

**6. Выводы.** Если в состав любой оптической системы входит напряженное, пьезооптически активное тело, то это тело (тела) может приближенно рассматриваться как набор оптически однородных пластин. Приближение будет тем точнее, чем большее количество более тонких вообразаемых пластин будет использовано.

**Список литературы:** 1. *Тесленко А.А.* Методы конечных элементов и фотоупругости // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2005. – № 22. – С. 143-148. 2. *Тесленко А.А.* Некоторые подробности применения метода конечных элементов в фотоупругости // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2006. – № 21. – С. 183-186. 3. *Тесленко А.А.* Автоматизация пьезооптических измерений // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2006. – № 32. – С. 153-156. 4. *Тесленко А.А.* Фильтрация пьезооптических измерений в методе фотоупругости // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2007. – № 22. – С. 169-171. 5. *Тесленко А.А.* Систематическое исследование метода наклонного просвечивания // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2008. – № 36. – С. 167-170.

*Поступила в редколлегию 11.09.2009*

УДК 534.1:631.362

*Л.Н.ТИЩЕНКО*, докт.техн.наук, ХНТУСХ, Харьков;

*В.П.ОЛЬШАНСКИЙ*, докт.физ.-мат. наук, ХНТУСХ, Харьков

### **ВЛИЯНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛОСКОГО РЕШЕТА НА ДВИЖЕНИЕ СЛОЯ ЗЕРНОВОЙ СМЕСИ**

Використовуючи гідродинамічну аналогію, побудовано наближені формули для обчислення проєкцій швидкості потоку зернової суміші на плоскому нахиленому решеті, як шару в'язкої рідини, з урахуванням його поперечних коливань і відокремлення проходової фракції від суміші внаслідок сепарування. Проведено розрахунки та проаналізовано результати обчислень.

Using hydrodynamical analogy, the approached formulas for account of projections of velocity of a flow a grain mix on flat inclined sieve, as layer of a viscous liquid are constructed, in view of its cross vibration and branch passing of fractions from a mix owing to separation. The accounts are carried out and the results of calculations are analysed.

**Проблема.** Вследствие применяемых упрощений, существующие математические модели движения слоя зерна по виброрешету не всегда адекватны

техническим условиям сепарирования. Поэтому разработка уточненных теоретических моделей движения сыпучей среды в условиях вибраций относится к актуальным задачам.

**Обзор последних публикаций.** Известные концептуальные подходы к описанию движения зерновой смеси, как и сами публикации, достаточно полно проанализированы в обзорной части монографии [1]. В последнее время при разработке моделей движения начали использовать гидродинамическую аналогию, где вибрации решета учитывают косвенно, задавая значения коэффициента вибровязкости смеси в зависимости от амплитуды и частоты колебаний решета [1,2,3,4]. Такой подход позволяет вычислять усредненные за период колебаний, независимые от времени, значения кинематических характеристик потока зерновой смеси. Однако, вследствие вибраций решета, в действительности, эти характеристики являются периодическими функциями времени. Поэтому желательно знать отклонения максимальных значений проекций скорости потока зерна, производительности решета и других параметров от их усредненных значений. Для проведения такого анализа приходится решать уравнения гидродинамики с учетом периодически изменяющихся во времени инерционных членов, что усложняет математическое исследование. Важное значение приобретает поиск корректных приближенных решений, что и определило цель этой работы.

**Целью данной работы** является построение компактных формул для расчета кинематических характеристик потока зерновой смеси при ее сепарировании плоским наклонным решетом с учетом его поперечных колебаний. Цель достигается путем приближенного аналитического решения краевой задачи гидродинамики для дифференциального уравнения с периодическим во времени коэффициентом. Построение приближенного решения проводится методом Бубнова-Галеркина.

**Изложение основного содержания работы.** Определение проекций скорости потока  $u = u(x, y, t)$ ,  $v = v(x, y, t)$  на координатные оси  $ox$  и  $oy$  прямоугольной системы координат, показанной на рис. 1, в зависимости от времени  $t$ , проводим решая уравнения Навье-Стокса (двумерный случай) [5]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \nabla^2 u \right); \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial y} - \mu \nabla^2 v \right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

в которых  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ;  $\rho$ ,  $\mu$  – усредненные по объему плотность и коэффициент вибровязкости псевдооживленной зерновой смеси;  $p = p(x, y, t)$  – давление в движущемся слое смеси толщиной  $h$ ;  $\theta$  – угол наклона решета к горизонтали;  $g$  – ускорение свободного падения.

