

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Р.Г. Акмен

ТЕПЛО- ТА МАСООБМІН

Текст лекцій і задачі з коментарями до розв'язання

для студентів спеціальностей 7.050601-01 «Теплоенергетика»,
7.050601-02 «Енергетичний менеджмент»

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 3 від 21.12.07

ББК 31.31

A40

УДК 536.24

Рецензенти: *В.В. Соловей*, д-р.техн. наук, проф., Інститут проблем машинобудування ім. А.Н. Підгорного НАН України,
О.О. Шевелев, канд.техн.наук, проф., НТУ «ХПІ»

Акмен Р.Г.

A40 Тепло- та масообмін: текст лекцій і задачі з коментарями до розв'язання для студентів спеціальностей 7.050601-01 «Теплоенергетика» і 7.050601-02 «Енергетичний менеджмент»/Р.Г.Акмен. – Х. : НТУ «ХПІ», 2009.– 148 с.

ISBN

Текст лекцій містить повний курс дисципліни з задачами, необхідними таблицями та номограмами. Включає розділи: теплопровідність, конвективний теплообмін в однофазних середовищах, тепло- та масообмін в двофазних середовищах, променистий теплообмін, основи розрахунку теплообмінних апаратів.

Призначено для студентів фахів «Теплоенергетика» та «Енергетичний менеджмент». Може бути корисним студентам енергетичного профілю.
Іл. 50. Табл. 17. Бібліогр.: 6 назв.

ISBN

ББК 31.31

© Р.Г. Акмен, 2009 р.

ВСТУП

Основні поняття і визначення. Процеси переносу теплоти відіграють суттєву роль у будь-якому сучасному технологічному процесі. Цей курс присвячено вивченню закономірностей процесів переносу теплоти, методів розрахунку та аналізу цих процесів. Якщо в технічній термодинаміці розглядаються закономірності перетворення теплової енергії, в цьому курсі вивчаються механізми переносу теплоти та їх закономірності.

Існують три механізми переносу теплоти:

- на молекулярному рівні без переносу маси речовини;
- на молярному рівні разом з переносом маси речовини;
- квантами електромагнітного поля.

Незалежно від механізму переносу теплоти існує одна необхідна і достатня умова існування процесу переносу теплоти – наявність різниці температури.

Кількість теплоти, що переноситься тим чи іншим механізмом, прямо пропорційна часу переносу, тому під **тепловим потоком розуміється кількість теплоти, що переноситься за одиницю часу**. Ця величина позначається Q [Вт]. **Щільністю теплового потоку** називають тепловий потік через одиницю ізотермічної поверхні $q = Q/F$ або $q = dQ/dF$ [Вт/м²].

Процес переносу теплоти на молекулярному рівні без переносу маси речовини називається **теплопровідністю**. Цей процес у чистому вигляді має місце в твердих тілах, а також в тонких шарах газів та рідини.

Процес переносу теплоти на молярному рівні виникає в рухомих середовищах (гази та рідини) та зветься **конвективним теплообміном**. В чистому вигляді цей процес виникає при змішуванні рідин з різними температурами. Якщо рідина тече зі швидкістю w , то **щільність потоку маси** $g = w\rho$ [кг/(м²с)], де ρ – густина рідини [кг/м³]. Одночасно ця маса переносить теплоту зі щільністю $q = gi = w\rho i$, де i – ентальпія рідини. Перенос теплоти на межі «тверде тіло – рідина» визначається двома механізмами переносу: теплопровідністю у ламінарному прикордонному шарі та теплопровідністю і конвекцією поза ним. Такий процес переносу теплоти має назву **конвективна тепловіддача** або просто **тепловіддача**.

Перенос теплоти від однієї рідини до іншої крізь тверду стінку, що їх розділяє, зветься **теплопередача**. Цей процес включає як тепловіддачу (між рідиною та стінкою), так і теплопровідність крізь саму стінку.

Перенос теплоти квантами електромагнітного поля зветься **променистий теплообмін** або **випромінювання**. Цей процес переносу теплоти пов'язано з перетворенням внутрішньої енергії тіла в кванти електромагнітного поля на поверхні випромінюючого тіла, та зворотнім перетворенням на поверхні тіла, що поглинає випромінювання.

1. ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ

1.1. Основні поняття

Перенос теплоти в твердому тілі пов'язано з наявністю різниці температури в об'ємі тіла, тобто з поняттям «температурне поле». Цім терміном позначається сукупність даних по температурі в будь-якому місці тіла в будь-який час. У найзагальнішому випадку температурне поле залежить від трьох координат та часу, тобто $t = f(x, y, z, \tau)$. Таке поле зветься **трьохмірним нестационарним**. Якщо температурне поле тіла не залежить від часу, то воно зветься **стаціонарним**. Найпростішим температурним полем є стаціонарне одномірне поле, коли температура тіла змінюється тільки за однією координатою та постійне за часом, тобто $t = f(x)$ або $t(x)$.

Інтенсивність змінення температурного поля в тілі визначається **градієнтом температури**. Під цим терміном розуміють інтенсивність змінення температури за нормаллю до ізотермічної поверхні. Це векторна величина, що направлена по нормалі до ізотермічної поверхні в напрямку зростання температури та дорівнює похідній від температури за напрямом нормалі, тобто

$$\text{grad } \vec{t} = \vec{n} (\partial t / \partial n). \quad (1.1)$$

Тепловий потік, що передається теплопровідністю в твердому тілі, визначається гіпотезою (законом) Фур'є, згідно якому «**тепловий потік теплопровідністю пропорційний градієнту температури та площі ізотермічної поверхні переносу**». Це також векторна величина, але спрямована в напрямку зменшення температури. Тоді

$$\vec{Q} = -\lambda \text{grad } \vec{t} F, \text{ або } d\vec{Q} = -\lambda \text{grad } \vec{t} dF. \quad (1.2)$$

Коефіцієнт пропорційності у (1.2) зветься **коефіцієнтом теплопровідності**. Ця величина є теплофізичною властивістю речовини та чисельно дорівнює щільності теплового потоку за умов, що градієнт температури дорівнює одиниці. Знак у (1.2) показує, що напрям теплового потоку зворотній до напрямку градієнта температури.

Якщо розділити (1.2) на поверхню переносу, отримаємо

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad } \vec{t}, \quad (1.3)$$

тобто щільність теплового потоку в процесі теплопровідності пропорційна градієнту температури.

В скалярному вигляді, якщо спроектувати (1.3) на осі координат, отримуємо

$$q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}; \quad q_y = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y}; \quad q_z = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z}. \quad (1.4)$$

1.2. Рівняння Фур'є

Для визначення щільності теплового потоку або його складових у

формулах (1.4) необхідно мати градієнти температури за осям координат, тобто температурне поле тіла. Отримаємо диференціальне рівняння, що визначає зв'язок між зміною теплового потоку за координатами та зміною температури за часом.

Виділимо в твердому тілі елементарний об'єм, що не деформується. Його сторони dx , dy та dz . Будемо вважати, що тіло є ізотропним, тобто його теплофізичні властивості не залежать від напрямку. В ліву грань цього об'єму вздовж осі x за час $d\tau$ надходить кількість теплоти $Q_x = q_x dy dz d\tau$, де q_x – густина теплового потоку вздовж осі x . З правої грані об'єму (на координаті $x+dx$) за цей же час уходить кількість теплоти $Q_{x+dx} = q_{x+dx} dy dz d\tau$, де q_{x+dx} – щільність теплового потоку на координаті $x+dx$. Розкладемо q_{x+dx} в ряд Тейлора поблизу точки x , та обмежимося двома членами розкладання.

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \dots \quad (1.5)$$

Кількість теплоти, яку акумульована елементом, знайдемо як різницю теплоти, що поступила та залишила елемент. Враховуючи (1.5), отримаємо

$$dQ_x = Q_x - Q_{x+dx} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dv d\tau, \quad (1.6)$$

де $dv = dx dy dz$ – величина елементарного об'єму.

Аналогічні викладки для осей y та z призводять до

$$dQ_y = Q_y - Q_{y+dy} = -\frac{\partial q_y}{\partial y} dv d\tau, \quad (1.7)$$

$$dQ_z = Q_z - Q_{z+dz} = -\frac{\partial q_z}{\partial z} dv d\tau. \quad (1.8)$$

Крім акумульованої теплоти в об'ємі можуть існувати внутрішні джерела теплоти (наприклад, електричний струм, що проходить крізь тіло; хімічні реакції, тощо). Позначимо об'ємну щільність внутрішніх джерел теплоти як q_v [Вт/м³]. Тоді за час $d\tau$ в об'ємі dv буде виділена кількість теплоти

$$dQ_v = q_v dv d\tau. \quad (1.9)$$

Акумульована в об'ємі та виділена внутрішніми джерелами теплота, згідно першому закону термодинаміки, витрачається тільки на зміну внутрішньої енергії (роботи проти зовнішніх сил не існує, тому що елемент не деформується). Отримаємо

$$dQ = dQ_x + dQ_y + dQ_z + dQ_v = dU = c\rho dv d\tau. \quad (1.10)$$

Користуючись (1.4) та скоротив (1.10) на dv , отримаємо рівняння Фур'є

$$c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) \right] + q_v. \quad (1.11)$$

Якщо $\lambda = \text{const}$, розділемо рівняння (1.11) на $c\rho$ і, позначивши $a = \lambda/(c\rho)$, отримаємо

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho}, \quad (1.12)$$

де a – коефіцієнт теплопровідності; ∇^2 – оператор Лапласу. Для декартової системи координат вираз оператору Лапласа отримуємо з порівняння (1.11) та (1.12) при $\lambda = \text{const}$; у циліндричній системі координат цей оператор має вигляд

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.13)$$

Для вирішення конкретної задачі треба до рівняння теплопровідності додати умови однозначності або крайові умови.

1.3. Крайові умови рівняння Фур'є

Рівняння (1.12) для вирішення конкретної задачі доповнюється умовами, що виділяють цю задачу з усього класу задач теплопровідності.

Ці умови включають:

- геометричні умови, що визначають форму та розміри тіла;
- фізичні умови, що визначають теплофізичні властивості речовини тіла;
- початкові умови, що визначають температурне поле тіла при $\tau = 0$;
- граничні умови, тобто умови на границях тіла.

Граничні умови, в свою чергу, підрозділяються на 4 роди.

Граничні умови 1-го роду. На поверхні тіла задана температура в будь-який момент часу, тобто $t_n(x, y, z, \tau) = f(x, y, z, \tau)$. В простішому випадку $t_n = \text{const}$. В процесі нагрівання або охолодження тіла змінюється градієнт температури на поверхні, тобто щільність теплового потоку, що надходить до тіла або залишає його.

Граничні умови 2-го роду. На поверхні тіла задана щільність теплового потоку, тобто $q_n(x, y, z, \tau) = f(x, y, z, \tau)$. Враховуючи закон Фур'є, маємо, що $(\partial t / \partial n)_n = -f(x, y, z, \tau) / \lambda$ також відома функція. Таким чином, цей тип граничних умов передбачає, що на поверхні тіла задано градієнт температури, а шукається температура поверхні тіла. В простішому випадку $(\partial t / \partial n)_n = \text{const}$.

Граничні умови 3-го роду. В цьому випадку невідомі ані температура поверхні тіла, ані її градієнт, але відомий зв'язок між ними.

Для встановлення цього зв'язку розглянемо процес тепловіддачі та сформулюємо закон, що встановлює залежність теплового потоку від певних чинників (закон Ньютона). Як вказано вище, тепловіддачею зветься процес переносу теплоти між рідиною та твердою поверхнею. Згідно гіпотези Ньютона «тепловий потік у процесі тепловіддачі пропорційний різниці температур між рідиною та поверхнею тіла та величині ізотермічній поверхні», тобто

$$Q = \alpha (t_p - t_n) F, \quad (1.14)$$

де F – поверхня переносу теплоти, α – коефіцієнт пропорційності, що

зветься **коефіцієнтом тепловіддачі**. Якщо поділити (1.14) на F , маємо

$$q = \alpha (t_p - t_n), \quad (1.15)$$

тобто **щільність теплового потоку в процесі тепловіддачі пропорційна різниці температур середовища та поверхні тіла**.

Розглянемо перенос теплоти на межі «тверде тіло – рідина», припускаючи, що температура тіла вища за температуру рідини. Усередині тіла, нескінченно близько до його поверхні, щільність теплового потоку можна записати згідно гіпотези Фур'є

$$q = -\lambda(\partial t / \partial n)_n. \quad (1.16)$$

В останньому виразі невідомий ані тепловий потік, ані градієнт температури. Однак з (1.15) можна записати тепловий потік з поверхні тіла в середовище. Теплові потоки з (1.16) і з (1.15) повинні бути рівними, тому що перший записано для нескінченно близького до поверхні шару. Тоді

$$-\lambda(\partial t / \partial n)_n = \alpha(t_n - t_p), \quad (1.17)$$

тобто отримано зв'язок між невідомою температурою поверхні та невідомим градієнтом температури на поверхні.

Граничні умови 4-го роду. Це умови ідеального теплового контакту двох твердих тіл. При цьому як температура, так і щільність теплового потоку в місці контакту не мають розриву, тобто

$$t_{1n} = t_{2n}, \quad (1.18a)$$

$$\lambda_1(\partial t_1 / \partial n)_n = \lambda_2(\partial t_2 / \partial n)_n. \quad (1.18b)$$

З останнього витікає, що в місці ідеального теплового контакту

$$\lambda_1 / \lambda_2 = (\partial t_2 / \partial n)_n / (\partial t_1 / \partial n)_n, \quad (1.19)$$

тобто відношення коефіцієнтів теплопровідності шарів обернено пропорційно відношенню градієнтів температури.

Питання для самоперевірки

1. Назвіть основні механізми переносу теплоти.
2. Надайте визначення процесу теплопровідності.
3. Надайте визначення процесу тепловіддачі.
4. Надайте визначення процесу теплопередачі.
5. Сформулюйте та запишіть гіпотезу Фур'є.
6. Надайте визначення коефіцієнту теплопровідності.
7. Сформулюйте крайові умови рівняння Фур'є.
8. Сформулюйте та запишіть граничні умови 1-го роду.
9. Сформулюйте та запишіть граничні умови 2-го роду.
10. Сформулюйте та запишіть граничні умови 3-го роду.
11. Сформулюйте та запишіть граничні умови 4-го роду.

2. СТАЦІОНАРНА ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ ТІЛ ПРОСТИХ ФОРМ

2.1. Необмежена пластина

Необмеженою пластиною (стінкою) зветься тіло, у якого один розмір кінцевий, а два інших нескінченно великі (набагато більші за перший). При цьому змінення температури в тілі відбувається тільки за координатою, що

співпадає з напрямом кінцевого розміру. Для визначення теплового потоку, що проходить крізь пластину, слід визначити градієнт температури, тобто її температурне поле. У випадку стаціонарної одновимірної задачі без джерел теплоти рівняння (1.12) для декартової системи координат має вид:

$$d^2t/dx^2 = 0. \quad (2.1)$$

Для вирішення конкретної задачі до (2.1) необхідно додати умови однозначності. Нехай ось x розташовано нормально до поверхні пластини (рис.2.1). Геометричні умови задачі повинні включати відому товщину пластини по координаті x . Нехай ця товщина дорівнює δ . Початок координат розташуємо на лівій поверхні пластини, тоді координата правої поверхні буде дорівнювати δ . Фізичні умови повинні включати завдання коефіцієнту теплопровідності матеріалу пластини λ . Через стаціонарність задачі початкові умови втрачають сенс. На границях пластини приймаємо умови першого роду, тобто

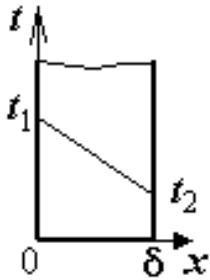


Рисунок 2.1 –
Необмежена
пластина при ГУ
1-го роду

$$\text{при } x = 0 \quad t = t_1, \quad (2.2)$$

$$x = \delta \quad t = t_2. \quad (2.3)$$

Прийmemo, що $t_1 > t_2$.

Двократне інтегрування (2.1) дає

$$t = C_1x + C_2, \quad (2.4)$$

де C_1 і C_2 – постійні інтегрування, для визначення яких використаємо (2.2) та (2.3). З першої умови маємо, що $C_2 = t_1$, а з другої $C_1 = (t_2 - t_1)/\delta$. Підставимо отримані постійні в рішення (2.4). Отримаємо

$$t = t_1 - (t_1 - t_2) \cdot x/\delta. \quad (2.5)$$

Таким чином маємо, що стаціонарний розподіл температури в пластині представляється прямою лінією. Щільність теплового потоку, що проходить крізь пластину, визначимо за гіпотезою Фур'є, враховуючи, що похідна $dt/dx = C_1$.

$$q = \frac{t_1 - t_2}{\delta/\lambda}, \quad (2.6)$$

де δ/λ – термічний опір теплопровідності плоскої стінки (по аналогії із законом Ома).

Для багатошарової стінки щільність теплового потоку легко знайти, якщо записати (2.6) для кожного шару та сумувати часткові температурні напори. Отримаємо

$$q = (t_1 - t_{n+1}) / \sum_{i=1}^n (\delta_i / \lambda_i). \quad (2.7)$$

Таким чином, щільність теплового потоку крізь багатошарову стінку дорівнює повному температурному напору, поділеному на суму термічних опорів шарів стінки.

Проаналізуємо теплопередачу крізь плоску стінку (рис.2.2). В цьому випадку на поверхнях стінки має місце тепловіддача до середовищ з різними

температурами (припустимо, що $t_{p1} > t_{p2}$) та різною інтенсивністю теплообміну.

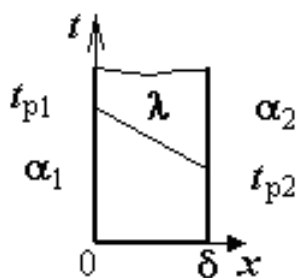


Рисунок 2.2 – Теплопередача крізь плоску стінку

Температура поверхньої стінки невідома, тобто розглядаються граничні умови 3-го роду. Тоді умови (2.2) і (2.3) змінюються на умови

$$\text{при } x = 0 \quad \alpha_1(t_{p1} - t_1) = -\lambda(dt/dx), \quad (2.8)$$

$$\text{при } x = \delta \quad \alpha_2(t_2 - t_{p2}) = -\lambda(dt/dx). \quad (2.9)$$

Використаємо отримане загальне рішення у вигляді (2.4) та знайдемо постійні інтегрування з (2.8) і (2.9). Маємо систему двох рівнянь з двома невідомими

$$\alpha_1(t_{p1} - C_2) = -\lambda C_1,$$

$$\alpha_2(C_1 \delta + C_2 - t_{p2}) = -\lambda C_1,$$

рішення якої

$$C_1 = -(t_{p1} - t_{p2}) / [\lambda(1/\alpha_1 + \delta/\lambda + 1/\alpha_2)],$$

$$C_2 = t_{p1} - (t_{p1} - t_{p2}) / [\alpha_1(1/\alpha_1 + \delta/\lambda + 1/\alpha_2)].$$

Враховуючи, що $dt/dx = C_1$, та використовуючи гіпотезу Фур'є, отримуємо щільність теплового потоку крізь плоску стінку для цього випадку

$$q = \frac{t_{p1} - t_{p2}}{1/\alpha_1 + \delta/\lambda + 1/\alpha_2}. \quad (2.10)$$

В (2.10) $1/\alpha$ – термічний опір тепловіддачі плоскої стінки.

Якщо представити щільність теплового потоку в процесі теплопередачі крізь плоску стінку у вигляді

$$q = k(t_{p1} - t_{p2}), \quad (2.11)$$

де k – коефіцієнт теплопередачі, можна отримати

$$k = \frac{1}{1/\alpha_1 + \delta/\lambda + 1/\alpha_2}. \quad (2.12)$$

З останнього виразу видно, що коефіцієнт теплопередачі менш за менший коефіцієнт тепловіддачі. Тому для інтенсифікації теплопередачі доцільно підвищення меншого коефіцієнту тепловіддачі.

З (2.11) маємо фізичний зміст коефіцієнту теплопередачі: **коефіцієнт теплопередачі чисельно дорівнює щільності теплового потоку за умов одиничної різниці температур між рідинами, що омивають стінку.**

2.2. Необмежений порожнистий циліндр

Знайдемо температурне поле у необмеженому порожнистому циліндрі з внутрішнім радіусом R_1 та зовнішнім – R_2 . Будемо вважаємо, що температура змінюється тільки за нормаллю до бокової поверхні та постійна вздовж всієї бокової поверхні. Крім того, вважаємо, що внутрішні джерела теплоти відсутні.

Рівняння (1.12) з урахуванням (1.13) для одномірної задачі має вигляд

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} = 0. \quad (2.13)$$

Прийmemo граничні умови першого роду на поверхнях циліндру:

$$\text{при } r = R_1 \quad t = t_1, \quad (2.14)$$

$$\text{при } r = R_2 \quad t = t_2. \quad (2.15)$$

Для інтегрування (2.13) змінимо $dt/dr = u$ та розділимо змінні.

$$du/dr + u/r = 0, \text{ або } du/u = -dr/r.$$

Інтегруючи останнє рівняння та потенціюючи отриманий результат, маємо $u = C_1/r$.

Враховуючи проведену зміну, інтегруємо отримане ще раз. Маємо

$$t = C_1 \ln(r) + C_2. \quad (2.16)$$

Постійні інтегрування знайдемо з граничних умов (2.14) і (2.15).

$$C_1 = (t_1 - t_2)/\ln(R_1/R_2), \quad C_2 = t_1 - (t_1 - t_2) \cdot \ln(R_1)/\ln(R_1/R_2).$$

Знайдені постійні інтегрування підставимо у (2.16), та отримаємо розподіл температури

$$t = t_1 - (t_1 - t_2) \ln(r/R_1)/\ln(R_2/R_1). \quad (2.17)$$

Тепловий потік крізь циліндр довжиною L знайдемо із гіпотези Фур'є з урахуванням виразу похідної. Отримаємо

$$Q = \lambda \cdot 2\pi L (t_1 - t_2) / \ln(R_2/R_1).$$

Знайдемо щільність теплового потоку на внутрішньому та зовнішньому радіусах циліндру. Отримаємо:

$$q_1 = \lambda(t_1 - t_2) / [R_1 \ln(R_2/R_1)], \quad q_2 = \lambda(t_1 - t_2) / [R_2 \ln(R_2/R_1)].$$

В силу того, що $R_2 > R_1$, маємо $q_2 < q_1$, тобто зі збільшенням радіусу щільність теплового потоку зменшується завдяки збільшенню поверхні переносу теплоти. Тому в розрахунках теплового потоку крізь циліндричну поверхню використовується поняття погонної (лінійної) щільності теплового потоку, тобто потоку теплоти крізь одиницю довжини циліндричної поверхні: $q_l = Q/L$.

$$q_l = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{2\pi\lambda} \cdot \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)}, \quad (2.18)$$

де вираз, що стоїть у знаменнику, зветься термічним опором теплопровідності циліндричної поверхні.

Якщо циліндрична поверхня складається з n шарів з різними коефіцієнтами теплопровідності, то аналогічно до плоскої стінки отримаємо:

$$q_l = \frac{t_1 - t_{n+1}}{\sum_{i=1}^n [1/(2\pi\lambda_i) \cdot \ln(d_{i+1}/d_i)]}. \quad (2.19)$$

Розглянемо теплопередачу крізь циліндричну поверхню (рис.2.3). Нехай в трубі з внутрішнім діаметром d_1 тече рідина з температурою t_{p1} та інтенсивністю теплообміну α_1 . По зовнішньому діаметру d_2 труба омивається

рідиною з температурою t_{p2} та інтенсивністю тепловіддачі α_2 . Запишемо потік теплоти на погонний метр труби, що передається від однієї рідини до іншої крізь тверду поверхню. Отримаємо

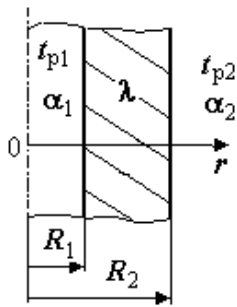


Рисунок 2.3 —
Теплопередача крізь
циліндричну стінку

$$q_l = \alpha_1 \pi d_1 (t_{p1} - t_1),$$

$$q_l = \frac{t_1 - t_2}{\ln(d_2/d_1)/(2\pi\lambda)},$$

$$q_l = \alpha_2 (t_2 - t_{p2}) \pi d_2.$$

Якщо виділити часткові температурні напори та сумувати їх, отримаємо погонну щільність теплового потоку за умов теплопередачі крізь циліндричну стінку

$$q_l = \frac{t_{p1} - t_{p2}}{1/(\alpha_1 \pi d_1) + \ln(d_2/d_1)/(2\pi\lambda) + 1/(\alpha_2 \pi d_2)}, \quad (2.20)$$

де $1/(\alpha_i \pi d_i)$ – термічний опір тепловіддачі циліндричної поверхні.

Проаналізуємо вплив змінення зовнішнього діаметру труби на погонну щільність теплового потоку за умов постійності інших параметрів. Така задача часто зустрічається, якщо треба обрати матеріал для ізоляції трубопроводів. З (2.20) зрозуміло, що при збільшенні d_2 термічний опір теплопровідності збільшується, а термічний опір тепловіддачі з зовнішньої поверхні зменшується, що пов'язано зі збільшенням поверхні переносу теплоти. Очевидно, що може мати місце екстремум функції $q_l = f(d_2)$. Якщо порівняти нулю похідну знаменника по d_2 , отримаємо значення зовнішнього діаметру, при якому витрати теплоти максимальні. Назвемо цю величину критичним діаметром.

$$d_{2кр} = 2\lambda/\alpha_2. \quad (2.21)$$

Як витікає з отриманого результату, величина критичного діаметру зменшується зі зменшенням коефіцієнту теплопровідності та збільшенням коефіцієнту тепловіддачі в навколишнє середовище. Практично використовувати співвідношення (2.21) можна наступним шляхом. Якщо треба обрати матеріал для ізоляції трубопроводу із зовнішнім діаметром d_1 , то повинно виконуватися співвідношення $d_1 \geq d_{2кр}$. Тоді матеріал ізоляції повинен мати коефіцієнт теплопровідності $\lambda_{із} \leq \alpha_2 d_1/2$.

