	-90,0	0	0	24,6	-35,4	95,4
14	-60,0	0	0	10,5	49,5	109,5
15	160,0	0	0	-79,5	-49,5	19,5
16	-60,0	0	0	34,7	12,9	65,3
17	-90,0	0	0	27,0	19,3	73,0
18	110,0	0	0	-50,0	34,6	-10,0
19	-100,0	0	0	19,4	25,7	80,6
20	-80,0	0	0	11,4	46,0	88,6
21	170,0	0	0	-60,0	52,0	0,0
22	170,0	0	0	-83,6	45,0	23,6
23	100,0	0	0	-47,1	47,0	-12,9
24	130,0	0	0	17,1	15,3	42,9
25	120,0	0	0	-68,6	46,0	8,6
26	-60,0	0	0	-13,6	45,0	93,6
27	160,0	0	0	-44,1	14,1	-15,9
28	150,0	0	0	-45,3	12,9	-14,7
29	90,0	0	0	-68,3	32,2	8,3
30	110,0	0	0	-23,6	45,0	83,6

Продолжение приложения 1

V	Напряжения, МПа					
	$\sigma_x$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$	$\sigma_y$	$\tau_{yz}$	$\sigma_z$
1	-90,0	0	0	57,1	15,3	82,9
2	-70,0	0	0	50,7	23,0	89,3
3	-80,0	0	0	51,2	6,8	88,8
4	-60,0	0	0	44,3	30,6	95,7
5	-70,0	0	0	37,8	38,3	102,2
6	-60,0	0	0	41,8	10,3	98,2
7	-80,0	0	0	31,4	46,0	108,6
8	-90,0	0	0	47,1	-15,3	72,9
9	-40,0	0	0	32,4	13,7	107,6
10	-70,0	0	0	40,7	23,0	79,3
11	-100,0	0	0	34,3	-30,6	85,7
12	-50,0	0	0	23,0	-17,1	117,0
13	-80,0	0	0	27,8	-38,3	92,2
14	-100,0	0	0	15,0	53,6	105,0
15	-60,0	0	0	13,6	20,5	126,4
16	-130,0	0	0	35,9	14,1	64,1
17	-180,0	0	0	28,8	21,2	71,2
18	-130,0	0	0	41,2	-6,8	78,8
19	-90,0	0	0	21,7	28,3	78,3
20	100,0	0	0	-76,0	38,6	16,0
21	-110,0	0	0	31,8	10,3	88,2
22	180,0	0	0	-79,5	49,5	19,5
23	110,0	0	0	-50,0	34,6	-10,0
24	100,0	0	0	-117,8	-79,9	147,8
25	170,0	0	0	-60,0	52,0	0,0
26	130,0	0	0	17,1	15,3	42,9
27	-50,0	0	0	13,0	-17,1	107,0
28	160,0	0	0	-44,1	-14,1	-15,9
29	110,0	0	0	-23,6	45,0	83,6
30	-80,0	0	0	-5,8	23,9	125,8

Окончание приложения 1

VI	Напряжения, МПа					
	$\sigma_x$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$	$\sigma_y$	$\tau_{yz}$	$\sigma_z$
1	-100,0	0	0	60,0	17,3	80,0
2	-60,0	0	0	55,0	26,0	85,0
3	-80,0	0	0	43,2	18,8	56,8
4	-50,0	0	0	50,0	34,6	90,0
5	-60,0	0	0	45,0	43,3	95,0
6	-90,0	0	0	39,7	28,2	60,3
7	-70,0	0	0	40,0	52,0	100,0
8	-80,0	0	0	50,0	-17,3	70,0
9	-70,0	0	0	36,3	-37,6	63,7
10	-80,0	0	0	45,0	26,0	75,0
11	-80,0	0	0	40,0	-34,6	80,0
12	-80,0	0	0	29,5	56,4	70,5
13	-70,0	0	0	35,0	-43,3	85,0
14	-90,0	0	0	22,7	10,0	57,3
15	-100,0	0	0	26,1	65,8	73,9
16	-70,0	0	0	37,1	15,3	62,9
17	-80,0	0	0	30,7	23,0	69,3
18	-60,0	0	0	33,2	18,8	46,8
19	-80,0	0	0	24,3	30,6	75,7
20	80,0	0	0	-72,4	42,4	12,4
21	-80,0	0	0	19,5	56,4	60,5
22	70,0	0	0	-75,0	53,6	15,0
23	120,0	0	0	-43,7	37,6	-16,3
24	-80,0	0	0	16,1	-65,8	63,9
25	60,0	0	0	-50,5	56,4	-9,5
26	100,0	0	0	15,9	14,1	44,1
27	100,0	0	0	23,2	18,8	36,8
28	170,0	0	0	-42,9	15,3	-17,1
29	130,0	0	0	-19,5	49,5	79,5
30	150,0	0	0	12,9	-47,0	47,1

**Приложение 2**  
**Исходные данные к задаче 2**

№	$D$ , мм	$h$ , мм	$F$ , МН	$M_{И}$ , МНм	$M_{К}$ , МНм	$P$ , МПа	$\sigma_{ТД}$ , МПа	$\sigma_{ТН}$ , МПа
1	900	12	0,8	0,36	0,48	1,3	350	400
2	950	12	-0,9	0,40	0,56	1,4	300	350
3	1000	13	1,0	0,44	0,60	1,5	310	330
4	1050	13	1,1	0,56	0,76	1,5	370	420
5	1100	14	-1,2	0,64	0,84	1,6	320	370
6	1150	14	1,3	0,68	0,92	1,6	350	400
7	1200	15	1,5	0,84	1,16	1,7	400	450
8	1250	16	-1,6	0,92	1,24	1,7	350	400
9	1300	16	1,7	1,00	1,36	1,8	310	360
10	1350	17	-1,9	1,20	1,60	1,8	400	450
11	1400	18	-2,0	1,32	1,80	1,9	320	350
12	1450	18	-2,1	1,44	1,88	1,9	350	380
13	1500	19	2,3	1,68	2,20	2,0	420	470
14	1550	20	2,4	1,80	2,40	2,0	430	480
15	1600	20	2,5	1,92	2,60	2,1	440	490
16	1650	21	-2,7	2,20	2,96	2,1	450	500
17	1700	22	-2,9	2,36	3,16	2,2	470	520
18	1750	22	-3,0	2,52	3,36	2,2	480	530
19	1800	23	3,4	2,88	3,80	2,3	300	330
20	1850	24	3,5	3,04	4,00	2,3	320	360
21	1900	25	3,8	3,48	4,60	2,4	330	370
22	1950	25	4,0	3,68	4,92	2,4	400	440
23	2000	26	4,1	3,84	5,12	2,5	420	460
24	2050	27	4,5	4,40	5,80	2,5	440	480
25	2100	28	4,6	4,60	6,08	2,6	500	550
26	2150	28	-4,8	4,80	6,40	2,6	410	460
27	2200	29	5,2	5,40	7,00	2,7	380	430
28	2250	30	-5,3	5,60	7,40	2,7	310	340
29	2300	31	5,4	5,80	7,80	2,8	420	470
30	2350	32	5,7	6,60	8,40	2,8	300	330