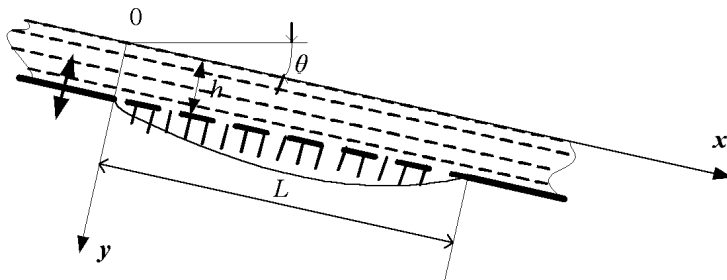


Рисунок 1 – Расчетная схема решета со слоем зерновой смеси

При постановке граничных условий учтем, что на свободной поверхности слоя  $y = 0$  нет нормальных и касательных напряжений, а поэтому

$$-p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

По условию «прилипания» смеси к решетке, которое обычно применяют в гидродинамике [5], в плоскости  $y = h$ :

$$u(x, h, t) = 0. \quad (4)$$

Задание поперечной проекции скорости в этой плоскости вызывает затруднение, обусловленное тем, что часть зерновой смеси, в виде проходовой фракции, проникает через перфорированную поверхность решета, а другая часть, в виде сходовой фракции, совершает вместе с решетом поперечные колебания. Во избежание чрезмерного усложнения математической постановки задачи распределение поперечной проекции скорости потока на решетке будем описывать выражением:

$$v(x, h, t) = v_n \varepsilon - A\omega(1 - \varepsilon)[\sin(\omega t) - \beta \varepsilon \cos(\omega t)]. \quad (5)$$

Здесь  $A$ ,  $\omega$  – амплитуда и частота поперечных колебаний решета;  $\varepsilon$  – коэффициент «живого сечения» рабочей плоскости решета длиной  $L$  и шириной  $H$ ;  $v_n$ ,  $\beta$  – константы, подлежащие экспериментальному определению в конкретных условиях сепарирования.

От значений этих констант зависит производительность решета  $Q_n$  по отделению проходовой фракции от смеси. Действительно,

$$Q_n = Q_n(t) = LH\varepsilon[v_n + A\omega(1 - \varepsilon)\beta \cos(\omega t)]. \quad (6)$$

Согласно (6) средняя производительность сепарирования за период од-

ного колебания решета зависит только от константы  $v_n$  и определяется выражением

$$Q_{ncp} = LH\varepsilon v_n,$$

что упрощает экспериментальное определение  $v_n$ .

Второе слагаемое в (6) описывает изменение производительности, вызванное колебаниями давления внутри слоя зерновой смеси, вследствие поперечных вибраций решета. Считая, что производительность  $Q_n(t)$  в любой момент времени должна быть положительной, приходим к ограничению:

$$0 < \beta < v_n [A\omega(1-\varepsilon)]^1.$$

Подчеркнем, что выражение (5) является граничным условием в интегральном, приближенном смысле, где усредненная по поверхности переносная скорость колебательного движения решета (второе слагаемое) складывается с усредненной по той же поверхности относительной скоростью отделения проходовой фракции (первое и третье слагаемые) и корректируется их вклад в сумму с помощью коэффициента живого сечения решета.

При  $\varepsilon = 0$ :

$$v(0, h, t) = -A\omega \sin(\omega t), \quad Q_n = 0.$$

Если  $\varepsilon = 1$ , то:

$$v(0, h, t) = v_n, \quad Q_n = v_n LH.$$

Оба частных случая согласуются с физическим представлением о движении смеси. В первом, когда нет отверстий в решете, вся смесь совершает с ним колебания с частотой  $\omega$ . Во втором случае, когда поверхность решета идеально проходима, колебания решета не влияют на поперечное движение смеси, которая вся становится проходовой фракцией.