2.3. Теплопровідність при змінному коефіцієнті теплопровідності

Коефіцієнт теплопровідності більшості будівельних, вогнетривких та теплоізоляційних матеріалів, металів та сплавів суттєво залежить від температури. В більшості практичних розрахунків процесу теплопровідності з достатньою для практики точністю можна обмежитися лінійною залежністю коефіцієнту теплопровідності від температури у вигляді

$$\lambda = \lambda_0 (1 + \beta \cdot t). \quad (2.22)$$

2.3.1. Необмежена стінка

Запишемо гіпотезу Фур'є з урахуванням (2.22) як $q = -\lambda_0(1 + \beta t) \frac{dt}{dx}$.

Розділимо змінні

$$q dx = -\lambda_0(1 + \beta t) dt, \quad (2.23)$$

та проінтегруємо по x від 0 до δ , а по t від t_1 до t_2 . Враховуючи, що у стаціонарному стані щільність теплового потоку крізь стінку залишається постійною, отримаємо:

$$q\delta = \lambda_0[1 + \beta(t_1 + t_2)/2] \cdot (t_1 - t_2).$$

Визначимо коефіцієнт теплопровідності матеріалу при середній температурі стінки як $\bar{\lambda} = \lambda_0[1 + \beta(t_1 + t_2)/2]$ та отримаємо щільність теплового потоку крізь стінку у вигляді

$$q = \frac{t_1 - t_2}{\delta/\bar{\lambda}}, \quad (2.24)$$

як і у випадку лінійної задачі, але при середньому коефіцієнті теплопровідності.

Розподіл температури в стінці отримаємо, інтегруючи (2.23) по x від 0 до x , а по температурі від t_1 до t . Маємо квадратне рівняння

$$t^2 + 2t/\beta + 2qx/\beta\lambda_0 - 2t_1/\beta - t_1^2 = 0,$$

рішення якого з врахуванням (2.24) має вигляд

$$t = \frac{1}{\beta} \left\{ \sqrt{(1 + \beta t_1)^2 - [(1 + \beta t_1)^2 - (1 + \beta t_2)^2] \cdot \frac{x}{\delta}} - 1 \right\}. \quad (2.25)$$

Аналіз отриманого співвідношення демонструє, що розподіл температури за товщиною стінки нелінійний. Тому і градієнт температури в стінці також змінний. При позитивному β розподіл температури по товщині стінки має характер опуклої кривої, тобто зі зростом температури градієнт температури зменшується.

2.3.2. Необмежений порожнистий циліндр

Для того, щоб знайти тепловий потік крізь циліндр, запишемо гіпотезу Фур'є для погонної щільності теплового потоку з урахуванням (2.22).

$$q_l = -\lambda_0(1 + \beta t) \cdot 2\pi r \cdot \frac{dt}{dr}. \quad (2.26)$$

Розділимо змінні та проінтегруємо по r від R_1 до R_2 , по t від t_1 до t_2 . Отримаємо при $\bar{\lambda}$

$$q_l = \frac{t_1 - t_2}{\ln(d_2/d_1)/(2\pi\bar{\lambda})}, \quad (2.27)$$

що аналогічно виразу, який отримано раніше, але при середньому коефіцієнті теплопровідності.

Для визначення температурного поля циліндру при змінному коефіцієнті теплопровідності необхідно вирішити рівняння

$$\frac{d}{dr} \left(\lambda \frac{dt}{dr} \right) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\lambda t) = 0. \quad (2.28)$$

Скористаємося підстановкою Кирхгофа

$$\lambda (dt/dr) = \lambda_c (du/dr), \quad (2.29)$$

де λ_c – постійна величина, а u – деяка змінна, що задовольняє умовам: при $r = R_1$ $u = t_1$, при $r = R_2$ $u = t_2$. Можна показати, що змінна u задовольняє рівнянню

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = 0,$$

рішення якого було отримане раніше у вигляді

$$u = t_1 - (t_1 - t_2) \frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)}. \quad (2.30)$$

Для знаходження шуканого розподілу температури проведемо напівозначене інтегрування (2.29) з урахуванням (2.22). Отримаємо

$$\beta t^2 / 2 + t = \beta t_1^2 / 2 + t_1 - (\lambda_c / \lambda_0) \cdot (t_1 - u). \quad (2.31)$$

Для визначення постійної у підстановці Кирхгофа, проведемо інтегрування (2.29) в повному діапазоні змінення параметрів. Маємо

$$\lambda_c = \lambda_0 [1 + \beta(t_1 + t_2) / 2]. \quad (2.32)$$

Підставимо (2.30) і (2.32) у (2.31) та вирішимо отримане квадратне рівняння. Маємо після простих перетворень

$$t = \frac{1}{\beta} \left\{ \sqrt{(1 + \beta t_1)^2 - [(1 + \beta t_1)^2 - (1 + \beta t_2)^2] \cdot \frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)}} - 1 \right\}. \quad (2.33)$$

Таким чином, як і у випадку плоскої стінки, температурне поле циліндру при змінному коефіцієнті теплопровідності відрізняється від лінійної задачі та має ті ж особливості, що й у попередньому випадку.

Задачі до розділів 2.2 і 2.3

1. Співвіднести щільності теплового потоку крізь плоску стінку завтовшки 400 мм, що виконана з червоної цегли ($\lambda_{\text{к}} = 0,7$ Вт/(м·К)), шлакоблоку ($\lambda_{\text{ш}} = 1,2$ Вт/(м·К)) або бетону ($\lambda_{\text{б}} = 2,2$ Вт/(м·К)) при температурах на границях $t_1 = 400$ °С і $t_2 = 20$ °С. Як зміниться потік, якщо $\lambda_{\text{к}} = 0,7(1 + 3 \cdot 10^{-4} t)$, $\lambda_{\text{ш}} = 1,2(1 - 3,8 \cdot 10^{-4} t)$, $\lambda_{\text{б}} = 2,2(1 + 3,5 \cdot 10^{-4} t)$.

Коментар до задачі. Використайте (2.6) та (2.24).

2. Знайти витрати теплоти с 1 м² плоскої стінки дому, що виконана з шару бетону ($\lambda_{\text{б}} = 2,2$ Вт/(м·К)) завтовшки 250 мм та шару штукатурки ($\lambda_{\text{шт}} = 0,4$ Вт/(м·К)) завтовшки 20 мм, якщо усередині температура $t_{\text{в1}} = 20$ °С та коефіцієнт тепловіддачі $\alpha_1 = 10$ Вт/(м²·К), а зовні температура $t_{\text{в2}} = -20$ °С та коефіцієнт тепловіддачі $\alpha_2 = 15$ Вт/(м²·К).

Коментар до задачі. Використайте (2.10), де замість δ/λ повинна бути сума

$\sum_{i=1}^n \delta_i / \lambda_i$ термічних опорів шарів стінки ($n = 2$).

3. Порівняти витрати теплоти з 1 м^2 стінки дому, що отримані в попередній задачі, з витрати теплоти стінкою, що складається із шару червоної цегли ($\lambda_{\text{к}} = 0,7 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$), завтовшки 400 мм , шару дерева ($\lambda_{\text{д}} = 0,4 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$) завтовшки 150 мм та штукатурки ($\lambda_{\text{шт}} = 0,4 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$) завтовшки 40 мм при тих же температурах та інтенсивностях теплообміну.

Коментар до задачі. Див. попередню задачу при $n = 3$.

4. Трубопровід із зовнішнім діаметром 150 мм ізолювано двома шарами ізоляції завтовшки кожній по 50 мм . Перший шар виконано з шлаковати ($\lambda_{\text{ш}} = 0,08 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$), другий з азбоцементу ($\lambda_{\text{аз}} = 0,25 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$). Знайти витрати теплоти з погонного метра трубопроводу, якщо температура трубопроводу $t_1 = 200^\circ\text{C}$, температура навколишнього повітря $t_{\text{п}} = 20^\circ\text{C}$, коефіцієнт тепловіддачі з поверхні ізоляції $\alpha = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$. Як зміняться витрати теплоти, якщо шари ізоляції змінити місцями, а решту величин залишити без змін? Яка при цьому буде температура зовнішньої поверхні ізоляції?

Коментар до задачі. Тепловий потік з погонного метра трубопроводу $q_l = (t_1 - t_{\text{п}}) / [\ln(d_2 / d_1) / (2\pi\lambda_{\text{ш}}) + \ln(d_3 / d_2) / (2\pi\lambda_{\text{аз}}) + 1 / (\alpha\pi d_3)]$. В другому випадку слід у наведеному виразі теплового потоку змінити місцями коефіцієнти теплопровідності шарів. Температуру поверхні знайти з $q_l = \alpha\pi d_3 (t_{\text{п.из}} - t_{\text{п}})$.

5. Мідним дротом діаметром 5 мм проходить струм 60 А . Знайти температуру дроту, якщо він знаходиться в повітрі $t_{\text{пов}} = 20^\circ\text{C}$, а коефіцієнт тепловіддачі з поверхні проводу $\alpha = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$. Питомий електричний опір міді $\rho = 0,05 \text{ Ом}\cdot\text{мм}^2/\text{м}$. Як зміниться температура дроту, якщо його ізолювати шаром азбесту ($\lambda = 0,12 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$) завтовшки 10 мм , а інші величини залишити без змін?

Коментар до задачі. З балансу теплових потоків з погонного метра дроту $q_l = I^2\rho / s = \alpha\pi d (t_{\text{п}} - t_{\text{пов}})$, де s – переріз дроту (мм^2), знаходиться температура дроту. При ізолюванні поверхні $I^2\rho / s = (t_{\text{п}} - t_{\text{пов}}) / [\ln(d_2 / d) / (2\pi\lambda) + 1 / (\alpha\pi d_2)]$, звідки знаходиться температура поверхні. Поясніть результати розв'язання.

6. Знайти товщину ізоляції ($\lambda_{\text{із}} = 0,2 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$) трубопроводу діаметром 100 мм , з температурою поверхні $t_1 = 200^\circ\text{C}$, якщо при температурі навколишнього повітря $t_{\text{п}} = 20^\circ\text{C}$ та коефіцієнті тепловіддачі з поверхні ізоляції $\alpha = 8 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$, теплові витрати не повинні перевищувати $150 \text{ Вт}/\text{м}$.

Коментар до задачі. З $q_l = (t_1 - t_{\text{п}}) / [\ln(d_2 / d_1) / (2\pi\lambda_{\text{із}}) + 1 / (\alpha\pi d_2)]$ методом послідовних наближень знаходиться d_2 , що шукається.

7. Обмуровання топкової камери виконано з шару шамоту $\lambda_{\text{ш}} = 1,04 (1 + 1,452 \cdot 10^{-4} \cdot t) \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ завтовшки 240 мм , піношамоту $\lambda_{\text{пш}} = 0,105 (1 + 1,38 \cdot 10^{-3} \cdot t) \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ завтовшки 250 мм та шару мінеральної вати $\lambda_{\text{в}} = 0,093 (1 + 2,573 \cdot 10^{-3} \cdot t) \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ завтовшки 80 мм . З боку шамоту стінка омивається топковими газами $t_{\text{г}} = 1300^\circ\text{C}$, коефіцієнт тепловіддачі від

газів до стінки $\alpha_r = 20 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Знайти витрати теплоти з 1 м^2 обмурування, якщо з іншої поверхні воно омивається повітрям $t_{\text{п}} = 40 \text{ }^\circ\text{С}$, а коефіцієнт тепловіддачі від стінки до повітря $\alpha_{\text{п}} = 8 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Знайти температуру поверхні шамоту та мінеральної вати.

Коментар до задачі. Задача вирішується послідовним наближенням. Спочатку, вважаючи λ_i постійними, знаходиться щільність теплового потоку крізь обмурівку $q = (t_r - t_{\text{п}}) / (1/\alpha_r + \sum_{i=1}^3 \delta_i / \lambda_i + 1/\alpha_{\text{п}})$. Знаходяться температури на границях шарів обмурівки $t_1 = t_r - q/\alpha_r$, $t_2 = t_1 - q \cdot \lambda_1 / \delta_1$, $t_3 = t_2 - q \cdot \lambda_2 / \delta_2$, $t_4 = t_{\text{п}} + q/\alpha_{\text{п}}$, та середня температура кожного шару $\bar{t}_1 = (t_1 + t_2)/2$ і т.д. По цим температурам знаходять середні коефіцієнти теплопровідності кожного шару $\bar{\lambda}_i$, та щільність теплового потоку по наведеному вище виразу, але при середніх коефіцієнтах теплопровідності. При розходженні потоків більш за 10% слід виконати ще одне наближення.

2.4. Теплопровідність за наявності внутрішніх джерел теплоти

Внутрішні джерела теплоти в тілі мають місце при проходженні електричного струму, у випадку хімічних реакцій або за умов ядерного перетворення. У загальному випадку ці джерела теплоти характеризуються об'ємною щільністю тепловиділення q_v $[\text{Вт}/\text{м}^3]$. Визначимо температурне поле тіл простої форми за умов дії внутрішніх джерел теплоти.

2.4.1. Необмежена пластина при граничних умовах 3-го роду

Нехай задана необмежена пластина (рис.2.4) завтовшки 2δ із матеріалу з відомим коефіцієнтом теплопровідності. Розташуємо вісь x нормально до поверхні пластини. Початок координат розташуємо в центрі пластини. На поверхнях пластини має місце теплообмін із середовищем з постійною температурою та заданою інтенсивністю теплообміну. Для обчислення температурного поля пластини необхідно вирішити рівняння

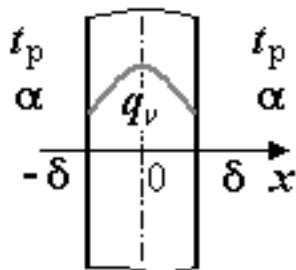


Рисунок 2.4 –
Необмежена пластина з
внутрішніми джерелами
теплоти

$$\frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \quad (2.34)$$

Якщо граничні умови симетричні, можна записати

$$\text{при } x = 0 \quad dt/dx = 0, \quad (2.35)$$

$$\text{при } x = \delta \quad -\lambda(dt/dx) = \alpha(t - t_c). \quad (2.36)$$

Розділивши змінні у (2.34), двічі інтегруємо та отримуємо:

$$t = -q_v x^2 / (2\lambda) + C_1 x + C_2. \quad (2.37)$$

З (2.35) витікає, що $C_1 \equiv 0$. З (2.36) отримуємо

$$C_2 = t_c + q_v \delta / \alpha + q_v \delta^2 / (2\lambda).$$

Розподіл температури за товщиною пластини має вигляд

$$t = t_c + q_v \delta / \alpha + q_v \delta^2 [1 - (x/\delta)^2] / (2\lambda). \quad (2.38)$$

З останнього легко отримати температуру центру та поверхні пластини, а також різницю температури по товщині пластини.

2.4.2. Необмежений циліндр при граничних умовах 3-го роду

Визначимо температурне поле необмеженого суцільного циліндру радіусом R при дії розподілених джерел теплоти. Вважаємо, що температура середовища та інтенсивність теплообміну постійні за висотою та бічною поверхнею циліндру. Тоді для визначення температурного поля останнього необхідно вирішити рівняння

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} + \frac{q_v}{\lambda} = 0, \quad (2.39)$$

з граничними умовами

$$\text{при } r = 0 \quad dt/dr = 0, \quad (2.40)$$

$$\text{при } r = R \quad -\lambda(dt/dr) = \alpha(t - t_c). \quad (2.41)$$

Замінивши змінну $dt/dr = u$, представимо (2.39) у вигляді:

$$r du + u dr = -q_v r dr / \lambda, \text{ або інтегруючи: } u = -q_v r / (2\lambda) + C_1 / r.$$

Зробимо оборотну зміну змінної, розділимо змінні та проінтегруємо ще раз.

$$\text{Отримуємо } t = -q_v r^2 / (4\lambda) + C_1 \ln(r) + C_2.$$

З (2.40) находимо $C_1 \equiv 0$. З (2.41) $C_2 = t_c + q_v R / (2\alpha) + q_v R^2 / (4\lambda)$.

У кінцевому випадку маємо

$$t = t_c + q_v R / (2\alpha) + q_v R^2 [1 - (r/R)^2] / (4\lambda). \quad (2.42)$$

Порівнюючи розподіл температури в пластині та циліндрі, маємо, що за однакових умов різниця температури за товщиною пластини в 2 рази вище, ніж за радіусом циліндру.

Питання для самоперевірки

1. Запишіть щільність теплового потоку теплопровідністю крізь плоску стінку.
2. Запишіть щільність теплового потоку при теплопередачі крізь плоску стінку.
3. Запишіть тепловий потік теплопровідністю крізь циліндричну трубу довжиною L .
4. Як змінюється щільність теплового потоку в залежності від радіусу труби?
5. Запишіть погонну щільність теплового потоку при теплопередачі крізь трубу.
6. Що таке критичний діаметр циліндричної поверхні? Як його можна використовувати?
7. Як визначити щільність теплового потоку теплопровідністю крізь плоску поверхню за умов лінійної залежності коефіцієнту теплопровідності від температури.

2.5. Методи інтенсифікації теплопередачі

Коли розглядалася теплопередача крізь циліндричну поверхню, було знайдено вираз для обчислення погонної щільності теплового потоку (2.20). Нехтуючи в цьому рівнянні термічним опором теплопровідності, у загальному випадку можна записати:

$$Q = \frac{t_{p1} - t_{p2}}{1/(\alpha_1 F_1) + 1/(\alpha_2 F_2)}. \quad (2.43)$$

Якщо $\alpha_1 \gg \alpha_2$, то для суттєвого збільшення теплового потоку необхідно або збільшувати інтенсивність теплообміну з боку теплоносія з низьким коефіцієнтом тепловіддачі (що не завжди можливо), або збільшувати поверхню переносу теплоти з боку цього теплоносія. Практично подібне збільшення поверхні реалізується за допомогою різноманітного типу ребер, стрижнів або шипів. Об'єднує ці елементи одна загальна риса: в цих тілах можна нехтувати зміною температури за товщиною тіла, і розглядати змінення температури тільки вздовж його осі. На поверхні тіла має місце теплообмін з середовищем постійної температури, інтенсивність цього процесу можна також вважати постійною. Таким чином, в тілі типу ребра або стрижня перенос теплоти вздовж осі тіла здійснюється теплопровідністю, а з поверхні тіла – тепловіддачею в середовище.

Існує велика кількість типів ребер. Найбільш поширені: прямі ребра постійного та змінного перерізу на плоскій поверхні або по утворюючій циліндричній поверхні; кільцеві та спіральні ребра на циліндричній поверхні; плавникові ребра й т. і.

2.5.1. Прямий стрижень постійного перерізу

Для знаходження теплового потоку, який передається від стрижня в середовище, необхідно мати температурне поле стрижня. Знайдемо диференціальне рівняння, що визначає розподіл температури в прямому стрижні.

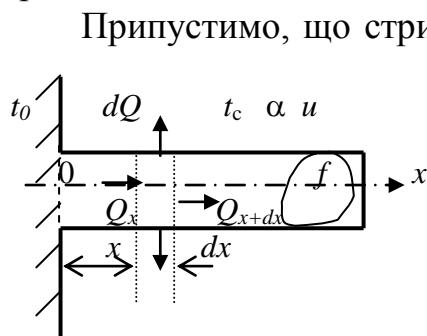


Рисунок 2.5 – Перенесення теплоти крізь стержень

Припустимо, що стрижень постійного перерізу (рис.2.5) має площину поперечного перерізу f та периметр u . Розташуємо вісь x вздовж осі стрижня. Оберемо початок координат в основі стрижня. Потік теплоти, що входить в переріз на координаті x по осі x , запишемо у вигляді

$$Q_x = q_x f = -\lambda f (dt/dx) \quad (2.44)$$

На координаті $x+dx$ по осі x виділений елемент залишає потік теплоти $Q_{x+dx} = q_{x+dx} f$. Розкладемо q_{x+dx} в

ряд Тейлора, та обмежимося двома членами розкладу:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx.$$

Зменшення теплового потоку вздовж осі x пов'язано з відводом

теплоти з поверхні стрижня в середовище.

$$dQ_x = Q_x - Q_{x+dx} = \lambda f \frac{d^2 t}{dx^2} dx = \alpha u (t - t_c) dx.$$

Перейшовши до перевищення температури стрижня над температурою середовища $\vartheta = t - t_c$, отримаємо

$$d^2 \vartheta / dx^2 - m^2 \vartheta = 0, \quad (2.45)$$

де $m = \sqrt{\alpha u / (\lambda f)}$ – характеристика стрижня, що представляє собою міру відношення потоків теплоти тепловіддачею з поверхні стрижня та теплопровідністю вздовж осі стрижня.

Загальне рішення (2.45) може бути записано у вигляді

$$\vartheta(x) = A e^{-mx} + B e^{mx}, \quad (2.46)$$

$$\vartheta(x) = A \operatorname{ch}(mx) + B \operatorname{sh}(mx). \quad (2.47)$$

Для визначення постійних інтегрування A і B необхідно до рівняння (2.45) додати умови на границях стрижня. В місці контакту стрижня з поверхнею (на координаті $x = 0$) найчастіше відома температура. Розглянемо декілька окремих задач в залежності від умов на другому кінці стрижня.

а/. Нескінченно довгий стрижень

Граничні умови мають вигляд

$$\text{при } x = 0 \quad \vartheta = t_0 - t_c = \vartheta_0, \quad (2.48)$$

$$\text{при } x \rightarrow \infty \quad \vartheta = 0. \quad (2.49)$$

Використаємо рішення (2.46). З умови (2.49) отримаємо $B \equiv 0$. Тоді з (2.48) отримуємо $A = \vartheta_0$.

Кінцеве рішення має вид:

$$\vartheta(x) = \vartheta_0 e^{-mx}. \quad (2.50)$$

Тепловий потік, що передається стрижнем в середовище, можна знайти, як

$$Q = \int_0^{\infty} \alpha u \vartheta(x) dx = \vartheta_0 \sqrt{\alpha u \lambda f}, \quad (2.51)$$

або як тепловий потік, що надходить в стрижень на координаті $x = 0$,

$$Q = -\lambda f (d\vartheta/dx)_{x=0} = \vartheta_0 \sqrt{\alpha u \lambda f}. \quad (2.52)$$

Як і очікувалося, отримані результати є однаковими.

б/. Стрижень кінцевої довжини без теплообміну на торці

Маємо стрижень довжиною h , в основі якого задана температура t_0 , а на вільному торці відсутній теплообмін, тобто існує адіабатна оболонка. Граничні умови запишуться

$$\text{при } x = 0 \quad \vartheta = \vartheta_0 = t_c - t_0, \quad (2.53)$$

$$\text{при } x = h \quad d\vartheta/dx = 0. \quad (2.54)$$

Використаємо загальне рішення у вигляді (2.47). Тоді за умови (2.53) отримаємо $A = \vartheta_0$. Для визначення другої постійної продиференціюємо (2.47).

$\vartheta_0 m \operatorname{sh}(mh) + B m \operatorname{ch}(mh) = 0$, звідки $B = -\vartheta_0 \operatorname{sh}(mh) / \operatorname{ch}(mh)$, і розподіл температури

$$\vartheta(x) = \vartheta_0 \operatorname{ch}[m(h-x)] / \operatorname{ch}(mh). \quad (2.55)$$

Тепловий потік, що передається стрижнем в навколишнє середовище, дорівнює потоку, що надійшов в основу стрижня

$$Q = -\lambda f (d\vartheta/dx)_{x=0} = \vartheta_0 \sqrt{\alpha u \lambda f} \operatorname{th}(mh). \quad (2.56)$$

в/. Стрижень кінцевої довжини з теплообміном на торці

Задано стрижень довжиною h , на основі якого задана температура t_0 , а на вільному торці – теплообмін із середовищем з постійною температурою, тобто граничні умови 3-го роду. Тоді

$$\text{при } x = 0 \quad \vartheta = \vartheta_0 = t_c - t_0, \quad (2.57)$$

$$\text{при } x = h \quad -\lambda(d\vartheta/dx) = \alpha_1 \vartheta. \quad (2.58)$$

Використаємо загальне рішення у вигляді (2.47). Тоді з (2.57) $A = \vartheta_0$. Для визначення другої постійної продиференціюємо (2.47), підставимо у (2.58) та позначимо $N = \alpha_1 / (\lambda m)$.

Отримуємо: $-\left[\vartheta_0 \operatorname{sh}(mh) + B \operatorname{ch}(mh)\right] = N\left[\vartheta_0 \operatorname{ch}(mh) + B \operatorname{sh}(mh)\right]$, звідки після простих перетворень знаходимо B та розподіл температури по стрижню.

$$\vartheta(x) = \vartheta_0 \frac{\operatorname{ch}[m(h-x)] + N \operatorname{sh}[m(h-x)]}{\operatorname{ch}(mh) + N \operatorname{sh}(mh)}. \quad (2.59)$$

Легко бачити, що при $\alpha_1 = 0$ (відсутність теплообміну на торці) отримане рішення співпадає з (2.55).

