

Є. П. ЗАЙЦЕВ

### РОЗРАХУНОК ВПЛИВУ ПОДВІЙНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ І АНІЗОТРОПІЇ МАТЕРІАЛУ НА РОЗПОДІЛ ТЕМПЕРАТУР В ЦИЛІНДРІ ПРИ ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОМУ ТЕПЛООБМІНІ

На основі розробленого методу розв'язання крайових задач двічі нелінійної нестационарної теплопровідності, розглянуто вплив термочувливості матеріалу, зонального конвективно-променевого теплообміну і анізотропії на розподіл температурних полів по довжині, в центрі і поверхні напівнескінченного суцільного циліндра. Встановлено, що при зростанні критерію Фур'є якісно змінюється характер нагріву від осі до поверхні циліндра, як за нелінійностями, так і анізотропії. Для випадку подвійної нелінійності, графічно показано розподіл температурних полів при різних анізотропіях в порівнянні з ізотропним матеріалом.

**Ключові слова:** теплопровідність, термочувливість, суперпозиція, перетворення Гудмена і Кірхгофа, ряди Фур'є.

E. P. ZAYTSEV

### РАСЧЕТ ВЛИЯНИЯ ДВОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ И АНИЗОТРОПИИ МАТЕРИАЛА НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУР В ЦИЛИНДРЕ ПРИ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОМ ТЕПЛООБМЕНЕ

На основе разработанного метода решения краевых задач дважды нелинейной нестационарной теплопроводности, рассмотрено влияние термочувствительности материала, зонального лучисто-конвективного теплообмена и анизотропии на распределение температурных полей по длине, в центре и поверхности полубесконечного сплошного цилиндра. Установлено, что при возрастании критерия Фурье качественно меняется характер нагрева от оси к поверхности цилиндра, как по нелинейностям, так и анизотропии. Для случая двойной нелинейности, графически показаны распределения температурных полей при различных анизотропиях в сравнении с изотропным материалом.

**Ключевые слова:** теплопроводность, термочувствительность, суперпозиция, преобразования Гудмена и Кирхгофа, ряды Фурье.

E. ZAYTSEV

### THE CALCULATION OF DOUBLE NONLINEARITY AND MATERIAL ANISOTROPY INFLUENCE ON THE TEMPERATURE DISTRIBUTION IN THE CYLINDER UNDER HIGH TEMPERATURE HEAT EXCHANGE

At the present stage of the development of technology, it is necessary to ensure the strength, reliability and durability of the structure that successfully functions under conditions of high-temperature heat exchange as maximum as possible. In this regard, graphite structural elements are widely used, and they are also applied for parts of space and aircraft, jet and rocket engines. The transversely isotropic graphite cylinder used in this work has a unique set of qualities that make it indispensable for problems in nuclear physics and power engineering; however, in the calculation of thermal engineering practice, it has not been studied enough, since it contains a large scatter of thermophysical characteristics for various grades of graphite. The aim of the study, including the basis of the developed method for solving boundary value problems of doubly nonlinear unsteady thermal conductivity, is to consider the effect of temperature dependences of the thermophysical characteristics of the material on temperature, zonal radiative-convective heat transfer and anisotropy on the distribution of temperature fields along the length, at the center and surface of a semi-infinite solid cylinder. The essence of this method is that the Goodman's and Kirchhoff's transformations are applied to the problem posed converted to a dimensionless form, then the relative temperature and functions from it, are expanded in the series of sines on the a priori interval, then the superposition principle is applied, after which the original setting is converted to a set of linearized problems with reduced thermophysical characteristics. Linear problems are solved by the method of integral transformations, which are summed up. The upper limit of the priori interval is determined from the condition that the relative temperature obtained from the solution of the problem  $Fo \rightarrow \infty$  takes the value of the upper limit of the a priori interval. A large number of numerical calculations in the Matlab environment graphically show changes in the relative temperature on the axis and surface of the cylinder in a wide range of Fourier criteria. It is found that with an increase in the Fourier criterion, the character of heating changes qualitatively from the axis to the surface of the cylinder, both in terms of nonlinearities and anisotropy. For the case of double nonlinearity, the location of the temperature fields at different anisotropies in comparison with an isotropic material is shown graphically.

**Key words:** heat conduction, thermosensitivity, superimposition, Goodman and Kirchhoff transformations, Fourier series.

#### Вступ

Рішення задач теплопровідності представляють суттєвий теоретичний і практичний інтерес у зв'язку з швидким розвитком нової техніки, зокрема, високотемпературного аеродинамічного теплообміну, атомної енергетики, космічної галузі, радіоелектроніки та зварювального виробництва. Знання температурних полів в різних елементах конструкцій необхідно враховувати також при

розрахунках багатьох технологічних процесів, що зустрічаються в теплоенергетиці, машинобудуванні, будівництві та металургійній теплотехніці.

Серед розширеної номенклатури конструкційних матеріалів, успішно функціонуючих в умовах високотемпературного теплообміну (терморадіаційного, аеродинамічного, конвективно-променевого), широкі застосування знаходять анізотропні матеріали, які застосовуються для деталей космічних і по-вітряних літальних апаратів,

реактивних і ракетних двигунів. Великі градієнти температури, які виникають при цьому, вимагають в відповідній математичній постановці задачі теплопровідності обліку, як залежності теплофізичних характеристик матеріалу від температури, так і високотемпературного теплообміну з навколишнім середовищем, що робить поставлену задачу двічі нелінійною. При цьому значно підвищуються вимоги до точності визначення температур і теплових потоків. У зв'язку з цим зростає роль наближених аналітичних методів розв'язання крайових задач нестационарної теплопровідності в двічі нелінійній постановці, з урахуванням анізотропії матеріалу, що в ряді випадків дозволяє представити рішення у вигляді, зручному для оцінки теплового режиму твердого тіла, виділити переважаючі фактори теплообміну і використати отримані результати для подальшого розрахунку термонапруженого стану тіла [1, 2]. Використаний в роботі для розрахунку трансверсально-ізотропний графіт володіє унікальним набором якостей, які роблять його незамінним для задач ядерної фізики та енергетики [3]. При обліку нелінійностей в задачах теплопровідності, переважно використовують наближені аналітичні та чисельні методи [4–7]. Проте, серед них незначна частина робіт вирішувалася в двічі нелінійній постановці, з подальшим аналізом впливу нелінійностей і анізотропії на розподіл відносної температури. Тому дана робота частково усуває цю прогалину і може слугувати в якості тестових рішень для оцінки достовірності чисельних результатів. Актуальність розв'язуваної задачі полягає в тому, що розробка наближеного аналітичного метода, дозволяє найбільш повно і адекватно враховувати властивості матеріалу, анізотропію і високотемпературний теплообмін з навколишнім середовищем, оскільки правильно організований теплообмін є неодмінною умовою безпечної і безаварійної роботи теплових агрегатів, в тому числі теплоенергетики і авіаційної промисловості.