Учитывая малую толщину слоя смеси по сравнению с другими его размерами, в установившемся режиме движения принимаем:

$$v(x, y, t) = v(x, h, t) = v(t),$$

то есть считаем поперечную проекцию скорости слоя не зависимой от  $x$  и  $y$ . Такие допущения характерны для теории пограничного слоя [5,6]. При указанном предположении:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (7)$$

Из уравнения неразрывности (2), с учетом (7), находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (8)$$

В результате система уравнений (1) приобретает упрощенный вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v(t) \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right);$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (9)$$

а граничными условиями к ней, вместо (3) и (4) становятся:

$$p = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0$$

и

$$u = 0 \quad \text{при} \quad y = h. \quad (10)$$

Интегрируя второе уравнение в (9) по  $y$ , с учетом первого граничного условия в (10) и выражения (5), получаем распределение давления в слое зерна:

$$p = \rho \left\{ g \cos \theta + A \omega^2 (1 - \varepsilon) [\cos(\omega t) + \beta \varepsilon \sin(\omega t)] \right\} y.$$

При таком распределении давлений:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

и первое уравнение системы (9) можно выразить в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left\{ v_n \varepsilon - A \omega (1 - \varepsilon) [\sin(\omega t) - \beta \varepsilon \cos(\omega t)] \right\} \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin \theta - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (11)$$

Учитывая краевые условия (10), приближенное решение (11) представим произведением

$$u(y, t) = f(t) (h^2 - y^2), \quad (12)$$

где  $f(t)$  – неизвестная периодическая функция времени.

Используя (11) и (12), методом Бубнова-Галеркина, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{df}{dt} + (a + b \sin \tau) f = g^*, \quad (13)$$

в котором

$$a = \frac{5}{2\omega h} \left( \frac{\mu}{\rho h} - \frac{3v_n \varepsilon}{8} \right); \quad b = \frac{15}{16} \frac{A}{h} \sqrt{1 + (\beta \varepsilon)^2} \cdot (1 - \varepsilon);$$

$$g^* = \frac{5g}{4\omega h^2} \sin \theta; \quad \tau = \omega t - \alpha; \quad \alpha = \arctg(\beta \varepsilon).$$

Периодическое решение (13) ищем в виде:

$$f(\tau) = f_1(\tau) \exp(b \cos \tau). \quad (14)$$

Подставив (14) в (13), приходим к линейному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{af_1}{a\tau} + af_1 = g^* \exp(-b \cos \tau). \quad (15)$$

Разложим функцию  $f_1(\tau)$  в ряд Фурье:

$$f_1(\tau) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\tau) + b_k \sin(k\tau)]. \quad (16)$$

Учитывая табличные интегралы [7]

$$\int_0^{2\pi} \exp(-b \cos \tau) \sin(k\tau) d\tau = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} \exp(-b \cos \tau) \cos(k\tau) d\tau = 2\pi(-1)^k I_k(b),$$

с помощью выражений (15) и (16) находим коэффициенты ряда:

$$a_0 = \frac{g^* I_0(b)}{a}; \quad a_k = \frac{2(-1)^k g^* a I_k(b)}{k^2 + a^2}; \quad b_k = \frac{2(-1)^k g^* k I_k(b)}{k^2 + a^2}. \quad (17)$$

Здесь  $I_k(b)$  – модифицированная функция Бесселя, таблицы которой имеются в [8,9] и других изданиях по специальным функциям.

Таким образом, на основании (12), (14), (16) и (17) продольная проекция скорости потока представляется выражением

$$u(y, \tau) = g^* (h^2 - y^2) F(\tau), \quad (18)$$

в котором

$$F(\tau) = \exp(b \cos \tau) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_{k0})(-1)^k I_k(b)}{k^2 + a^2} [a \cos(k\tau) + k \sin(k\tau)], \quad (19)$$

$\delta_{k0}$  – символ Кронекера.