Тепловий потік, що передає стрижень, знайдемо, як у попередньому випадку.

$$Q = \vartheta_0 \sqrt{\alpha u \lambda f} \frac{\operatorname{th}(mh) + N}{1 + N \operatorname{th}(mh)}. \quad (2.60)$$

г/. Стрижень з різними температурами на кінцях

Задано стрижень довжиною h , на одному кінці якого задана температура t_1 , а на другому – температура t_2 . Граничні умови запишемо у вигляді:

$$\text{при } x = 0 \quad \vartheta = \vartheta_1, \quad (2.61)$$

$$\text{при } x = h \quad \vartheta = \vartheta_2. \quad (2.62)$$

Використаємо загальне рішення у вигляді (2.47). Тоді з умови (2.61) отримаємо $A = \vartheta_1$. З умови (2.62) маємо $B = [\vartheta_2 - \vartheta_1 \operatorname{ch}(mh)] / \operatorname{sh}(mh)$. Якщо підставити отримані постійні в загальне рішення, знайдемо після простих перетворень розподіл температури

$$\vartheta(x) = \frac{\vartheta_1 \operatorname{sh}[m(h-x)] + \vartheta_2 \operatorname{sh}(mx)}{\operatorname{sh}(mh)}. \quad (2.63)$$

Тепловий потік, що передає стрижень, знайдемо як

$$Q = \int_0^h \alpha u \vartheta(x) dx = (\vartheta_1 + \vartheta_2) \sqrt{\alpha u \lambda f} \frac{\text{ch}(mh) - 1}{\text{sh}(mh)}. \quad (2.64)$$

2.5.2. Теплопередача крізь оребрену поверхню

Розглянемо декілька докладніше (2.44) і припустимо, що $\alpha_1 \gg \alpha_2$ та з боку меншої інтенсивності теплообміну поверхня теплообміну складається з ребер (F_{2p}) та міжреберної поверхні (F_{2r}), тобто $F_2 = F_{2p} + F_{2r}$. Будемо вважати, що інтенсивність теплообміну з поверхні ребер та між ними однакова. В цьому випадку тепловий потік, що передається з оребреної поверхні в середовище, може бути записаний у вигляді:

$$Q = \alpha_2 [F_{2r}(t_2 - t_{p2}) + F_{2p}(\bar{t} - t_{p2})], \quad (a)$$

де \bar{t} – середня температура ребра. В зв'язку з тим, що $F_{2p} \gg F_{2r}$, з достатньою точністю можна змінити (a) виразом

$$Q = \alpha_2 F_2 (t_2 - t_{p2}) \frac{\bar{t} - t_{p2}}{t_2 - t_{p2}}. \quad (б)$$

Тепловий потік на поверхні F_1 можна записати за законом Ньютона

$$Q = \alpha_1 F_1 (t_{p1} - t_2), \quad (в)$$

де t_2 – температура стінки, однакова як зі сторони першого, так й іншого теплоносія, тому що в (2.44) термічним опором теплопровідності нехтувалося.

Якщо з (б) і (в) виділити часткові температурні напори та сумувати їх, можна після деяких перетворень отримати

$$Q = \frac{t_{p1} - t_{p2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{F_2}{\alpha_2} \frac{\bar{t} - t_{p2}}{F_1 (t_2 - t_{p2})}} F_1, \quad (2.65)$$

де $\varphi = F_2/F_1$ – коефіцієнт оребрення; $\eta = (\bar{t} - t_{p2})/(t_2 - t_{p2})$ – ефективність ребра, тобто відношення теплового потоку, що передає ребро, до потоку, який ребро було б спроможне передати, якби температура ребра була б постійна за висотою та дорівнювала температурі в основі.

Таким чином, тепловий потік при теплопередачі крізь оребрену поверхню можна записати у вигляді:

$$Q = \frac{t_{p1} - t_{p2}}{1/\alpha_1 + 1/(\alpha_2 \varphi \eta)} F_1 \quad (2.65a)$$

Розглянемо різні типи ребер, що зустрічаються на практиці.

а/. Пряме ребро постійного перерізу

Задано пряме ребро (рис.2.7) висотою h , довжиною L , завтовшки 2δ . Розташуємо вісь x вздовж висоти ребра. Площина поперечного перерізу ребра $f = 2L\delta$, а периметр ребра $u = 2L + 2\delta$. Враховуючи, що $L \gg 2\delta$,

запишемо характеристику ребра у вигляді

$$m = \sqrt{\alpha/(\lambda\delta)}. \quad (2.66)$$

Тепловий потік, що розсіюється ребром, нехтуючи теплообміном торця ребра та враховуючи значення f та u , отримаємо з (2.56) у вигляді:

$$Q = 2\vartheta_0 L \sqrt{\alpha \lambda \delta} \operatorname{th}(mh). \quad (2.67)$$

Максимальний тепловий потік з поверхні ребра при постійній температурі, яка дорівнює температурі в основі, буде $Q_{\max} = 2\alpha\vartheta_0 Lh$, а ефективність ребра

$$\eta = \operatorname{th}(mh)/(mh). \quad (2.68)$$

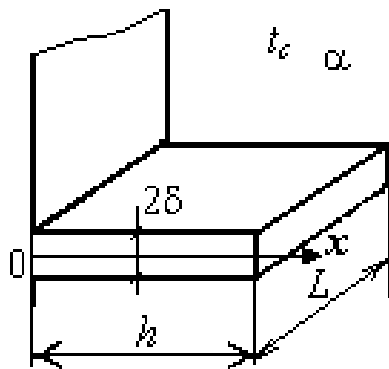


Рисунок 2.6 – Пряме ребро постійного профілю

Використовуючи вираз (2.60), можна обчислити тепловий потік з урахуванням теплообміну торця ребра. Приблизно врахувати тепловий потік з торця ребра, користуючись (2.67), можна за допомогою **приведеної висоти** ребра у вигляді:

$$h_0 = h + \delta. \quad (2.69)$$

Тепловий потік з погонного метру ребра з (2.67) можна записати, як

$$q_l = 2\vartheta_0 \sqrt{\alpha \lambda \delta} \operatorname{th}(mh) \quad (2.70)$$

Аналіз останнього виразу показує, що тепловий потік є функцією двох змінних h та δ , які, в свою чергу, визначають площу подовжнього перерізу ребра. Тому виникає питання про оптимальні розміри ребра заданої маси (площі подовжнього перерізу), тобто ребра, яке передає максимальну кількість теплоти.

Нехай $F = 2h\delta = \text{const}$. Змінюючи в (2.70) $h = F/(2\delta)$, маємо $q_l = f(\delta)$.

Позначимо

$$k = \frac{F}{2\delta} \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda \delta}}, \quad (2.71)$$

продиференціюємо (2.70) по δ з урахуванням (2.71). Отримаємо

$$\frac{\partial q_l}{\partial \delta} = \vartheta_0 \sqrt{\frac{\alpha \lambda}{\delta}} \operatorname{th}(k) - 3\vartheta_0 \sqrt{\alpha \lambda \delta} \frac{F}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda}} \delta^{-5/2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2(k)} = 0.$$

Після простих перетворень отримуємо трансцендентне рівняння відносно k

$$6k = \operatorname{sh}(2k). \quad (2.72)$$

Чисельне рішення (2.72) дає оптимальне значення $k_{\text{опт}} = 1,4192$. Тоді з (2.71) знайдеться оптимальна напівтовщина ребра

$$\delta_{\text{опт}} = \sqrt[3]{\frac{F^2}{4k_{\text{опт}}^2} \frac{\alpha}{\lambda}}, \quad (2.73)$$

а також оптимальна висота ребра $h_{\text{опт}} = F/(2\delta_{\text{опт}})$.

Тепловий потік з погонного метра ребра оптимальних розмірів:

$$q_{\text{опт}} = 2\vartheta_0 \sqrt{\alpha \lambda \delta_{\text{опт}}} \operatorname{th}(k_{\text{опт}}). \quad (2.74)$$

б/. Ребро змінного профілю

Припустимо, що площа поперечного перерізу ребра змінна та залежить від координати x , тобто $f = f(x)$. Тоді, змінення теплового потоку вздовж осі x

$$-(d^2 Q_x / dx^2) dx = \alpha u (t - t_c) dx.$$

Якщо змінити температуру ребра на її перевищення, та врахувати гіпотезу Фур'є, отримуємо

$$f(x) \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} + \frac{df(x)}{dx} \frac{d\vartheta}{dx} - m^2 \vartheta = 0. \quad (2.75)$$

За умови $m^2 = \alpha u / \lambda$ диференціальне рівняння (2.75) описує температурне поле ребра змінного перерізу.

Найчастіше в практиці зустрічаються ребра, переріз яких лінійно залежить від координати (трикутні або трапецоїдні ребра). Розглянемо трикутне ребро висотою h , довжиною L , завтовшки в основі 2δ (рис.2.7). Вісь x сумістимо з віссю ребра, а початок координат виберемо на вершині ребра. Тоді площа поперечного перерізу ребра $f(x) = 2\delta L(x/h)$, а периметр ребра $u = 2L + 2\delta(x/h)$. При $L \gg \delta$ останній запишеться як $u = 2L$. Підставимо ці вирази в (2.75) та після спрощень отримуємо:

$$x \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} + \frac{d\vartheta}{dx} - m^2 h \vartheta = 0, \quad (2.76)$$

де $m^2 = \alpha / (\lambda \delta)$.

Отримане рівняння змінною аргументу x на $r = 2m\sqrt{hx}$ приводиться до модифікованого рівняння Бесселя, яке має вигляд

$$r \frac{d^2 \vartheta}{dr^2} + \frac{d\vartheta}{dr} - r \vartheta = 0. \quad (2.77)$$

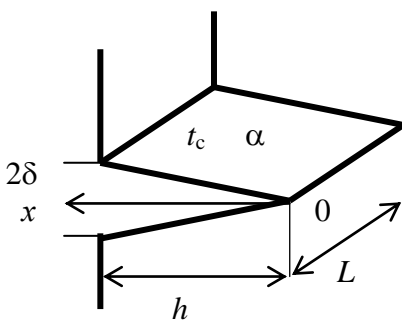
Це рівняння повинно мати два незалежних рішення. Одне рішення знайдемо методом невизначених коефіцієнтів. Вважатимемо, що це рішення представляється рядом

$$\vartheta_1 = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 + a_4 r^4 + \dots. \quad (2.78)$$

Продиференціюємо (2.78) і, підставляючи отриманий вираз в (2.77), маємо:

$$\begin{aligned} & 2a_2 r + 6a_3 r^2 + 12a_4 r^3 + \dots \\ & + a_1 + 2a_2 r + 3a_3 r^2 + 4a_4 r^3 + \dots \\ & - (a_0 r + a_1 r^2 + a_2 r^3 + a_3 r^4 + \dots) = 0. \end{aligned}$$

Рисунок 2.7 – Пряме ребро трикутного профілю



Для задоволення цього рівняння при будь-якому r необхідно, щоб сума коефіцієнтів при кожній ступіні r дорівнювала нулю.

Отримуємо систему рішень

$$a_1 \equiv 0.$$

$$(2a_2 + 2a_2 - a_0) r = 0 \Rightarrow a_2 = a_0/4 = a_0/2^2.$$

$$(6a_3 + 3a_3 - a_1) r^2 = 0 \Rightarrow a_3 \equiv 0.$$

$$(12a_4 + 4a_4 - a_2) r^3 = 0 \Rightarrow a_4 = a_2/16 = a_0/2^2 4^2.$$

і т.д.

Тоді з (2.78) отримуємо

$$\vartheta_1 = a_0 \left(1 + \frac{r^2}{2^2} + \frac{r^4}{2^2 4^2} + \dots \right),$$

А, враховуючи $a_0 = 1$, маємо перше рішення у вигляді

$$\vartheta_1 = 1 + \frac{r^2}{2^2} + \frac{r^4}{2^2 4^2} + \dots = I_0(r), \quad (2.79)$$

де $I_0(r)$ – модифікована функція Бесселя першого роду нульового порядку. Похідна від (2.79)

$$I_0'(r) = \frac{r}{2} + \frac{r^3}{2^2 4} + \frac{r^5}{2^2 4^2 6} + \dots = I_1(r) \quad (2.80)$$

дає модифіковану функцію Бесселя першого роду першого порядку.

Друге рішення (2.77) являє собою модифіковану функцію Бесселя другого роду нульового порядку

$$K_0(r) = -[\ln(r/2) + \gamma] I_0(r) + \frac{r^2}{2^2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{r^4}{2^2 4^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{r^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots,$$

де $\gamma = 0,5772$ – постійна Ейлера, а похідна $K_0'(r) = -K_1(r)$ – модифікована функція Бесселя другого роду першого порядку. Слід відмітити, що при $r \rightarrow 0$ $K_0(r) \rightarrow \infty$ і $K_1(r) \rightarrow \infty$.

Таким чином, загальне рішення рівняння (2.76) має вигляд

$$\vartheta(x) = C_1 I_0(2m\sqrt{hx}) + C_2 K_0(2m\sqrt{hx}), \quad (2.81)$$

Для визначення постійних інтегрування використаємо граничні умови:

$$\text{при } x = 0 \quad d\vartheta/dx = 0 \text{ (відсутність теплового потоку);} \quad (2.82)$$

$$\text{при } x = h \quad \vartheta = \vartheta_0. \quad (2.83)$$

Враховуючи властивості функцій Бесселя, отримуємо з (2.82) $C_2 \equiv 0$. З (2.83) маємо $C_1 = \vartheta_0 / I_0(2mh)$, та розподіл температури

$$\vartheta(x) = \vartheta_0 \frac{I_0(2m\sqrt{hx})}{I_0(2mh)}. \quad (2.84)$$

Тепловий потік з погонного метру ребра можна визначити за гіпотезою Фур'є, якщо записати її для $x = h$. Враховуючи, що $f(h) = 2\delta$, отримуємо

$$q_l = 2\delta\lambda(d\vartheta/dx)_{x=h} = 2\vartheta_0\sqrt{\alpha\lambda\delta} \frac{I_1(2mh)}{I_0(2mh)}. \quad (2.85)$$

Ефективність прямого ребра трикутного профілю знайдемо, якщо визначимо тепловий потік з погонного метру того же ребра, але при постійній температурі за висотою, що дорівнює температурі в основі ϑ_0 . За

законом Ньютона отримуємо $q_{l\max} = 2\alpha\vartheta_0 h$, а ефективність ребра

$$\eta = \frac{q_l}{q_{l\max}} = \frac{2\vartheta_0\sqrt{\alpha\lambda\delta} I_1(2mh)}{2\alpha\vartheta_0 h I_0(2mh)} = \frac{I_1(2mh)}{mh \cdot I_0(2mh)}. \quad (2.86)$$

Тепловий потік з погонного метра трикутного ребра з (2.85) залежить від товщини ребра δ та його висоти h . Як і для прямого ребра, ці параметри пов'язані площиною подовжнього перерізу ребра $F = h\delta$. Оптимальні розміри ребра заданої маси (при $F = \text{const}$) можуть бути знайдені з умов, аналогічних умовам для прямого ребра.

Визначимо $k = \frac{2F}{\delta} \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda\delta}} = 2mh$, диференціюємо (2.85) по δ , порівняємо отриманий вираз нулю, та вирішимо чисельно отримане трансцендентне рівняння. Знаходимо оптимальне значення $k_{\text{опт}} = 2,6188$, та оптимальну напівтовщину ребра

$$\delta_{\text{опт}} = \sqrt[3]{\frac{4F^2}{k_{\text{опт}}^2} \frac{\alpha}{\lambda}}. \quad (2.87)$$

Підставляючи (2.87) у (2.85) можна знайти тепловий потік з ребра оптимальних розмірів.

Якщо використати загальне рішення (2.81), можна знайти розподіл температури і тепловий потік для трапецієдного ребра, яке представлено на рис. 2.8. Запишемо граничні умови для такого ребра у вигляді:

$$\text{при } x = h_1 \quad d\vartheta/dx = 0 \quad (2.88)$$

$$\text{при } x = h \quad \vartheta = \vartheta_0 \quad (2.89)$$

З рішення (2.81) маючи умови (2.88), (2.89), отримуємо систему рівнянь

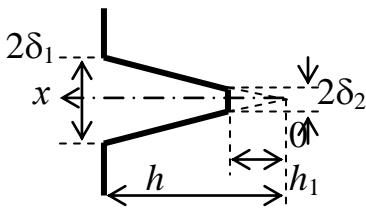


Рисунок 2.8 –
Трапецієдне ребро

$$C_1 I_1(2m\sqrt{hh_1}) - C_2 K_1(2m\sqrt{hh_1}) = 0,$$

$$C_1 I_0(2mh) + C_2 K_0(2mh) = \vartheta_0,$$

рішення якої

$$C_1 = \vartheta_0 \frac{K_1(2m\sqrt{hh_1})}{I_0(2mh)K_1(2m\sqrt{hh_1}) + K_0(2mh)I_1(2m\sqrt{hh_1})},$$

$$C_2 = \vartheta_0 \frac{I_1(2m\sqrt{hh_1})}{I_0(2mh)K_1(2m\sqrt{hh_1}) + K_0(2mh)I_1(2m\sqrt{hh_1})}.$$

Розподіл температури в трапецієдному ребрі отримуємо у вигляді

$$\vartheta(x) = \vartheta_0 \frac{I_0(2m\sqrt{hx})K_1(2m\sqrt{hh_1}) + K_0(2m\sqrt{hx})I_1(2m\sqrt{hh_1})}{I_0(2mh)K_1(2m\sqrt{hh_1}) + K_0(2mh)I_1(2m\sqrt{hh_1})}. \quad (2.90)$$

Для визначення теплового потоку з погонного метра ребра використаємо гіпотезу Фур'є.

$$q_l = 2\vartheta_0\sqrt{\alpha\lambda\delta} \frac{I_1(2mh)K_1(2m\sqrt{hh_1}) - K_1(2mh)I_1(2m\sqrt{hh_1})}{I_0(2mh)K_1(2m\sqrt{hh_1}) + K_0(2mh)I_1(2m\sqrt{hh_1})}. \quad (2.91)$$

в/. Ребра довільного профілю

Розрахунок теплопередачі через ребрену поверхню по (2.65а) вимагає виразу для визначення ефективності ребра. Прямі ребра постійного і трикутного профілів розглянуті вище. Проте в практиці зустрічаються ребра трапецієдного профілю, ребра на циліндровій поверхні (як прямі, так і трапецієдні). Для розрахунку ефективності таких ребер використовують або номограми, що наведені в довідковій літературі, або поправкові коефіцієнти до ефективності прямого ребра постійного профілю (рис.2.9). В останньому випадку ефективність ребра довільного профілю визначається як

$$\eta = \eta_{\text{пр}} \varepsilon' \varepsilon'' \quad (2.92)$$

де ε' – коефіцієнт, що враховує змінність профілю; ε'' – коефіцієнт, що враховує кривизну несної поверхні.

Як приклад визначимо за допомогою номограм ефективність трапецієдного ребра з товщиною в основі 6 мм, у вершини 3 мм, розташованого на трубі діаметром 100 мм, зовнішній діаметр ребра 200 мм. Перевищення температури основи ребра $\vartheta_0 = 100^\circ\text{C}$. Коефіцієнт тепловіддачі $\alpha = 20 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К})$, коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 40 \text{ Вт}/(\text{м К})$.

Визначимо спочатку характеристику прямого ребра

$$m = \sqrt{\alpha/(\lambda\delta_1)} = \sqrt{20/(40 \cdot 3 \cdot 10^{-3})} = 12,9 \text{ м}^{-1}.$$

Температура у вершини прямого ребра заввишки 50 мм

$$\vartheta_1 = \vartheta_0 / \text{ch}(mh) = 100 / \text{ch}(12,9 \cdot 0,05) = 82^\circ\text{C}.$$

Ефективність прямого ребра $\eta_{\text{пр}} = \text{th}(mh)/(mh) = \text{th}(0,645)/0,645 = 0,88$.

Коефіцієнт, що враховує циліндричність поверхні при $\vartheta_1/\vartheta_0 = 0,82$ та $r_2/r_1 = 2$ за номограмою *a* $\varepsilon'' = 0,95$, коефіцієнт, що враховує змінність профілю, при $\vartheta_1/\vartheta_0 = 0,82$ і $\delta_2/\delta_1 = 0,5$ за номограмою *b* $\varepsilon' = 1,05$.

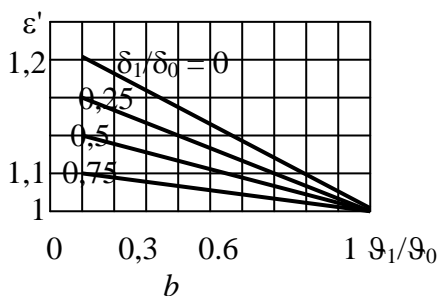
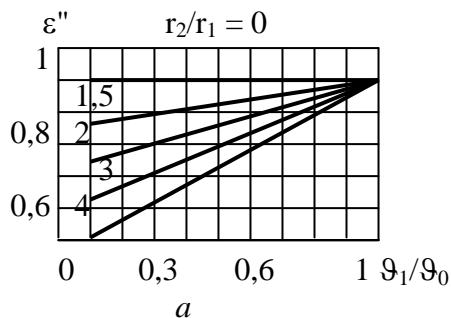


Рисунок 2.9 – Поправочні коефіцієнти для розрахунку ефективності ребер

Шукана ефективність ребра $\eta = \eta_{\text{пр}} \varepsilon' \varepsilon'' = 0,88 \cdot 0,95 \cdot 1,05 = 0,8779$.

Так само за допомогою наведених номограм може бути визначена ефективність ребра будь-якого вигляду.

Питання для самоперевірки

1. Назвіть шляхи інтенсифікації теплопередачі.
2. Яке тіло зветься «стрижень» або «ребро»? Напишіть диференціальне рівняння, що описує розподіл температури в ребрі постійного перерізу.
3. Як визначити тепловий потік, що передається стрижнем в навколишнє середовище?
4. Що таке «ефективність ребра»,

«коефіцієнт оребрення»?

5. Як визначити ефективність прямого ребра постійного перерізу? Трикутного ребра? Ребра будь-якого профілю?

Задачі до розділу 2.5

1. Для вимірювання температури потоку газу використовується термопара в сталевій ($\lambda = 45 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$) гільзі $d = 20 \text{ мм}$ довжиною $h = 150 \text{ мм}$ з товщиною стінки $\delta = 2,5 \text{ мм}$. Термопара показує температуру вільного торця гільзи $t_T = 200^\circ\text{C}$. Коефіцієнт тепловіддачі від газу до стінки гільзи $\alpha = 35 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Температура трубопроводу (в основі гільзи) $t_0 = 120^\circ\text{C}$. Визначити температуру газу. Що потрібно зробити для зменшення помилки вимірювання?

Коментар до задачі. Гільзу термопари розглядати як стрижень кінцевої довжини з відомою температурою на вільному торці і в основі. Врахуйте, що $u = \pi d$, а $f = \pi d \delta$.

2. Відрізок сталеві труби ($\lambda = 40 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$) діаметром 40 мм з товщиною стінки $2,5 \text{ мм}$ обтикається повітрям $t_{\text{п}} = 20^\circ\text{C}$. Коефіцієнт тепловіддачі від труби до повітря $\alpha = 25 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Знайти тепловий потік, що передається від труби до повітря, якщо її довжина 250 мм , а температура обох торців труби однакова і дорівнює $t_0 = 150^\circ\text{C}$.

Коментар до задачі. Відрізок труби розглядати як стрижень кінцевої довжини. Використайте умову симетрії на торцях та коментар до задачі 1.

3. Визначити тепловий потік, що передається від повітря $t_{\text{п}} = 200^\circ\text{C}$ до сталевому стержню ($\lambda = 45 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$) діаметром 20 мм , довжиною 150 мм , якщо коефіцієнт тепловіддачі від повітря до стержню $\alpha = 35 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$, а температура вільного торця стержню $t_T = 160^\circ\text{C}$.

Коментар до задачі. З (2.55) знайдіть ϑ_0 якщо задана $\vartheta(h) = 200 - 160$, а потім тепловий потік по (2.56).

4. Знайти тепловий потік, що передається з погонного метра прямого ребра постійного перетину, якщо розміри ребра: $h = 50 \text{ мм}$, $2\delta = 5 \text{ мм}$; $\alpha = 45 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$, $\lambda = 40 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$; температура у основі ребра $t_0 = 120^\circ\text{C}$, температура навколишнього повітря $t_{\text{п}} = 20^\circ\text{C}$. Оцінити вплив тепловіддачі з торця ребра.

Коментар до задачі. Використайте (2.70) з врахуванням (2.69).

5. Пряме ребро трикутного профілю заввишки 80 мм , завтовшки у основі 6 мм , довжиною 600 мм виконано із сталі $\lambda = 35 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$. Знайти тепловий потік, що передається ребром, якщо температура вершини ребра $t_B = 40^\circ\text{C}$, температура навколишнього повітря 20°C , коефіцієнт тепловіддачі від ребра до повітря $\alpha = 50 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Який тепловий потік передає в повітря пряме ребро постійного перерізу, яке має ту ж масу, за тих же умов?

Коментар до задачі. З (2.84) знайдіть ϑ_0 використав при $x = 0$ $\vartheta(x) = 20$. Тепловий потік знайдіть по (2.85) з урахуванням $L = 0,6 \text{ м}$. Пряме ребро постійного перетину однакової маси повинно мати товщу в 2 рази менше ніж товща основи трикутного ребра. Використайте цю умову та (2.67).

6. Трубопровід з діаметрами 110/100 мм оребрений по зовнішньому діаметру кільцевими ребрами діаметром 210 мм трапецоїдного перерізу $\delta_2/\delta_1=2/4$ мм. Шаг ребер 25 мм. Знайти потік теплоти з погонного метра труби, якщо в трубі тече вода $t_b=150$ °С ($\alpha_1=1500$ Вт/(м²·К)), а зовні труба знаходиться в повітрі $t_n=20$ °С ($\alpha_2=10$ Вт/(м²·К)). Термічним опором стінки труби знехтувати. Теплопровідність матеріалу ребра $\lambda=35$ Вт/(м·К).

Коментар до задачі. Використайте (2.62а), при $F_1=\pi d_1$, і коефіцієнті оребрення $\varphi=[(D^2-d_2^2)/2+d_2(s-2\delta_1)+2D\delta_2]/(d_1s)$, де D, d_2, d_1 – відповідно зовнішній діаметр ребер, зовнішній та внутрішній діаметри труби; s – шаг ребер. Ефективність ребра η знайти по (2.92) за допомогою рис. 2.9.

7. Визначити потік тепла з погонного метра прямого ребра постійного перерізу висотою 10 мм, завтовшки 1 мм, виконаного з латуні ($\lambda=65$ Вт/(м·К)), якщо температура в основі ребра $t_0=80$ °С, температура навколишнього середовища $t_c=20$ °С, а коефіцієнт тепловіддачі $\alpha=50$ Вт/(м²·К). Знайти оптимальні розміри ребра та потік теплоти, що передається ребром оптимальних розмірів. Теплообміном з торця ребра знехтувати.

8. Вирішити цю ж задачу для трикутного ребра тих же розмірів і умов. Порівняти результати.

Коментар до задачі. Для задач 7,8 використайте коментарії до задачі 5.

3. КОНВЕКТИВНИЙ ТЕПЛОБМІН В ОДНОФАЗНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Загальне поняття конвективного теплообміну охоплює процеси перенесення теплоти при русі рідини (газу).