### Мета роботи

Метою дослідження є встановлення кількісного і якісного впливу подвійної нелінійності і анізотропії на розподіл температурних полів в циліндрі, який зонально нагрівається високотемпературним теплообміном при різних значеннях критерію Фур'є.

### Виклад основного матеріалу

Розглянемо напівнескінчений суцільний трансверсально-ізотропний циліндр радіуса  $R$ , який має нульову початкову температуру, вісь якого поєднана з віссю циліндричної системи координат  $(r, \varphi, z)$ , а її початок розташовано на торці циліндра. По поверхні ( $r = R$ ), циліндр осесиметрично і

зонально нагрівається зміщеним конвективно-променевим середовищем, з температурою  $T_c$ :

$$\psi(z, t) = T_c H(t)(H(g + d - z) - H(g - d - z));$$

$$H(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ 0, & \xi < 0, \end{cases}$$

а на торці має місце конвективний теплообмін за законом Ньютона, де  $H$  – функція Хевісайда,  $d$  – половина довжини зони, віддаленої від початку координат на відстань  $g$ . Потрібно знайти розподіл температури  $T(r, z, t)$  по осі циліндра в залежності від критерію Фур'є.

Нестационарне температурне поле в циліндрі може бути визначено з вирішення наступної крайової задачі, записаної в розмірному вигляді:

$$\begin{aligned} & \circ C_v(T)T_{,t} = (\lambda_r(T)T_{,r})_{,r} + \lambda_r(T)T_{,r}/r + (\lambda_z(T)T_{,z})_{,z}, \\ & (0 < r < R, 0 < z < \infty, t > 0); T(r, z, t)|_{t=0} = 0; \\ & T_{,r}|_{r=0} = 0; \{\lambda_z(T)T_{,z} - \alpha_2 T\}|_{z=0} = 0; \lambda_r(T)T_{,r}|_{r=R} = \\ & = \{\alpha_1(\psi(z, t) - T) + \sigma_b(\psi^4(z, t) - T^4)\}, \bullet \quad (1) \end{aligned}$$

де  $\circ$  і  $\bullet$  – початок і кінець групи співвідношень; диференціювання показано через кому;  $\sigma_b = \varepsilon \sigma_0$  – наведений коефіцієнт теплообміну випромінюванням;

$\varepsilon$  – степінь чорноти;

$\sigma_0$  – постійна Стефана-Больцмана;

$\alpha_1, \alpha_2$  – коефіцієнти тепловіддачі.

Перетворимо поставлену задачу (1) до наступного безрозмірного вигляду відносно

$$\theta(\rho, \eta, Fo) = T(r, z, t)/T_c:$$

$$\begin{aligned} & \circ C_v^*(\theta)\theta_{,Fo} = (\lambda_r^*(\theta)\theta_{,\rho})_{,\rho} + \lambda_r^*(\theta)\theta_{,\rho}/\rho + \\ & + \kappa^2(\lambda_z^*(\theta)\theta_{,\eta})_{,\eta}, (0 < \rho < 1, 0 < \eta < \infty, Fo > 0); \\ & \theta_{,\rho}|_{\rho=0} = 0; \theta(\rho, \eta, Fo)|_{Fo=0} = 0; \\ & \{\lambda_z^*(\theta)\theta_{,\eta} - Bi_2\theta\}|_{\eta=0} = 0; \lambda_r^*(\theta)\theta_{,\rho}|_{\rho=1} = \\ & = \{Bi_1(\chi(\eta, Fo) - \theta) + Sk(\chi^4(\eta, Fo) - \theta^4)\}, \bullet \quad (2) \end{aligned}$$

де теплофізичні характеристики представлені у вигляді добутку двох множників, з яких перший з індексом «нуль» розмірний і не змінюється, а другий, позначений зірочкою, безрозмірний і є функцією температури  $\theta$ :

$$\lambda_r(T) = \lambda_{r0}\lambda_r^*(\theta); \lambda_z(T) = \lambda_{z0}\lambda_z^*(\theta);$$

$$C_v(T) = C_{v0}C_v^*(\theta); \rho = \frac{r}{R}; \eta = \frac{z}{R};$$

$$a = \frac{\lambda_{r0}}{C_{v0}}; Fo = \frac{at}{R^2}; Bi_1 = \frac{\alpha_1 R}{\lambda_{r0}}; Bi_2 = \frac{\alpha_2 R}{\lambda_{z0}}$$

$$\kappa^2 = \frac{\lambda_{z0}}{\lambda_{r0}}; \beta = \frac{d}{R}; \delta = \frac{g}{R}; \eta = \frac{z}{R}; Sk = \frac{\sigma_b R T_c^3}{\lambda_{r0}};$$

$$\chi(\eta, Fo) = H(Fo)(H(\delta + \beta - \eta) - H(\delta - \beta - \eta)).$$

Для вирішення системи (2) скористаємося методом суперпозиції [1], який дозволяє лінеаризу-

вати наведену систему. З цією метою введемо в (2) інтегральні аналоги, які є перетвореннями Гудмена і Кірхгофа:

$$\begin{aligned} \circ A(\theta) &= \int_0^\theta C_v^*(\theta')d\theta'; \quad B_r(\theta) = \int_0^\theta \lambda_r^*(\theta')d\theta'; \\ B_z(\theta) &= \int_0^\theta \lambda_z^*(\theta')d\theta'. \quad \bullet \end{aligned} \quad (3)$$

Використовуючи диференціальні співвідношення для переходу до нових функцій

$$\begin{aligned} A(\theta)_{,Fo} &= C_v^*(\theta)\theta_{,Fo}, \quad B_r(\theta)_{,p} = \lambda_r^*(\theta)\theta_{,p}, \\ B_z(\theta)_{,\eta} &= \lambda_z^*(\theta)\theta_{,\eta} \end{aligned}$$