Обычно, в условиях сепарирования смеси на решетке, параметр  $b < 1$ . Поэтому ряд  $F(\tau)$  сходится быстро и вычисление его частичной суммы не вызывает затруднений. Более того, при малых значениях параметра  $b$  вместо ряда (19) можно использовать приближенную формулу:

$$F(\tau) \approx \varphi(\tau) = \frac{1}{a} \exp[(b \cos \tau) \left\{ 1 + \frac{b^2}{4} - \frac{ab}{1+a^2} (a \cos \tau + \sin \tau) + \frac{ab^2}{4(4+a^2)} [a \cos(2\tau) + 2 \sin(2\tau)] \right\},$$

погрешность которой имеет порядок  $b^3$ . Тогда

$$u(y, \tau) \approx g^* (h^2 - y^2) \varphi(\tau)$$

и для расчета скорости потока не нужно вычислять значения функций Бесселя.

Производительность решета  $Q_c(\tau)$  по сходовой фракции является также периодической функцией времени, ибо согласно (18):

$$Q_c(\tau) = H \int_0^h u(y, \tau) dy = \frac{2}{3} g^* H h^3 F(\tau).$$

В приближенных расчетах можно принять

$$Q_c(\tau) \approx \frac{2}{3} g^* H h^3 \varphi(\tau).$$

Если нет поперечных колебаний решета, то  $b = 0$ ;  $I_0 = 1$ ;  $I_k(0) = 0$ . В ряде (19) отличен от нуля только первый член, соответствующий  $k = 0$ . При таком режиме сепарирования, согласно (18), (19), (20), продольная проекция скорости потока и производительность решета не зависят от времени, причем

$$u(y, \tau) = u_{CT} = \frac{g^*}{a} (h^2 - y^2); \quad Q_c(\tau) = Q_{CT} = \frac{2}{3} \frac{g^*}{a} H h^3.$$

Сравним эти значения с усредненными за период колебаний параметрами:

$$u_{cp} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(y, \tau) d\tau; \quad Q_{cp} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_c(\tau) d\tau. \quad (21)$$

Подставив выражения (18) и (20) в (21), с учетом того, что [7]:

$$\int_0^{2\pi} \exp(b \cos \tau) \sin(k\tau) d\tau = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} \exp(b \cos \tau) \cos(k\tau) d\tau = 2\pi I_k(b),$$

получаем

$$u_{cp} = a g^* \Phi(b) (h^2 - y^2), \quad Q_{cp} = \frac{2}{3} a g^* \Phi(b) h^3 H.$$

Здесь

$$\Phi(b) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_{k0}) (-1)^k I_k^2(b)}{k^2 + a^2}. \quad (22)$$

Обычно, в реальных условиях работы решета, параметры  $a$  и  $b$  меньше единицы, причем

$$2a^2 < 1 + a^2. \quad (23)$$

Кроме того, для малых положительных  $b$  выполняется неравенство

$$I_0^2(b) - I_1^2(b) > 1, \quad (24)$$

в чем легко убедиться, используя таблицы функций Бесселя [9].

При выполнении неравенств (23) и (24), из сходимости знакопередающего ряда (22) вытекают соотношения:

$$\Phi(b) > \frac{1}{a^2} \left[ I_0^2(b) - \frac{2a^2}{1+a^2} I_1^2(b) \right] > \frac{1}{a^2} [I_0^2(b) - I_1^2(b)] > \frac{1}{a^2}.$$

Это значит, что при  $b > 0$ :

$$u_{cp} > u_{CT}; \quad Q_{cp} > Q_{CT},$$

то есть, за счет поперечных колебаний решета увеличиваются усреднен-

ные проекция скорости потока и производительность решета по сходовой фракции. При малом значении  $a$ :

$$u_{cp} \approx u_{CT} I_0^2(b); \quad Q_{cp} \approx Q_{CT} I_0^2(b),$$

то есть, увеличение кинематических характеристик потока смеси связано главным образом с увеличением амплитуды колебаний решета (параметра  $b$ ).