**Приложение 3**  
**Механические характеристики сталей**

№ п/п	Марка стали	Модуль упругости $E \cdot 10^{-5}$ , МПа	Предел текучести $\sigma_T$ , МПа	Коэффициент линейного расширения $\alpha \cdot 10^6, 1/^\circ\text{C}$
1	Ст 10	2,10	210	11,6
2	Ст 20	2,13	250	11,1
3	Ст 25	1,98	280	11,1
4	Ст 30	2,00	300	12,6
5	Ст 35	2,06	320	11,9
6	Ст 40	2,13	340	12,4
7	Ст 45	2,00	360	11,7
8	Ст 50	2,16	380	12,0
9	Ст 55	2,10	390	11,0
10	Ст 60	2,04	420	11,1
11	Ст 20Г	2,04	280	12,3
12	Ст 30Г	2,04	320	12,6
13	Ст 50Г	2,16	400	11,6
14	Ст 20Х	2,16	650	11,3
15	Ст 40Х	2,14	800	13,4
16	Ст 45Х	2,06	850	12,8
17	Ст 30ХМ	2,03	750	12,3
18	Ст 35ХМ	2,04	850	12,3
19	Ст 40ХН	2,00	800	11,8
20	Ст 50ХН	2,00	900	11,8
21	Ст 15ХФ	2,06	550	12,0
22	Ст 40ХФА	2,00	750	11,0
23	Ст 20ХГСА	1,96	650	11,0
24	Ст 30ХГС	1,94	850	11,0

## Приложение 4

### Тесты для самопроверки

**1. Что является мерой интенсивности внутренних сил в точке деформированного тела?**

- а) деформации;    б) напряжения;    в) перемещения;    г) углы поворота.

**2. Что называется средним напряжением на элементарной площадке в сечении?**

а)  $\bar{\sigma} = \frac{\Delta P}{\Delta A}$ ;    б)  $P_v = \frac{\Delta F}{\Delta A}$ ;    в)  $\sigma_v = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$ ;    г)  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ .

**3. Что называется полным напряжением в точке заданного сечения?**

а)  $\bar{\sigma} = \frac{\Delta P}{\Delta A}$ ;    б)  $P_v = \frac{\Delta F}{\Delta A}$ ;    в)  $\sigma_v = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$ ;    г)  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ .

**4. Как обозначаются проекции полного напряжения на произвольно-ориентированной наклонной площадке?**

а)  $P_{xv}, P_{yv}, P_{zv}$ ;    б)  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ ;    в)  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ ;    г)  $u, v, w$ .

**5. Какие напряжения называются нормальными?**

- а) те, что действуют под углом к элементарной площадке;  
б) те, что действуют по нормали к элементарной площадке;  
в) те, что действуют по касательной к элементарной площадке;  
г) те, что действуют по кругу в элементарной площадке.

**6. Какие напряжения называются касательными?**

- а) те, что действуют под углом к элементарной площадке;  
б) те, что действуют по нормали к элементарной площадке;  
в) те, что действуют по касательной к элементарной площадке;  
г) те, что действуют по кругу в элементарной площадке.

*Продолжение приложения 4*

**7. Какие площадки называются главными?**

- а) те, на которых действуют касательные напряжения;
- б) те, на которых отсутствуют нормальные напряжения;
- в) те, на которых отсутствуют касательные напряжения;
- г) те, на которых действуют нормальные напряжения.

**8. Какие напряжения называются главными?**

- а) те, что действуют на координатных площадках;
- б) те, что действуют в поперечных сечениях;
- в) те, что действуют на главных площадках;
- г) те, что действуют на наклонных площадках.

**9. Сколько главных площадок можно провести через точку деформированного тела?**

- а) пять;                      б) четыре;                      в) шесть;                      г) три.

**10. Как главные площадки ориентированы по отношению друг к другу?**

- а) под углом  $45^\circ$  друг к другу;
- б) под углом  $30^\circ$  друг к другу;
- в) перпендикулярно друг к другу;
- г) под углом  $60^\circ$  друг к другу.

**11. Каковы свойства главных напряжений?**

- а) они средние;
- б) они минимальные;
- в) они экстремальные;
- г) они максимальные.

**12. Каковы правила индексации главных напряжений?**

- а)  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ;      б) произвольно;      в)  $\sigma_U, \sigma_V, \sigma_W$ ;      г)  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ .

*Продолжение приложения 4*

**13. Какой тип напряженного состояния в точке тела невозможен?**

- а) линейный;    б) плоский;    в) объемный;    г) шестимерный.

**14. Укажите закон парности касательных напряжений в случае, когда все грани элемента не являются главными:**

- а)  $\tau_{xy} = \tau_{zy}$ ;    б)  $\tau_{\max} = \tau_{xz}$ ;    в)  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ;    г)  $\tau_{yx} = \tau_{xz}$ .

