УДК 539.3

Н. К. АХМЕДОВ, Г. Н. ШАХВЕРДИЕВА

АНАЛИЗ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛИТЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости изучается осесимметричная задача теории упругости для неоднородной трансверсально-изотропной плиты переменной толщины. Построены неоднородные и однородные решения. На основании асимптотического анализа разъяснен характер напряженно-деформированного состояния.

Ключевые слова: неоднородные решения, однородные решения, пограничный слой, вариационный принцип.

Методом асимптотичного інтегрування рівнянь теорії пружності вивчається осесиметричне завдання теорії пружності для неоднорідної трансверсально-ізотропної плити змінної товщини. Побудовано неоднорідні і однорідні рішення. На підставі асимптотичного аналізу роз'яснено характер напружено-деформованого стану.

Ключові слова: неоднорідні рішення, однорідні рішення, прикордонний шар, варіаційний принцип.

The method of asymptotic integration of the equations of elasticity theory is studied axisymmetric problem of elasticity theory for an inhomogeneous transversely isotropic plate of variable thickness. Behavior of the solution of boundary value problems is studied both in the interior part of a plate, and near its borders. Systems of inhomogeneous and homogeneous solutions are constructed. It is shown that stress-strain state in inhomogeneous plate of variable thickness is composed of penetrating stress-strain state and solution of character of boundary layer similar to Saint-Venant edge effect in the theory of inhomogeneous plates. The simple asymptotic formulas, which allow to calculate the stress-strain state of the plates have been obtained. Based on the asymptotic analysis clarifies the nature of the stress-strain state.

Keywords: heterogeneous solutions, homogeneous solutions, boundary layer, the variational principle.

Введение. В [1–3] построена общая теория изотропной и трансверсально-изотропной конической оболочки переменной толщины. В [4–6] методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости изучена осесимметричная задача теории упругости для неоднородной конической оболочки и для неоднородной плиты переменной толщины. В [7] методом асимптотического интегрирования исследована осесимметричная задача теории упругости для неоднородной трансверсально-изотропной конической оболочки, и был отмечен особый случай, когда угол раствора срединной поверхности $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$, что соответствует трансверсально-изотропной неоднородной плите переменной толщины. Отметим, что здесь речь идет не о любой плите, а о тем частном виде конической оболочки, рассмотренной в [7], который она принимает при вырождении ее срединной поверхности в плоскость. Этот случай вырождения особый и требует отдельного исследования.

Постановка задачи. Рассмотрим осесимметричную задачу теории упругости для неоднородной трансверсально-изотропной плиты с линейно изменяющейся толщиной, которая представляет собой тело с двумя коническими и двумя сферическими границами. В сферической системе координат r,θ,ϕ область, занятую плитой, обозначим через $\Gamma = \{r_1 \le r \le r_2, \quad \theta_1 \le \theta \le \theta_2 \quad 0 \le \phi \le 2\pi\}$.

Уравнения равновесия в перемещениях имеют вид [8]:

$$\left(L_0 + \varepsilon\partial_1 L_1 + \varepsilon^2 \partial_1^2 L_2\right)\bar{u} = \bar{0} \tag{1}$$

где L_k -матричные дифференциальные операторы вида

$$L_0 = \begin{Vmatrix} \partial\left(b_{44}\partial\right) + 2\varepsilon^2\left(b_{12} - b_{22} - b_{23}\right) & \varepsilon\left(b_{12} - b_{22} - b_{23}\right)\partial + \varepsilon^2\left(b_{22} + b_{44} + b_{23} - b_{12}\right)tg\varepsilon\eta - \varepsilon\partial\left(b_{44}\right) \\ -\varepsilon b_{44} tg\varepsilon\eta\ \partial & \\ \varepsilon\partial\left(\left(b_{22} + b_{23}\right)\right) + 2\varepsilon b_{44}\partial & \partial\left(b_{22}\partial\right) - \varepsilon\partial\left(b_{23} tg\varepsilon\eta\right) - 2\varepsilon^2 b_{44} + \varepsilon\left(b_{23} - b_{22}\right)tg\varepsilon\eta\ \partial - \\ & -\left(b_{22} - b_{23}\right)\varepsilon^2 tg^2\varepsilon\eta \end{Vmatrix},$$

$$L_1 = \begin{Vmatrix} 2\varepsilon b_{11} & \partial\left(b_{44}\right) + b_{12}\partial - \varepsilon\left(b_{44} + b_{12}\right)tg\varepsilon\eta \\ \partial\left(b_{12}\right) + b_{44}\partial & 2\varepsilon b_{44} \end{Vmatrix},$$

$$L_2 = \begin{Vmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{44} \end{Vmatrix}, \ \partial = \frac{\partial}{\partial\eta}, \ \partial_1^k = \rho^k \frac{\partial^k}{\partial\rho^k}, \ \bar{u} = \bar{u}\left(u_\rho, u_\theta\right)^T.$$