перетворимо (2) до наступного еквівалентного вигляду:

$$\begin{aligned} \circ A(\theta)_{,Fo} &= B_r(\theta)_{,p} + \rho^{-1}B_r(\theta)_{,p} + \kappa^2 B_z(\theta)_{,\eta}; \\ \theta(\rho, \eta, Fo) \Big|_{Fo=0} &= 0; \quad \theta_{,p} \Big|_{\rho=0} = 0; \\ \{B_z(\theta)_{,\eta} - Bi_2\theta\} \Big|_{\eta=0} &= 0; \quad \theta, \theta_{,\eta} \rightarrow 0, \eta \rightarrow \infty; \\ B_r(\theta)_{,p} + (Bi_1\theta + Sk\theta^4) \Big|_{\rho=1} &= \\ = Bi_1\chi(\eta, Fo) + Sk\chi^4(\eta, Fo). \quad \bullet \end{aligned} \quad (4)$$

В (4) функції (3) і  $\theta^{(m)}$  ( $m = 1, 4$ ) неперервні і задовольняють умовам Діріхле [9] на апріорно обраному інтервалі  $(0, \theta_p)$  ( $\theta_p$  – поки невизначена постійна), а, отже, їх можна представити у вигляді наступних збіжних рядів Фур'є за синусами:

$$\begin{aligned} \theta &= \sum_{k=1}^\infty \alpha_k^{(1)} \sin\left(\frac{k\pi\theta}{\theta_p}\right) = \sum_{k=1}^\infty \theta^{(k)}; \quad (5) \\ (A(\theta), B_r(\theta), B_z(\theta), \theta^{(m)}) &= \\ = \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{a_k}{\alpha_k^{(1)}}, \frac{b_{rk}}{\alpha_k^{(1)}}, \frac{b_{zk}}{\alpha_k^{(1)}}, \frac{\alpha_k^{(m)}}{\alpha_k^{(1)}}\right) \theta^{(k)}, \quad (6) \end{aligned}$$

$$\left\{ \left(\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{b_{rk}}{\alpha_k^{(1)}}\right) \theta^{(k)}\right)_{,p} + Bi_1 \sum_{k=1}^\infty \theta^{(k)} + Sk \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{\alpha_k^{(4)}}{\alpha_k^{(1)}}\right) \theta^{(k)} \right\}_{\rho=1} = (Bi_1 \cdot \chi(\eta, Fo) + Sk \cdot \chi^4(\eta, Fo)) \sum_{k=1}^\infty \frac{e^{-1}}{(k-1)!} \quad \bullet \quad (9)$$

Застосовуючи до (9) принцип суперпозиції [1, 8], отримаємо сукупність задач теплопровідності:

$$\begin{aligned} \circ \theta_{,Fo_k}^{(k)} &= \theta_{,\rho p}^{(k)} + \rho^{-1}\theta_{,\rho}^{(k)} + \kappa_k^2 \theta_{,\eta\eta}^{(k)}; \\ \theta^{(k)}(\rho, \eta, Fo_k) \Big|_{Fo_k=0} &= 0; \\ \theta_{,\rho}^{(k)} \Big|_{\rho=0} &= 0; \quad \{ \theta_{,\eta}^{(k)} - Bi_{2k}\theta^{(k)} \} \Big|_{\eta=0} = 0; \\ \theta^{(k)}, \theta_{,\eta}^{(k)} &\rightarrow 0, \eta \rightarrow \infty; \\ \{ \theta_{,\rho}^{(k)} + Bi_{1k}\theta^{(k)} \} \Big|_{\rho=1} &= M_k, \quad (k = 1, 2, \dots). \quad \bullet \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$\circ Fo_k = \alpha_k Fo; \quad \alpha_k = \frac{b_{rk}}{a_k}; \quad \kappa_k^2 = \left(\frac{b_{zk}}{b_{rk}}\right) \cdot \kappa^2;$$

$$\begin{aligned} \text{де} \quad (a_k, b_{rk}, b_{zk}, \alpha_k^{(m)}) &= \\ = \frac{2}{\theta_p} \int_0^{\theta_p} (A(\theta), B_r(\theta), B_z(\theta), \theta^m) \sin \frac{k\pi\theta}{\theta_p} d\theta; \quad (7) \\ \circ \alpha_k^{(1)} &= \frac{2\theta_p(-1)^{k+1}}{k\pi}; \quad \alpha_k^{(3)} = \frac{2\theta_p^3(-1)^{k+1}[(k\pi)^2 - 6]}{(k\pi)^3}; \\ \alpha_k^{(2)} &= \frac{2\theta_p^2\{(-1)^{k+1}(k\pi)^2 - 2[(-1)^{k+1} + 1]\}}{(k\pi)^3}; \\ \alpha_k^{(4)} &= \frac{2\theta_p^4\{(-1)^{k+1}[(k\pi)^4 - 12(k\pi)^2 + 24] + 24\}}{(k\pi)^5}. \quad \bullet \end{aligned} \quad (8)$$

З урахуванням (5), (6) і розкладання експоненти  $e^x$  в ряд Маклорена при  $x = 1$ , тобто

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=1}^\infty \frac{e^{-1}}{(k-1)!}, \quad (4) \text{ перепишемо у вигляді:} \\ \circ \left(\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{a_k}{\alpha_k^{(1)}}\right) \theta^{(k)}\right)_{,Fo} &= \left(\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{b_{rk}}{\alpha_k^{(1)}}\right) \theta^{(k)}\right)_{,p} + \\ + \rho^{-1} \left(\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{b_{rk}}{\alpha_k^{(1)}}\right) \theta^{(k)}\right)_{,p} &+ \kappa^2 \left(\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{b_{zk}}{\alpha_k^{(1)}}\right) \theta^{(k)}\right)_{,\eta}; \\ \sum_{k=1}^\infty \theta^{(k)} \Big|_{Fo=0} &= 0; \quad \left(\sum_{k=1}^\infty \theta^{(k)}\right)_{,p} \Big|_{\rho=0} = 0; \\ \sum_{k=1}^\infty \theta^{(k)}, \left(\sum_{k=1}^\infty \theta^{(k)}\right)_{,\eta} &\rightarrow 0, \eta \rightarrow \infty, \\ \left\{ \left(\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{b_{zk}}{\alpha_k^{(1)}}\right) \theta^{(k)}\right)_{,\eta} - Bi_2 \sum_{k=1}^\infty \theta^{(k)} \right\} &\Big|_{\eta=0} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_k &= (Bi_1\chi(\eta, Fo) + Sk\chi^4(\eta, Fo)) \frac{\alpha_k^{(1)}}{eb_{rk}(k-1)!}; \\ Bi_{1k} &= \frac{\{Bi_1\alpha_k^{(1)} + Sk\alpha_k^{(4)}\}}{b_{rk}}, \quad Bi_{2k} = \frac{Bi_2\alpha_k^{(1)}}{b_{zk}}. \quad \bullet \end{aligned} \quad (11)$$