**15. Как обозначаются линейные деформации в направлении координатных осей?**

- а)  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ ;    б)  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ ;    в)  $U, V, W$ ;    г)  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

**16. Как обозначаются линейные деформации в направлении главных осей?**

- а)  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ ;    б)  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ ;    в)  $U, V, W$ ;    г)  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

**17. Что называется деформированным состоянием в точке?**

- а) совокупность  $U, V, W$ ;    б) совокупность  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ ;  
в) совокупность  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ ;    г) совокупность  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

**18. Под напряженным состоянием в произвольной точке деформированного тела следует понимать...**

а) совокупность нормальных и касательных напряжений в любом сечении стержня;

б) совокупность нормальных и касательных напряжений на любых трех элементарных площадках, проходящих через эту точку;

в) совокупность нормальных и касательных напряжений, действующих на множестве элементарных площадок, проходящих через точку;

г) совокупность нормальных и касательных напряжений в поперечном сечении стержня.

*Продолжение приложения 4*

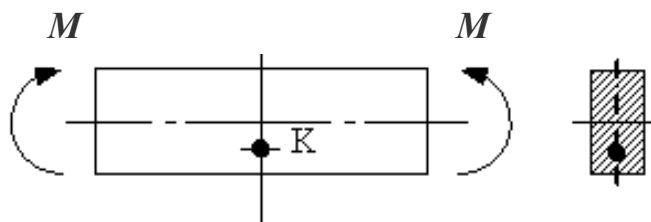
**19. Тензор напряжений – это...**

- а) совокупность нормальных и касательных напряжений на любых трех элементарных площадках ,проходящих через эту точку;
- б) совокупность нормальных и касательных напряжений в любом сечении стержня;
- в) совокупность нормальных и касательных напряжений в поперечном сечении стержня;
- г) совокупность нормальных и касательных компонентов напряжений на трех взаимно перпендикулярных элементарных площадках, проходящих через точку тела.

**20. При кручении стержня круглого поперечного сечения главные площадки в точке на его поверхности совпадают...**

- а) с поперечными сечениями стержня;
- б) с продольными сечениями стержня;
- в) с поперечными и продольными сечениями стержня;
- г) с внешней поверхностью и двумя сечениями под углом  $\pm 45^\circ$  к продольной оси стержня.

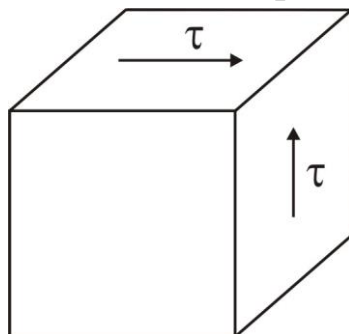
**21. При чистом изгибе стержня главные площадки в точке К совпадают...**



- а) с продольным и двумя наклонными под углом  $45^\circ$  к продольной оси стержня сечениями;
- б) с поперечным и двумя продольными сечениями стержня (вертикальным и горизонтальным);
- в) с продольными сечениями стержня;
- г) с поперечными сечениями стержня.

Продолжение приложения 4

22. При чистом сдвиге главные напряжения равны...



а)  $\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau$ ;

в)  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \tau$ ;

б)  $\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = \sigma_3 = -\tau$ ;

г)  $\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau$ .

23. Площадка, на которой нет касательных напряжений, называется...

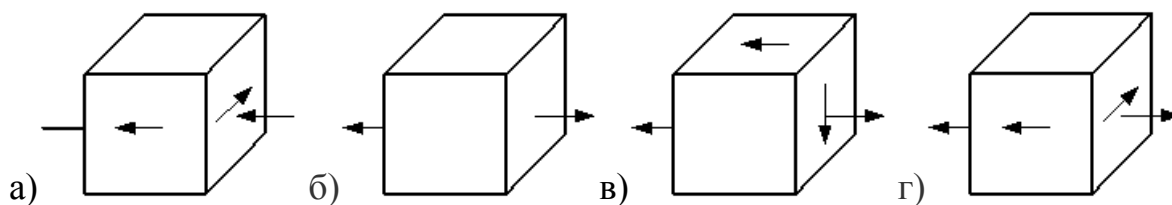
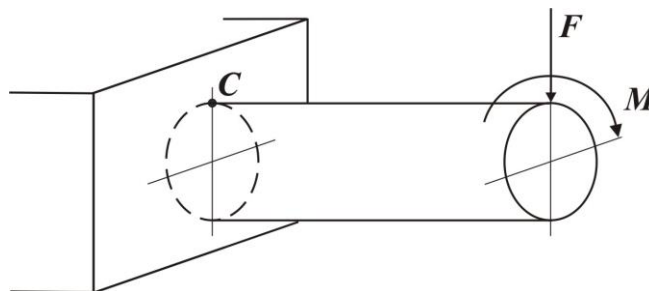
а) главной;

б) первой;

в) основной;

г) чистой.

24. Напряженное состояние в точке *C* имеет вид...



25. Вид (тип) напряженного состояния в произвольной точке деформированного тела подразделяется на...

а) объемное, плоское, линейное;

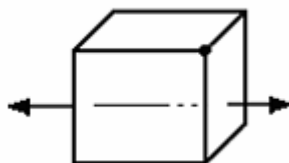
б) косой изгиб, изгиб с растяжением, изгиб с кручением;

в) растяжение, сжатие, изгиб;

г) растяжение, кручение, сдвиг.

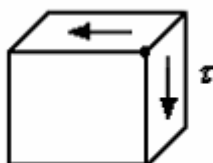
Продолжение приложения 4

26. Такое напряженное состояние называется...



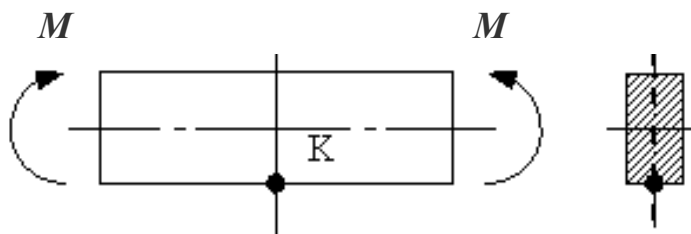
- а) объемным;
- б) линейным (одноосным);
- в) чистым сдвигом;
- г) плоским (двуосным).

27. Такое напряженное состояние называется...