Здесь $u_\rho(\rho;\theta), u_\theta(\rho;\theta)$ – компоненты вектора перемещений; $\eta = \dfrac{\theta - \theta_0}{\varepsilon}$, $\rho = \dfrac{r}{r_2}$ -новые безразмерные переменные; $\varepsilon = \dfrac{\theta_2 - \theta_1}{2}$ – малый параметр, характеризующий толщину плиты;

$$\theta_0 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \frac{\pi}{2},$$

угол раствора срединной поверхности; $\eta \in [-1;1]; \rho \in [\rho_1;1]$.

Предполагаем, что модули упругости $b_{ij} = b_{ij}\left(\eta\right)$ являются произвольными кусочно-непрерывными функциями переменной η, значения которых могут меняться в пределах одного порядка.

Пусть на конических границах (торцах) плиты заданы граничные условия

$$\bar{\sigma} = M\,\bar{u}\,\big|_{\eta=\pm1} = \bar{g}^{\pm}(\rho). \qquad (2)$$

Здесь $\bar{\sigma} = \left(\sigma_{\rho\theta}, \sigma_{\theta\theta}\right)^T$, $M = \dfrac{1}{\varepsilon\rho}\left(M_0 + \varepsilon\partial_1 M_1\right)$,

$$M_0 = \begin{Vmatrix} b_{44}\partial & -\varepsilon b_{44} \\ \left(b_{22}+b_{23}\right)\varepsilon & b_{22}\partial - \varepsilon b_{23} tg\,\varepsilon\eta \end{Vmatrix},$$

$$M_1 = \begin{Vmatrix} 0 & b_{44} \\ b_{12} & 0 \end{Vmatrix}, \quad \bar{g}^{\pm}\left(\rho\right) = \left(h^{\pm}\left(\rho\right),\ f^{\pm}\left(\rho\right)\right)^T.$$

Будем считать, что нагрузки $h^{\pm}\left(\rho\right)$, $f^{\pm}\left(\rho\right)$, заданные на конических границах плиты, достаточно гладкие функции и относительно ε имеют порядок $O\left(1\right)$.

Построение неоднородных решений. Рассмотрим построение частных решений уравнений (1), удовлетворяющих граничным условиям (2), т. е. неоднородных решений. Для построения неоднородных решений используем первый итерационный процесс асимптотического метода [9, 10]. Решение (1), (2) отыскиваем в виде

$$\begin{aligned} u_{\rho} &= \varepsilon^{-2}\left(u_{\rho 0} + \varepsilon u_{\rho 1} + \ldots.\right), \\ u_{\theta} &= \varepsilon^{-3}\left(u_{\theta 0} + \varepsilon u_{\theta 1} + \ldots.\right) \end{aligned} \qquad (3)$$

Подстановка (3) в (1), (2) приводит к системе, последовательное интегрирование которой дает соотношения для коэффициентов разложения (3):

$$\begin{aligned} &u_{\theta 0} = c_1\left(\rho\right),\ u_{\theta 1} = c_3\left(\rho\right), \\ &u_{\rho 0} = \left(c_1\left(\rho\right) - \rho c_1'\left(\rho\right)\right)\cdot\left(\eta+1\right) + c_2\left(\rho\right), \\ &u_{\rho 1} = \left(c_3\left(\rho\right) - \rho c_3'\left(\rho\right)\right)\cdot\left(\eta+1\right) + c_4\left(\rho\right), \end{aligned} \qquad (4)$$