Найбільший практичний інтерес представляє процес перенесення теплоти на межі рідини і твердого тіла, званий тепловіддачею, який є сумарною дією перенесення теплоти теплопровідністю в ламінарному прикордонному підшарі та конвекцією поза цим шаром. Потік теплоти в процесі тепловіддачі визначається за гіпотезою Ньютона

$$Q = \alpha(t_n - t_p)F. \quad (3.1)$$

Коефіцієнт пропорційності в (3.1) називається коефіцієнтом тепловіддачі і враховує конкретні умови теплообміну. Фактичне визначення коефіцієнту тепловіддачі може бути представлене з (3.1) як

$$\alpha = \frac{q}{|t_n - t_p|}, \quad (3.2)$$

тобто **коефіцієнт тепловіддачі чисельно дорівнює щільності теплового потоку при різниці температури між поверхнею тіла і рідиною в один градус.**

Тепловіддача є достатньо складним процесом, а коефіцієнт тепловіддачі залежить від великого числа чинників: фізичних властивостей рідини; характеру (режиму) течії рідини; природи виникнення руху (вимушений або вільний); температури рідини і поверхні тіла; форми тіла,

його розмірів; орієнтації тіла в потоці рідини і т.д.

3.1. Чинники, що впливають на інтенсивність тепловіддачі

Великий вплив на процес тепловіддачі мають такі теплофізичні характеристики рідини, як коефіцієнт теплопровідності, теплоємність, густина, коефіцієнт температуропровідності, які зустрічалися й в задачах теплопровідності. У конвективному теплообміні велике значення має в'язкість рідини. Між шарами рідини, що рухаються з різними швидкостями, згідно закону Ньютона виникає сила тертя, що протидіє цьому руху і направлена по дотичній в площині, що орієнтована за потоком рідини. Дотична напруга тертя за законом Ньютона визначається, як

$$s_{\text{тр}} = \mu \frac{dw}{dn} \text{ [Н/м}^2\text{]}. \quad (3.3)$$

Коефіцієнт пропорційності в (3.3) називається коефіцієнтом динамічної в'язкості. Відношення цього коефіцієнту до густини рідини називають коефіцієнтом кінематичної в'язкості і позначають $\nu = \mu/\rho$. Ці коефіцієнти істотно залежать від температури. У краплинних рідин μ майже не залежить від тиску, але істотно зменшується із збільшенням температури. У газів μ збільшується при збільшенні температури. Кінематична в'язкість ν краплинних рідин зменшується при збільшенні температури майже так як і μ , тому що густина рідини слабо залежить від температури. Навпаки, у газів, густина яких різко зменшується із зростанням температури, ν при збільшенні температури швидко зростає.

Для конвективного теплообміну великий вплив має теплове розширення рідини, яке характеризується **коефіцієнтом об'ємного розширення**

$$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{dv}{dt} \right)_p. \quad (3.4)$$

У більшості краплинних рідин цей коефіцієнт позитивний і порівняно малий, за винятком області поблизу критичного стану. Для води при $t < 4^\circ\text{C}$ $\beta < 0$. Для газів, що підкоряються рівнянню Клапейрона, $pv = RT$, $\beta = 1/T$.

На інтенсивність тепловіддачі має істотний вплив природа виникнення руху. Розрізняють вимушений рух рідини, ініційований стороннім джерелом енергії (насос, компресор, вентилятор і т.п.), і природний (вільний) рух у полі масових сил (земне тяжіння) за наявності різниці щільності холодної і гарячої рідини. Якщо в першому випадку швидкість течії рідини є незалежною змінною (може змінюватися волею експериментатора), то в другому випадку швидкість виявляється функцією різниці температури нагрітої і холодної рідини, тобто не є незалежною змінною.

Крім того, як відомо з курсу «Гідрогазодинаміка», розрізняють два режими течії рідини: ламінарний і турбулентний. У першому режимі течії рідина рухається струменями, що не змішуються, і перенесення теплоти здійснюється на молекулярному рівні (теплопровідністю). При турбулентній

течії відбувається інтенсивне перемішування середовища, і перенесення теплоти здійснюється як на молярному рівні, так і на молекулярному рівнях. Проте, при розвиненій турбулентній течії в об'ємі рідини, у поверхні тіла сили тертя достатньо великі, тому утворюється тонкий шар рідини, в якому зберігається ламінарна течія (в'язкий підшарок прикордонного шару). При цьому на самій поверхні тіла швидкість руху рідини нульова (умова «прилипання»). Ця умова виконується до тих пір, поки рідину (газ) можна вважати суцільним середовищем. Чим більше газ розряджається, тим менше його взаємодія із стінкою, і починається «прослизання» пристінного шару. Наявність тертя призводить до гальмування пристінних шарів рідини, і виникає шар рідини, в якому спостерігається істотний градієнт швидкості. Цей шар називають прикордонним шаром. Важко точно визначити верхню межу цього шару. Зазвичай під товщиною прикордонного шару розуміють таку відстань від стінки, при якій відмінність швидкості від швидкості незбуреного потоку складає 1 %.

Процес теплообміну пов'язаний з наявністю різниці температури поверхні тіла і рідини. При цьому у поверхні тіла разом з гідродинамічним прикордонним шаром формується і тепловий прикордонний шар, в якому температура змінюється від температури стінки до температури середовища. Товщина теплового прикордонного шару може істотно відрізнятись від товщини гідродинамічного прикордонного шару як в один, так і в інший бік.

Вплив форми, розміру і орієнтації тіла на процес тепловіддачі можна проаналізувати на прикладі теплообміну труби при перебігу рідини уздовж труби, упоперек її й усередині самої труби.

Дослідження і аналіз процесу тепловіддачі почнемо з розгляду системи диференціальних рівнянь, що описують цей процес.

3.2. Система диференціальних рівнянь процесу тепловіддачі

3.2.1. Рівняння тепловіддачі

У поверхні тіла в ламінарному підшарі прикордонного шару перенесення теплоти відбувається на молекулярному рівні, тому, використовуючи гіпотезу Фур'є, можна записати

$$q = -\lambda_p (dt/dn)_{n=0}. \quad (a)$$

З другого боку, згідно закону Ньютона щільність теплового потоку в процесі тепловіддачі

$$q = \alpha(t_{\pi} - t_p). \quad (b)$$

Прирівнюючи ці потоки і позначивши $\vartheta_0 = t_{\pi} - t_p$, отримаємо рівняння тепловіддачі

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\vartheta_0} \left(\frac{d\vartheta}{dn} \right)_{n=0}. \quad (3.5)$$

Для визначення коефіцієнта тепловіддачі по (3.5) необхідно мати розподіл температури в прикордонному шарі. Таким чином, маємо одне рівняння з двома невідомими.

3.2.2. Рівняння енергії

Виділимо в межах теплового і гідродинамічного прикордонного шару нерухомий елемент об'єму, що не деформується, з ребрами dx , dy , dz та розглянемо його тепловий баланс, вважаючи рідину нестискуваною. Так само, як і при отриманні рівняння Фур'є, запишемо тепловий потік, що поступає в елемент вздовж осі x у вигляді $Q_x = q_x dy dz d\tau$, а потік, що виходить з елемента на координаті $x + dx$ – $Q_{x+dx} = q_{x+dx} dy dz d\tau$.

Розкладемо q_{x+dx} в ряд Тейлора біля точки x та обмежимося двома членами розкладення. Отримаємо акумульовану теплоту в елементі у вигляді

$$dQ_x = Q_x - Q_{x+dx} = -(\partial q_x / \partial x) dv d\tau. \quad (a)$$

Аналогічно для решти осей координат отримаємо

$$dQ_y = Q_y - Q_{y+dy} = -(\partial q_y / \partial y) dv d\tau, \quad (b)$$

$$dQ_z = Q_z - Q_{z+dz} = -(\partial q_z / \partial z) dv d\tau. \quad (c)$$

Згідно першому закону термодинаміки, теплота, що поступила в елемент, за відсутності роботи (елемент не деформується) витрачається на зміну ентальпії потоку, тобто

$$dQ = dQ_x + dQ_y + dQ_z = \rho di dv = -\text{div}(q) dv d\tau. \quad (d)$$

Визначимо щільність теплового потоку вздовж осі x . Перенесення теплоти в рухомому середовищі здійснюється за рахунок теплопровідності $q_{\text{кт}} = -\lambda(\partial t / \partial x)$ та за рахунок конвекції $q_{\text{кк}} = \rho w_x i$. Тоді

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \rho i \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho w_x \frac{\partial i}{\partial x}. \quad (e)$$

Аналогічно для решти осей

$$\frac{\partial q_y}{\partial y} = -\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \rho i \frac{\partial w_y}{\partial y} + \rho w_y \frac{\partial i}{\partial y}, \quad (f)$$

$$\frac{\partial q_z}{\partial z} = -\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \rho i \frac{\partial w_z}{\partial z} + \rho w_z \frac{\partial i}{\partial z}. \quad (g)$$

Підставимо (e), (f) і (g) в (d), скоротимо на dv і перенесемо члени, що містять ентальпію, в ліву частину рівняння. Отримаємо

$$\rho \frac{\partial i}{\partial \tau} + \rho i \text{div}(w) + \rho \left(w_x \frac{\partial i}{\partial x} + w_y \frac{\partial i}{\partial y} + w_z \frac{\partial i}{\partial z} \right) = \lambda \nabla^2 t. \quad (h)$$

Для нестискуваної рідини $\text{div}(w) = 0$ (це буде показано нижче). Якщо вважати, що ентальпія може бути представлена як $i = c_p t$, то рівняння (h) може бути записано у вигляді:

$$\frac{Dt}{d\tau} = a \nabla^2 t, \quad (3.6)$$

де $a = \lambda / (c_p \rho)$ – коефіцієнт температуропровідності рідини; субстанціональна похідна температури по часу представляється як

$$\frac{Dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z}. \quad (3.7)$$

За фізичним сенсом у стаціонарному стані рівняння (3.6) є співвідношенням між тепловим потоком, що передається конвекцією, і потоком, що передається теплопровідністю. У рівнянні (3.6) є ще одна невідома – швидкість потоку w (або її проекції на осі координат). Таким чином, система рівнянь залишається незамкненою.

3.2.3. Рівняння руху (Нав'є – Стокса)

Отримання повного рівняння Нав'є – Стокса достатньо складно, тим більше що для аналізу процесу тепловіддачі необхідно врахувати неізотермічність прикордонного шару. Розглянемо наближене виведення цього рівняння для одновимірної течії нестискуваної рідини, коли швидкість потоку змінюється тільки за однією координатою. В основу виводу покладемо другий закон Ньютона, згідно з яким сума сил, що діють на тіло, рівна добутку маси тіла на його прискорення. Виділимо в прикордонному шарі плоского потоку в'язкої рідини елемент з ребрами dx , dy (рис.3.1). Сили, що діють на виділений елемент, можна розділити на об'ємні, діючі на всі частинки рідини в елементі, і поверхневі, що діють по гранях елементу. До першої групи сил відносяться сила тяжіння, відцентрова сила і т.п. Обмежимося урахуванням тільки сили тяжіння, тоді

$$df_1 = \rho g dv. \quad (a)$$

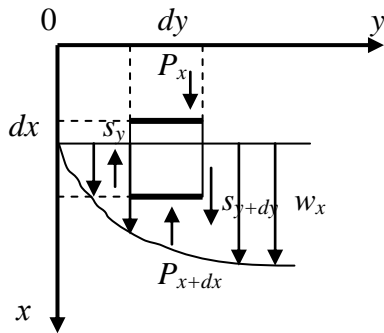


Рисунок 3.1 – К отриманню рівняння Нав'є - Стокса

До поверхневих сил відносяться сила тиску в потоці, що зменшується за напрямом течії, і сила тертя. Виберемо напрям осі координат x за потоком рідини (уздовж тіла), а ось y нормально до поверхні тіла. Тоді на координаті x сила тиску, що діє на виділений елемент, буде $df'_2 = P(x) dy$, а на координаті $x+dx$ – $df''_2 = P(x+dx) dy$. Розкладемо $P(x+dx)$ в ряд Тейлора поблизу точки x та обмежимося двома членами розкладу. Маємо

$$P(x+dx) = P(x) + (\partial P / \partial x) dx. \quad (b)$$

Рівнодіюча сили тиску з урахуванням (b) має вигляд

$$df_2 = df'_2 - df''_2 = -(\partial P / \partial x) dv. \quad (c)$$

У площині y на елемент рідини діє сила тертя, направлена вгору, оскільки швидкість рідини в елементі більше швидкості рідини поза ним. Вона дорівнює $df'_3 = s_y dx$, де s_y – напруга сили тертя. У площині $y + dy$ діє сила тертя, що направлена вниз і дорівнює $df''_3 = s_{y+dy} dx$. Розкладемо s_{y+dy} в ряд Тейлора, як це було зроблено для тиску, і, обмежившись двома членами розкладання та врахувавши (3.5), отримаємо рівнодіючу сил тертя

$$df_3 = df_3'' - df_3' = \mu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} dv. \quad (d)$$

Підсумовуючи (a), (c) і (d), прирівняємо результат силі інерції елемента. Отримаємо

$$\rho \frac{Dw_x}{d\tau} = \rho g - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}. \quad (e)$$

Неізотермічність прикордонного шару врахуємо таким чином. Припустимо, що в правій частині рівняння (e) густина рідини лінійно залежить від температури $\rho = \rho_0(1 + \beta\vartheta)$. Тоді перший член рівняння (e) можна представити у вигляді $\rho_0 g + \rho_0 g \beta\vartheta$ і трактувати як суму сили тяжіння і підйомної сили, яка є результатом неізотермічності прикордонного шару. Більшість задач теплообміну автотемпературні щодо сили тяжіння, тому, як правило, сила тяжіння з рівняння (e) виключається. Нехтуючи індексом при ρ , представимо (e) у остаточному вигляді, враховуючи, що в загальному випадку w_x змінюється за трьома координатами

$$\frac{Dw_x}{d\tau} = g_x \beta\vartheta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right), \quad (3.8)$$

де субстаціональна похідна

$$\frac{Dw_x}{d\tau} = \frac{\partial w_x}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z}, \quad (3.9)$$

а g_x – проекція прискорення сили тяжіння на вісь x .

Таким чином, отримана проекція рівняння руху на вісь x . Аналогічно для решти осей можна отримати:

$$\frac{Dw_y}{d\tau} = g_y \beta\vartheta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \nabla^2 w_y, \quad (3.10)$$

$$\frac{Dw_z}{d\tau} = g_z \beta\vartheta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \nabla^2 w_z. \quad (3.11)$$

У векторній формі система рівнянь (3.9) – (3.11) має вигляд:

$$\frac{D\vec{w}}{d\tau} = \vec{g} \beta\vartheta - \frac{1}{\rho} \nabla \vec{P} + \nu \nabla^2 \vec{w}. \quad (3.12)$$

З додаванням рівняння руху до системи диференціальних рівнянь конвективного теплообміну з'являється ще одна змінна – тиск. Система рівнянь залишається незамкненою.

3.2.4. Рівняння нерозривності

Виділимо в прикордонному шарі рідини елементарний об'єм, що не деформується, з гранями dx , dy , dz і розглянемо потік маси через цей елемент. По осі x за час $d\tau$ в елемент поступає маса, $dM_x = (\rho w)_x dy dz d\tau$ а покидає $dM_{x+dx} = (\rho w)_{x+dx} dy dz d\tau$. Як і раніше, розкладемо $(\rho w)_{x+dx}$ в ряд Тейлора поблизу точки x і, обмежившись двома членами розкладання,

знайдемо акумульовану масу в елементі

$$dM_1 = dM_x - dM_{x+dx} = -\frac{\partial(\rho w)_x}{\partial x} dv d\tau. \quad (a)$$

Аналогічно можна записати акумульовану масу в елементі для потоків маси по осях y і z :

$$dM_2 = dM_y - dM_{y+dy} = -\frac{\partial(\rho w)_y}{\partial y} dv d\tau, \quad (b)$$

$$dM_3 = dM_z - dM_{z+dz} = -\frac{\partial(\rho w)_z}{\partial z} dv d\tau. \quad (c)$$

Акумульована маса в елементі йде на змінення густини середовища в об'ємі

$$d\rho dv = -\left(\frac{\partial(\rho w)_x}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)_y}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)_z}{\partial z}\right) dv d\tau,$$

або

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau} + \frac{\partial(\rho w)_x}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)_y}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)_z}{\partial z} = 0. \quad (3.13)$$

Таким чином, отримано рівняння нерозривності, що замикає систему диференціальних рівнянь конвективного теплообміну. Для нестискуваної рідини при $\rho = \text{const}$ рівняння (3.13) перетворюється в

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = \text{div}(w) = 0. \quad (3.14)$$

Таким чином, отримана замкнена система рівнянь конвективного теплообміну, рішення якої дозволяє визначити шуканий коефіцієнт тепловіддачі.

Для виділення конкретної задачі, дану систему необхідно доповнити умовами однозначності або крайовими умовами конвективної тепловіддачі (як і для задач теплопровідності). Ці умови повинні включати: фізичні умови (теплофізичні характеристики середовища та їх залежність від температури); геометричні умови (форма тіла, його розміри, орієнтація щодо потоку рідини, розміри і форма каналу, в якому тече рідина і т.д.); початкові умови (температура і швидкість рідини на вході в канал, умови при натіканні потоку на тіло і т.п.); умови на межі «тіло – рідина» (температура тіла, швидкість потоку на поверхні тіла і т.д.). Аналітичне рішення такої задачі майже завжди натрапляє на нерозв'язні труднощі, і до теперішнього часу рішення є тільки для окремих простих часткових випадків. Тому в дослідженні процесу тепловіддачі великого значення набувають експериментальні методи.

Питання для самоперевірки

1. Як знайти тепловий потік за умов тепловіддачі?
2. Наведіть визначення коефіцієнту тепловіддачі.
3. Які фактори впливають на інтенсивність тепловіддачі?

4. *Напишіть та поясніть диференціальне рівняння тепловіддачі.*
5. *Напишіть та поясніть диференціальне рівняння енергії.*
6. *Напишіть та поясніть диференціальне рівняння руху (саме просте).*

3.3. Основи теорії подібності і моделювання процесу тепловіддачі

Аналітичний метод дослідження будь-якого явища полягає в рішенні диференціального рівняння (системи рівнянь) з відповідними крайовими умовами. У результаті знаходяться універсальні зв'язки між змінними, що характеризують це явище. Проте найчастіше аналітичне рішення не може бути отримане в явному вигляді через складнощі як рівнянь, так і умов однозначності.

Експериментальний метод дослідження явища дає достовірні дані про одиничний досліджуваний випадок. Для отримання залежності шуканої змінної від якого-небудь параметру необхідно провести серію експериментів, зберігаючи при цьому решту параметрів процесу постійними, що не завжди можливо. Крім того, необхідно мати можливість перенести результати експерименту, отримані за допомогою конкретної установки (моделі), на інші процеси (натурні об'єкти).

Об'єднання переваг аналітичного і експериментального методів дослідження дозволяє здійснити теорія подібності, яку часто називають методом наукового узагальнення експериментальних даних.

Теорія подібності виходить з наступного основного положення: **«фізичне явище визначається не окремо взятими параметрами, а деяким сумарним їх ефектом, який виражається комплексом первинних параметрів»**. Цей комплекс первинних параметрів називають узагальненою змінною (критерієм або числом подібності). Наприклад, фізичне явище – течія рідини в прямій трубі – залежить від швидкості потоку, діаметру труби, в'язкості рідини. Окремо взяті ці параметри не можуть повністю характеризувати процес течії рідини. Проте комплекс, складений з цих параметрів, ($Re = wd/\nu$ – число Рейнольдса) однозначно визначає характер течії рідини.

Дослідження фізичних явищ за допомогою теорії подібності має переваги:

1. Скорочується число незалежних змінних, що характеризують дане явище, що істотно спрощує експериментальні дослідження.

2. Розкриваються внутрішні зв'язки між змінними, що характеризують дане явище, оскільки узагальнені змінні знаходять на підставі аналізу диференціальних рівнянь, що описують дане явище. Останні встановлюються на основі загальних законів природознавства і несуть в собі всі характерні особливості досліджуваного явища.

3. При дослідженні явища за допомогою узагальнених змінних розглядається не одне конкретне явище, а група подібних явищ (узагальнений індивідуальний випадок).

Якщо умови однозначності рішення завдаються як перелік первинних величин, то цим завдається одне конкретне явище. При завданні умов

однозначності узагальненими змінними виділяється група подібних явищ.

Розглядаючи приведене вище явище – течію рідини в трубі – та задаючи значення $w = 1$ м/с, $d = 0,1$ м, $\nu = 1 \cdot 10^{-4}$ м²/с, отримуємо одне конкретне явище. Але, задаючи узагальнену змінну $Re = 1000$, виділяємо групу подібних явищ, усередині якої явища відрізняються неістотними ознаками. Зберігаючи $Re = 1000$, і змінюючи конкретні значення змінних можна отримати безліч подібних явищ, що відрізняються тільки масштабом первинних величин.

3.4. Отримання узагальнених змінних

Метод отримання узагальнених змінних розглянемо на прикладі класу явищ теплопровідності. Група подібних явищ цього класу, як було сказано вище, відрізняється тільки масштабом первинних величин, а само явище описується гіпотезою (законом) Фур'є

$$q = -\lambda(dt/dn).$$

Приведемо це рівняння до безрозмірного вигляду і запишемо для першого (') і другого (") явища. Отримуємо:

$$(\lambda'/q')(dt'/dn') + 1 = 0, \quad (a) \qquad (\lambda''/q'')(dt''/dn'') + 1 = 0. \quad (b)$$

Якщо явища подібні, то первинні величини відрізняються тільки масштабом, тобто $\lambda' = k_\lambda \lambda''$, $q' = k_q q''$, $t' = k_t t''$, $n' = k_n n''$. Визначимо змінні явища (a) через змінні явища (b).

$$\frac{k_\lambda k_t}{k_q k_n} \frac{\lambda''}{q''} \frac{dt''}{dn''} + 1 = 0. \quad (c)$$

Рівняння (b) і (c) повинні бути тотожними, що має місце тільки при умові

$$\frac{k_\lambda k_t}{k_q k_n} = 1. \quad (d)$$

Очевидно, для того, щоб фізичні величини явищ були подібні, досить помножити кожен з них на множник перетворення. Проте для того, щоб явища були подібні, вибір множників перетворення повинен підкорятися деякій умові. Для явища теплопровідності це умова (d). Перепишемо цю умову у вигляді

$$\frac{\lambda'}{\lambda''} \frac{t'}{t''} \frac{q''}{q'} \frac{n''}{n'} = 1, \quad \frac{\lambda'}{q'} \frac{t'}{n'} = \frac{\lambda''}{q''} \frac{t''}{n''} = \dots = \frac{\lambda}{q} \frac{t}{n} = \text{idem}. \quad (e)$$

Рівняння (e) відтворює умову подібності явища теплопровідності:

$$\frac{\lambda}{q} \frac{t}{n} = \text{idem}. \quad (f)$$

Умови (e, f) являють собою сенс першої теореми подібності: «**якщо фізичні явища подібні, то узагальнені змінні цих явищ рівні**».

Зіставляючи (e) і (f), можна побачити, що ці вирази записані за одним принципом, з якого виходить правило отримання узагальнених змінних (критеріїв подібності): **для отримання критеріїв подібності необхідно диференціальне рівняння привести до безрозмірного вигляду, відкинути**

індекси та позначки. Отриманий комплекс є критерієм подібності.

3.5. Узагальнені змінні конвективного теплообміну

Розглянемо узагальнені змінні конвективного теплообміну, що одержуються з системи диференціальних рівнянь цього процесу.

а/. Рівняння тепловіддачі

Представимо рівняння тепловіддачі

$$-\lambda(dt/dn)_{n=0} = \alpha(t_{\text{п}} - t_{\text{р}}) \quad (3.15)$$

у безрозмірному вигляді, для чого розділимо праву частину рівняння на ліву.

Отримуємо: $\frac{\alpha \Delta t}{\lambda(dt/dn)_{n=0}} + 1 = 0$ а, відкинувши індекси та позначки, і

замінюючи n розміром L , $\text{Nu} = \frac{\alpha L}{\lambda}$ – безрозмірний комплекс, що зветься

критерієм Нуссельта. У цей критерій входить шукана в задачах конвективного теплообміну величина – коефіцієнт тепловіддачі. Тому критерій Нуссельта називають «узагальнений (безрозмірний) коефіцієнт тепловіддачі». За фізичним сенсом критерій Нуссельта – це міра відношення повного теплового потоку до потоку, що передається теплопровідністю в межах прикордонного шару ($\text{Nu} = \alpha/(\lambda/L)$).

б/. Рівняння енергії

Запишемо рівняння енергії для випадку одномірної стаціонарної течії

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}. \quad (3.16)$$

За сенсом дане рівняння представляє співвідношення конвективної складової перенесення теплоти (ліва частина) і кондуктивної (права частина). Розділимо ліву частину рівняння на його праву частину. Отримаємо:

$\frac{w_x(\partial t/\partial x)}{a(\partial^2 t/\partial x^2)} - 1 = 0$, а відкинувши індекси і позначки, та змінюючи x на

розмір L , $\text{Pe} = \frac{wL}{a}$. Отриманий безрозмірний комплекс зветься критерієм

Пекле. За фізичним сенсом критерій Пеклі є міра відношення теплового потоку, що передається конвекцією, до теплового потоку, що передається теплопровідністю в межах прикордонного шару.

в/. Рівняння руху

Якщо обидва попередніх рівняння уявляли собою двочлени, то рівняння руху містить у собі чотири сили – підйомну, тиску, тертя та інерції. У символах це рівняння можна навести у вигляді: $I = \Pi + T_{\text{и}} + T_{\text{р}}$, де для

одномірної стаціонарної течії:

$$I = w_x \frac{\partial w_x}{\partial x}, \quad \Pi = \beta g \vartheta, \quad \text{Ti} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \text{Tr} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}.$$

Розділивши рівняння руху на силу тертя, відкинемо індекси та позначки і змінимо x і y на лінійний розмір L . З відношення сил інерції і тертя маємо:

$$\frac{I}{\text{Tr}} = \frac{w_x (\partial w_x / \partial x)}{\nu (\partial^2 w_x / \partial y^2)} \Rightarrow \frac{w^2 y^2}{\nu w x} \Rightarrow \text{Re} = \frac{wL}{\nu} = \text{idem}.$$

Отриманий безрозмірний комплекс зветься критерієм Рейнольдса. По фізичному сенсу критерій Рейнольдса є міра відношення сил інерції і тертя в прикордонному шарі.