**Результаты расчета и их анализ.** Расчеты проводились для зерновой смеси пшеницы при  $\rho = 750 \text{ кг/м}^3$ ;  $h = 0,006 \text{ м}$ ;  $\theta = 8^\circ$ . Рассматривали две частоты колебаний решета:  $\omega = \omega_1 = 41,86 \text{ с}^{-1}$  и  $\omega = \omega_2 = 52,33 \text{ с}^{-1}$  с различными амплитудами. Вычисленные для этих частот, при амплитуде продольных колебаний решета  $A^* = 0,0075 \text{ м}$ , значения коэффициентов вибровязкости по формуле из [4], оказались равными:  $\mu = \mu_1 = 0,037 \text{ Па} \cdot \text{с}$ ,  $\mu = \mu_2 = 0,028 \text{ Па} \cdot \text{с}$ . С увеличением  $\omega$  уменьшился коэффициент вибровязкости. Решето характеризовали параметрами:  $L = 0,79 \text{ м}$ ;  $\varepsilon = 0,4$ . В качестве исходных данных также задавали:  $v_n = 0,003 \text{ м/с}$ ;  $\beta = v_n (A\omega)^{-1}$ .

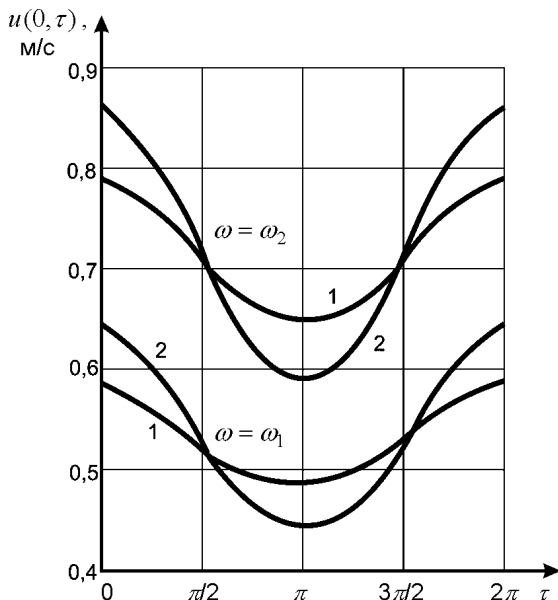


Рисунок 2 – Зависимости  $u(0, \tau)$  при разных  $\omega$  и  $A$ : 1 –  $A = 0,001 \text{ м}$ ; 2 –  $A = 0,002 \text{ м}$

Рассчитанные по (18) графики скорости потока  $u(0, \tau)$  на свободной поверхности слоя, представлены на рис. 2. Цифрой 1 отмечены результаты, полученные при  $A = 0,001 \text{ м}$ , а цифрой 2 –  $A = 0,002 \text{ м}$ . С увеличением  $\omega$  увеличилась скорость потока зерновой смеси, а с увеличением  $A$  – возросли ампли-



туды колебаний скорости.

На рис. 3 указаны графики удельной производительности решета  $\overline{Q}_c(\tau) = Q_c(\tau)H^{-1}$ , полученные по (20) для разных  $\omega$  и  $A$ . Здесь также увеличение  $\omega$  и  $A$  сопровождается увеличением  $\overline{Q}_c(\tau)$ , но, в отличие от  $u(0,\tau)$ , относительные амплитуды колебаний меньше. Это объясняется тем, что колебания  $u(y,\tau)$  ослабевают при  $y \rightarrow h$ , а на поверхности решета  $u(h,\tau) = 0$ . Поэтому интеграл от скорости по толщине слоя имеет меньшие относительные изменения во времени, чем  $u(0,\tau)$ .

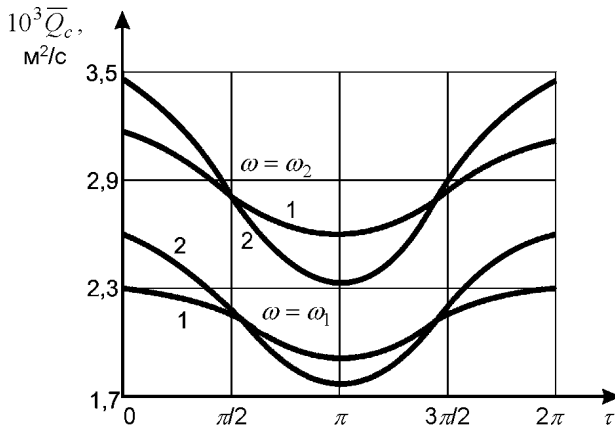


Рисунок 3 – Зависимости удельной производительности решета  $\overline{Q}_c(\tau)$  при разных  $\omega$  и  $A$ : 1 –  $A = 0,001$  м; 2 –  $A = 0,002$  м