где $\bar{y}_1 = \left(c_1, c_2\right)^T$, $\bar{y}_2 = \left(c_3, c_4\right)^T$ решения соответственно уравнений

$$B\bar{y}_1 = \bar{d}_1,\ B\bar{y}_2 = \bar{d}_2. \qquad (5)$$

Здесь

$$B = \partial_1^4 B_4 + \partial_1^3 B_3 + \partial_1^2 B_2 + \partial_1 B_1 + B_0,$$

$$B_0 = \begin{Vmatrix} -\left(m_0+t_0\right) & -\left(m_0+t_0\right) \\ 2t_1 - 2t_0 - 2m_0 + m_1 & t_1 - t_0 - m_0 \end{Vmatrix},$$

$$B_1 = \begin{Vmatrix} 2t_1 + m_1 + t_0 + m_0 & 2\left(b_{11}^{(0)} - p_0\right) \\ 4t_1 - 6t_2 + 2t_0 + 2m_1 - 2m_2 + 2m_0 & 2t_1 + m_1 - t_0 - m_0 + 6\left(b_{11}^{(0)} - p_0 - b_{11}^{(1)} + p_1\right) \end{Vmatrix},$$

$$B_2 = \begin{Vmatrix} 3\left(p_1 + p_0 - b_{11}^{(1)} - b_{11}^{(0)}\right) & b_{11}^{(0)} - p_0 \\ m_0 + t_0 - 3t_2 - m_2 + & \\ +12\left(p_0 - p_2 - b_{11}^{(0)} + b_{11}^{(2)}\right) & 6\left(b_{11}^{(0)} - b_{11}^{(1)} - p_0 + p_1\right) \end{Vmatrix},$$

$$B_3 = \begin{Vmatrix} p_0 + p_2 - b_{11}^{(1)} + b_{11}^{(0)} & 0 \\ 8\left(p_0 - p_2 - b_{11}^{(0)} + b_{11}^{(2)}\right) & b_{11}^{(0)} - b_{11}^{(1)} - p_0 + p_1 \end{Vmatrix},$$

$$B_4 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ p_0 - p_2 - b_{11}^{(0)} + b_{11}^{(2)} & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\bar{d}_1 = \left(0;\ \rho f\left(\rho\right)\right)^T,\ \bar{d}_2 = \left(\rho h\left(\rho\right);\right.$$

$$\left.4\rho h^{-}\left(\rho\right) + 2\rho\left(\rho h^{-}\left(\rho\right)\right)'\right)^T,$$

$$b_{ij}^{(k)} = \int_{-1}^{1} b_{ij}\left(\eta\right)\cdot\eta^k d\eta,\quad p_k = \int_{-1}^{1} \frac{b_{12}^2\left(\eta\right)}{b_{22}\left(\eta\right)}\cdot\eta^k d\eta,$$

$$m_k = \int_{-1}^{1} \frac{\left(b_{22}^2\left(\eta\right) - b_{23}^2\left(\eta\right)\right)}{b_{22}\left(\eta\right)}\cdot\eta^k d\eta.$$

$$t_k = \int_{-1}^{1} \frac{b_{12}\left(\eta\right)\left(b_{23}\left(\eta\right) - b_{22}\left(\eta\right)\right)}{b_{22}\left(\eta\right)}\cdot\eta^k d\eta;$$

Построение и анализ однородных решений. Однородным решением назовем всякое решение уравнений (1), удовлетворяющее условию отсутствия напряжений на конических границах плиты.

Построим однородные решения. Положим в (2) $\bar{g}^{\pm}\left(\rho\right) = \bar{0}$:

$$M\,\bar{u}\,\big|_{\eta=\pm1} = \bar{0}. \qquad (6)$$

Отыскивая решения задачи (1), (6) в виде

$$\bar{u}\left(\rho;\eta\right) = \rho^{z-\frac{1}{2}}\bar{w}\left(\eta\right),\ \bar{w}\left(\eta\right) = \left(a\left(\eta\right),\ c\left(\eta\right)\right)^T,$$

получаем несамосопряженную спектральную задачу со спектральным параметром z:

$$\begin{cases} \left(L_0 + \varepsilon\left(z-\dfrac{1}{2}\right)\left(L_1 - \varepsilon L_2\right) + \varepsilon^2\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2 L_2\right)\bar{w} = \bar{0}, \\ \left(M_0 + \varepsilon\eta\left(z-\dfrac{1}{2}\right)M_1\right)\bar{w} = \bar{0} \qquad \eta\pm1. \end{cases} \qquad (7)$$