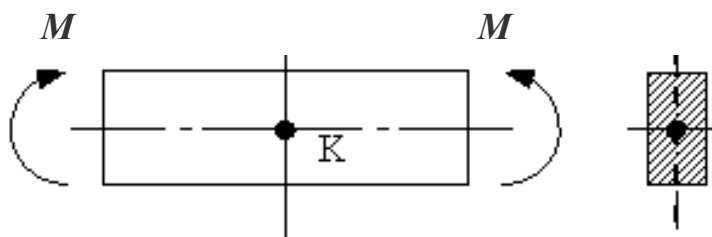
- а) линейным (растяжение);
- б) плоским (чистый сдвиг);
- в) линейным (сжатие);
- г) плоским (двуосное растяжение).

28. Вид (тип) напряженного состояния в точке К...



- а) линейный (растяжение);
- б) плоский (чистый сдвиг);
- в) линейный (сжатие);
- г) плоский (двуосное растяжение).

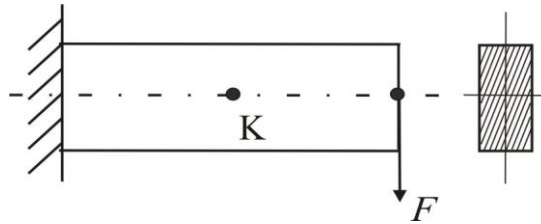
29. Вид (тип) напряженного состояния в точке К...



- а) линейный (растяжение);
- б) плоский (чистый сдвиг);
- в) линейный (сжатие);
- г) «нулевой» (напряжения отсутствуют).

*Продолжение приложения 4*

**30. Вид (тип) напряженного состояния в точке К...**



- а) линейный (растяжение);    в) линейный (сжатие);  
б) плоский (чистый сдвиг);    г) «нулевой» (напряжения отсутствуют).

**31. Два напряженных состояния называются равноопасными, если они имеют...**

- а) одинаковые знаки нормальных напряжений;  
б) одинаковые знаки максимальных касательных напряжений;  
в) одинаковые знаки главных напряжений;  
г) одинаковые коэффициенты запаса.

**32. Совокупность нормальных и касательных напряжений, действующих на множестве элементарных площадок, проходящих через точку, называется...**

- а) состоянием напряжения;                      в) напряженным состоянием;  
б) полным напряжением;                      г) трехосным напряжением.

**33. Напряженное состояние в точке, где два главных напряжения равны нулю, называется...**

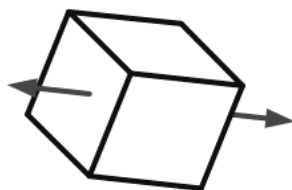
- а) пространственным;    б) линейным;    в) особым;    г) плоским.

**34. Напряженное состояние в точке, где одно главное напряжение равно нулю, называется...**

- а) пространственным;    б) линейным;    в) особым;    г) плоским.

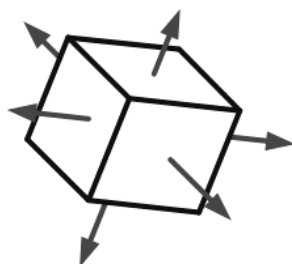
**35. Напряженное состояние в точке, изображенное на рисунке, называется...**

Продолжение приложения 4



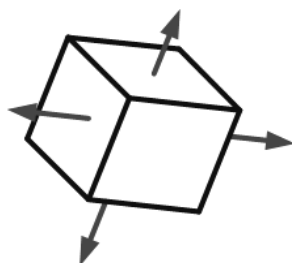
а) пространственным; б) линейным; в) особым; г) плоским.

**36. Напряженное состояние в точке, изображенное на рисунке, называется...**



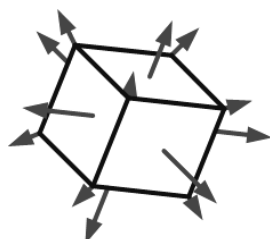
а) пространственным; б) линейным; в) особым; г) плоским.

**37. Напряженное состояние в точке, изображенное на рисунке, называется...**



а) пространственным; б) линейным; в) особым; г) плоским.

**38. Напряженное состояние в точке, изображенное на рисунке, называется...**



а) пространственным; б) линейным; в) несуществующим; г) плоским.

Продолжение приложения 4

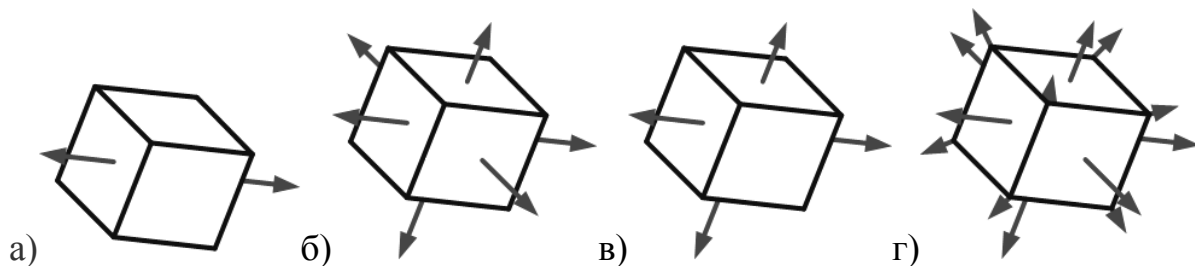
**39. Напряженное состояние в точке, где три главных напряжения не равны нулю, называется...**

- а) пространственным напряженным состоянием;
- б) линейным напряженным состоянием;
- в) особым напряженным состоянием;
- г) плоским напряженным состоянием.

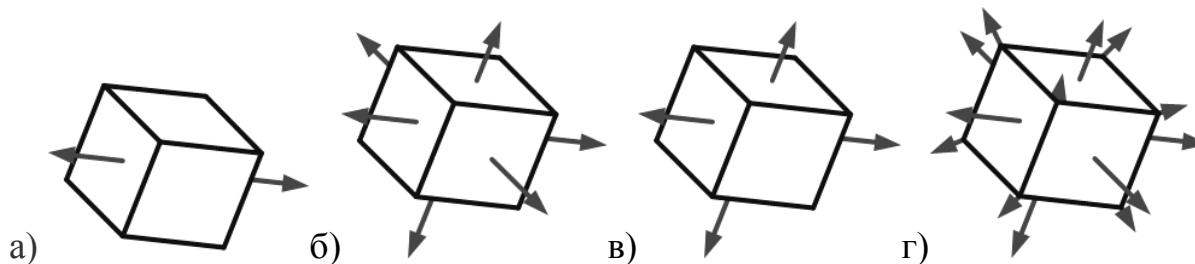
**40. В линейном напряженном состоянии закон Гука выражается зависимостью...**

а)  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ ;      б)  $\sigma = E \cdot \varepsilon$ ;      в)  $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$ ;      г)  $\tau = G \cdot \gamma$ .