На рис. 4 представлены графики удельной производительности решета  $\overline{Q}_n(\tau) = Q_n(\tau)H^{-1}$ . Они получены по формуле (6) при  $\omega = \omega_1$ ;  $A = 0,001$  м для двух значений  $\varepsilon$  коэффициента живого сечения решета. Удельная производительность решета по проходовой фракции, согласно изложенной теории, также является периодической функцией времени, что связано с изменением давления в слое зерновой смеси, вследствие поперечных колебаний решета.

Из рис. 4 следует, что при увеличении  $\varepsilon$  уменьшается отношение амплитуды колебаний  $Q_n(\tau)$  к усредненному за период значению этого параметра.

Расчеты показали, что поперечная составляющая вибраций решета вызывает значительные колебания скорости потока и других кинематических параметров. Но эти колебания больше влияют на интенсивность сегрегации смеси и полноту ее разделения и меньше - на пропускную способность решета. Из-за высокочастотности колебаний пропускная способность решета фактически определяется усредненными значениями параметров.

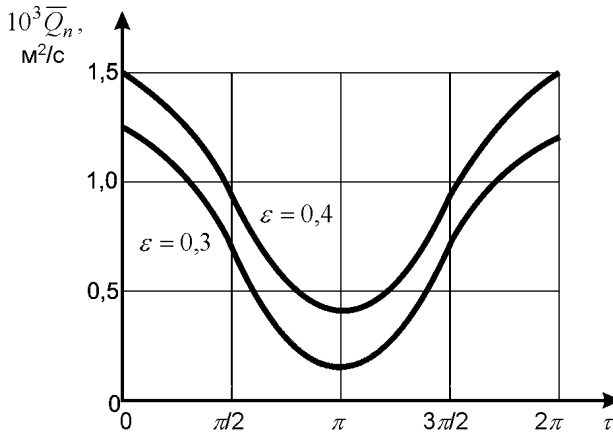


Рисунок 4 – Зависимости удельной производительности решета  $Q_n(\tau)$  при разных  $\varepsilon$

Заканчивая изложение работы подчеркнем, что, кроме поперечных колебаний решета, выше косвенно учитываются также его продольные колебания, от параметров которых зависит значение коэффициента  $\mu$ . Изложенная приближенная теория описывает по сути общий случай произвольно направленных гармонических колебаний плоского решета.

**Выводы.** Полученные расчетные зависимости приводят к результатам, которые согласуются с физическими представлениями о движении зерновой смеси на вибрирующем плоском решете. Поэтому они могут использоваться для расчета кинематических характеристик потока. Адекватность теории можно повысить путем экспериментального определения входящих в модель параметров.

**Список литературы:** 1. Тищенко Л.Н. Интенсификация сепарирования зерна. – Харьков: Основа, 2004. – 224 с. 2. Тищенко Л.Н., Абдуева Ф.М., Ольшанский В.П. Сравнение двух способов вычисления коэффициента вибровязкости псевдооживленной зерновой смеси при виброцентробежном сепарировании // Вібрації в техніці та технологіях. – 2008. – № 1. – С. 96-100. 3. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П. Решения упрощенных уравнений гидродинамики при моделировании движения зерновой смеси по наклонному плоскому решету // Сучасні напрямки технології та механізації процесів переробних і харчових виробництв. Вісник ХНТУСГ. – Харків: ХНТУСГ, 2008. – Вип. 74. – С. 306-312. 4. Тищенко Л.Н., Кучеренко С.И., Ольшанский В.П., Зайцев О.Б. Модель однослойного движения зерновой смеси по наклонному рифленому решету // Сучасні напрямки технології та механізації процесів переробних і харчових виробництв. Вісник ХНТУСГ. – Харків: ХНТУСГ, 2008. – Вип. 74. – С. 28-39. 5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 847 с. 6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 712 с. 7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1962. – 1100 с. 8. Абрамовиц А., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М.: Наука, 1979. – 832 с. 9. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1977. – 344 с.

Поступила в редколлегию 21.07.2009