Розглянемо відношення підйомної сили до сили тертя. Отримуємо:

$$\frac{\Pi}{\text{Tr}} = \frac{\beta g \vartheta}{\nu (\partial^2 w_x / \partial y^2)} \Rightarrow \frac{\beta g \vartheta L^2}{\nu w} \frac{wL}{\nu} \Rightarrow \text{Gr} = \frac{\beta g \vartheta L^3}{\nu^2} = \text{idem}.$$

Знайдений безрозмірний комплекс зветься критерієм Грасгофа. За фізичним сенсом цей критерій являє собою міру відношення підйомної сили до сили тертя.

Розглянемо відношення сили тиску до сили тертя. Отримуємо, враховуючи наведені вище зауваження:

$$\frac{\text{Ti}}{\text{Tr}} = \frac{(dP/dx)/\rho}{\nu (\partial^2 w_x / \partial y^2)} \Rightarrow \frac{\Delta P y^2}{\nu \rho w x} \frac{\nu}{wL} \Rightarrow \text{Eu} = \frac{\Delta P}{\rho w^2} = \text{idem}.$$

Отримана узагальнена змінна зветься критерієм Ейлера. Враховуючи, що в задачах гідродинаміки інтерес являє собою не абсолютний тиск, а перепад тиску, в критерії Ейлера як змінна стоїть саме перепад тиску. За фізичним сенсом критерій Ейлера є міра відношення сил тиску до сил тертя.

Проте, у свою чергу, перепад тиску в потоці нестискуваної рідини визначається швидкістю потоку, тобто є функцією критерію Рейнольдса, а не незалежною змінною. Таким чином, $\text{Eu} = f(\text{Re})$ і не може бути незалежній змінною в задачах теплообміну. Критерій Ейлера є шукана змінна в задачах гідродинаміки.

г/. Рівняння нерозривності

Для стаціонарної течії нестискуваної рідини це рівняння представляється однокленом і не може дати узагальнених змінних. Для нестационарної течії це рівняння дає критерій тимчасової подібності процесів або критерій гомохронності.

Відношення узагальнених змінних є також безрозмірним комплексом, що в деяких випадках грає роль узагальненої змінної. Розглянемо відношення двох критеріїв Пекле і Рейнольдса. Отримаємо:

$$\frac{\text{Pe}}{\text{Re}} = \text{Pr} = \frac{\nu}{a}.$$

Ця узагальнена змінна зветься критерієм Прандтля. Сюди входять

тільки теплофізичні властивості теплоносія. Таким чином, цей критерій може враховувати вплив температури на теплофізичні властивості теплоносія, а, отже, і на процес тепловіддачі. З іншого боку, в'язкість рідини визначає зміну швидкості потоку в прикордонному шарі і, отже, товщину гідродинамічного прикордонного шару. Коефіцієнт температуропровідності визначає інтенсивність зміни градієнта температури в прикордонному шарі рідини, тобто товщину теплового прикордонного шару. Таким чином, критерій Прандтля є міра відношення гідродинамічного і теплового прикордонного шару. При $Pr = 1$ гідродинамічний і тепловий прикордонні шари рівні, при $Pr > 1$ гідродинамічний прикордонний шар більше теплового, при $Pr < 1$ навпаки.

3.6. Друга теорема подібності та температурні умови тепловіддачі

Аналіз системи диференціальних рівнянь тепловіддачі дозволив знайти узагальнені змінні цього процесу: Nu , Pe , Re , Gr , Pr . Друга теорема подібності встановлює функціональний зв'язок між цими змінними:

«Інтеграл системи диференціальних рівнянь, що описують деяке фізичне явище, може бути представлений у вигляді функціонального зв'язку між узагальненими змінними цього явища».

Враховуючи, що шукана змінна задач конвективного теплообміну (коефіцієнт тепловіддачі) входить у критерій Нуссельта, з другої теореми подібності виходить:

$$Nu = f(Pe, Re, Gr, Pr). \quad (3.17)$$

Співвідношення типу (3.17) справедливі для середніх по деякій поверхні коефіцієнтів тепловіддачі. Для локальних (у даній точці) коефіцієнтів тепловіддачі у (3.17) слід ввести безрозмірні координати точки у вигляді симплексу типу: x/L , y/L .

$$Nu = f(Pe, Re, Gr, Pr, x/L, y/L, \dots). \quad (3.18)$$

В (3.18) як і у критерії подібності входить лінійна величина L або **«визначальний розмір»**.

Визначальним розміром називають лінійний розмір тіла, яке бере участь у теплообміні, що робить найбільший вплив на інтенсивність тепловіддачі. У деяких випадках місце цього розміру може займати комплекс величин, що має розмірність лінійної величини.

Розглянемо, наприклад, поперечне обтікання деякого циліндру потоком рідини. Природно, характер перебігу рідини у поверхні циліндра не залежить від його довжини, але явно різний при обтіканні циліндрів різного діаметру. Отже, при дослідженні тепловіддачі циліндрових поверхонь у поперечному потоці рідини як визначальний розмір необхідно використовувати діаметр, а не довжину поверхні. Визначальний розмір прийнято обумовлювати підрядковим індексом при критерії. Наприклад: Re_d , Gr_x .

У всі узагальнені змінні входять ті або інші теплофізичні властивості теплоносія, які істотно залежать від температури. У той же час наявність різниці температур «стінка – рідина» призводить до утворення теплового

прикордонного шару, у якому теплофізичні параметри теплоносія істотно змінюються, що вносить спотворення у розподіл швидкості у прикордонному шарі, порівняно з ізотермічною течією. Цей чинник може істотно позначитися на інтенсивності теплообміну. Подібний вплив повинен бути врахований у зв'язку між узагальненими змінними. До того ж, при перенесенні результатів експерименту на натурні об'єкти повинна бути врахована та обставина, що при обробці експериментальних даних теплофізичні властивості рідини приймалися по певній температурі.

Визначальною температурою називають температуру, по якій визначаються теплофізичні параметри рідини, що входять в узагальнені змінні, або сама узагальнена змінна (наприклад, критерій Прандтля). Прийнято вказувати визначальну температуру підрядковим індексом при критерії (p – температура рідини, st – температура стінки, m – середня температура між рідиною та стінкою, або середня температура прикордонного шару). Наприклад: $Re_{p,d}$, Pr_p , Pr_{st} .

Врахування впливу неізотермічності прикордонного шару на інтенсивність теплообміну може бути проведено декількома шляхами.

Для газів при достатньо високому температурному напорі ($>100^\circ\text{C}$) урахування неізотермічності проводиться шляхом введення в рівняння (3.17) або (3.18) симплексу типу $(T_r / T_{st})^n$. При цьому показник ступеня, як правило, різний при нагріванні газу і при його охолодженні.

Для краплинних рідин неізотермічність враховується або поправкою Михеева $\varepsilon_T = (Pr_p / Pr_{st})^{0,25}$, або поправкою Петухова та ін. $\varepsilon_T = (\mu_p / \mu_{st})^n$. У останньому випадку показник ступеня при симплексі може бути різним для нагрівання і охолодження рідини. Через характер залежності Pr і μ від температури для краплинних рідин (зменшення зі зростанням температури по залежності, близькій до гіперболічної) дані поправки враховують як величину температурного напору, так і вплив напрямку теплового потоку на інтенсивність теплообміну. При напрямі теплового потоку від стінки в рідину (нагрівання рідини) інтенсивність теплообміну вища, ніж при зворотному напрямі теплового потоку за інших рівних умов. Слід зазначити, що використання даного симплексу для газів неправомірно, оскільки характер зміни Pr і, особливо, μ від температури зовсім не такий, як у крапельній рідині.

Вибір у якості визначальної температури середньої між теплоносієм і стінкою може у деяких випадках врахувати вплив неізотермічності на процес тепловіддачі. При цьому може використовуватися як середньоарифметична температура, так і інші середні.

Експериментальні і теоретичні дослідження тепловіддачі показали, що немає універсальної визначальної температури і загального методу урахування неізотермічності процесу тепловіддачі. Це вимагає уваги при використанні емпіричних співвідношень, оскільки слід при розрахунках приймати ту ж визначальну температуру, що і автор співвідношення.

Питання для самоперевірки

1. Що дає «теорія подібності», на чому вона заснована?
2. Що таке «узагальнена змінна», як її отримати, що вона дає при дослідженні будь-якого явища?
3. Напишіть вираз та поясніть фізичний сенс узагальнених змінних конвективного теплообміну Nu , Pe , Re , Gr , Pr .
4. Сформулюйте першу теорему подібності.
5. Сформулюйте другу теорему подібності.
6. Що таке «визначальний розмір» та «визначальна температура»? Як вони вказуються в критеріях подібності?
7. Як можна врахувати вплив неізотермічності потоку рідини в критеріальних рівняннях?

4. ТЕПЛОВІДДАЧА ПРИ ПОДОВЖНЬОМУ ОБТІКАННІ ПЛОСКОЇ ПОВЕРХНІ

Розглянемо плоску поверхню, на яку набігає потік рідини із швидкістю w_0 , направлений вздовж поверхні, з температурою t_0 (рис.4.1). Виберемо напрям осі x вздовж поверхні, осі y – нормально до поверхні. Біля поверхні під дією сил тертя утворюється гідродинамічний прикордонний шар, в якому швидкість змінюється від 0 на стінці до w_0 на зовнішній межі шару. На початку поверхні утворюється ламінарний прикордонний шар, оскільки товщина шару мала і превалюють сили тертя. У міру зростання товщини прикордонного шару відбувається руйнування ламінарної течії і утворення турбулентного прикордонного шару. Проте, поблизу стінки в деякому малому шарі, де сили тертя достатньо великі, зберігається ламінарна течія. Цей шар називають в'язким підшаром.

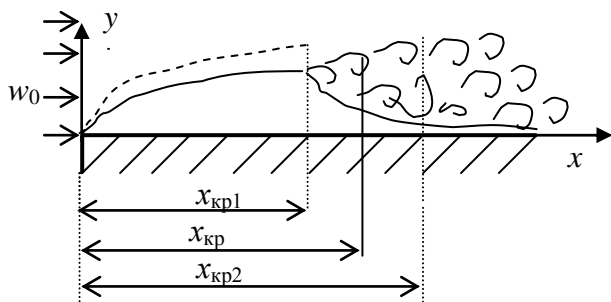


Рисунок 4.1 – Схема течії рідини поблизу плоскій поверхні

Руйнування ламінарного прикордонного шару починається на деякій координаті $x_{кр1}$ і закінчується на координаті $x_{кр2}$. Довжина зони ламінарного прикордонного шару залежить від ступеня турбулентності набігаючого потоку. У практичних розрахунках з достатньою точністю можна прийняти, що умовна межа між ламінарним і турбулентним

прикордонним шаром відповідає значенню $Re_{кр} = (1 \div 5) \cdot 10^5$.

В процесі тепловіддачі завжди є різниця температур між стінкою і середовищем, що призводить до утворення разом з гідродинамічним тепловим прикордонним шаром, в якому температура змінюється від $t_{ст}$ до t_p .

Останній чинник призводить до спотворення розподілу швидкості в гідродинамічному прикордонному шарі, оскільки в'язкість рідини істотно залежить від її температури. Залежно від теплофізичних характеристик рідини тепловий прикордонний шар по товщині може бути як менше, так і

більше гідродинамічного.

Точне рішення системи диференціальних рівнянь конвективного теплообміну, як вказувалося вище, пов'язано з великими труднощами навіть при можливих спрощеннях. Розглянемо один з можливих методів наближеного розрахунку.

4.1. Рівняння теплового потоку для прикордонного шару

Виділимо в межах теплового і гідродинамічного прикордонних шарів два перерізи $A - B$ і $C - D$, що відстоять один від одного на dx (рис.4.2). Нехай товщина теплового прикордонного шару k менш за товщину гідродинамічного шару δ . Тепловий потік, що надходить в елемент dx крізь переріз $A - B$ на координаті x

$$Q_x = \int_0^k \rho c_p w_x t dy, \quad (a)$$

а залишає елемент крізь переріз $C - D$ на координаті $x + dx$ $Q_{x+dx} = Q_x + (dQ_x/dx) dx$. Тоді різниця цих потоків

$$dQ_x = -\frac{d}{dx} \left(\int_0^k \rho c_p w_x t dy \right) dx. \quad (b)$$

В площині $B - C$ в елемент надходить тепловий потік разом з масою, що внесена в елемент по координаті y . Тому що товщина теплового прикордонного шару менше за товщину гідродинамічного, маса, що вноситься, має температуру рідини. Тоді, враховуючи, що привнесена маса дорівнює різниці маси, що внесена по осі x в переріз $A - B$, та унесена з перерізу $C - D$, маємо:

$$dQ'_y = c_p t_0 \frac{d}{dx} \left(\int_0^k \rho w_x dy \right) dx. \quad (d)$$

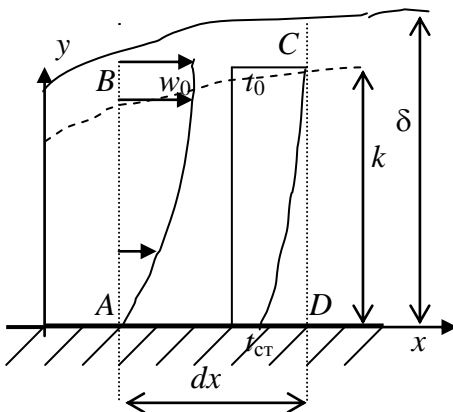


Рисунок 4.2 – До рівняння Кружшліна

Припустимо, що температура рідини більше температури стінки. Тоді від елемента відводиться тепловий потік у стінку по площині $A - D$. Враховуючи, що при будь-якому характері течії у прикордонному шарі, у стінки зберігається ламінарна течія, в перерізі $A - D$ теплота відводиться теплопровідністю. Тоді, враховуючи напрям осі y , можна записати тепловий потік в перерізі $A - D$ у вигляді

$$dQ''_y = \lambda (dt/dy)_{y=0} dx. \quad (e)$$

У разі стаціонарного стану сума потоків теплоти, що входить в елемент та виходить з нього, повинна дорівнювати нулю. Вважаючи теплофізичні параметри рідини постійними, отримаємо

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^k (t_0 - t) w_x dy \right) = a \left(\frac{dt}{dy} \right)_{y=0}, \quad (4.1)$$

де $a = \lambda / (c_p \rho)$ – коефіцієнт теплопроводності рідини.

Отримане співвідношення (4.1) зветься рівнянням Кружиліна.

4.2. Тепловіддача за умов ламінарної течії в прикордонному шарі

З курсу «Гідродинаміка» відомо, що розподіл швидкості в прикордонному шарі за умов ламінарної течії в плоскій поверхні підкоряється закону кубічної параболи $w_x = a + b y + c y^2 + d y^3$. Тоді, враховуючи умови на стінці: при $y = 0$ $w_x = 0$ і $d^2 w_x / dy^2 = 0$ (лінійність сил тертя); та на зовнішній границі шару: при $y = \delta$ $w_x = w_0$, $dw_x / dy = 0$, отримуємо залежність

$$w_x / w_0 = 1,5 (y / \delta) - 0,5 (y / \delta)^3. \quad (4.2)$$

При цьому товщина прикордонного шару становить

$$\delta = \sqrt{\frac{280}{13}} \sqrt{\frac{\nu x}{w_0}}. \quad (4.3)$$

Прийmemo температуру поверхні стінки постійною за довжиною. Тоді для перевищення температури $\vartheta = t - t_{ct}$ при $y = \delta$ $\vartheta_0 = t_0 - t_{ct}$ і, в зв'язку з ідентичністю умов на границі для теплового та гідродинамічного прикордонних шарів, отримуємо

$$\vartheta / \vartheta_0 = 1,5 (y / k) - 0,5 (y / k)^3, \quad (4.4)$$

де k – товщина теплового прикордонного шару.

З остатнього витікає

$$\left(\frac{d\vartheta}{dy} \right)_{y=0} = \frac{1,5 \vartheta_0}{k}. \quad (4.5)$$

Використаємо рівняння (4.1) і співвідношення (4.2) та (4.4). Спочатку, використовуючи (4.2) та (4.4), обчислимо інтеграл, що стоїть у (4.1).

$$\begin{aligned} & \int_0^k w_0 \left(1,5 \left(\frac{y}{\delta} \right) - 0,5 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right) \vartheta_0 \left(1 - 1,5 \left(\frac{y}{k} \right) + 0,5 \left(\frac{y}{k} \right)^3 \right) dy = \\ & = \vartheta_0 w_0 \delta \left[\frac{3}{20} \left(\frac{k}{\delta} \right)^2 - \frac{3}{280} \left(\frac{k}{\delta} \right)^4 \right]. \end{aligned}$$

Позначимо $\beta = k / \delta$ та врахуємо, що при $k < \delta$ можна зневажити більш високою ступеню β . Отримуємо, якщо підставимо значення інтегралу в (4.1),

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{3}{20} w_0 \vartheta_0 \delta \beta^2 \right] = 1,5 a \frac{\vartheta_0}{k}. \quad (a)$$

Виходячи з аналогії теплового та гідродинамічного прикордонних шарів та враховуючи, що їх виникнення починається одночасно з передньої

кромки стінки, можна вважати, що їх товщини однаково залежать від x , а їхнє відношення від x не залежить. Тоді (а) можна представити у вигляді

$$0,1 w_0 \beta^3 \delta \frac{d\delta}{dx} = a. \quad (б)$$

З (4.3) йде

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{140}{13} \frac{\nu}{w_0}. \quad (в)$$

Підставимо (в) в (б) і прийнемо $\sqrt[3]{14/13} \cong 1$. Отримуємо:

$$\beta = 1/\sqrt[3]{Pr}. \quad (4.6)$$

З (4.3), враховуючи (4.6), маємо:

$$k = 4,64 x / (Re^{0,5} Pr^{1/3}). \quad (г)$$

Коефіцієнт тепловіддачі знайдемо з рівняння тепловіддачі, якщо врахуємо (4.5). Отримуємо:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\vartheta_0} \left(\frac{d\vartheta}{dy} \right)_{y=0} = \frac{1,5\lambda}{k} = 0,33 \frac{\lambda}{x} Re^{0,5} Pr^{1/3}. \quad (д)$$

Переходячи до безрозмірного коефіцієнту тепловіддачі, знаходимо критеріальне рівняння:

$$Nu_x = 0,33 Re_x^{0,5} Pr^{1/3}. \quad (4.7)$$

Рівняння (4.7) отримано в припущенні, що теплофізичні параметри теплоносія постійні. Якщо врахувати поправку Михеєва для крапельних рідин, отримуємо рівняння для розрахунку локальних коефіцієнтів тепловіддачі за умов ламінарної течії рідини вздовж плоскої поверхні

$$Nu_{p,x} = 0,33 Re_{p,x}^{0,5} Pr_p^{1/3} \varepsilon_T. \quad (4.8)$$

У рівнянні (4.8) в якості визначальної прийнята температура незбуреного потоку, а визначальним розміром прийнята відстань від передньої кромки пластини. Для газів можна прийняти $\varepsilon_T = 1$.

З (4.8) витікає, що коефіцієнт тепловіддачі зменшується при збільшенні відстані від передньої кромки пластини за степеневим законом

$$\alpha = C x^{-0,5}. \quad (4.9)$$

Рівняння (4.7) і (4.8) отримані за умови $t_{ст} = const$. Змінення температури поверхні за довжиною пластини може суттєво змінити розподіл швидкості у прикордонному шарі та, відповідно, вплинути на інтенсивність теплообміну. Дослідження довели, що при змінненні температурного напору вздовж пластини за степеневим законом $\vartheta = \vartheta_0 x^m$, де m не залежить від координати, інтенсивність теплообміну зростає зі зростом m . Випадок $m = 0$ відповідає умові $t_{ст} = const$, що було розглянуто вище. За рекомендаціями Жукаускаса в разі зміни температури поверхні вздовж пластини локальні коефіцієнти тепловіддачі слід визначати по рівнянню

$$Nu_{ж,x} = 0,33 \varepsilon Re_{ж,x}^{0,5} Pr_{ж}^{1/3} \varepsilon_T, \quad (4.10)$$

де поправка $\varepsilon = f(m)$ може бути знайдена з табл. 4.1. В разі, якщо щільність

теплого потоку постійна за довжиною пластини, враховуючи (4.9), отримаємо, що $m = 0,5$ і поправка $\varepsilon = 1,36$.

Таблиця 4.1 – Поправка $\varepsilon = f(m)$

m	0	0,2	0,5	1,0	2,0
ε	1	1,17	1,36	1,6	1,98

Частіше за все в розрахунках теплого потоку за умов тепловіддачі необхідно

мати середні по деякій поверхні коефіцієнти тепловіддачі. Тому виникає задача осереднення локальних даних по тепловіддачі.

Використовуючи (4.9), можна осереднити коефіцієнти тепловіддачі як

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha(x) dx. \quad (4.11)$$

В той же час за визначенням середній коефіцієнт тепловіддачі є відношення середньої щільності теплого потоку до середнього температурного напору, тобто

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{q}}{\bar{\vartheta}} = \frac{\int_0^L \alpha(x) \vartheta(x) dx}{\int_0^L \vartheta(x) dx}. \quad (4.12)$$

Осереднення по (4.11) або по (4.12) тільки у випадку $t_{ct} = \text{const}$ дає однаковий результат. В інших випадках розбіг у значеннях середніх коефіцієнтів тепловіддачі може бути дуже суттєвим.

Використовуючи (4.12), отримаємо при степеневій залежності температурного напору від координати

$$\bar{\alpha} = \alpha_L \frac{2m + 2}{2m + 1}, \quad (4.13)$$

де α_L – коефіцієнт тепловіддачі на кінці пластини довжиною L . При $m = 0$ ($t_{ct} = \text{const}$) $\bar{\alpha} = 2\alpha_L$, при $m = 0,5$ ($q = \text{const}$) $\bar{\alpha} = 1,5\alpha_L$

Якщо на початку пластини є відрізок, що не обігривається, завдовжки x_0 , то формування теплого прикордонного шару починається пізніше гідродинамічного. Це впливає на локальні та, відповідно, середні коефіцієнти тепловіддачі. Експериментальні дослідження впливу початкового відрізка, що не обігривається, на інтенсивність локального теплообміну, проведені Жукаускасом із співавторами в широкому діапазоні зміни параметрів теплообміну, дозволили рекомендувати рівняння:

$$\text{Nu}_{p,x_1} = 0,33\varepsilon \text{Re}_{p,x_1}^{0,5} \text{Pr}_{x_1}^{1/3} (x_1/x)^{0,2} (\text{Pr}_p / \text{Pr}_{ct})^{0,25}. \quad (4.14)$$

У якості визначального розміру у (4.14) входить координата, що відрахована з початку відрізка, що обігривається $x_1 = x - x_0$. При $x_0 = 0$ (4.14) перетворюється в (4.8).

4.3. Тепловіддача за умов турбулентного прикордонного шару

Теоретичні дослідження тепловіддачі при турбулентному прикордонному шарі засновані на ідеї Рейнольдса про єдність механізму конвективного перенесення теплоти і механічної енергії. Розглянемо у

поверхні пластини турбулентний прикордонний шар завтовшки δ_T і ламінарний підшарок завтовшки δ_L (рис. 4.3). Нехай ось x направлена вздовж пластини, а ось y нормально до її поверхні. У ламінарному підшарі зміна швидкості по осі y дуже істотна, а перенесення теплоти здійснюється теплопровідністю. Тоді щільність теплового потоку (враховуючи напрям осі y), і напругу сил тертя можна представити у вигляді

$$q = \lambda(dt/dy), \quad s = \mu(dw_x/dy). \quad (a)$$

Розділивши одне рівняння на друге, отримаємо:

$$q = \frac{\lambda s}{\mu} \frac{dt/dy}{dw_x/dy}. \quad (b)$$

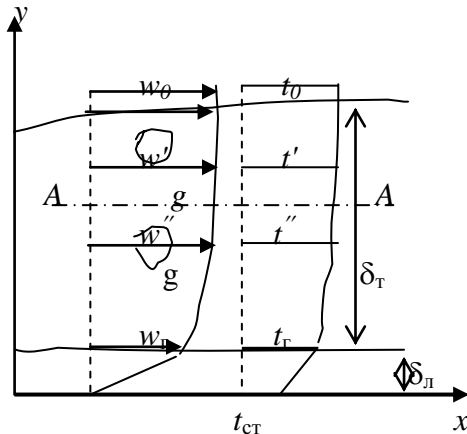


Рисунок 4.3 – До виводу аналогії Рейнольдса

Вважаючи лінійним розподіл швидкості і температури в межах ламінарного підшару, і позначивши швидкість на межі ламінарного підшару w_T і температуру t_T , співвідношення (b) матиме вигляд:

$$q = s \lambda (t_T - t_{CT}) / (\mu w_T). \quad (c)$$

Виділимо в турбулентному прикордонному шарі площину $A - A$ та розглянемо перенесення деякої маси рідини g_T [кг/м²с] через цю площину.