Застосуємо до системи (10) перетворення Фур'є за змінною  $\eta$  [10, 11]

$$\begin{aligned} \bar{\theta}^{(k)}(\rho, Fo_k) &= \int_0^\infty \theta^{(k)}(\rho, \eta, Fo_k) K_k(\rho, \eta) d\eta, \\ \text{де} \quad K_k(\rho, \eta) &= \rho \cos(\rho\eta) + Bi_{2k} \sin(\rho\eta). \end{aligned}$$

В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \circ \bar{\theta}_{,Fo_k}^{(k)} &= \bar{\theta}_{,\rho p}^{(k)} + \rho^{-1}\bar{\theta}_{,\rho}^{(k)} - \kappa_k^2 \rho^2 \bar{\theta}^{(k)}; \\ \bar{\theta}^{(k)}(\rho, p, Fo_k) \Big|_{Fo_k=0} &= 0; \quad \bar{\theta}_{,\rho}^{(k)} \Big|_{\rho=0} = 0; \end{aligned}$$

$$\left. \left\{ \bar{\theta}_{,p}^{(k)} + \text{Bi}_{1k} \bar{\theta}^{(k)} \right\} \right|_{p=1} = \bar{M}_k \cdot \bullet \quad (12)$$

Виконаємо перетворення Фур'є над виразом  $M_k$ , з урахуванням функції Хевісайда і позначення

$$D_k = \frac{(\text{Bi}_1 + Sk)\alpha_k^{(1)}}{eb_{rk}(k-1)!};$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_k &= \int_0^\infty (\text{Bi}_1 \chi(\eta, \text{Fo}_k) + Sk \chi^4(\eta, \text{Fo}_k)) \times \\ &\times \frac{\alpha_k^{(1)}}{eb_{rk}(k-1)!} K_k(p, \eta) d\eta = D_k H(\text{Fo}_k) \times \\ &\times \int_{\delta-\beta}^{\delta+\beta} K_k(p, \eta) d\eta = D_k H(\text{Fo}_k) A_k(p); \end{aligned}$$

$$A_k(p) = 2 \sin p\beta \left( \cos p\delta + \frac{\text{Bi}_{2k}}{p} \sin p\delta \right).$$

Застосовуючи до (12) скінчене перетворення Ханкеля [10, 11],

$$\bar{\theta}^{(k)*}(\mu_{ki}, p, \text{Fo}_k) = \int_0^1 \rho \bar{\theta}^{(k)}(\rho, \text{Fo}_k) \cdot J_0(\mu_{ki}\rho) d\rho,$$

де  $\mu_{ki}$  – додатні корені рівняння

$$\mu_{ki} J_1(\mu_{ki}) - \text{Bi}_{1k} J_0(\mu_{ki}) = 0.$$

Отримаємо наступне зображення:

$$\circ \bar{\theta}_{,\text{Fo}_k}^{(k)*} + w_{ni}^{(k)} \bar{\theta}^{(k)*} = D_k H(\text{Fo}_k) A_k(p) J_0(\mu_{ki});$$

$$\left. \bar{\theta}^{(k)*}(\mu_{ki}, p, \text{Fo}_k) \right|_{\text{Fo}_k=0} = 0, \bullet \quad (13)$$

де  $w_{ni}^{(k)} = \mu_{ki}^2 + \kappa_k^2 p^2$ .

Рішення системи (13) відносно зображення має вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}^{(k)*}(\mu_{ki}, p, \text{Fo}_k) &= \\ &= D_k J_0(\mu_{ki}) A_k(p) \frac{1 - e^{-w_{ni}^{(k)} \text{Fo}_k}}{w_{ni}^{(k)}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Застосовуючи до (14) обернене перетворення Ханкеля

$$\bar{\theta}^{(k)}(\rho, p, \text{Fo}_k) = \sum_{i=1}^{\infty} B_{ki} J_0(\mu_{ki}\rho) \bar{\theta}^{(k)*}(\mu_{ki}, p, \text{Fo}_k),$$

де  $B_{ki} = \frac{2\mu_{ki}^2}{(\text{Bi}_{1k}^2 + \mu_{ki}^2) J_0^2(\mu_{ki})}$ .

а потім обернене перетворення Фур'є

$$\theta^{(k)}(\rho, \eta, \text{Fo}_k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_k(p, \eta)}{p^2 + \text{Bi}_{2k}^2} \bar{\theta}^{(k)}(\rho, p, \text{Fo}_k),$$

отримаємо оригінал системи (12)

$$\begin{aligned} \theta^{(k)}(\rho, \eta, \text{Fo}_k) &= \frac{2D_k}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_k(p, \eta)}{p^2 + \text{Bi}_{2k}^2} \sum_{i=1}^{\infty} B_{ki} J_0(\mu_{ki}\rho) \times \\ &\times J_0(\mu_{ki}) A_k(p) \frac{1 - e^{-w_{ni}^{(k)} \text{Fo}_k}}{w_{ni}^{(k)}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Підсумовуючи (15) по  $k$ , згідно (5), отримаємо рішення поставленої задачі (2)

$$\theta(\rho, \eta, \text{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)}(\rho, \eta, \text{Fo}_k), \quad (16)$$

в якому значення  $\theta_p$  визначається з умови, що  $\theta$  циліндра, яка отримана з рішення задачі, при заданих значеннях  $\rho, \eta$  і  $\text{Fo} \rightarrow \infty$ , приймає значення  $\theta_p$ . Тому  $\theta_p$  визначається з рівняння

$$\theta_p = \lim_{\text{Fo} \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)}(\rho, \eta, \text{Fo}_k). \quad (17)$$

Частинний випадок отриманого рішення, в якому відсутній високотемпературний теплообмін з навколишнім середовищем за рахунок випромінювання і не враховується термочутливість матеріалу, збігається з точним рішенням. Надалі числові розрахунки виконано для рішення (16), (17) в середовищі *Matlab* [12].