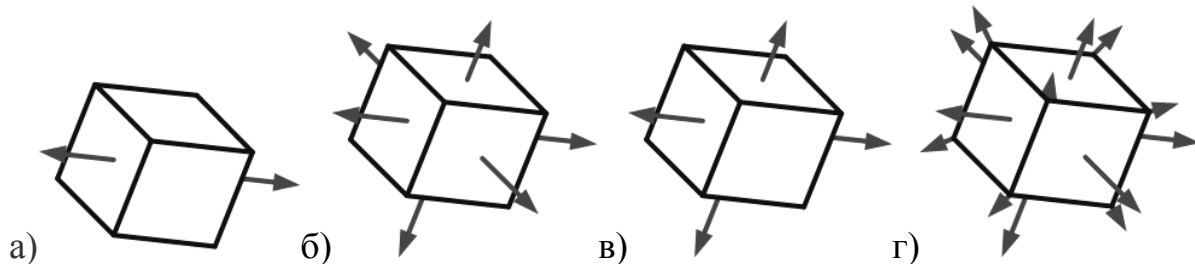
**41. Укажите пространственное напряженное состояние...**



**42. Укажите линейное напряженное состояние...**

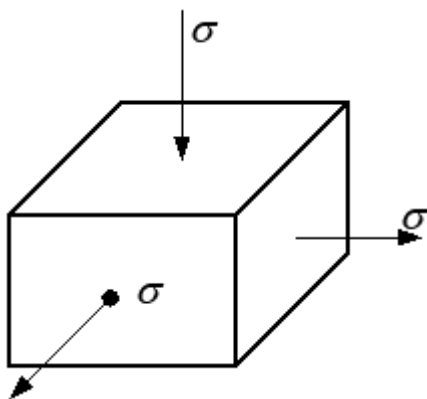


**43. Укажите плоское напряженное состояние...**



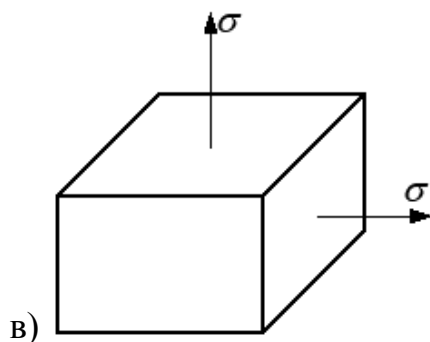
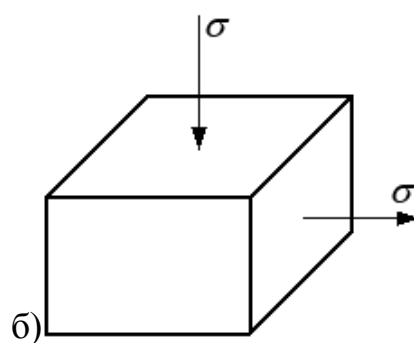
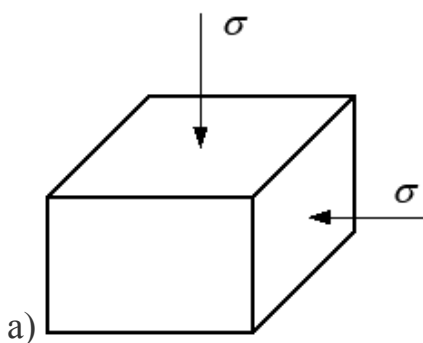
Продолжение приложения 4

44. Вычислите эквивалентное напряжение согласно гипотезе наибольших относительных линейных деформаций (материал сталь,  $\mu = 0,3$ ,  $\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$ )



- а) 0;                      б)  $1,5\sigma$ ;                      в)  $\sigma$ ;                      г)  $1,2\sigma$ ;

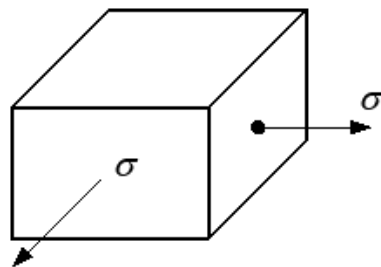
45. Из трех напряженных состояний самым опасным (согласно гипотезе наибольших касательных напряжений ( $\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - \sigma_3$ )) будет...



- г) все напряженные состояния являются равноопасными.

Продолжение приложения 4

46. Вычислите эквивалентное напряжение согласно гипотезе наибольших касательных напряжений ( $\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - \sigma_3$ ):

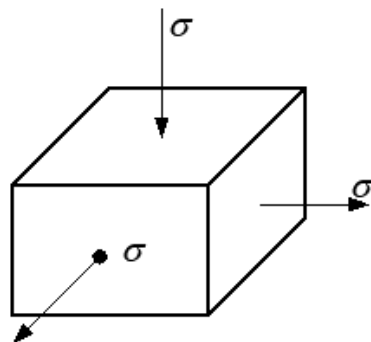


- а) 0;                      б)  $2\sigma$ ;                      в)  $\sigma$ ;                      г)  $-\sigma$ .

47. Выберите неправильное утверждение...

- а) гипотеза прочности Мора объясняет предельное состояние материалов, которые по-разному сопротивляются растяжению и сжатию;
- б) гипотеза прочности наибольших относительных линейных деформаций подтверждается экспериментами только для хрупких материалов;
- в) гипотеза прочности наибольших касательных напряжений не учитывает влияния промежуточного главного напряжения  $\sigma_2$  на прочность материала;
- г) гипотеза прочности наибольших касательных напряжений не объясняет предельного состояния пластичных материалов.