При $\varepsilon \to 0$ для решения (7) воспользуемся асимптотическим методом [9]. Однородные решения, соответствующие первому итерационному процессу, можно получить из (4), (5), если в них положить $\bar{g}^{\pm}(\rho) = \bar{0}$. В результате получаем три группы решений:

$$\begin{cases} u_{\rho}^{(0)}(\rho,\eta) = \varepsilon\rho^{-1}D\left(-2\left(m_0+t_0\right)\eta + 2t_1 + m_1 + O(\varepsilon)\right), \\ u_{\theta}^{(0)}(\rho,\eta) = D\rho^{-1}\left(-\left(m_0+t_0\right) + O(\varepsilon)\right). \end{cases} \qquad (8)$$

$$\begin{cases} u_{\rho}^{(1)}(\rho,\eta) = \varepsilon\, B\cdot\left(\eta + O(\varepsilon)\right), \\ u_{\theta}^{(1)}(\rho,\eta) = B\left(1 + O(\varepsilon)\right). \end{cases} \qquad (9)$$

$$\begin{cases} u_{\rho}^{(2)}(\rho,\eta) = \rho^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{4} A_k u_{\rho k}^{(2)}(\rho,\eta), \\ u_{\theta}^{(2)}(\rho,\eta) = \rho^{-\frac{1}{2}}\varepsilon^{-1}\sum_{k=1}^{4} A_k u_{\theta k}^{(2)}(\rho,\eta), \end{cases} \qquad (10)$$

где

$$u_{\rho k}^{(2)}(\rho,\eta) = \left\{\left(\frac{3}{2} - z_{0k}\right)\left[\left(z_{0k}^2 - \frac{1}{4}\right)\left(p_0 - b_{11}^{(0)}\right) + t_0 + m_0\right](\eta+1) + \right.$$
$$+\left(z_{0k} - \frac{3}{2}\right)\left(m_0 + m_1 + t_1 + t_0\right) -$$
$$\left. -\left(z_{0k} - \frac{3}{2}\right)\left(z_{0k}^2 - \frac{1}{4}\right)\left(b_{11}^{(1)} - p_1 + b_{11}^{(0)} - p_0\right) + \left(z_{0k} + \frac{1}{2}\right)t_1 + m_1 + O(\varepsilon)\right\}\times$$
$$\times\exp\left(z_{0k}\ln\rho\right) u_{\theta k}^{(2)}(\rho,\eta) =$$
$$= \left[\left(z_{0k}^2 - \frac{1}{4}\right)\left(p_0 - b_{11}^{(0)}\right) + t_0 + m_0 + O(\varepsilon)\right]\exp\left(z_{0k}\ln\rho\right)$$

z_{0k} удовлетворяет биквадратному уравнению

$$l_0 z_{0k}^4 + l_1 z_{0k}^2 + l_2 = 0 \qquad (11)$$

где

$$l_0 = \left(b_{11}^{(1)} - p_1 + b_{11}^{(0)} - p_0\right)\left(p_0 - p_1 - b_{11}^{(0)} + b_{11}^{(1)}\right) +$$
$$+\left(b_{11}^{(0)} - p_0\right)\left(p_2 - p_0 - b_{11}^{(2)} + b_{11}^{(0)}\right),$$

$$l_1 = \left(b_{11}^{(0)} - p_0\right)\left(3t_2 + m_2 - m_0 - t_0\right) +$$
$$+\left(b_{11}^{(1)} + b_{11}^{(0)} - p_0 - p_1\right)\left(t_0 + m_0 - m_1 - 2t_1\right) -$$
$$-\left(b_{11}^{(1)} - b_{11}^{(0)} - p_1 + p_0\right)\left(2t_1 + m_0 + t_0 + m_1\right) -$$
$$-\left(t_0 + m_0\right)\left(p_2 - b_{11}^{(2)} + b_{11}^{(0)} - p_0\right) -$$
$$-\frac{5}{2}\left(b_{11}^{(0)} - p_0\right)\left(p_2 - b_{11}^{(2)} + b_{11}^{(0)} - p_0\right) -$$
$$-\frac{5}{2}\left(p_0 - p_1 - b_{11}^{(0)} + b_{11}^{(1)}\right)\left(b_{11}^{(1)} + b_{11}^{(0)} - p_0 - p_1\right);$$