Ця маса, рухаючись зверху вниз, переносить кількість теплоти $g_T c_p t''$ і кількість руху $g_T w''$. Аналогічно, через нерозривність потоку, така ж маса рухається від низу до верху і переносить потік теплоти $g_T c_p t'$ і кількість руху $g_T w'$. Результуюча щільність теплового потоку та дотичні напруження сил тертя в площині $A - A$ (турбулентне тертя)

$$q_T = g_T c_p (t'' - t'); \quad s_T = g_T (w'' - w'). \quad (d)$$

Розділивши ці рівняння одне на одне, отримуємо аналогію Рейнольда:

$$q_T = \frac{s_T c_p (t'' - t')}{w'' - w'}. \quad (e)$$

Якщо співвідношення (c) враховує перенесення теплоти в ламінарному підшарі і, фактично, його термічний опір, то (e) враховує те ж саме для турбулентного шару. Загальний термічний опір перенесенню теплоти повинен дорівнювати сумі опорів ламінарного і турбулентного шарів. Розповсюдивши (e) на весь турбулентний шар, замінимо відповідно t'' на t_0 , t' на t_T , а w'' на w_0 , w' на w_T та сумуємо часткові температурні напруги. Отримуємо:

$$t_0 - t_T = \frac{q_T (w_0 - w_T)}{s_T c_p}, \quad t_T - t_{CT} = \frac{q \mu w_T}{s \lambda}.$$

Через безперервність теплового потоку і сил тертя можна вважати $q = q_T$, $s_T = s$. Тоді

$$\frac{q}{t_0 - t_{ct}} = \frac{s c_p}{w_0} \frac{1}{1 + (\text{Pr} - 1) w_r / w_0} = \frac{s c_p}{w_0} E, \quad (f)$$

де $E = 1$ при $\text{Pr} = 1$. За визначенням, величина, що стоїть в лівій частині (f), є коефіцієнт тепловіддачі. Визначимо сили тертя через коефіцієнт тертя як

$$s = c_f \frac{\rho w_0^2}{2}. \quad (g)$$

Тоді із (f) з врахуванням (g) отримаємо критерій Стантона

$$\text{St} = \frac{\alpha}{\rho c_p w_0} = \frac{\text{Nu}}{\text{Re Pr}} = \frac{c_f}{2}.$$

Визначив за рівнянням Прандтля коефіцієнт тертя як

$$c_f = 0,0592 / \text{Re}^{0,2},$$

отримаємо критеріальне рівняння для розрахунку теплообміну при турбулентній течії уздовж пластини (при $\text{Pr} = 1$) у вигляді

$$\text{Nu} = 0,0296 \text{Re}^{0,8}. \quad (4.15)$$

Отримане рівняння добре узгоджується з експериментальними даними при $\text{Pr} = 1$. Розповсюдження отриманого рівняння на рідині з $\text{Pr} \neq 1$, проведені Михеєвим, дозволяють рекомендувати наступне рівняння для розрахунку місцевих коефіцієнтів тепловіддачі при турбулентній течії рідини біля плоскої поверхні

$$\text{Nu}_{p,x} = 0,0296 \text{Re}_{p,x}^{0,8} \text{Pr}_p^{0,43} \epsilon_T. \quad (4.16)$$

Згідно (4.16), локальні коефіцієнти тепловіддачі залежать від подовжньої координати як $\alpha = C x^{-0,2}$, тобто зменшуються по довжині пластини. Проте, при турбулентному прикордонному шарі інтенсивність зміни коефіцієнта тепловіддачі істотно менша, ніж при ламінарному прикордонному шарі. Якщо турбулентний прикордонний шар існує по всій довжині пластини, то по (4.11) середній коефіцієнт тепловіддачі (при $t_c = \text{const}$) $\bar{\alpha} = 1,25 \alpha_L$, де α_L – коефіцієнт тепловіддачі на кінці пластини. За наявності на пластині ламінарного і турбулентного режиму течії усереднювання коефіцієнтів тепловіддачі по (4.11) або по (4.12) слід проводити окремо для ламінарної та турбулентної течії, а потім усереднювати отримані середні коефіцієнти тепловіддачі.

На закінчення розділу відзначимо відомі співвідношення, що дозволяють визначити товщину турбулентного прикордонного шару:

$$\delta_T / x = 0,367 / \text{Re}_x^{0,2}, \quad (4.17)$$

та товщину ламінарного підшару:

$$\delta_L / \delta_T = 194 / \text{Re}_x^{0,7}. \quad (4.18)$$

Питання для самоперевірки

1. Який характер має течія рідини в прикордонному шарі на плоскій поверхні? Як оцінюється границя ламінарної течії?
2. Як змінюється товщина ламінарного прикордонного шару вздовж плоскій поверхні?

3. Дайте визначення локального та середнього по поверхні коефіцієнту тепловіддачі.
4. Як змінюється вздовж поверхні локальний коефіцієнт тепловіддачі при ламінарній течії в прикордонному шарі?
5. Напишіть структуру критеріального рівняння для розрахунку локального коефіцієнта тепловіддачі при ламінарній течії в прикордонному шарі? При турбулентній?
6. Як усереднюється по довжині поверхні коефіцієнт тепловіддачі?

Задачі до розділу 4

1. По стрічці з ніхрому перерізом 20×1 мм і довжиною $0,8$ м тече струм 85 А. Стрічка обдувається потоком повітря $t_{\text{п}} = 20$ °С, швидкість повітря 10 м/с. Знайти максимальну температуру стрічки, якщо питомий електричний опір ніхрому $\rho = 0,4$ Ом·мм²/м. Теплопровідністю вздовж стрічки нехтувати.

Коментар до задачі. За умовами задачі щільність теплового потоку на поверхні стрічки постійна, тому що сила току і опір стрічки постійні. З (4.10) йде, що локальний коефіцієнт тепловіддачі при ламінарній течії рідини вздовж плоскої поверхні зменшується зі збільшенням відстані від передньої кромки. Отже, температура поверхні стрічки максимальна в точці, де коефіцієнт тепловіддачі мінімальний, тобто в кінці зони ламінарної течії. Умовною границею зони ламінарної течії вважається $Re_{\text{кр}} = (1-5) \cdot 10^5$. Приймаючи $Re_{\text{кр}} = wX_{\text{кр}}/\nu = 3 \cdot 10^5$, визначаємо координату $X_{\text{кр}}$, де температура стрічки максимальна. З (4.10) по $Re_{\text{кр}}$ та $\varepsilon = 1,36$ знаходиться критерій Nu та коефіцієнт тепловіддачі як $\alpha_{\text{min}} = Nu \lambda / X_{\text{кр}}$.

2. Вирішити попередню задачу за умови, що вздовж стрічки тече вода з тією ж температурою і швидкістю $0,5$ м/с.

3. Знайти тепловий потік, що передається з прямого ребра постійного перерізу, якщо розміри ребра: довжина $L = 0,6$ м, $h = 50$ мм, $2\delta = 5$ мм, $\lambda = 40$ Вт/(м·К); температура в основі $t_0 = 120$ °С, температура повітря, що тече вздовж ребра зі швидкістю 4 м/с, $t_{\text{п}} = 20$ °С.

Коментар до задачі. Тепловий потік, що передає ребро, знаходиться по (2.67). Для його визначення необхідно знайти середній по ребру коефіцієнт тепловіддачі. Встановимо характер течії повітря вздовж ребра, для чого врахуємо критерій $Re = wL/\nu$. Якщо $Re \leq Re_{\text{кр}}$, то течія в прикордонному шарі ламінарна і по (4.10) при $\varepsilon = 1$ знаходиться критерій Nu і коефіцієнт тепловіддачі α_L на кінці ребра. Середній коефіцієнт тепловіддачі знаходиться по (4.13).

5. ТЕПЛОВІДДАЧА ПРИ ТЕЧІЇ РІДИНИ В ТРУБАХ І КАНАЛАХ

Процес тепловіддачі при течії рідини в трубах є складнішим процесом, ніж течія біля плоскої поверхні, оскільки поперечний перетин труби має кінцеві розміри. Тому, починаючи з деякої відстані від входу в трубу, на рідину по всьому перерізу каналу діє гальмуючий вплив сил тертя. Відрізок труби від входу до злиття прикордонних шарів називають відрізком гідродинамічної стабілізації потоку. Якщо критерій Рейнольдса обчислити як $Re = wd/\nu$, де w – середня швидкість рідини, d – діаметр труби, ν –

кінематична в'язкість рідини, то ламінарна течія в трубах має місце при $Re \leq 2300$, турбулентна при $Re \geq 10^4$. Течія при $2300 < Re < 10^4$ зветься перехідною.

При ламінарній течії довжина відрізка гідродинамічної стабілізації потоку може приблизно визначатися як

$$L_T/d = 0,03 Re. \quad (5.1)$$

Якщо потік у трубі неізотермічний ($t_{ct} \neq t_p$), то разом з гідродинамічним прикордонним шаром у стінки труби виникає тепловий прикордонний шар, у якому температура рідини змінюється від t_c до t_p . У міру видалення від входу у трубу товщина цього шару наростає, і на деякій відстані від входу у трубу відбувається зімкнення прикордонного шару. Але якщо форма профілю гідродинамічного прикордонного шару у стабілізованому потоці залишається постійною (на підставі рівняння нерозривності), то наявність теплообміну між рідиною і стінкою труби призводить до зміни форми профілю теплового прикордонного шару. Для ламінарного режиму течії теоретичні рішення визначають відносну довжину відрізка теплової стабілізації потоку у вигляді:

$$t_{ct} = \text{const} \quad L_T/d = 0,055 Re; \quad q = \text{const} \quad L_T/d = 0,07 Re. \quad (5.2)$$

При турбулентній течії рідини в трубі ($Re > 10^4$) гідродинамічна

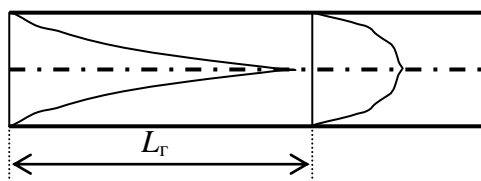


Рисунок 5.1 – Схема виникнення прикордонного шару при ламінарній течії рідини у трубі

стабілізація потоку настає достатньо швидко через значну товщину турбулентного прикордонного шару. За деякими даними при $Re > 5 \cdot 10^4$ практично з самого початку труби встановлюється стабілізована течія рідини.

5.1. Теплообмін при ламінарній течії рідини в трубах

В теперішній час досить добре досліджений теплообмін при ламінарній течії рідини тільки в круглих трубах. Теплообмін в каналах довільної форми при ламінарній течії досліджений недостатньо, і тому загальних рекомендацій за розрахунком коефіцієнта тепловіддачі не існує.

Теоретичні дослідження теплообміну при стабілізованій ламінарній течії і умові одночасної теплової і гідродинамічної стабілізації потоку показали, що коефіцієнт тепловіддачі для стабілізованого теплообміну залишається постійним вздовж труби і залежить тільки від умов на стінці труби. Узагальнений коефіцієнт тепловіддачі в цьому випадку дорівнює

$$t_{ct} = \text{const} \quad Nu_{\text{стаб}, d} = 3,66; \quad q = \text{const} \quad Nu_{\text{стаб}, d} = 4,36. \quad (5.3)$$

З диференціального рівняння тепловіддачі у цьому випадку маємо, що $(\partial \vartheta / \partial n) / \vartheta = \alpha / \lambda = \text{const}$, тобто відношення градієнта температури на поверхні у прикордонному шарі до температурного натиску залишається постійним. Таким чином, при стабілізованому теплообміні градієнт температури на стінці змінюється з такою ж інтенсивністю, як і

температурний напір.

Наявність теплообміну при ламінарній течії в трубах призводить до того, що температура за перерізом потоку змінна, отже, по перерізу потоку змінюються теплофізичні характеристики рідини, зокрема її густина. Тому в ламінарному потоці рідини можуть виникати вторинні течії, обумовлені природною конвекцією, інтенсивність яких залежить, в першу чергу, від різниці температур «стінка – рідина», від теплофізичних властивостей рідини, розміру труби, її орієнтації і т.д. На рис. 5.2 умовно показана вторинна течія в горизонтальній трубі при $t_{ст} > t_p$.

Очевидно, що при малих температурних напорах інтенсивність вторинних течій мала, та їх впливом на теплообмін можна нехтувати. У зв'язку з цим, теплообмін за умов ламінарної течії рідини в трубах підрозділяють на два режими: **в'язкістний** режим теплообміну, коли інтенсивність вторинних течій, викликаних неізотермічністю рідини, мала, і їх впливом на теплообмін можна нехтувати, і **в'язкістно-гравітаційний** режим теплообміну, коли інтенсивність вторинних течій рідини має істотний вплив на теплообмін. Оцінка межі між в'язкістним і в'язкістно-гравітаційними режимами теплообміну достатньо умовна. За даними різних авторів, можна прийняти межею цих режимів значення

$$Ra_{m,d} = (Gr \cdot Pr)_{m,d} = 8 \cdot 10^5. \quad (5.4)$$

У (5.4) визначальною температурою прийнята середня температура прикордонного шару; визначальним розміром – діаметр трубки.

Слід зазначити, що ці дані застосовуються для горизонтально розташованих труб. При значенні критерію Релея менше (5.4) режим теплообміну вважається в'язкістним, в іншому випадку – в'язкістно-гравітаційним.

Дослідження в'язкістного режиму теплообміну в Московському енергетичному інституті (МЕІ) дозволяють для випадку $q = \text{const}$ рекомендувати наступне рівняння для розрахунку локальних коефіцієнтів тепловіддачі

$$Nu_{p,x} = 0,33 Re_{p,x}^{0,5} Pr_p^{0,43} (Pr_p / Pr_{ст})^{0,25} (x/d)^{0,1}. \quad (5.5)$$

Тут в якості визначальної температури прийнята середня температура рідини в даному перерізі труби. Якщо порівняти дане рівняння з (4.10) для теплообміну при ламінарній течії рідини у плоскій поверхні, то останній симплекс в (5.5), як стверджують автори, враховує ефект впливу обмеженості поперечного перерізу каналу. Змінення коефіцієнту тепловіддачі по довжині труби ($\alpha \approx x^{-0,4}$) вдається меншим, ніж при течії у плоскій поверхні.

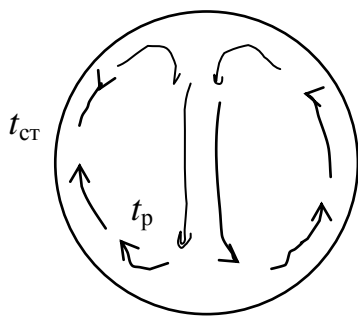


Рисунок 5.2 – Схема вторинної течії в горизонтальній трубі при

$$t_{ст} > t_p$$

Дослідження Петухова показали, що при в'язкістному режимі теплообміну в довгих трубах ($L > L_T$) середній

коефіцієнт тепловіддачі можна визначити по рівнянню

$$\text{Nu}_{m,d} = 1,55 \left(\text{Pe}_{m,d} \frac{d}{L} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu_p}{\mu_{ct}} \right)^{0,14} \varepsilon_l, \quad (5.6)$$

де поправка на вплив відрізка гідродинамічної стабілізації потоку визначається з рівняння

$$\varepsilon_l = 0,6 \left(\frac{1}{\text{Re}_m} \frac{L}{d} \right)^{-1/7} \left(1 + 2,5 \frac{1}{\text{Re}_m} \frac{L}{d} \right). \quad (5.7)$$

Якщо $\frac{1}{\text{Re}_m} \frac{L}{d} > 0,1$, то поправка $\varepsilon_l = 1$.

Визначальною температурою в (5.6) і (5.4) прийнята середня температура прикордонного шару. В'язкістний режим теплообміну при течії газів мало досліджений, тому наведеними співвідношеннями можна користуватися тільки для крапельних рідин.

За рекомендаціями Е. Еккерта для розрахунку середньої інтенсивності теплообміну при в'язкістному режимі і $t_{ct} = \text{const}$ можна користуватися рівнянням

$$\text{Nu}_{p,d} = \left\{ 3,66 + \frac{0,067 \text{Pe}_{p,d} d/L}{1 + 0,04(\text{Pe}_{p,d} d/L)^{2/3}} \right\} \left(\frac{\mu_p}{\mu_{ct}} \right)^{0,14}. \quad (5.8)$$

У даному рівнянні визначальною прийнята середня температура рідини в трубі. Слід зазначити, що при достатньо великій довжині труби $\text{Nu} \rightarrow 3,66$, що відповідає стабілізованому теплообміну.

При в'язкістно-гравітаційному режимі теплообміну коефіцієнти тепловіддачі можуть бути в 3-5 разів більше, ніж при в'язкістному режимі, за рахунок впливу природної конвекції. Проте, врахування цієї складової є достатньо складним, оскільки порівняно невеликі відмінності в крайових умовах можуть привести до результатів, що істотно відрізняються. Це ускладнює узагальнення експериментальних даних і отримання універсальних рівнянь. Наближена оцінка середньої інтенсивності теплообміну при в'язкістно-гравітаційному режимі може проводитися за рівнянням Михеєва

$$\text{Nu}_{p,d} = 0,15 \text{Pe}_{p,d}^{0,33} \text{Ra}_{p,d}^{0,1} (\text{Pr}_p / \text{Pr}_{ct})^{0,25} \varepsilon_l, \quad (5.9)$$

де ε_l – поправка на вплив відрізка гідродинамічної стабілізації потоку визначається за табл. 5.1 в залежності від l/d . З таблиці йде, що за умови $l/d > 40$ поправка на відрізок гідродинамічної стабілізації може бути прийнята 1.

Обширні дослідження теплообміну при в'язкістно-гравітаційному режимі теплообміну

Таблиця 5.1 – Залежність $\varepsilon_l = f(l/d)$

l/d	1	2	5	10	15	20	40	50
ε_l	1,9	1,7	1,44	1,28	1,18	1,13	1,02	1

проведені Петуховим, Краснощекочевим, Нольде та

іншими дослідниками. Вони дозволяють більш обґрунтовано вибрати

рівняння для розрахунку теплообміну в конкретних умовах. Проте розгляд їх співвідношень виходить за рамки цього курсу.

5.2. Тепловіддача при турбулентній течії рідини в трубах і каналах

Як зазначалось вище, турбулентна течія в трубах має місце при $Re > 10^4$. Для отримання залежності інтенсивності теплообміну від параметрів потоку скористаємося співвідношенням (f) з розділу 4.3, де замінимо швидкість незбуреного потоку середньою швидкістю течії рідини в перерізу.

$$\alpha = \frac{sc_p}{w} \frac{1}{1 + (Pr - 1)w_T / w} = \frac{sc_p}{w} E. \quad (a)$$

При безвідривній течії в трубі гідравлічний опір визначається силами тертя по периметру каналу. Виділимо відрізок труби довжиною L між перерізами 1, де тиск потоку P_1 , і 2, де тиск P_2 (рис.5.3). Різниця тиску по перерізах $\Delta P = P_1 - P_2$ при стабілізованій течії визначається силами тертя на стінці труби. Тоді очевидне співвідношення:

$$\Delta P f = s F, \quad (б)$$

де f – площа поперечного перерізу труби, F – поверхня труби між перерізами. Враховуючи значення f і F , та закон Дарсі у вигляді

$$\Delta P = c_f (L/d) \rho w^2 / 2, \quad (в)$$

отримаємо для напруги сил тертя

$$s = \frac{c_f}{8} \rho w^2. \quad (г)$$

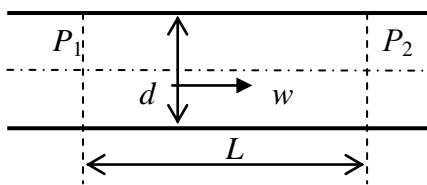


Рисунок 5.3 – До залежності втрати тиску в прямій трубі.

Підставимо (г) в (а), знайдемо критерій Стантона (при $Pr = 1$)

$$St = c_f / 8. \quad (д)$$

Використовуючи формулу Нікурадзе для коефіцієнту тертя в прямій трубі,

$$c_f = 0,184 / Re^{0,2},$$

отримаємо (при $Pr = 1$):

$$Nu = 0,023 Re^{0,8}. \quad (5.10)$$

Отримане рівняння добре узгоджується з даними експериментальних досліджень при $Pr = 1$. Проте поширення рівняння на випадки $Pr \neq 1$ вимагає подальшого експериментального дослідження. За даними Михєєва середній коефіцієнт тепловіддачі при турбулентній течії в трубі можна визначати за рівнянням

$$Nu_{p,d} = 0,021 Re_{p,d}^{0,8} Pr_p^{0,43} \epsilon_T \epsilon_l, \quad (5.11)$$

де ϵ_T – поправка на неізотермічність, яка для крапельних рідин може бути знайдена як $\epsilon_T = (Pr_p / Pr_{ст})^{0,25}$, для газів при нагріванні $\epsilon_T = (T_T / T_{ст})^{0,25}$, при охолодженні газу $\epsilon_T = 1$; ϵ_l – поправка на вплив відрізка гідродинамічної стабілізації потоку $\epsilon_l = f(Re, L/d)$, яка може визначатися за табл. 5.2.

Розрахунок теплообміну при турбулентній течії в каналі довільного

профілю може бути проведений за рівнянням (5.11), якщо як визначальний розмір прийняти «еквівалентний» (гідравлічний) діаметр

$$d_{\text{екв}} = 4F/U, \quad (5.14)$$

де F – площа перерізу потоку, U – змочений периметр (периметр тепловіддачі).

Таблиця 5.2 – Поправка ε_l при турбулентній течії

$Re \cdot 10^{-4}$	L/d						
	1	2	5	10	20	40	50
1	1,65	1,5	1,34	1,23	1,13	1,03	1
5	1,34	1,27	1,18	1,13	1,08	1,02	1
10	1,28	1,22	1,15	1,10	1,06	1,02	1
100	1,14	1,11	1,08	1,05	1,03	1,01	1

Дослідження теплообміну і гідродинаміки в зігнутих трубах і зміювиках показали, що наявність відцентрових сил приводить до виникнення вторинної циркуляції, що руйнує ламінарну течію при значеннях критерію Рейнольдса істотно менших, ніж 2300. При цьому перехід до турбулентної течії відбувається значно швидше при практичній відсутності перехідної течії. Якщо прийняти критичні значення критерію Рейнольдса

$$Re'_{\text{кр}} = 11,6/\sqrt{d/D}, \quad Re''_{\text{кр}} = 18500 \cdot (d/D)^{0,28},$$

де d – діаметр труби, $D = 2R$, R – радіус вигинання труби по середній лінії, то при $Re < Re'_{\text{кр}}$ розрахунок ведеться за рівняннями для ламінарної течії в трубах. При $Re'_{\text{кр}} < Re < Re''_{\text{кр}}$ розрахунок теплообміну ведеться за рівняннями для турбулентної течії. Якщо $Re > Re''_{\text{кр}}$, то значення коефіцієнту тепловіддачі, що отримані за рівняннями для турбулентної течії, повинні помножатися на поправковий коефіцієнт

$$\varepsilon_r = 1 + 1,8(d/R). \quad (5.15)$$

Створення в трубах штучної шорсткості, яка руйнує ламінарний підшарок турбулентного прикордонного шару, призводить до збільшення тепловіддачі. Дослідження Гомелаурі показали, що є деяке оптимальне значення відносної шорсткості $(s/\delta)_{\text{опт}} = 13$, при якому спостерігається найбільше збільшення тепловіддачі. Розрахунок тепловіддачі в трубах із штучною шорсткістю рекомендується проводити за рівнянням (5.11) з урахуванням поправки на шорсткість

$$\varepsilon_{\text{ш}} = \exp(0,85K), \quad (5.16)$$

де $K = (s/\delta)_{\text{опт}}/(s/\delta)$ при $(s/\delta) > (s/\delta)_{\text{опт}}$; і $K = 1/K$ в іншому випадку.

5.3. Тепловіддача при перехідному режимі течії

Інтенсивність теплообміну за умов перехідного режиму течії ($2300 < Re < 10^4$) залежить від великої кількості чинників, що важко піддаються обліку. До теперішнього часу відсутня задовільна методика розрахунку теплообміну в цьому режимі.

За рекомендаціями В.П. Ісаченко, наближена оцінка інтенсивності

теплообміну в перехідній області може бути проведена наступним чином.

1. За табл.5.3 визначаються максимальне та мінімальне значення комплексу

$$K = Nu_{p,d} / [Pr_p^{0,43} (Pr_p / Pr_{ст})^{0,25}]. \quad (5.17)$$

Таблиця 5.3 – Значення комплексу K

$Re_{p,d} \cdot 10^{-3}$	2,4	3	5	8	10
K_{max}	10,6	12,7	19,1	28	33,3
K_{min}	3,8	7	15,5	27	33,3

2. Коефіцієнт тепловіддачі визначається з середнє геометричного значення K .

За рекомендаціями

С.С. Кутателадзе оцінка середнього коефіцієнта тепловіддачі при перехідному режиму течії може бути проведена наступним чином.

1. В залежності від комплексу $Re_{m,d}$ розраховується значення Nu_d за рівнянням для в'язкісного або в'язкісно-гравітаційного режиму теплообміну при ламінарній течії для значення $Re = 2300$.

2. З рівняння Михеева (5.11) знаходиться Nu_T для $Re = 10^4$.

3. Розрахункове значення критерію Нуссельта визначається за рівнянням

$$Nu_{p,d} = Nu_d \left(\frac{Re}{2300} \right)^{1,471 \lg [Nu_T / Nu_d]} \quad (5.18)$$

В (5.18) Re – розрахункове значення критерію Рейнольдса. Визначальна температура – середня температура рідини в трубі.

Питання для самоперевірки

1. Чім відрізняється течія рідини в трубі від течії у плоскій поверхні?
2. Як класифікують режими течії рідини в трубах?
3. Що таке «стабілізована течія» і «стабілізований теплообмін»?
4. Як визначається довжина відрізка теплової та гідродинамічної стабілізації потоку при ламінарній і турбулентній течії в прямій круглій трубі?
5. Як і чому класифікуються режими теплообміну при ламінарній течії рідини в прямих круглих трубах? Умовна межа режимів.
6. Структура критеріального рівняння для різних режимів теплообміну при ламінарній течії рідини в трубах.
7. Структура критеріального рівняння для розрахунку теплообміну при турбулентній течії.
8. Як розрахувати теплообмін при турбулентній течії в каналах довільного перерізу?
9. Чім відрізняється течія рідини в зігнутих трубах (змійовиках) від течії в прямих трубах? Як це впливає на розрахунки теплообміну?

Задачі до розділу 5

1. Вода зі швидкістю 0,1 м/с тече трубою з діаметром 4 мм та довжиною 800 мм. Температура стінки труби 60 °С. Визначити температуру

води на виході з трубки, якщо на вході температура води 10 °С.

Коментар до задачі. Приймаючи в якості визначальної температуру води на вході в трубу, можна знайти критерій Re та визначити характер течії. Якщо течія ламінарна ($Re < 2300$), розраховується критерій Релея (Ra) та визначається режим теплообміну (при $Ra < 8 \cdot 10^5$ – в'язкістний, в іншому випадку – в'язкістно-гравітаційний). В залежності від режиму теплообміну використаємо рівняння (5.6) або (5.9). Температура води на виході з труби знаходиться з рівняння теплового балансу: тепловий потік від стінки труби до води витрачається на змінення ентальпії потоку.

$$Q = \alpha \pi d l (t_{ст} - \bar{t}_в) = G_в c_{рв} (t_{в2} - t_{в1}),$$

де $\bar{t}_в = (t_{в1} + t_{в2})/2$ – середня температура води; $G_в = \rho w f$ – витрата води; f – переріз труби; $c_{рв}$ – ізобарна теплоємність води. Якщо температура води на виході суттєво відрізняється від температури на вході ($> 15^\circ\text{C}$), слід перерахувати коефіцієнт тепловіддачі, прийнявши в якості визначальної середню температуру води в трубці.