### Обговорення результатів

Результати обчислень по визначенню температурного поля трансверсально-ізотропного циліндра, виготовленого з графіту, проаналізовано для трьох випадків залежності теплофізичних характеристик матеріалу від температури:  $A, B$  – трансверсально-ізотропний циліндр;  $C$  – ізотропний циліндр, і значеннями вхідних числових параметрів:

$$A. \lambda_r(T) = \lambda_{r0} + \delta_{r1} T + \delta_{r2} T^2,$$

де  $\lambda_{r0} = 261,35, \delta_{r1} = -0,3452, \delta_{r2} = 0,0001727;$

$$\lambda_z(T) = \lambda_{z0} + \delta_{z1} T + \delta_{z2} T^2,$$

де  $\lambda_{z0} = 342,41, \delta_{z1} = -0,48267, \delta_{z2} = 0,0002454,$

$$K = 1,3;$$

$$B. \lambda_r(T) = \lambda_{r0} + \delta_{r1} T + \delta_{r2} T^2,$$

де  $\lambda_{r0} = 342,41, \delta_{r1} = -0,48267, \delta_{r2} = 0,0002454;$

$$\lambda_z(T) = \lambda_{z0} + \delta_{z1} T + \delta_{z2} T^2,$$

де  $\lambda_{z0} = 261,35, \delta_{z1} = -0,3452, \delta_{z2} = 0,0001727,$

$$K = 0,76;$$

$$C. \lambda_r(T) = \lambda_{r0} + \delta_{r1} T + \delta_{r2} T^2,$$

де  $\lambda_{r0} = 261,35, \delta_{r1} = -0,3452, \delta_{r2} = 0,0001727;$

$$\lambda_z(T) = \lambda_{z0} + \delta_{z1} T + \delta_{z2} T^2,$$

де  $\lambda_{z0} = 261,35, \delta_{z1} = -0,3452, \delta_{z2} = 0,0001727,$

$$K = 1;$$

$$C_s(T) = C_{s0} + \delta_{c1} T + \delta_{c2} T^2,$$

де  $C_{s0} = 1647002, \delta_{c1} = 5333,6, \delta_{c2} = -2,5538;$

$$R = 0,3; \beta = 0,25; 0,5; \delta = 1; \varepsilon = 0,85.$$

Експериментально встановлено, що теплообмін випромінюванням є основним способом передачі тепла з температурою вище 800 °С; близько 85 %–95 % тепла передається на поверхню нагріваючих предметів випромінюванням і лише 5 %–15 % конвекцією. Тому було вибрано два значення температури середовища в зональній області і відповідні коефіцієнти тепловіддачі, з урахуванням того, що при підвищенні температури коефіцієнт тепловіддачі зменшується.

- 1)  $T_c = 800$  °С ( $A, C: Sk = 0,028, B: Sk = 0,022$ ),  
 $B: (\text{Bi}_1 = 0,076; \text{Bi}_2 = 0,25);$

$A, C: [\alpha_1 = 87 (Bi_1 = 0,1), \alpha_2 = 218 (Bi_2 = 0,19)].$

2)  $T_c = 1500 \text{ }^\circ\text{C}$  ( $A, C: Sk = 0,19, B: Sk = 0,14$ ),  
 $B: (Bi_1 = 0,03; Bi_2 = 0,25);$

$A, C: [\alpha_1 = 35 (Bi_1 = 0,04), \alpha_2 = 218 (Bi_2 = 0,19)].$

При розрахунку залежності температури по осі циліндра, було вибрано три значення часу, для яких також розраховані відповідні критерії Фур'є:

$T_1 = 56,72$  ( $A, C: Fo = 0,1, B: Fo = 0,13$ );

$T_1 = 567,2$  ( $A, C: Fo = 1, B: Fo = 1,3$ );

$T_1 = 5672$  ( $A, C: Fo = 10, B: Fo = 13$ );

На наведених графіках введені такі позначення для параметрів і ліній:

TET –  $\theta$ ; Ro –  $\rho$ ; et –  $\eta$ ; 1 – пунктирна лінія, позначає лінійне рішення; 2 – штрихпунктирна, позначає нелінійність 1-го роду; 3 – суцільна – рішення з подвійною нелінійністю. Розрахунки виконані для випадків, коли половина довжини зони нагріву має такі геометричні розміри:

$$\beta = 0,25; \beta = 0,5.$$

На рис. 1 і 2, для анізотропії **B** і  $\beta = 0,25$  показані впливи лінійності, нелінійності 1-го роду і подвійної нелінійності на розподіл температур по осі в центрі і поверхні циліндра, при значеннях критеріїв Фур'є  $Fo = 0,13; 1,3; 13$ .

Зі збільшенням температури, а, отже, із збільшенням критерію Старка, різниці температур по-верхні в центрі теплового впливу між суцільною і штрихпунктирною лініями складає:

$$T_c = 800 \text{ }^\circ\text{C} (0,0075; 0,017; 0,03).$$

При зростанні температури середовища до  $T_c = 1550 \text{ }^\circ\text{C}$  такі різниці істотно збільшуються і складають відповідно (0,037; 0,09; 0,3). Таким чином, різниці температур з таким збільшенням температури середовища зростають:  $Fo = 0,13$  в 4,9 рази;  $Fo = 1,3$  в 5,3 рази;  $Fo = 13$  в 10 разів, а, отже, зростають і відповідні стискаючі температурні напруги. При зростанні зони теплового впливу до  $\beta = 0,5$  для тих самих початкових даних, наведених вище, різниці складають:  $T_c = 800 \text{ }^\circ\text{C}$  (0,01; 0,025; 0,07);  $T_c = 1500 \text{ }^\circ\text{C}$  (0,055; 0,1; 0,47), а зростання різниці температур буде відповідно складати: 5,5; 4; 6,7. При зрівнянні результатів з  $\beta = 0,25$  і  $\beta = 0,5$  видно, що зі збільшенням

критерію Фур'є, різниці температур для  $\beta = 0,25$  збільшуються швидше і досягають максимуму при  $Fo = 13$ .