$$l_2 = \left(p_0 - p_1 - b_{11}^{(0)} + b_{11}^{(1)}\right)\left(\frac{3}{2}t_1 + \frac{9}{4}m_0 + \frac{9}{4}t_0 + \frac{3}{4}m_1\right) +$$
$$+\left(b_{11}^{(0)} + b_{11}^{(1)} - p_0 - p_1\right)\left(\frac{3}{4}m_1 + \frac{3}{2}t_1 - \frac{9}{4}t_0 - \frac{9}{4}m_0\right) +$$
$$+\left(p_2 - p_0 - b_{11}^{(2)} + b_{11}^{(0)}\right)\left(\frac{9}{16}b_{11}^{(0)} - \frac{9}{16}p_0 + \frac{9}{4}m_0 + \frac{9}{4}t_0\right) +$$
$$+\left(b_{11}^{(0)} - p_0\right)\left(\frac{9}{4}m_0 + \frac{9}{4}t_0 - \frac{1}{4}m_2 - \frac{15}{4}t_1 - \frac{3}{4}t_2\right) +$$
$$+\frac{9}{16}\left(b_{11}^{(1)} + b_{11}^{(0)} - p_0 - p_1\right)\left(p_0 - p_1 - b_{11}^{(0)} + b_{11}^{(1)}\right) +$$
$$+4t_1^2 + 4m_1 t_1 + m_1^2 - m_0 m_2 - 3m_0 t_2 - t_0 m_2 - 3t_0 t_2;$$

D, B, A_k – неизвестные постоянные.

Решения (8), (9) соответствуют собственным значениям $z_0^{(0)} = -\frac{1}{2}$ и $z_0^{(1)} = \frac{1}{2}$.

Решение (10) соответствует собственным значиям $z_{\kappa}^{(2)} = z_{0k} + \varepsilon^2 z_{2k} + \ldots..$

Второй итерационной процесс здесь отсутствует, т.е. отсутствует решение, имеющее характер краевого эффекта.

Решения (7), соответствующие третьему итерационному процессу, отыскиваем в виде

$$a = \varepsilon\left(a_0 + \varepsilon a_{1_1} + \ldots.\right),\ c = \varepsilon\left(c_0 + \varepsilon c_{1_1} + \ldots.\right), \qquad (12)$$
$$z = \varepsilon^{-1}\left(\alpha_0 + \varepsilon\alpha_{1_1} + \ldots.\right).$$

После подстановки (12) в (7) для первых членов разложения получаем спектральную задачу, описывающую потенциальное решение трансверсально-изотропной плиты, неоднородной по толщине [7]:

$$L(\alpha_0)\bar{w}_0 = \left\{l_0(\alpha_0)\bar{w}_0;\ l_1(\alpha_0)\bar{w}_0 = \bar{0} \ \text{при}\ \eta = \pm 1\right\} = \bar{0}, \qquad (13)$$

$$l_0(\alpha_0) = L_{00} + \alpha_0 L_{10} + \alpha_0^2 L_2,\ \ l_1(\alpha_0) = M_{00} + \alpha_0 M_1,$$

$$L_{00} = \left\| \begin{matrix} \partial\left(b_{44}\partial\right) & 0 \\ 0 & \partial\left(b_{22}\partial\right) \end{matrix} \right\|,$$
$$L_{10} = \left\| \begin{matrix} 0 & \partial\left(b_{44}\right) + b_{12}\partial \\ \partial\left(b_{12}\right) + b_{44}\partial & 0 \end{matrix} \right\|,$$

$$M_{00} = \left\| \begin{matrix} b_{44}\partial & 0 \\ 0 & b_{22}\partial \end{matrix} \right\|,\ \ \bar{w}_0 = \left(a_0, c_0\right)^T.$$

При помощи замены

$$a_0 = \alpha_0^{-2} q_0 f'' - q_1 f,$$
$$c_0 = -\alpha_0^{-3}\left(q_0 f''\right)' + \alpha_0^{-1} q_2 f' + \alpha_0^{-1}\left(q_1 f\right)'$$

спектральная задача (13) сводится к следующей

$$\begin{cases} \left(q_0 f''\right)'' - \alpha_0^2\left[\left(q_1 f\right)'' + q_1 f'' + \left(q_2 f'\right)'\right] + \alpha_0^4 q_3 f = 0, \\ f'\big|_{\eta=\pm 1} = 0,\quad \alpha_0 f\big|_{\eta=\pm 1} = 0, \end{cases} \qquad (14)$$

где

$$q_0 = b_{22}\chi,\ q_1 = b_{12}\chi,\ q_3 = b_{11}\chi,$$
$$q_2 = b_{44}^{-1},\ \chi = \left(b_{12}^2 - b_{11}b_{22}\right)^{-1}.$$

(14) является обобщением спектральной задачи П. Ф. Панковича на неоднородный трансверсально-изотропный случай [7].