2. Трубою діаметром 30 мм, довжиною 2 м тече трансформаторне масло зі швидкістю 0,2 м/с. На вході в трубу температура масла 80°С. Визначити температуру масла на виході з труби, якщо температура стінки труби постійна за довжиною та дорівнює 20°С.

Коментар до задачі. Користуйтеся коментарем до попередньої задачі.

3. Сталевою трубою діаметром 65/60 мм тече повітря із середньою температурою 150 °С, швидкість повітря 15 м/с. Визначити необхідну товщину ізоляції зовнішньої поверхні труби ($\lambda_{із} = 0,2$ Вт/(м·К)), щоб теплові витрати не перевищували 100 Вт/м при температурі поверхні ізоляції 40°С.

Коментар до задачі. Нехтуючи термічним опором стінки труби, зовнішній діаметр ізоляції знаходиться з

$$q_l = \frac{t_в - t_{п.із}}{1/(\alpha \pi d_1) + \ln(d_3/d_2)/(2\pi\lambda_{із})}$$

Коефіцієнт тепловіддачі визначається в залежності від критерію Re по (5.11) або по (5.9).

4. У каналі перетином 2 x 1 м течуть продукти згорання при температурі 250 °С зі швидкістю 10 м/с. Визначити витрати теплоти з погонного метра каналу, якщо температура його внутрішній поверхні 120 °С.

Коментар до задачі. Для визначення критерію Re використайте еквівалентний діаметр по (5.14).

6. ТЕПЛОВІДДАЧА ПРИ ПОПЕРЕЧНОМУ ОБТІКАННІ ОДИНИЧНОЇ ТРУБИ І ПУЧКІВ ТРУБ

Характер течії рідини біля поверхні труби при поперечному обтіканні має ряд особливостей, що приводять до істотних відмінностей при розрахунку середніх коефіцієнтів тепловіддачі. При малих значеннях критерію Рейнольдса ($Re < 5$), тобто для труб малого діаметру при високій в'язкості рідини, у поверхні труби спостерігається безвідривна течія рідини.

Для значень критерію Рейнольдса $Re > 5$ труба є незручно обтічним тілом, а ламінарний прикордонний шар на поверхні труби відривається (через пониження тиску у поверхні труби внаслідок збільшення швидкості потоку) і утворює два симетричних вихори. Відрив потоку відбувається при



Рисунок 6.1 – Обтікання циліндра потоком рідини

а – безвідривне обтікання ($Re \leq 5$); б – відрив ламінарного прикордонного шару; в – відрив турбулентного прикордонного шару

$\varphi = 80 \div 85^\circ$, де φ – кут, відрхований від лобової точки труби. При збільшенні швидкості потоку до $Re > 10^3$ вихори за трубою періодично відриваються і несуться потоком, утворюючи за трубою вихрову доріжку.

Підвищення швидкості потоку до $Re > 2 \cdot 10^5$ призводить до того, що енергія прикордонного шару стає достатньою для виникнення у поверхні труби турбулентного прикордонного шару. Останній, через більшу енергію, відривається при куті $\varphi \approx 120^\circ$. Цей факт істотно збільшує тепловіддачу кормової зони труби.

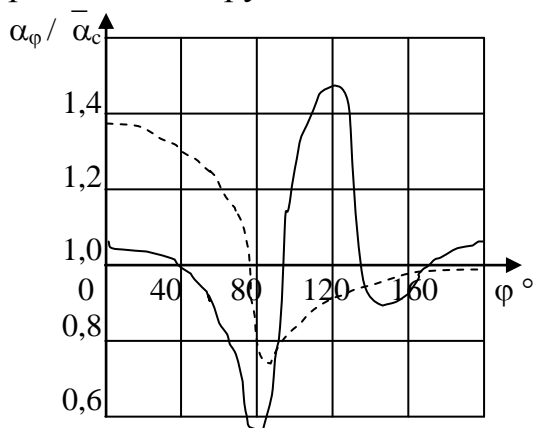


Рисунок 6.2 – Локальна тепло-віддача при поперечному обтіканні труби

-- ламінарний прикордонний шар,
— турбулентний шар

Дослідження локальної тепловіддачі по периметру труби призвели до результатів, відображених на рис. 6.2.

Істотна відмінність в характері теплообміну впливає на розрахунок середніх коефіцієнтів теплообміну по поверхні циліндра. Узагальнення експериментальних даних, проведені С.С. Кутателадзе, дозволили рекомендувати наступне рівняння для розрахунку середніх коефіцієнтів тепловіддачі циліндру в поперечному потоці рідини

$$Nu_{p,d} = C Re_{p,d}^n Pr_p^m \varepsilon_T, \quad (6.1)$$

де для газів $\varepsilon_T = (T_r/T_c)^{n/4}$, для крапельних рідин $\varepsilon_T = (\mu_p/\mu_c)^k$, де, в свою чергу, $k = 0,25$ для нагрівання і $k = 0,2$ для охолодження рідини. Коефіцієнти в рівнянні (6.1) в залежності від критерію Рейнольдса наведені в табл. 6.1.

Слід зазначити, що рівняння (6.1) отримане при куті атаки (натікання потоку на циліндр) 90° . Якщо кут атаки (φ) менше, то в рівняння (6.1) слід ввести поправку

$$\varepsilon_\phi = 1 - 0,54 \cos^2 \phi. \quad (6.2)$$

У теплообмінних апаратах, що зустрічаються в багатьох галузях господарства, поверхня теплообміну складається з труб, зібраних в пучки. За принципом розташування труб у пучку розрізняють **коридорний** і **шаховий** пучки труб. Кожен пучок труб (рис.6.2) має геометричні характеристики, які певним чином впливають на інтенсивність теплообміну. До цих характеристик відносять: крок по фронту пучку – S_1 , крок в глибину пучку – S_2 , діаметр труб – d .

Течія теплоносія в пучку труб носить, як правило, турбулентний характер, до того ж, перші ряди труб грають роль додаткових турбулізаторів потоку. Дослідження гідродинаміки потоку в пучках труб показали, що, починаючи з 3-го ряду труб, характер течії практично не залежить від

Таблиця 6.1 – Коефіцієнти рівняння (6.1)

Коефіцієнт	Re			
	< 40	40÷10 ³	10 ³ ÷2·10 ⁵	> 2·10 ⁵
C	0,76	0,52	0,26	0,023
n	0,4	0,5	0,6	0,8
m	0,37	0,37	0,37	0,4

глибини пучку. Обтікання перших двох рядів залежить від компоновки пучку. Відповідно, і інтенсивність теплообміну, починаючи з 3-го ряду труб і далі в глибину пучку, залиша-

ється практично постійною.

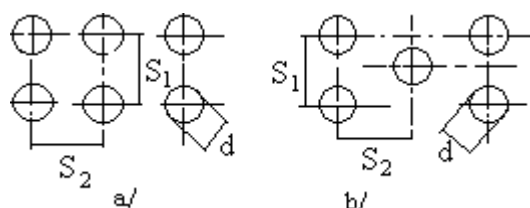


Рисунок 6.2 – Типи пучків труб
а – коридорний; б – шаховий

Інтенсивність теплообміну перших рядів труб залежить від компоновки пучку і складає: для 1-го ряду труб незалежно від компоновки пучку 60 % від інтенсивності теплообміну 3-го ряду; для 2-го ряду коридорного пучку – 90 %, для 2-го ряду

шахового пучку – 70 % від інтенсивності теплообміну 3-го ряду.

Експериментальні дослідження теплообміну пучку труб дозволяють рекомендувати наступне рівняння для розрахунку середнього коефіцієнта тепловіддачі пучку труб за умови, що швидкість потоку визначена в найвужчому перерізу пучку

$$Nu_{p,d} = C \cdot Re_{p,d}^n \cdot Pr_p^{0,33} \cdot \varepsilon_T \varepsilon_s \varepsilon_m, \quad (6.3)$$

де коефіцієнти рівняння, поправки на геометрію пучка (ε_s) та кількість рядів в пучку (ε_m) приймаються за табл. 6.2, в залежності від типу пучку.

Таблиця 6.2 – Коефіцієнти рівняння (6.3)

Тип пучку	C	n	ε_m	ε_s
шаховий	0,41	0,6	1-0,7/m	$S_1/S_2 < 2 \quad (S_1/S_2)^{1/6}$ $S_1/S_2 \geq 2 \quad 1,12$
коридорний	0,26	0,65	1-0,5/m	$(S_2/d)^{-0,15}$

Поправка на неізотермічність ε_T для крапельної рідини визначається за

рекомендаціями Михєєва, для газів її можна прийняти 1. При натіканні потоку на пучок труб під деяким кутом атаки $\phi \neq 90^\circ$ в рівняння (6.3) слід ввести поправковий коефіцієнт по (6.2).

Питання для самоперевірки

- 1. В чому особливість обтікання циліндра поперечним потоком рідини, та яким чином цей фактор впливає на локальну інтенсивність теплообміну?*
- 2. Яка структура критеріального рівняння для розрахунку середньої інтенсивності теплообміну циліндра в поперечному потоці рідини?*
- 3. Структура пучків труб, вплив геометрії на інтенсивність теплообміну.*

Задачі до розділу 6

1. Відрізок сталеві труби ($\lambda = 40$ Вт/(м·К)) діаметром 40 мм з товщиною стінки 2,5 мм обтикається поперечним потоком повітря зі швидкістю 10 м/с $t_{\text{п}} = 20^\circ\text{C}$. Визначити тепловий потік, що передається від труби до повітря, якщо її довжина 250 мм, а температура обох торців труби однакова і дорівнює $t_0 = 150^\circ\text{C}$.

Коментар до задачі. Використайте коментар до задачі 2 розділу 2.5. Коефіцієнт тепловіддачі знаходиться з (6.1).

2. Сталевий стрижень ($\lambda = 35$ Вт/(м·К)) діаметром 15 мм, довжиною 150 мм обтикається поперечним потоком трансформаторного мастила $t_{\text{м}} = 80^\circ\text{C}$ зі швидкістю 0,2 м/с. Знайти тепловий потік від мастила до стрижня, якщо температура в основі стрижня $t_0 = 20^\circ\text{C}$. Прийняти, що інтенсивність теплообміну торця і бічної поверхні стрижня однакова.

Коментар до задачі. Для визначення теплового потоку за (2.60) необхідне значення коефіцієнту тепловіддачі від мастила до стрижня, яке може бути знайдено з (6.1). Однак, для крапельних рідин $\epsilon_{\text{т}} = (\mu_{\text{р}}/\mu_{\text{ст}})^k$, а середня температура стрижня невідома. Тому в якості першого наближення приймається $\epsilon_{\text{т}} = 1$, з (6.1) визначається коефіцієнт тепловіддачі першого наближення α' , характеристика стрижня $m = \sqrt{\alpha u / (\lambda f)}$ і середня температура стрижня з $\bar{\vartheta} = \vartheta_0 [\text{th}(mh) + N] / \{mh[1 + N \text{th}(mh)]\}$. По знайденій середній температурі визначається $\epsilon_{\text{т}}$ та коефіцієнт тепловіддачі другого наближення як $\alpha'' = \alpha' \cdot \epsilon_{\text{т}}$. При необхідності проводиться розрахунок ще одного наближення. По уточненому значенню коефіцієнта тепловіддачі визначається m і тепловий потік по (2.60).

3. Відрізок сталеві труби ($\lambda = 35$ Вт/(м·К)) діаметром 35 мм з товщиною стінки 2,5 мм обтикається повітрям $t_{\text{п}} = 20^\circ\text{C}$ зі швидкістю 8 м/с. Визначити тепловий потік, що передається до повітря від труби, якщо її довжина 250 мм, температура одного торця труби $t_1 = 150^\circ\text{C}$, а другого – $t_2 = 200^\circ\text{C}$.

Коментар до задачі. Використайте (2.64) і коментар до задачі 1.

4. Визначити тепловий потік, що передається коридорним пучком труб діаметрами 51/45 мм, довжиною 1,2 м; крок по фронту і в глибину пучку

110 мм. По фронту пучку розташовано 10 труб, в глибину пучку – 15 труб. Усередині труб тече вода зі швидкістю $w_{\text{вод}} = 0,5 \text{ м/с}$, $t_{\text{вод}} = 20 \text{ }^\circ\text{С}$. Зовні трубний пучок омивається гарячим повітрям $t_{\text{п}} = 150 \text{ }^\circ\text{С}$, швидкість потоку повітря, що набігає на пучок труб, $w_0 = 7 \text{ м/с}$.

Коментар до задачі. Для розрахунку середнього коефіцієнту тепловіддачі використайте (6.3), враховуючи, що для повітря $(Pr_p/Pr_{ct})^{0,25}=1$. В (6.3) критерій Рейнольдса треба розрахувати по швидкості повітря в найвужчому перерізу пучку, тобто $w = w_0 \cdot (S_1 - d_2) / S_1$. При визначенні коефіцієнту теплопередачі по (2.20) знехтувати термічним опором стінки труби.

7. ТЕПЛОВІДДАЧА ПРИ ВІЛЬНОМУ РУСІ РІДИНИ

Вільний рух рідини виникає при зміні в об'ємі масових сил (тяжіння, відцентровій, електромагнітній і т.д.). Найчастіше зустрічається і якнайкраще вивчений вільний рух, викликаний гравітаційними силами, який називають природною конвекцією. За наявності теплообміну і, як наслідок, різниці температур і, відповідно, різниці густини рідини, виникає підйомна (опускна) сила.

7.1. Тепловіддача при вільному русі у великому об'ємі

Цей вид тепловіддачі виникає тоді, коли наявність сторонніх нагрітих тіл не має впливу на теплообмін даного тіла.

Припустимо, що вертикальна стінка з постійною температурою поверхні ($t_{ct} = \text{const}$) знаходиться в рідині з температурою $t_p < t_{ct}$ (рис.7.1). У поверхні стінки виникає підйомна сила, що викликається різницею густини рідини у поверхні і в об'ємі.

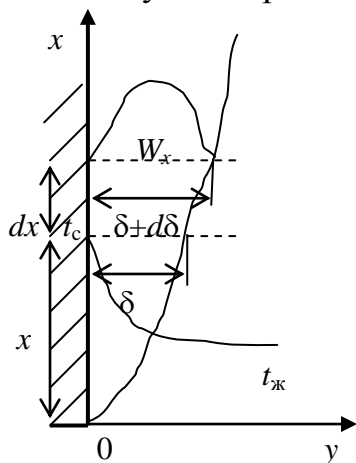


Рисунок 7.1 – Природна конвекція біля вертикальної стінки

Розташуємо початок координат у нижньої кромки стінки, ось x направимо уздовж поверхні, ось y – нормально до поверхні.

Для спрощення рішення задачі прийемо наступні припущення:

1. Сили інерції в рухомій рідині нехтовно малі.
2. Конвективне перенесення теплоти уздовж стінки не враховується (як і теплопровідність).
3. Градієнт тиску відсутній.
4. Фізичні параметри рідини постійні, за винятком густини, яка лінійно

залежить від температури.

5. Рух рідини вважається ламінарним.

З рішення рівняння енергії виходить, що температура в рухомому шарі рідини завтовшки δ на координаті x змінюється за квадратичною залежністю у вигляді:

$$\vartheta = \vartheta_0(1 - y/\delta)^2, \quad (7.1)$$

де $\vartheta = t - t_p$, а $\vartheta_0 = t_{ct} - t_p$. З умов задачі витікає, що $\vartheta_0 = \text{const}$.

Визначимо з (7.1) похідну при $y = 0$ і, використовуючи рівняння тепловіддачі, отримуємо:

$$\alpha = 2\lambda/\delta, \quad (7.2)$$

де δ – товщина прикордонного шару на координаті x . Товщина прикордонного шару пов'язана зі швидкістю руху рідини. Рівняння руху за умов прийнятих вище припущень буде мати вид:

$$\mu \frac{d^2 w_x}{dy^2} = -\rho g \beta \vartheta. \quad (7.3)$$

Використавши (7.1), отримуємо:

$$\frac{d^2 w_x}{dy^2} = -\frac{\rho g \beta \vartheta_0}{\mu} \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2. \quad (7.4)$$

Позначивши коефіцієнт, що стоїть перед дужкою в правій частині (7.4) як B , і враховуючи припущення 4, проінтегруємо двічі (7.4). Отримуємо:

$$w_x = B \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3\delta} + \frac{y^4}{12\delta^2} \right) + C_1 y + C_2. \quad (7.5)$$

Граничні умови рівняння (7.3) представимо у вигляді: при $y = 0$ $w_x = 0$; при $y = \delta$ $w_x = 0$. Тоді $C_2 \equiv 0$, $C_1 = -B \cdot \delta/4$. Розподіл швидкості

$$w_x = B \left(-\frac{\delta y}{4} + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3\delta} + \frac{y^4}{12\delta^2} \right). \quad (7.6)$$

Розподіл швидкості по (7.6) декілька приблизний через неточності завдання умови при $y = \delta$. Насправді наявність сил тертя на зовнішній межі прикордонного шару приводить до залучення до руху деякого шару ізотермічної рідини. Проте ця помилка незначна. Прирівнюючи нулю першу похідну (7.6) по y , отримаємо, що максимум швидкості в прикордонному шарі має місце на координаті $y = 0,38 \cdot \delta$. Середню швидкість в прикордонному шарі знайдемо за теоремою про середнє інтегрального обчислення (7.6). Маємо:

$$\bar{w} = \frac{1}{\delta_0} \int_0^{\delta} w_x dy = \frac{\rho g \beta \vartheta_0 \delta^2}{40\mu}. \quad (7.7)$$

Аналогічним інтегруванням (7.1) знайдемо середню надлишкову температуру прикордонного шару рідини

$$\bar{\vartheta} = \frac{1}{\delta_0} \int_0^{\delta} \vartheta dy = \frac{\vartheta_0}{3}. \quad (7.8)$$

Виділимо елемент поверхні стінки dx на координаті x від нижньої кромки стінки і розглянемо баланс теплоти рідини в об'ємі елемента dx . На координаті x за рівнянням безперервності витрата рідини через прикордонний шар (при одиниці довжини по координаті z)

$$G = \rho \bar{w} \delta, \quad (a)$$

а його приріст на відстані dx , враховуючи (7.7), буде

$$dG = \frac{3 \cdot \rho^2 g \beta \vartheta_0}{40 \cdot \mu} \delta^2 d\delta. \quad (7.9)$$

На відстані dx зміна витрати пов'язана із залученням до руху рідини при температурі t_p . Вважатимемо, що в прикордонному шарі ця рідина нагрівається до середньої температури прикордонного шару, а на її нагрівання витрачається тепловий потік, що передається від стінки в рідину. Тоді баланс теплоти елемента рідини прийме вигляд:

$$dQ = c_p \bar{\vartheta} dG = \alpha \vartheta_0 dx = 2\lambda \vartheta_0 dx / \delta. \quad (7.10)$$

Визначимо з (7.10) dG і прирівняємо отриманий вираз (7.9). Отримаємо диференціальне рівняння для визначення товщини прикордонного шару і його зміни по координаті x .

$$\frac{\rho^2 \beta g c_p \vartheta_0}{80 \mu \lambda} \delta^3 d\delta = dx. \quad (7.11)$$

Інтегруючи (7.11) і використавши очевидну умову (при $x = 0$ $\delta = 0$), отримаємо змінення товщини прикордонного шару за висотою стінки

$$\delta = 4,23 \sqrt[4]{\frac{\mu \lambda x}{c_p \beta g \vartheta_0 \rho^2}}. \quad (7.12)$$

З отриманого виразу маємо, що товщина прикордонного шару у поверхні стінки при вільному русі рідини змінюється за висотою пропорційно кореню четвертого ступеня відстані від нижньої кромки. Використовуючи (7.2) і (7.12), отримаємо рівняння для розрахунку локального значення коефіцієнта тепловіддачі у вигляді:

$$\alpha = 0,473 \sqrt[4]{\frac{c_p \beta g \vartheta_0 \rho^2 \lambda^3}{\mu x}}. \quad (7.13)$$

Приводячи (7.13) до безрозмірного вигляду, отримуємо:

$$\text{Nu}_{p,x} = 0,473 \text{Ra}_{p,x}^{0,25}. \quad (7.14)$$

Рівняння (7.14) не враховує зміни теплофізичних характеристик рідині при неізотермічному прикордонному шарі. Експериментальні дані по теплообміну вертикальних поверхонь при вільному русі в необмеженому об'ємі і ламінарному прикордонному шарі, зберігаючи загальну структуру (7.14), приводять до декілька інших коефіцієнтів. Тому загальне рівняння для локальних коефіцієнтів тепловіддачі має вигляд:

$$\text{Nu}_{p,x} = C \text{Ra}_{p,x}^{0,25} \varepsilon_T, \quad (7.15)$$

де при $q = \text{const}$ коефіцієнт у рівнянні $C = 0,6$; при $t_c = \text{const}$ $C = 0,55$. Поправка на неізотермічність прикордонного шару для крапельних рідин $\varepsilon_T = (\text{Pr}_p / \text{Pr}_{ct})^{0,25}$, для газів $\varepsilon_T = 1$.

Усреднюючи коефіцієнти тепловіддачі по (4.11) для стінки висотою h , маємо: при $q = \text{const}$ $\bar{\alpha} = 5\alpha_h/4$; при $t_{ct} = \text{const}$ $\bar{\alpha} = 4\alpha_h/3$, де α_h – коефіцієнт тепловіддачі на верхній кромці стінки.

Для визначення середніх за висотою стінки коефіцієнтів тепловіддачі, на підставі наведених вище викладок, можна рекомендувати рівняння

$$\text{Nu}_{p,h} = 0,74 \text{Ra}_{p,h}^{0,25} \varepsilon_T. \quad (7.16)$$

Розглядаючи (7.14) і (7.15), отримуємо, що локальна інтенсивність теплообміну зменшується із збільшенням відстані від нижньої кромки стінки як $\alpha = C \cdot x^{-0,25}$. Отже, найбільша інтенсивність тепловіддачі спостерігається у нижньої кромки стінки, де товщина прикордонного шару найменша. Проте теплообмін в цій зоні підкоряється декілька іншим закономірностям, що буде розглянуто нижче.

Розвинена ламінарна течія в прикордонному шарі біля вертикальної поверхні має місце при $10^3 \leq \text{Ra} \leq 10^9$. При $\text{Ra} \geq 6 \cdot 10^{10}$ у поверхні існує розвинена турбулентна течія. Зона $10^9 \leq \text{Ra} \leq 6 \cdot 10^{10}$ відповідає перехідному режиму течії в прикордонному шарі, при якому розрахунок теплообміну ускладнений. Коефіцієнт тепловіддачі в перехідній області може бути отриманий, як середнє арифметичне від мінімального значення коефіцієнта тепловіддачі при ламінарній течії і значення коефіцієнта тепловіддачі при турбулентній течії.

Експериментальні дослідження тепловіддачі при турбулентній течії в прикордонному шарі, проведені І.М. Пчелкиним, дозволили рекомендувати наступне рівняння для розрахунку локальних значень коефіцієнта тепловіддачі:

$$\text{Nu}_{p,x} = 0,15 \text{Ra}_{p,x}^{1/3} \varepsilon_T. \quad (7.17)$$

З рівняння виходить, що локальна інтенсивність теплообміну при турбулентній течії в прикордонному шарі не залежить від координати, отже, середня інтенсивність тепловіддачі співпадає з локальною інтенсивністю.

7.2. Тепловіддача горизонтального циліндра при вільному русі

Теоретичне рішення подібної задачі зустрічає непереборні труднощі в зв'язку з тим, що при вільному русі рідини у поверхні циліндра у верхній його частині відбувається відрив прикордонного шару з утворенням вихрової зони. При цьому навіть при високих температурних напорах на нижній частині циліндру залишається ламінарна течія в прикордонному шарі. Дослідження І.М. Михеевої та інших дозволяють рекомендувати для розрахунку середньої інтенсивності теплообміну горизонтального циліндра наступне рівняння

$$\text{Nu}_{p,d} = 0,5 \text{Ra}_{p,d}^{0,25} \varepsilon_T. \quad (7.18)$$

Локальна інтенсивність теплообміну за периметром циліндра досліджена недостатньо, тому відсутні достовірні дані по розподілу коефіцієнтів тепловіддачі по бічній поверхні циліндру і їх залежності від визначальних параметрів.

7.3. Тепловіддача при малих значеннях критерію Релея

Дослідження Л.С. Ейгенсона та інших показали, що для тонкого горизонтального дроту ($d < 1$ мм) при малих температурних напорах і високій в'язкості рідини умови теплообміну дуже своєрідні. Оскільки поверхня дроту мала, то малий і тепловий потік, що передається в рідину. При цьому у поверхні дроту утворюється нерухомий шар нагрітої рідини, а перенесення теплоти здійснюється тільки теплопровідністю. Подібний режим теплообміну названо **плівковим** і виявляється він при $Ra_{p,d} < 10^{-3}$. Для цього режиму критерій Нуссельта виявляється постійним

$$Nu_{p,d} = 0,5. \quad (7.19)$$

Плівковий режим теплообміну дуже нестійкий, і при $Ra_{p,d} > 10^{-3}$ можуть виникати конвективні струми, що призводять до руйнування плівки і, відповідно, до збільшення тепловіддачі. Область значень критерію Релея $10^{-3} < Ra_{p,d} < 10^3$ називають перехідною зоною від плівкового режиму до розвиненої ламінарної течії в прикордонному шарі. Дослідження цієї області, проведені І.М. Михеевою, дозволяють рекомендувати для розрахунку середніх коефіцієнтів тепловіддачі рівняння

$$Nu_m = 1,18 Ra_m^{1/8}. \quad (7.20)$$

Як визначальний розмір в (7.20) для вертикальної стінки використовується її висота, а для горизонтального циліндру – діаметр.