На рис. 3 і 4, для анізотропії **A** і геометричного розміру  $\beta = 0,5$ , різниці температур в центрі теплового впливу складають:  $T_c = 800 \text{ }^\circ\text{C}$  (0,02; 0,025; 0,07);  $T_c = 1500 \text{ }^\circ\text{C}$  (0,045; 0,14; 0,44), а зростання цих різниць будуть такими: 2,25; 5,6; 6,3. Для зони теплового впливу  $\beta = 0,25$  наведені вище різниці температур складають:  $T_c = 800 \text{ }^\circ\text{C}$  (0,007; 0,016; 0,035);  $T_c = 1500 \text{ }^\circ\text{C}$  (0,045; 0,1; 0,27), а зростання різниць температур при збільшенні температури середовища будуть такими: 6,4; 6,63; 7,1. При зрівнянні результатів з  $\beta = 0,25$  і  $\beta = 0,5$  видно, що різниці температур для меншої зони збільшуються швидше і досягають максимуму при  $Fo = 10$ .

На рис. 5 і 6, для анізотропій **A** і **B**,  $\beta = 0,25$  і  $\beta = 0,5$  показані розподіли температур в центрі теплового впливу на поверхні і центрі циліндра в залежності від критерію Фур'є при температурах  $T_c = 800 \text{ }^\circ\text{C}$  і  $T_c = 1500 \text{ }^\circ\text{C}$ . З рівняння графіків на рис. 5 показує, що при зростанні критерію Фур'є, графіки для анізотропії **B** лежать вище ніж для анізотропії **A** для лінійного, нелінійності 1-го роду і подвійної нелінійності. Перехід до температури  $T_c = 1500 \text{ }^\circ\text{C}$  і  $\beta = 0,5$  призводить до якісної зміни розташування графіків, як показано на рис. 6, тобто для подвійної нелінійності на поверхні циліндра графік для анізотропії **A** лежить вище ніж для анізотропії **B**. Це треба враховувати при використанні матеріалу для аналізу термонапруженого стану конструкції, яка знаходиться під впливом високо-температурного теплообміну.

На рис. 7 і 8 показано вплив анізотропій **A**, **B** і ізотропії **C**,  $\beta = 0,25$  і  $\beta = 0,5$  на розподіл температур при  $T_c = 800 \text{ }^\circ\text{C}$  і  $T_c = 1500 \text{ }^\circ\text{C}$  в залежності від осевої координати. На рис. 7 ми бачимо якісну зміну розташування графіків в центрі і поверхні циліндра. Також якісно змінюється картина розташування графіків і на рис. 8. Причому більшому тепловому впливу схильний ізотопний матеріал на поверхні циліндра.

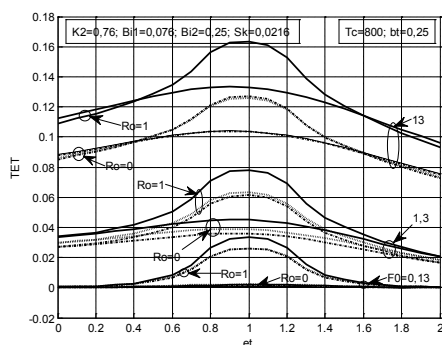


Рис. 1 – Залежність  $\theta$  ( $\rho = 0; 1$ ) по осі  $\eta$  при  $T_c = 800 \text{ }^\circ\text{C}$ , анізотропії **B** і  $\beta = 0,25$

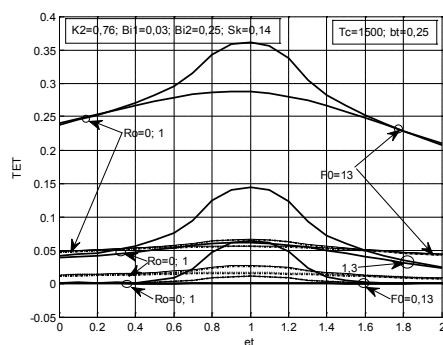


Рис. 2 – Залежність  $\theta$  ( $\rho = 0; 1$ ) по осі  $\eta$  при  $T_c = 1500 \text{ }^\circ\text{C}$ , анізотропії **B** і  $\beta = 0,25$

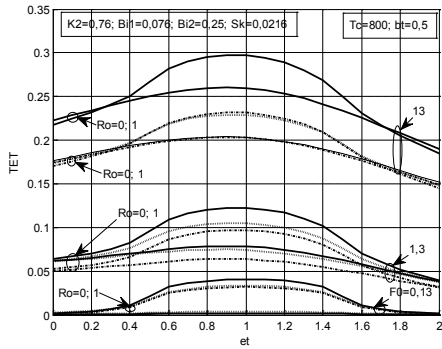


Рис. 3 – Залежність  $\theta$  ( $\rho = 0; 1$ ) по осі  $\eta$  при  $T_c = 800$  °C, анізотропії  $A$  і  $\beta = 0,5$

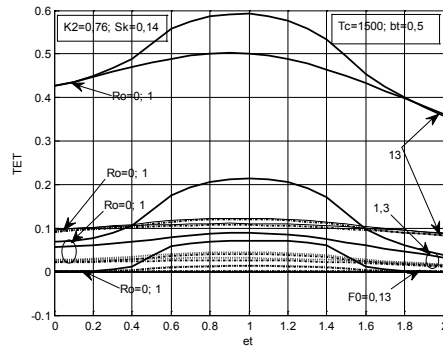


Рис. 4 – Залежність  $\theta$  ( $\rho = 0; 1$ ) по осі  $\eta$  при  $T_c = 1500$  °C, анізотропії  $A$  і  $\beta = 0,5$