Решения, соответствующие третьему итерационному процессу, имеют вид:

$$u_\rho^{(3)}(\rho,\eta) = \varepsilon\rho^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}F_k\left(\alpha_{0k}^{-2}q_0 f_k''(\eta) - q_1 f_k(\eta) + O(\varepsilon)\right)\exp\left(\frac{\alpha_{0k}}{\varepsilon}\ln\rho\right), \quad (15)$$
$$u_\theta^{(3)}(\rho,\eta) = \varepsilon\rho^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}F_k\left(-\alpha_{0k}^{-3}\left(q_0 f_k''(\eta)\right)' + \alpha_{0k}^{-1}q_2 f_k'(\eta) + \alpha_{0k}^{-1}\left(q_1 f_k(\eta)\right)' + O(\varepsilon)\right)\exp\left(\frac{\alpha_{0k}}{\varepsilon}\ln\rho\right).$$

Общим решением (1), (6) будет сумма решений (8)–(10), (15), соответствующих вышеприведенным итерационным процессам, т.е.

$$u_\rho(\rho,\eta) = u_\rho^{(0)} + u_\rho^{(1)} + u_\rho^{(2)} + u_\rho^{(3)},$$
$$u_\theta(\rho,\eta) = u_\theta^{(0)} + u_\theta^{(1)} + u_\theta^{(2)} + u_\theta^{(3)}.$$

Определим характер построенных однородных решений. Напряженное состояние, определяемое решением (8), эквивалентно главному вектору усилий P, направленному вдоль оси симметрии. Постоянная D связана с P соотношением:

$$P = -2\pi\varepsilon^3\beta_0 D,$$

где

$$\beta_0 = \left(2m_0 + 2t_0 + 2t_1 + m_1\right)\left(p_1 - 2t_1 + t_0 + m_0 - m_1 - b_{11}^{(1)}\right) - \left(m_0 + t_0\right)\times$$
$$\times\left(2p_1 - 2t_1 + 2p_2 - 3t_2 + 2m_0 + 2t_0 - m_1 - m_2 - 2b_{11}^{(1)} - 2b_{11}^{(2)}\right) + O(\varepsilon).$$

Главный вектор напряжений в сечении $\rho = const$ для остальных однородных решений равен нулю. Решение (8) определяет внутреннее напряженно-деформированное состояние плиты.

Напряженное состояние, определяемое решением (9), соответствует перемещению плиты как твердого тела. Поэтому можно принять $B = 0$,

Напряженное состояние, определяемое решением (10), эквивалентно перерезывающим усилиям и изгибающим моментам, отнесенным к срединной плоскости плиты.

Решения (15) имеют характер пограничного слоя. Первые члены (15) совпадают с решениями типа пограничного слоя для неоднородной трансверсально-изотропной плиты постоянной толщины [7]. Для мнимых α_{0k} погранслойные решения затухают весьма слабо. В этом случае напряженно-деформированное состояние трансверсально-изотропной и изотропной неоднородной плиты качественно отличаются.

Допустим на сферической части границы (на боковых поверхностях) плиты заданы напряжения:

$$\sigma_{\rho\rho} = \gamma_{1s}(\eta),\ \sigma_{\rho\theta} = \gamma_{2s}(\eta) \text{ при } \rho = \rho_s\ . \quad (16)$$

Здесь $\gamma_{1s}(\eta), \gamma_{2s}(\eta)$ -достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям равновесия.