48. Вычислите эквивалентное напряжение согласно гипотезе прочности Мора (материал серый чугун,  $k = 0,2$ ;  $\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - k\sigma_3$ ):



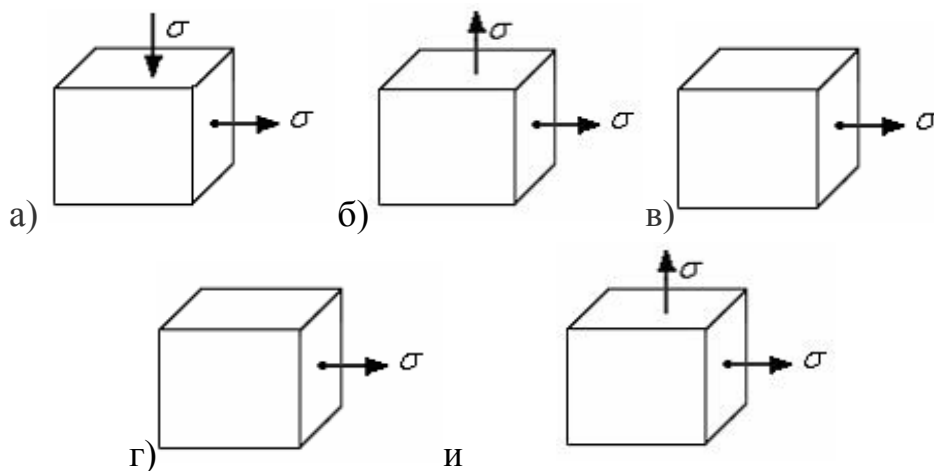
- а)  $0,8\sigma$ ;                      б)  $2,2\sigma$ ;                      в)  $1,2\sigma$ ;                      г)  $-1,8\sigma$ .

49. Удельная потенциальная энергия изменения объема

$$u_v = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

Продолжение приложения 4

( $E$  – модуль упругости,  $\mu$  – коэффициент Пуассона) равна нулю в напряженном состоянии



**50. Условие прочности согласно гипотезе наибольших относительных линейных деформаций имеет вид...**

а)  $\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$ ;

в)  $\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$ ;

б)  $\sigma_1 \leq [\sigma]_+$ ,  $\sigma_3 \leq [\sigma]_-$ ;

г)  $\sigma_1 - k\sigma_3 \leq [\sigma]_+$ ;

**51. При сложном напряженном состоянии для оценки прочности пластичных материалов следует применять...**

а) любую гипотезу прочности;

б) гипотезу прочности наибольших касательных напряжений;

в) одновременно гипотезу наибольших относительных линейных деформаций и наибольших нормальных напряжений;

г) гипотезу прочности наибольших нормальных напряжений.

**52. Компоненты тензора деформаций  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  определяют...**

а) деформированное состояние в точке;

б) напряженное состояние в точке;

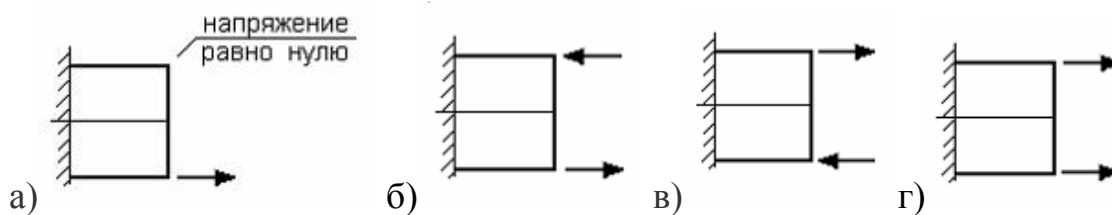
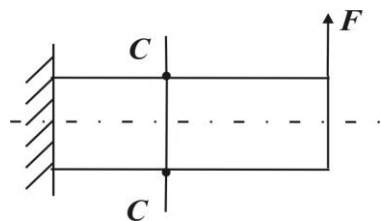
в) напряженное состояние тела;

г) деформированное состояние тела.

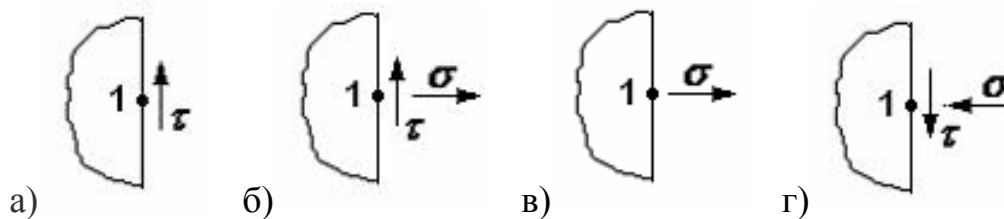
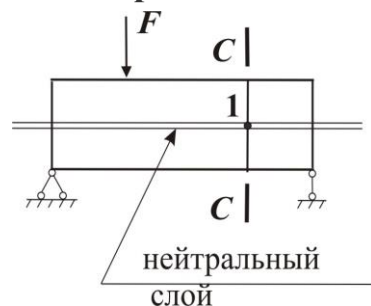


Продолжение приложения 4

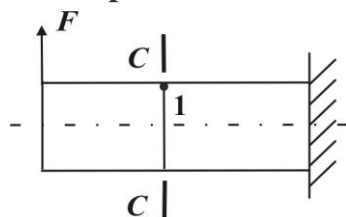
56. Правильные направления нормальных напряжений в точках 1, 2 сечения  $C-C$  имеют вид...



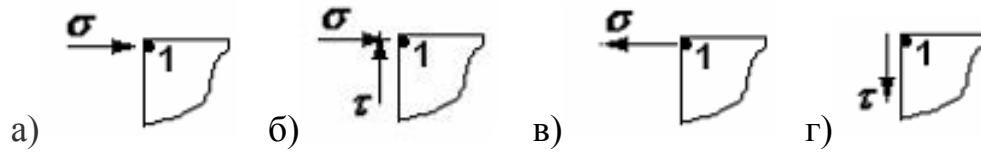
57. Если отбросить правую часть стержня, то в точке 1 сечения  $C-C$  необходимо показать напряжения...