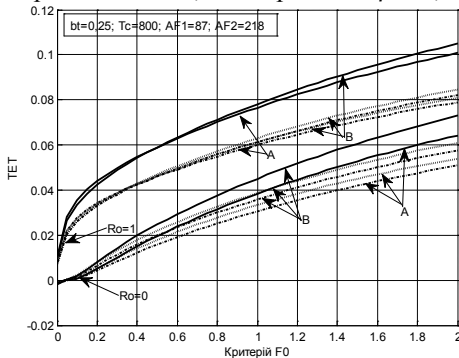


Рис. 5 – Залежність  $\theta$  ( $\rho = 0; 1$ ) від  $Fo$  при  $T_c = 800$  °C, анізотропій  $A, B$  і  $\beta = 0,25$

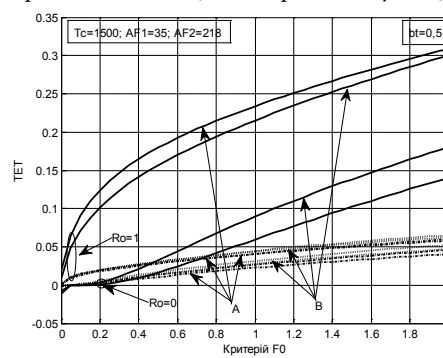


Рис. 6 – Залежність  $\theta$  ( $\rho = 0; 1$ ) від  $Fo$  при  $T_c = 1500$  °C, анізотропій  $A, B$  і  $\beta = 0,5$

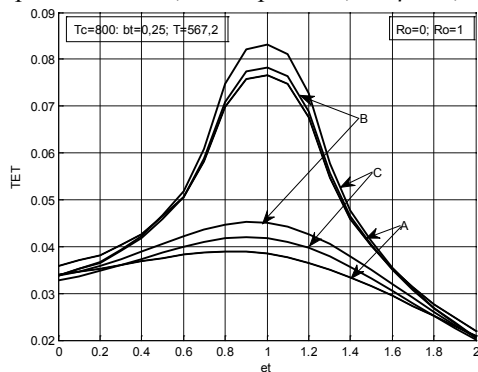


Рис. 7 – Залежність  $\theta$  ( $\rho = 0; 1$ ) по осі  $\eta$  при  $T_c = 800$  °C, анізотропій  $A, B, C$  і  $\beta = 0,25$

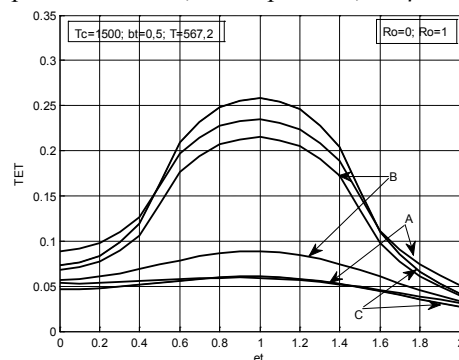


Рис. 8 – Залежність  $\theta$  ( $\rho = 0; 1$ ) по осі  $\eta$  при  $T_c = 1500$  °C, анізотропій  $A, B, C$  і  $\beta = 0,5$

### Висновки

1 Врахування впливу подвійної нелінійності найбільш адекватно моделює процес високотемпературного теплообміну, і тим самим дозволяє інтенсифікувати технологічний процес використання розглянутих матеріалів.

2 Встановлено, що при зростанні температури середовища з  $T_c = 800$  °C до  $T_c = 1500$  °C, зростають різниці температур поверхні циліндра в центрі теплового впливу між подвійною нелінійністю і нелінійністю 1-го роду:  $\beta = 0,25$ ,  $Fo = 0,13$  в 4,9 рази;  $Fo = 1,3$  в 5,3 рази;  $Fo = 13$  в 10 рази;  $\beta = 0,5$  відповідно: 5,5; 4; 6,7.

3 При зростанні критерію Фур'є, графіки для анізотропії  $B$  і  $T_c = 800$  °C лежать вище ніж при

анізотропії  $A$  для лінійного, нелінійності 1-го роду і подвійної нелінійності. Перехід до температури  $T_c = 1500$  °C і  $\beta = 0,5$  призводить до якісної зміни розташування графіків. Це треба враховувати при використанні матеріалу для аналізу термонапруженого стану конструкції, яка знаходиться під впливом високотемпературного теплообміну.

4 Показано графічно вплив анізотропій  $A, B$  і ізотропії  $C$  в залежності від осової координати в центрі і поверхні циліндра, де встановлена якісна зміна розташування графіків. При зростанні температури середовища, ізотопний матеріал на поверхні циліндра буде мати більшу температуру в зрівнянні з анізотропними матеріалами. Подальша робота буде спрямована на дослідження впливу нелінійностей і анізотропії для ортотропної плас-

тини при зональному високотемпературному теплообміні.

#### Список літератури

1. Зайцев Е. П. Суперпозиция основных уравнений квазистатической термоупругости анизотропных термочувствительных тел / Е. П. Зайцев // Вісник Кременчуцького національного ун-ту імені Михайла Остроградського. – Кременчук, 2017. – Вип. 1(102). – С. 22–31. – ISSN 1995-0519 (print), ISSN 2072-8263 (on-line).
2. Зайцев Е. П. Влияние тепловой анизотропии и двойной нелинейности на температурное поле сплошного бесконечного трансверсально-изотропного цилиндра / Е. П. Зайцев // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КрНУ, 2016. – Вип. 4(99). – С. 23–29. – ISSN 1995-0519 (print), ISSN 2072-8263 (on-line).
3. Жмуриков Е. И. Графит в науке и ядерной технике : моногр. / Е. И. Жмуриков, И. А. Бубненко, В. В. Дрёмов, С. И. Самарин, А. С. Покровский, Д. В. Харьков. – Новосибирск, 2013. – 194 с.
4. Кушнір Р. М., Попович В. С. Моделивання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл: у 5-21 т. Т. 3. Термопружність термочутливих тіл : моногр. / Під ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра. – Львів: СПОЛОМ, 2009. – 412 с. – ISBN 978-966-665-529-8.
5. Попович В. Термопружний стан безмежного кругового термочутливого циліндра за умови конвективно-променевого теплообміну з довкіллям / В. Попович, Г. Гарматій, Р. Кушнір // Вісник Донецького національного університету. Сер. А. Природничі науки. – Донецьк, 2008. – Вип. 1. – С. 113–120. – ISSN 1817-2237.
6. Прошок Б., Горун О. Вплив конвективно-променевого теплообміну на температурне поле півбезмежного термочутливого трискладового тіла за дії джерела тепла. Математичні проблеми механіки неоднорідних структур / Під загальною ред. І. А. Луковського, Г. С. Кита, Р. М. Кушніра. – Львів: Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2014. – С. 148–150. – ISBN 678-966-02-7324-5.
7. Кудинов В. А. Получение аналитических решений задач теплопроводности с переменными физическими свойствами среды / В. А. Кудинов, Е. В. Ларгина // Вестник Самарского государственного технического ун-та. Сер.: Технические науки. – 2011. – № 2(30). – С. 186–192. – ISSN 1991-8542.
8. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики : учебное пособие / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – Москва: Наука, 1972. – 735 с.
9. Толстов Г. П. Ряды Фурье / Г. П. Толстов. – Москва: Наука, 1980. – 384 с.
10. Ozisik M. Necati. Heat conduction / Ozisik M. Necati. – New York: John Wiley, 1980. – 687 p.
11. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел : учеб. пособие / Э. М. Карташов. – 2-е изд. – Москва: Высшая школа, 1985. – 480 с.
12. Кетков Ю. Л. MATLAB 7: программирование, численные методы / Ю. Л. Кетков, А. Ю. Кетков, М. М. Шульц. – Санкт-Петербург: БХВ. Петербург, 2005. – 752 с.