Как было показано, не самоуравновешенную часть напряжений можно снять при помощи проникающего решения (8). Для определения неизвестных постоянных A_k, F_k, входящих в (10), (15), используя вариационный принцип Лагранжа, получаем соответственно конечную и бесконечную систему линейных алгебраических уравнений [4–7]. При $\varepsilon \to 0$ можно построить асимптотическое решения этих систем. Если неизвестные постоянные A_k, F_k отыскиваем в виде

$$F_k = F_{k0} + \varepsilon F_{k1} + ...,\ A_k = A_{k0} + \varepsilon A_{k1} + ...$$

для определения A_{k0}, F_{k0} имеем [7]:

$$\sum_{k=1}^{4} m_{jk}A_{k0} = h_j';\ \left(j = \overline{1,4}\right) \quad (17)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_{nk}F_{k0} = h_n'';\left(n = 1,2,...\right) \quad (18)$$

Определение $F_{kn}, A_{kn}\ (n = 1,2,...)$ неизменно сводится к обращению одних и тех же матриц, которые совпадают с матрицами системы (17), (18).

Выводы. Рассмотрена осесимметричная задача теории упругости для неоднородной трансверсально-изотропной плиты с линейно изменяющейся толщиной, которая представляет собой тело с двумя коническими и двумя сферическими границами. Показано, что методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости может быть исследована осесимметричная задача теории упругости для неоднородной трансверсально-изотропной плиты переменной толщины. На основе построения неоднородного и однородного решений и использования асимптотического анализа разъяснен характер напряженно-деформированного состояния.

Список литературы:

1. *Мехтиев, М. Ф.* Асимптотический анализ некоторых пространственных задач теории упругости для полых тел [Текст] / *М. Ф. Мехтиев.* – Баку: НАН Азербайджана, 2008. – 320 с.
2. *Мехтиев, М. Ф.* Метод однороднх решений в анизотропной теории оболочек [Текст] / *М. Ф. Мехтиев.* – Баку: Чашыоглу, 2009. – 334 с.
3. *Мехтиев, М. Ф.* Асимптотическое исследовании решения задачи теории упругости для полого конуса [Текст] / *М. Ф. Мехтиев,*

Ю. А. Устинов // Прикладная математика и механика. – 1971. – Т. 35, № 6. – С. 1108–1115.

4. *Ахмедов, Н. К.* Анализ трехмерной задачи теории упругости для неоднородного усеченного полого конуса [Текст] / *Н. К. Ахмедов, М. Ф. Мехтиев* // Прикладная математика и механика. – 1993. – Т. 57, № 5. – С. 113–119.

5. *Ахмедов, Н. К.* Осесимметричная задача теории упругости для неоднородной плиты переменной [Текст] / *Н. К. Ахмедов, М. Ф. Мехтиев* // Прикладная математика и механика. – 1995. – Т. 59, № 3. – С. 518–523.

6. *Ахмедов, Н. К.* Анализ некоторых задач теории упругости для неоднородных оболочек [Текст] / *Н. К. Ахмедов*. – Саарбрюккен: LAP, 2012. – 345 с.

7. *Ахмедов, Н. К.* Анализ осесимметричной задачи теории упругости для неоднородной трансверсально-изотропной конической оболочки [Текст] / *Н. К. Ахмедов, М. Ф. Мехтиев, Г. Н. Шахвердиева* // Известия высших учебных заведений. Северо-кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2015. – № 2 (186). – С. 5–11.

8. *Лурье, А. И.* Теория упругости [Текст] / *А. И. Лурье*. – Москва: Наука, 1970. – 939 с.

9. *Гольденвейзер, А. Л.* Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости [Текст] / *А. Л. Гольденвейзер* // Прикладная математика и механика. – 1963. – Т. 27, № 4. – С. 593–608.

10. *Плевако, В. П.* Аналитическое исследование изгиба неоднородных по толщине изотропных плит [Текст] / *В. П. Плевако, В. О. Потапов, В. А. Куценко, И. В. Лебединець, И. П. Педорич* // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2016. – № 4/7 (82). – С. 10–16.

Bibliography (transliterated):

1. Mehdiyev, M. F. (2008). The asymptotic analysis of some three-dimensional problems of elasticity theory for hollow bodies. Baku: Azerbaijan National Academy of Sciences, 320.

2. Mehdiyev, M. F. (2009). Method odnorodnh solutions anisotropic theory of shells. Baku: Chashyoglu, 334.

3. Mehdiyev, M. F., Ustinov Y. A. (1971). The asymptotic study of solutions of elasticity theory for a hollow cone. Applied Mathematics and Mechanics, 35 (6), 1108–1115.