58. Если отбросить левую часть стержня, то в точке 1 сечения  $C-C$  необходимо показать напряжения...



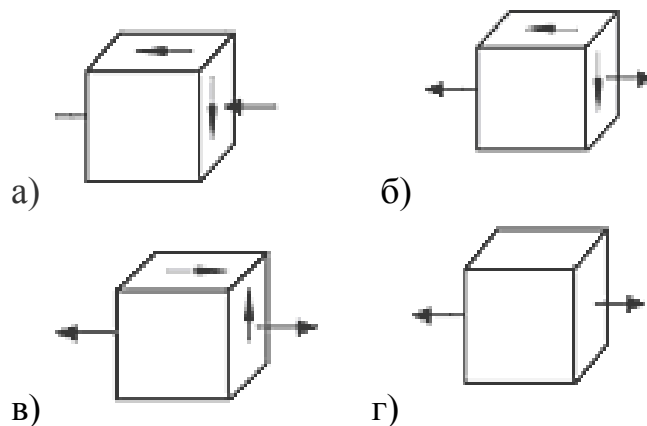
Продолжение приложения 4



59. Относительные линейные деформации  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_{\max}, \varepsilon_3 = \varepsilon_{\min}$ ) называются...

- а) главными деформациями;
- б) экстремальными деформациями;
- в) максимальными деформациями;
- г) граничными деформациями.

60. При совместном действии изгиба и кручения стержня прямоугольного поперечного сечения в угловой точке сечения может быть напряженное состояние...



61. Какой закон характеризует связь между компонентами напряженного и деформированного состояния в точке?

- а) закон Бойля–Мариотта;
- б) закон Ньютона;
- в) обобщенный закон Гука;
- г) закон Коши.

*Продолжение приложения 4*

**62. Какое напряженное состояние называется предельным?**

а) то, которое соответствует переходу механического состояния материала от твердого к жидкому;

б) то, которое соответствует переходу механического состояния материала от твердого к мягкому;

в) то, которое соответствует переходу механического состояния материала от упругого к упруго-пластичному;

г) то, которое соответствует переходу механического состояния материала от упругого к ползучести.

**63. Что называется коэффициентом запаса для данного напряженного состояния?**

а)  $n = \frac{\tau_{\max}}{\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\max}}$  ;                      б)  $n = \frac{\sigma_{\text{ОП}}}{\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\max}}$  (оп – опасное);

в)  $n = \frac{\sigma}{\varepsilon}$  ;                                      г)  $n = \frac{\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\max}}{\varepsilon_{\text{ЭКВ}}}$  .

**64. Какое напряженное состояние выбирается в качестве эталона (эквивалента) для сравнения с трехосным напряженным состоянием?**

а) линейное;    б) плоское;    в) объемное;    г) шестиосное.

**65. Укажите формулу для расчета эквивалентных напряжений по гипотезе пластичности – гипотезе наибольших касательных напряжений**

а)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_T$  ;                      б)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_2 - \sigma_3 = \sigma_T$  ;

в)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T$  ;                      г)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_3 - \sigma_4 = \sigma_T$  .

**66. Укажите формулу для расчета эквивалентных напряжений по гипотезе пластичности – гипотезе удельной потенциальной энергии формоизменения:**

а)  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]}$  ;

Продолжение приложения 4

$$\text{б) } \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{3}{7}(\sigma_1 - \sigma_3)^2};$$

$$\text{в) } \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sigma_3 - \sigma_2;$$

$$\text{г) } \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{2}{3}(\sigma_3 - \sigma_4)^2}.$$

**67. Условие прочности по теории Мора выглядит...**

$$\text{а) } \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{M}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]; \quad \text{б) } \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{M}} = \sigma_3 - \sigma_2 \leq [\sigma];$$

$$\text{в) } \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{M}} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \cdot \sigma_3 \leq [\sigma_+]; \quad \text{г) } \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{M}} = \sigma_3 - \sigma_1 \leq [\sigma].$$

**68. Каковы единицы измерения механических напряжений?**

$$\text{а) } \text{Н} \cdot \text{м/с}; \quad \text{б) } \text{Н/м}; \quad \text{в) } \text{Н} \cdot \text{м/м}^2; \quad \text{г) } \text{Н/м}^2.$$

**69. Обобщенный закон Гука для изотропного материала в главной системе координат имеет вид:**

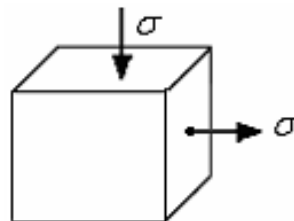
$$\text{а) } \varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)); \quad \text{б) } \sigma_1 = E \cdot \varepsilon_1;$$

$$\text{в) } \sigma_2 = \frac{G}{\tau_{12}}; \quad \text{г) } \mu = \left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} \right|.$$

**70. Коэффициент Пуассона определяется так:**

$$\text{а) } E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad \text{б) } \mu = \left| \frac{\varepsilon^1}{\varepsilon} \right| \quad \text{в) } \nu = \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \quad \text{г) } \mu = \frac{\sigma_6}{\sigma_2}$$

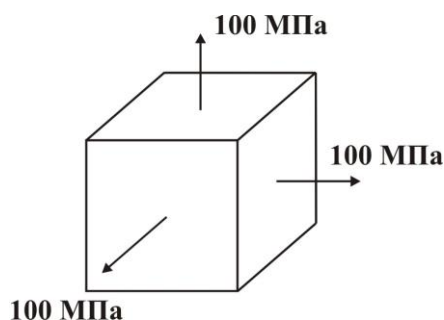
**71. Для напряженного состояния в точке условие прочности (согласно гипотезе удельной потенциальной энергии формоизменения) имеет вид:**



Продолжение приложения 4

- а)  $\sigma\sqrt{3} \leq [\sigma]$ ; б)  $\sigma\sqrt{2} \leq [\sigma]$ ; в)  $2\sigma \leq [\sigma]$ ; г)  $1,3\sigma \leq [\sigma]$ .

72. Для напряженного состояния в точке необходимо найти относительную линейную деформацию. (Модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ )



- а) 0,04; б) 0,003; в) 0,0002; г) 0,00001.