#### References (transliterated)

1. Zaytsev E. P. (2017), “Superpozicija osnovnyh uravnenij kvazistaticheskoj termouprugosti anizotropnyh termochuvstvitel'nyh tel [Superposition of the main equations of quasistatic thermoelasticity of anisotropic thermosensitive bodies]”, *Visnik Kremenchuc'kogo nacional'nogo universitetu imeni Mihajla*

1. *Ostrograds'kogo* [transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrogradskyi National University], issue 1(102), pp. 22–31. ISSN 1995-0519 (print). ISSN 2072-8263 (on-line).
2. Zajcev E. P. (2016), “Vlijanie teplovoj anizotropii i dvojnoj nelinejnosti na temperaturnoe pole sploshnogo beskonechnogo transversal'no-izotropnogo cilindra [Influence of thermal anisotropy and double nonlinearity on a temperature field of the solid infinite transversely isotropic cylinder]”, *Visnik Kremenchuc'kogo nacional'nogo universitetu imeni Mihajla Ostrograds'kogo* [Bulletin of Kremenchug National University named after Mykhailo Ostrogradsky], issue 4(99). pp. 23–29. ISSN 1995-0519 (print). ISSN 2072-8263 (on-line).
3. Zhmurikov E. I., Bubnenkov I. A., Dremov V. V., Samarin S. I., Pokrovsky A. S., Harkov D. V. (2013), *Grafit v nauke i jadernoju tehnike* [Graphite in Science and Nuclear Technology], Novosibirsk, 194 p.
4. Kushnir R. M., Popovich V. (2009), Modeljuvannja ta optimizacija v termomehanici elektroprovodnih neodnorodnih til : u 5-ty t. T. 3 Termopruzhnist' termochutlivih til [Modeling and optimization in thermomechanics of electrically conductive inhomogeneous bodies] : in 5 vol. Vol. 3. Thermoelasticity of thermosensitive bodies], Ed.: J. J. Burak, R. M. Kushnir, SPOLOM, Lvov, 409 p. ISBN 978-966-665-529-8.
5. Popovich V., Garmatij G., Kushnir R. (2008), “Termopruzhnyj stan bezmezhnogo krugovogo termochutlyvogo cilindra za umovy konvektyvno-promenevogo теплообміну z dovkilljam [Thermoelastic state of a boundless circular thermosensitive cylinder under the condition of convective-radiant heat exchange with the environment]”, *Visnik Donec'kogo universitetu. Ser. A. Prirodnichi nauki* [Bulletin of Donetsk National University. Ser. A. Natural sciences], issue 1. pp. 113–120. ISSN 1817-2237.
6. Proshok B., Gorun O. (2014), “Vplyv konvektyvno-promenevogo теплообміну na temperaturne pole pivbezmezhnogo termochutlyvogo tryskladovogo tila za dii' dzherala tepla [The Influence of a convective-radiant heat exchange on the temperature field of half-infinite thermosensitive three-layer body under the action of a heat source]”, *Matematychni problemy mehaniky neodnorodnyh struktur* [Mathematical Problems of Mechanics of Nonhomogeneous Structures], Ed: I. O. Lukovs'kyi, H. S. Kit, R. M. Kushnir, Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine, Lviv, pp. 148–150. ISBN 678-966-02-7324-5.
7. Kudinov V. A., Larginja E. V. (2011), “Poluchenie analiticheskikh reshenij zadach teploprovodnosti s peremennymi fizicheskimi svojstvami sredy [Obtaining Analytical Solutions of Thermal Conductivity Problems with Variable Properties of Physical environment]”, *Vestnik Samarskogo gosudarsvennogo tehničeskogo universiteta. Ser.: Thenich. nauki* [Bulletin of the Samara State Technical University. Ser.: Technical sciences], no. 2(30). pp. 186–192. ISSN 1991-8542.
8. Tikhonov A. N., Samarskiy A. A. (1972), *Uravnenija matematicheskoj fiziki* [Equations of mathematical physics], Nauka, Moscow, 735 p.
9. Tolstov G. P. (1980), *Rjady Fur'e* [Fourier series], Nauka, Moscow, 384 p.
10. Ozisik M. Necati (1980), *Heat conduction*, John Wiley, New York, 687 p.
11. Kartashov Je. M. (1985), *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdyh tel* [Analytical methods in the theory of heat conductivity of solids], Vysshaja shkola, Moscow, 480 p.
12. Ketkov Yu. L., Ketkov A. Yu., Shultz M. M. (2005), *MATLAB 7: programirovanie, chislennye metody* [MATLAB 7: programming, numerical methods], BHV. Peterburg, Sankt-Petersburg, 752 p.

Надійшло (received) 10.05.2021

Відомості про автора/ Сведения об авторе / About the authors

**Зайцев Євгеній Павлович (Зайцев Евгений Павлович, Zaytsev Yevgenij)** – кандидат технічних наук, доцент кафедри фізико-математичних дисциплін, Кременчуцький інститут ім. Альфреда Нобеля; e-mail: zaytsev.ep.klanau@gmail.com.