4. Akhmedov, N. K., Mehdiyev, M. F. (1993). An analysis of three-dimensional elasticity problems for inhomogeneous truncated hollow cone. Applied Mathematics and Mechanics, 57 (5), 113–119.

5. Akhmedov, N. K., Mehdiyev, M. F. (1995). Axisymmetric task of elasticity theory for an inhomogeneous plate of variable thickness. Applied Mathematics and Mechanics, 59 (3), 518–523.

6. Akhmedov, N. K. (2012). Analysis of some problems of elasticity theory for inhomogeneous shells. Saarbrucken: LAP, 345.

7. Akhmedov, N. K., Mehdiyev, M. F., Shahverdiyev, G. N. (2015). Analysis of Axisymmetric Problem of Elasticity Theory for Inhomogeneous Transversally-Isotropic Conic Shell. Proceedings of the higher educational institutions. North-Caucasian region. Series: Natural Sciences, 2 (186), 5–11.

8. Lurie, A. I. (1970). The theory of elasticity. Moscow: Nauka, 939.

9. Goldenveizer, A. L. (1963). An approximate theory of shells with the help of asymptotic integration of the equations of the theory of elasticity. Applied Mathematics and Mechanics, 27 (4), 593–608.

10. Plevako, V. P., Potapov, V. O., Kycenko, V. A., Lebedynecj, I. V., Pedorych, I. P. (2016). Analytical study of the bending of isotropic plates, inhomogeneous in thickness. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 4(7(82)), 10–16. doi:10.15587/1729-4061.2016.75052

Поступила (received) 18.02.2016

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Аналіз тривимірної задачі теорії пружності для неоднорідної трансверсально-ізотропної плити змінної товщини/ Н. К. Ахмедов, Г. Н. Шахвердієва// Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Механіко-технологічні системи та комплекси. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 7(1179). – С. 8–12.– Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2079-5459.

Анализ трехмерной задачи теории упругости для неоднородной трансверсально-изотропной плиты переменной толщины/ Н. К. Ахмедов, Г. Н. Шахвердиева// Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Механіко-технологічні системи та комплекси. – Харків : НТУ «ХПІ», 2016. – № 7(1179). – С.8–12. – Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2079-5459.

Analysis of three-dimensional problem of elasticity theory for a variable thickness inhomogeneous transversally-isotropic plate/ N. K. Akhmedov, G. N. Shahverdiyeva//Bulletin of NTU “KhPI”. Series: Mechanical-technological systems and complexes. – Kharkov: NTU “KhPI”, 2016. – № 7 (1179).– P.8–12. – Bibliogr.: 10. – ISSN 2079-5459.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ахмедов Натік Каракіші огли – доктор математичних наук, Азербайджанський Державний Економічний Університет, професор, завідувач кафедри «Математики»; вул. Істіглаліят, 6, м. Баку, Азербайджан, AZ1001; e-mail: anatiq@gmail.com.

Шахвердієва Гюльназ Наріман кизи – Бакинський Слов'янський Університет, викладач кафедри «Математики та інформатики»; вул. С. Рагимова, 145, м. Баку, Азербайджан, AZ-1141; e-mail: bgnq@mail.ru.

Ахмедов Натик Каракиши оглы – доктор математических наук, Азербайджанский Государственный Экономический Университет, профессор, заведующий кафедрой «Математики»; ул. Истиглалият, 6, г. Баку, Азербайджан, AZ1001; тел.: 050-333-61-14; e-mail: anatiq@gmail.com.

Шахвердиева Гюльназ Нариман кызы – Бакинский Славянский Университет, преподаватель кафедры «Математики и информатики»; ул. С. Рагимова, 145, г. Баку, Азербайджан, AZ-1141; тел.: e-mail: bgnq@mail.ru.

Natig Ahmadov Karakishi oglu – Doctor of Mathematical Sciences, Azerbaijan State Economic University, Professor, Head of the Department "Mathematics"; Istiglaliyyat str., 6, Baku, Azerbaijan, AZ1001; e-mail: anatiq@gmail.com.

Shahverdiyev Gulnaz Nariman gizi – Baku Slavic University, teacher of "Mathematics and Informatics"; S. Rahimov str., 145, Baku, Azerbaijan, AZ-1141; tel.: e-mail: bgnq@mail.ru.