73. Направляющие косинусы – это:

- а) косинусы углов между нормалью к площадке и координатными осями;  
б) косинусы углов между координатными осями;  
в) косинусы углов между касательной к площадке и координатными осями;  
г) косинусы углов между нормалью к площадке и касательной к площадке.

74. Что представляют собой коэффициенты характеристического (кубического) уравнения напряженного состояния в точке?

- а) элементы тензора напряжений;  
б) элементы девиатора напряжений;  
в) элементы шарового тензора;  
г) инварианты тензора напряжений.

75. Определите тип напряженного состояния в точке, если известны инварианты тензора напряжений ( $I_1 = 0$ ,  $I_2 \neq 0$ ,  $I_3 = 0$ ):

- а) линейное; б) плоское; в) объемное; г) квадроосевое.

*Окончание приложения 4*

**76. Определите тип напряженного состояния в точке, если известны инварианты тензора напряжений ( $I_1 \neq 0$ ,  $I_2 = 0$ ,  $I_3 = 0$ ):**

- а) линейное;    б) плоское;    в) объемное;    г) квадроосевое.

**77. Условием применимости безмоментной теории расчета оболочек является отношение диаметра оболочки к толщине ее стенки не менее чем:**

- а) 5;            б) 10;            в) 15;            г) 20.

**78. Уравнение Лапласа для расчета оболочек по безмоментной теории имеет вид:**

а)  $\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_\theta}{\rho_\theta} = \frac{P}{h}$ ;    б)  $\sigma_m + \sigma_\theta = P$ ;    в)  $\frac{\sigma_m}{\rho_\theta} + \frac{\sigma_\theta}{\rho_m} = \frac{P}{h}$ ;    г)  $\frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{\sigma_\theta}{\rho_\theta}$ .

**79. При расчете цилиндрической оболочки с днищами под действием внутреннего давления напряжения будут такими:**

- а) меридиональные напряжения равны окружным;  
б) меридиональные напряжения больше окружных в два раза;  
в) меридиональные напряжения меньше окружных в два раза;  
г) окружные напряжения больше меридиональных в три раза.

**80. При расчете сферической оболочки под действием внутреннего давления напряжения будут такими:**

- а) меридиональные напряжения равны окружным;  
б) меридиональные напряжения больше окружных в два раза;  
в) меридиональные напряжения меньше окружных в два раза;  
г) окружные напряжения больше меридиональных в три раза.

**81. При расчете конической оболочки под действием внутреннего давления напряжения будут такими:**

- а) меридиональные напряжения равны окружным;  
б) меридиональные напряжения больше окружных в два раза;  
в) меридиональные напряжения меньше окружных в два раза;  
г) окружные напряжения больше меридиональных в три раза.

## Список литературы

1. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М. : Наука, 1966. – 636 с.
2. Писаренко Г.С. Опір матеріалів / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський. – Київ : Вища школа, 2004. – 655 с.
3. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности / В.И. Самуль. – М. : Высшая школа, 1982. – 264 с.
4. Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1978. – 832 с.
5. Устиненко В.Л. Основы проектирования деталей машин / В.Л. Устиненко, Н.Ф. Киркач, Р.А. Баласанян. – Харьков : Вища школа, изд-во при Харьк. ун-те, 1983. – 184 с.

## Содержание

Вступление.....	3
1. Основы расчета оболочек по безмоментной теории.....	4
1.1. Цилиндрическая оболочка.....	6
1.2. Сферическая оболочка .....	7
1.3. Коническая оболочка .....	8
2. Основы теории напряжённо-деформированного состояния в точке.....	8
2.1. Понятие о напряжённом состоянии и компонентах тензора напряжений в точке.....	8
2.2. Пример формирования матрицы тензора напряжений.....	10
3. Определение напряжений на произвольной наклонной площадке.....	12
4. Понятия о главных площадках и главных напряжениях. Классификация типов напряжённого состояния в точке. Октаэдрические напряжения, интенсивность напряжений.....	13
5. Закон Гука при объёмном напряжённом состоянии (обобщённый закон Гука).....	16
5.1. Формулировка закона Гука.....	16
5.2. Пример определения компонент напряженного и деформированного состояния с применением обобщенного закона Гука.....	18
6. Удельная потенциальная энергия упругой деформации в точке.....	19
7. Гипотезы предельных напряжённых состояний (гипотезы прочности)..	20
7.1. Первая гипотеза прочности (гипотеза наибольших нормальных напряжений).....	22
7.2. Вторая гипотеза прочности (гипотеза наибольших линейных деформаций).....	22
7.3. Третья гипотеза прочности (гипотеза наибольших касательных напряжений).....	22
7.4. Четвёртая гипотеза прочности (гипотеза удельной потенциальной энергии формоизменения).....	23
7.5. Гипотеза прочности Мора.....	24
8. Расчетно-проектировочное задание.....	25
8.1. Содержание расчетно-проектировочного задания.....	25
8.2. Порядок выполнения задания.....	26
8.3. Примеры решения задач.....	27
8.3.1. Образец решения задачи 1.....	27
8.3.2. Образец решения задачи 2.....	30
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	36
Приложение 1. Исходные данные задачи 1.....	36
Приложение 2. Исходные данные задачи 2.....	42
Приложение 3. Механические характеристики сталей.....	43
Приложение 4. Тесты для самопроверки.....	44
Список литературы.....	63

Навчальне видання

ПОГОРІЛОВ Сергій Юрійович  
ХАВІН Валерій Львович  
ШЕРГІН Сергій Юрійович  
КРАВЦОВА Наталія Вікторівна

РОЗРАХУНОК ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ НА МІЦНІСТЬ ПРИ  
СКЛАДНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Навчально-методичний посібник з курсу «Опір матеріалів»  
для студентів машинобудівних спеціальностей

Російською мовою

Відповідальний за випуск проф. В.Л. Хавін  
Роботу до видання рекомендував С.К. Шелковий

В авторській редакції

План 2017 р., поз.

Підп. до друку 2017 р. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.  
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк.  
Наклад 100 прим. Зам. № Ціна договірна

---

Видавничий центр НТУ «ХП».  
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.  
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

---

Друкарня НТУ «ХП». 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2