7.4. Тепловіддача при вільному русі в обмеженому просторі

Якщо об'єм рідини невеликий і в ньому розташовуються поверхні з різними температурами, відмінними від температури рідини, то течії, що виникають у поверхонь, можуть тим або іншим чином взаємодіяти між собою. Розділити ці течії досить важко і часто взагалі неможливо. Так, якщо розглядати горизонтальні щілини, утворені двома плоскими поверхнями (рис.7.2), то при вищій температурі верхньої поверхні рух рідини в щілині відсутній, і перенесення теплоти відбувається тільки за рахунок теплопровідності.

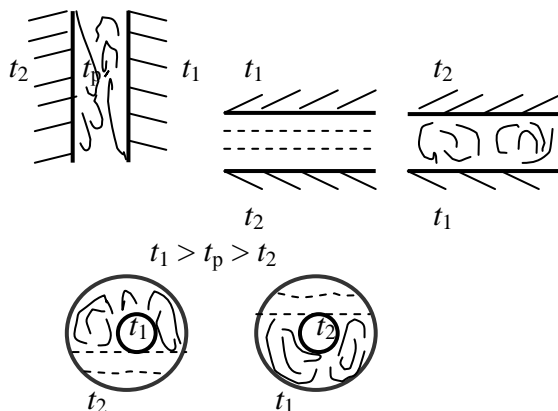


Рисунок 7.2 – Схема переносу теплоти в щілинах і зазорах

Проте, при вищій температурі нижньої поверхні, в щілині виникають конвективні струми, обумовлені нагрівом рідини у нижньої поверхні і охолодженням у верхньої. Цей факт, природно, збільшує перенесення теплоти між поверхнями. Таким же чином відбувається конвекція в зазорі між двома горизонтальними циліндрами і між вертикальними площинами.

Експериментальні дослідження перенесення теплоти в щілинах і зазорах при природній конвекції, проведені вітчизняними і закордонними авторами, показали, що щільність теплового потоку в цьому випадку з достатньою точністю може бути визначена за формулами для теплопровідності тіл відповідної конфігурації, якщо використовувати еквівалентний коефіцієнт теплопровідності середовища, що знаходиться між поверхнями

$$\lambda_{\text{ек}} = \lambda \cdot \varepsilon_{\text{к}}, \quad (7.21)$$

де $\varepsilon_{\text{к}} \geq 1$ – коефіцієнт, що враховує додаткове перенесення теплоти за рахунок природної конвекції.

Експериментальні дані по теплопереносу в щілинах і зазорах показують, що, якщо як визначальну температуру прийняти $t_m = 0,5(t_1 + t_2)$, то при $\text{Ra}_{m,\delta} < 10^3$ інтенсивність конвективних потоків мала, і перенесення теплоти здійснюється тільки теплопровідністю, тобто $\varepsilon_{\text{к}} = 1$. Дані Л.С. Ейгенсона по впливу природної конвекції на теплоперенос в щілинах і зазорах узагальнені наступними залежностями

$$10^3 \leq \text{Ra}_{m,\delta} \leq 10^6 \quad \varepsilon_{\text{к}} = 0,105 \text{Ra}_{m,\delta}^{0,3}, \quad (7.22)$$

$$10^6 \leq \text{Ra}_{m,\delta} \leq 10^{10} \quad \varepsilon_{\text{к}} = 0,4 \text{Ra}_{m,\delta}^{0,2}. \quad (7.23)$$

Проте, за даними М.О. Михеева, наближення (7.21, 7.22) дозволяє для всієї області аргументу $\text{Ra}_{m,\delta} > 10^3$ рекомендувати єдину залежність

$$\varepsilon_{\text{к}} = 0,18 \text{Ra}_{m,\delta}^{0,25}. \quad (7.24)$$

Останнім часом проведені дослідження і запропоновані формули і методики розрахунку теплообміну при вільному русі в обмеженому об'ємі для рядів труб, в зазорах тепловиділяючих елементів (ТВЕЛ) ядерних реакторів і в інших практично важливих випадках, але розгляд даних питань виходить за рамки нашого курсу.

Питання для самоперевірки

1. Які умови виникнення природної конвекції?
2. Як можна класифікувати режими теплообміну при природній конвекції біля вертикальної поверхні? Який при цьому характер течії в прикордонному шарі?
3. Як змінюється товщина прикордонного шару за висотою плоскої стінки при природній конвекції і ламінарній течії в прикордонному шарі?
4. Який характер зміни коефіцієнта тепловіддачі за висотою плоскої стінки при природній конвекції біля її поверхні?
5. У чому особливості розрахунку теплообміну при природній конвекції у випадку малих значень критерію Релея?
6. Як розрахувати перенесення теплоти в зазорах, заповнених нерухомим середовищем?

Задачі до розділу 7

1. По дроту ($\rho = 0,05 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$) діаметром 8 мм тече струм 90 А. Знайти температуру дроту, якщо він знаходиться в спокійному повітрі $t_{\text{пов}} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Як зміниться температура дроту, якщо його покрити ізоляцією з $\lambda_{\text{із}} = 0,2 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ товщиною 10 мм. Вважати, що коефіцієнт тепловіддачі

залишитися без зміни. Як в дійсності зміниться коефіцієнт тепловіддачі?

Коментар до задачі. Температура дроту знаходиться з теплового балансу $q_l = I^2 \rho / s = \alpha \pi d (t_d - t_{\text{пов}})$, де s – переріз дроту в мм². Коефіцієнт тепловіддачі при природній конвекції залежить від різниці температур дріт-повітря, яка невідома. Тому слід задатися коефіцієнтом тепловіддачі у діапазоні 8 – 16 Вт/(м²К). З теплового балансу знайти температуру поверхні дроту і по (7.20) визначити коефіцієнт тепловіддачі. Врахувати, що в (7.20) визначальною температурою прийнята середня температура між поверхнею і повітрям. При відмінності між знайденим коефіцієнтом тепловіддачі і прийнятим більше 10%, слід зробити розрахунок другого наближення. Для розрахунку дійсного коефіцієнта тепловіддачі з поверхні ізоляції використовуйте приведені вище рекомендації, але врахуйте, що слід використовувати (7.18), а закінчення розрахунку оцінити помилкою в потоках $q_l = I^2 \rho / s = \alpha \pi d_2 (t_{\text{п.із}} - t_{\text{пов}})$. Температуру дроту знайдіть з $q_l = I^2 \rho / s = (t_d - t_{\text{пов}}) / [\ln(d_2 / d) / (2 \pi \lambda_{\text{із}}) + 1 / (\alpha \pi d_2)]$.

2. Вертикальна стінка висотою 0,5 м має температуру 120 °С і вкрита шаром ізоляції $\lambda_{\text{із}} = 0,2$ Вт/(м·К) завтовшки 200 мм. Визначити середні витрати теплоти з одиниці поверхні стінки, якщо вона знаходиться в спокійному повітрі при $t_{\text{п}} = 30$ °С.

Коментар до задачі. Для розрахунку коефіцієнта тепловіддачі з поверхні ізоляції в повітря необхідно мати температуру поверхні ізоляції. Прийнемо 3-4 значення $t_{\text{п.із}}$ в межах 40-80°С, по (7.16) знайдемо коефіцієнт тепловіддачі і щільність теплового потоку з поверхні ізоляції $q' = \alpha (t_{\text{п.із}} - t_{\text{пов}})$. Побудуємо графік $q' = f(t_{\text{п.із}})$. Щільність теплового потоку з поверхні ізоляції в повітря повинна бути рівна щільності теплового потоку теплопровідністю через ізоляцію, який знаходиться як $q'' = (t_{\text{ст}} - t_{\text{п.із}}) / (\delta / \lambda)$. Побудуємо $q'' = f(t_{\text{п.із}})$. Точка перетину графіків дасть шукану щільність теплового потоку і температуру поверхні ізоляції.

3. По горизонтальній трубі з діаметрами 75/70 мм тече вода з середньою температурою $t_{\text{в}} = 150$ °С та швидкістю 0,4 м/с. Зовні труба ізолювана азбоцементом $\lambda_{\text{із}} = 0,3$ Вт/(м·К), товща ізоляції 200 мм. Знайти витрати теплоти з погонного метра труби, якщо вона знаходиться в спокійному повітрі $t_{\text{п}} = 20$ °С. Термічним опором стінки труби зневажати.

Коментар до задачі. Див. коментар до задачі 2. Врахуйте, що погонна щільність теплового потоку від води до поверхні ізоляції повинна бути записана як $q_l' = (t_{\text{в}} - t_{\text{п.із}}) / [1 / (\alpha_1 \pi d_1) + \ln(d_3 / d_2) / (2 \pi \lambda_{\text{із}})]$, а з поверхні ізоляції в повітря $q_l'' = \alpha_2 \pi d_3 (t_{\text{п.із}} - t_{\text{п}})$. Для визначення коефіцієнта тепловіддачі слід використовувати (7.18).

4. Сталевий стрижень $\lambda = 30$ Вт/(м·К) діаметром 20 мм, довжиною 120 мм має температуру в основі 120°С і розташований горизонтально в спокійному повітрі $t_{\text{п}} = 20$ °С. Знайти середній тепловий потік, розсіяний стрижнем в повітря.

Коментар до задачі. Для визначення теплового потоку слід знайти коефіцієнт тепловіддачі з поверхні стрижня в повітря по середній температурі стрижня, яка невідома. Використовуйте рекомендації до задачі 1, врахуйте, що для

визначення коефіцієнта тепловіддачі слід використовувати (7.18). По прийнятому коефіцієнту тепловіддачі знаходиться характеристика стрижня $m = \sqrt{\alpha u / (\lambda f)}$ та середня температура стрижня $\bar{\vartheta} = \vartheta_0 \text{th}(mh) / (mh)$. По середній температурі стрижня і (7.18) знаходиться коефіцієнт тепловіддачі. При відмінності прийнятого і знайденого коефіцієнтів тепловіддачі більше 10 % слід провести ще одне наближення.

5. В горизонтальній трубі з діаметрами 65/60 мм тече повітря з середньою температурою 150 °С, швидкість повітря 15 м/с. Визначити необхідну товщу ізоляції ($\lambda_{\text{із}} = 0,2 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$), щоб теплові витрати не перевершували 100 Вт/м при температурі поверхні ізоляції 50 °С. Яка при цьому температура навколишнього спокійного повітря?

Коментар до задачі. Визначити зовнішній діаметр ізоляції можна з $q_l = (t_{\text{п}} - t_{\text{п.із}}) / [1/(\alpha_1 \pi d_1) + \ln(d_3 / d_2) / (2\pi \lambda_{\text{із}})]$, де α_1 – коефіцієнт тепловіддачі від повітря до внутрішньої поверхні труби, який визначається по (5.11). Для того, щоб знайти температуру зовнішнього повітря, слід задатися коефіцієнтом тепловіддачі з поверхні ізоляції в повітря (4-8 Вт/(м²К)), знайти у першому наближенні температуру зовнішнього повітря з $q_l = \alpha_2 \pi d_3 (t_{\text{п.із}} - t_{\text{з.п}})$. По знайденій температурі повітря з (7.18) розрахувати коефіцієнт тепловіддачі та порівняти з прийнятим. При розбіжності в коефіцієнтах тепловіддачі більше 10% зробити ще одне наближення.

8. ОКРЕМІ ЗАДАЧІ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМІНУ

8.1. Тепловіддача рідких металів

Розплавлені метали застосовують як теплоносії в тих випадках, коли потрібне інтенсивне тепловідведення при малих температурних напорах або необхідно при низькому тиску мати високу температуру теплоносія.

Вода, забезпечуючи високу інтенсивність тепловіддачі, має низьку критичну температуру і вимагає високого тиску. Газ може бути нагрітий до високої температури при малому тиску, але інтенсивність теплообміну у газового середовища мала. Рідкі метали мають високу критичну температуру, що дозволяє отримувати високі температури при низькому тиску, і забезпечують високі коефіцієнти тепловіддачі. Як рідкометалеві теплоносії застосовуються лужні (Na, K), важкі (Hg, Pb) метали і їх сплави.

Основна відмінність рідко металевих теплоносіїв полягає в тому, що вони мають високий коефіцієнт теплопровідності (40-90 Вт/(м К)) при високій густині і порівняно низькій теплоємності. Ця обставина призводить до дуже низьких значення критерію Прандтля ($Pr = 0,005 - 0,05$), тобто до істотного перевищення товщини теплового прикордонного шару в порівнянні з гідродинамічним прикордонним шаром. Якщо в краплинних рідинах при турбулентній течії основний термічний опір припадає на ламінарний підшарок, а в турбулентному прикордонному шарі температура вирівнюється за рахунок макроперенесення теплоти, то в рідких металах перенесення теплоти теплопровідністю може конкурувати з

турбулентним перенесенням теплоти і призводити до великих градієнтів температури в турбулентному прикордонному шарі.

Чисельне рішення рівняння Лайона за умови рівності турбулентного перенесення теплоти і маси дозволило отримати рівняння для розрахунку теплообміну при стабілізованій течії рідкометалевих теплоносіїв

$$\text{Nu}_d = C + 0,025 \text{Pe}_d^{0,8}, \quad (8.1)$$

де коефіцієнт C залежить від умов на стінці. При $t_c = \text{const}$ $C = 5$; при $q_c = \text{const}$ $C = 7$.

Двочленність рівняння (8.1) пояснюється істотним впливом радіальної теплопровідності. Тоді, навіть при малому значенні Pe , спостерігається достатньо висока інтенсивність теплообміну. Рівняння (8.1) отримано аналітично і не враховує багатьох реальних чинників, що визначають дійсний процес тепловіддачі рідких металів, зокрема, утворення оксидної плівки на поверхні сталевих труб при взаємодії з рідким металом. Експериментальні дослідження теплообміну рідких металів, проведені М.О. Михєєвим, О.С. Федюкиним та ін., узагальнені наступною залежністю для середніх коефіцієнтів тепловіддачі при турбулентній течії

$$\text{Nu}_d = (3,3 + 0,014 \text{Pe}_d^{0,8}) \varepsilon_l, \quad (8.2)$$

де поправка на вплив відрізка стабілізації потоку при $l/d < 20$ $\varepsilon_l = 1,72 (d/l)^{0,18}$.

Тепловіддача при поперечному обтіканні пучків труб рідкометалевими теплоносіями вивчена порівняно мало. За даними В.М. Борішанського та ін. середній коефіцієнт тепловіддачі для глибинних рядів пучку описується рівнянням

$$\text{Nu}_{p,d} = \text{Pe}_{p,d}^{0,5}. \quad (8.3)$$

Особливий інтерес для практики представляє тепловіддача рідких металів при природній конвекції. Дослідження, проведені в МЕІ, показали, що в цьому випадку інтенсивність теплообміну істотно складніше залежить від критерію Прандтля, ніж для неметалевих теплоносіїв. Узагальнення експериментальних даних привело до рівняння

$$\text{Nu}_m = C \text{Gr}_m^n \text{Pr}_m^k, \quad (8.4)$$

де для ламінарної течії в прикордонному шарі за умов $10^2 < \text{Gr}_m < 10^9$ $C = 0,52$, $n = 0,25$; при турбулентному прикордонному шарі $\text{Gr}_m > 10^9$ $C = 0,105$, $n = 1/3$. Показник ступеня при критерії Прандтля визначається співвідношенням

$$k = 0,3 + 0,02 / \text{Pr}_m^{1/3}. \quad (8.5)$$

Данні Сперроу та ін. по теплообміну рідких металів за умов природної конвекції узагальнені декількома іншими рівняннями:

$$\begin{aligned} \text{для ламінарної течії} \quad \text{Nu}_p &= 0,775 (\text{Pr}^2 \text{Gr})_p^{0,25}, \\ \text{для турбулентної течії} \quad \text{Nu}_p &= 0,13 (\text{Pr}^2 \text{Gr})_p^{1/3}. \end{aligned} \quad (8.6)$$

8.2. Теплообмін при русі газу з високою швидкістю

При русі газу з високими швидкостями процес перенесення теплоти пов'язаний з газодинамічними процесами в прикордонному шарі. Згідно першому закону термодинаміки для потоку газу

$$(i_1 + w_1^2/2) - (i_2 + w_2^2/2) = Q/G, \quad (8.7)$$

де Q – тепловий потік, переданий між перерізами 1 і 2; G – витрата газу. При адіабатній течії $Q = 0$, тому збільшення швидкості супроводжується зниженням ентальпії та навпаки. Ентальпією адіабатного гальмування зветься

$$i_T = i_1 + w_1^2/2, \quad (8.8)$$

а для газів температура адіабатного гальмування буде

$$T_T = T + w^2/(2c_p). \quad (8.9)$$

З термодинаміки відомо, що швидкість звуку $c_3 = \sqrt{kRT}$. Тоді (8.9) можна представити у вигляді

$$T_T = T \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right), \quad (8.10)$$

де число (критерій) Маха $M = w/c_3$. З останнього рівняння виходить, що відмінність термодинамічної температури (T) від температури адіабатного гальмування (T_T) стає істотною при $M > 0,5$. Якщо розрахувати цю температуру, маємо при $k = 1,4$ і $M = 1$ $T_T = 1,2T$, а при $M = 3$ $T_T = 2,8T$.

У поверхні тіла внаслідок дії сил тертя відбувається гальмування потоку, а на самій поверхні $w = 0$ (потік повністю загальмований). При цьому згідно (8.10) температура потоку підвищується до температури адіабатного гальмування. В потоці біля стінки як би діють внутрішні джерела теплоти, потужність яких пропорційна квадрату швидкості потоку. У реальних умовах процес перетворення енергії при гальмуванні у стінки супроводжується обміном теплотою (і роботою) суміжних шарів газу. Це призводить до відмінності реальної температури газу у стінки від адіабатної. Температуру загальмованого реального потоку у стінки називають власною температурою і визначають із співвідношення

$$T_{вл} = T \left(1 + r \frac{k-1}{2} M^2 \right), \quad (8.11)$$

де r – коефіцієнт відновлення. Якщо виділення теплоти за рахунок дисипації механічної енергії переважає над відведенням теплоти, то $r > 1$. При $r < 1$ переважають процеси відведення теплоти. У разі, коли $T_{ст} = T_{вл}$, тепловий потік у стінки дорівнює нулю, і теплообмін відбувається тільки усередині газу (рис.8.1).

При цьому дотична до розподілу температури нормальна до поверхні тіла. Якщо $T_{ст} > T_{вл}$, $(\partial T/\partial n)_{n=0} < 0$ і $q > 0$, тобто потік направлений від стінки у газ. При $T_{ст} < T_{вл}$ тепловий потік направлений від газу до стінки навіть у випадку $T < T_{ст}$. Тобто газ з термодинамічною температурою, меншою за температуру стінки (газ холодніше стінки), нагріває стінку.

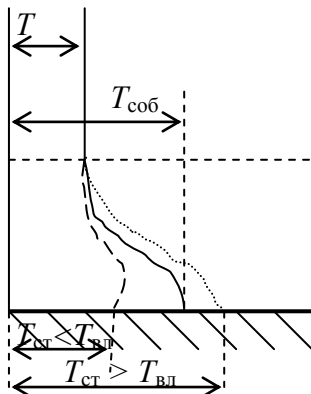


Рисунок 8.1 – Розподілення температури в прикордонному шарі при загальмуванні потоку газу

Таким чином, при $T > T_{ст}$ тепловий потік направлений завжди у бік стінки (при будь-яких швидкостях потоку). Однак, при $T \leq T_{ст}$ тіло буде отримувати теплоту від газу в результаті ефекту аеродинамічного нагріву прикордонного шару при $T_{ст} < T_{вп}$. Тільки при $T_{ст} > T_{вп}$ тепловий потік направлений від стінки до газу. Тоді, звісно, закон Ньютона слід записати у вигляді

$$q = \alpha (t_{вл} - t_{ст}). \quad (8.12)$$

Експериментальні дослідження теплообміну при високих швидкостях повітря показали, що для розрахунку коефіцієнтів тепловіддачі можна використовувати ті ж критеріальні рівняння, що і для звичайних швидкостей, але з

використанням додаткового співмножника, що враховує ефект гальмування потоку

$$\varepsilon_r = (T/T_r)^{0,4}. \quad (8.13)$$

Питання для самоперевірки

1. У чому полягає особливість теплообміну рідких металів у порівнянні з іншими середовищами?
2. Що таке «температура гальмування»? Чим вона відрізняється від «власної температури»?

9. ТЕПЛООБМІН ПРИ ФАЗОВИХ ПЕРЕТВОРЮВАННЯХ

Фазові перетворення (конденсація або кипіння) можуть відбуватися як в середовищі однієї речовини (чистої речовини), так і в багатокомпонентному середовищі. В останньому випадку процес теплообміну ускладнюється процесом масопереносу і супроводжуваними останній процесами дифузії. У цьому розділі розглядаються фазові перетворення чистої речовини.

9.1. Теплообмін при конденсації чистої пари

При конденсації пари відбувається виділення теплоти фазового переходу, тому даний процес нерозривно пов'язаний з теплообміном. Конденсація може відбуватися як у об'ємі пари, так і на охолоджуваній поверхні. У першому випадку процес відбувається при значному переохолодженні пари (візуалізація треків елементарних частинок в камері Вільсона), другий випадок, який найчастіше зустрічається в промислових умовах, і розглядається в цьому розділі.

Конденсація насиченої або перегрітої пари на поверхні відбувається тільки у тому випадку, коли температура поверхні нижча за температуру

насичення при даному тиску пари. При цьому на поверхні може утворитися плівка конденсату (плівковий режим) або поверхня покривається окремими краплями конденсату (краплинний режим). У першому випадку рідина змочує поверхню конденсації, а в другому – ні. Ефект змочування пов'язаний з дією сил поверхневого натягнення, які спостерігаються в поверхневому (капілярному) шарі на відстані дії міжмолекулярних сил і намагаються скоротити поверхню розділу фаз. Сила, віднесена до одиниці довжини якого-небудь контуру на межі розділу фаз, направлена по дотичній до міжфазної поверхні і нормально до контуру, називається коефіцієнтом поверхневого натягнення. Наявність поверхневого натягнення призводить до викривлення поверхні рідини при зіткненні трьох тіл: рідини, пари і стінки. Умови рівноваги у точці А (рис. 9.1) твердої поверхні на межі розділу трьох середовищ визначається з рівняння

$$\sigma(c, p) = \sigma(p, c) + \sigma(p, p) \cdot \cos(\varphi), \quad (9.1)$$

або

$$\cos(\varphi) = \frac{\sigma(c, p) - \sigma(p, c)}{\sigma(p, p)}, \quad (9.2)$$

де φ – крайовий кут змочування. Якщо $\varphi < 90^\circ$ [$\sigma(c, p) > \sigma(p, c)$], то рідина змочує стінку. За умови, коли $\sigma(c, p) > [\sigma(p, c) + \sigma(c, p)]$, рідина абсолютно змочує стінку ($\varphi = 0$), розтікаючись по ній.

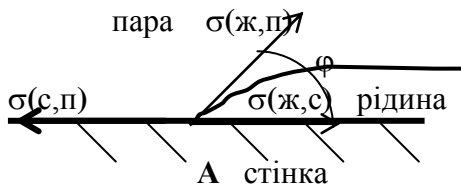


Рисунок 9.1 – Сили поверхневого натягнення на межі трьох фаз

Парове середовище зі стінкою не контактує. Якщо $\sigma(p, p) < |\sigma(c, p) - \sigma(p, c)|$ і $\sigma(p, c) > \sigma(c, p)$, то має місце випадок поверхні, що абсолютно не змочується (гідрофобна – для води) і $\varphi = 180^\circ$. При цьому рідина не контактує з поверхнею (між рідиною і поверхнею є мікронний шар пари).

пари).

Реально існують частково змочувані ($0 < \varphi < 90^\circ$) і частково не змочувані ($90^\circ < \varphi < 180^\circ$) поверхні.

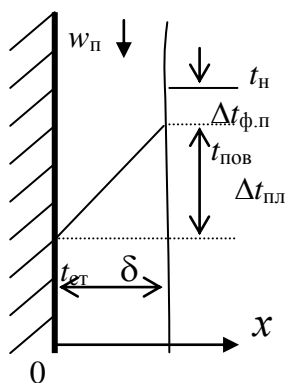


Рисунок 9.2 – Розподіл температури по плівці конденсату

При плівковій конденсації пари на змочуваній поверхні загальний термічний опір перенесенню теплоти від пари t_n до стінки t_c складається з (рис.9.2) термічного опору плівки конденсату $\Delta t_{пл}$ і термічного опору фазового переходу $\Delta t_{ф.п.}$.

Останнє пов'язане з тим, що поблизу поверхні конденсату (на відстані порядку довжини вільного пробігу молекули) існує два потоки молекул: один направлений до поверхні конденсату, і середня швидкість його молекул відповідає t_n , інший направлений у бік пари, і середня швидкість

молекул цього потоку відповідає $t_{\text{пов}}$. Очевидно, що ця різниця температури тим більше, чим більше довжина вільного пробігу молекул, тобто чим менше тиск пари. У практичних розрахунках при $P_{\text{н}} \geq 0,01$ бар опором фазового переходу можна нехтувати, і вважати, що температура поверхні плівки конденсату дорівнює температурі насичення.

Термічний опір плівки конденсату залежить від характеру її течії. Упоперек плівки, що тече ламінарно, перенесення теплоти здійснюється тільки теплопровідністю, тоді як при турбулентній течії плівки слід враховувати і турбулентне перенесення теплоти. Якщо записати критерій Рейнольдса для плівки конденсату, з урахуванням її еквівалентного діаметру, то $d_{\text{ек}} = 4f/u = 4L\delta/L = 4\delta$, $Re = 4\bar{w}\delta/\nu$, і при $Re < Re_{\text{кр}}$ ($Re_{\text{кр}}=1600$) має місце ламінарна течія плівки конденсату.

9.1.1. Теплообмін при конденсації насиченої пари на вертикальній поверхні

Розглянемо вертикальну, плоску стінку висотою h , що має постійну температуру $t_{\text{ст}} < t_{\text{н}}$ (рис.9.3). Розташуємо ось x уздовж поверхні, ось y – нормально до поверхні. Початок координат помістимо на верхньому краю стінки. Вважатимемо пару сухою насиченою.

Приймемо допущення:

- сили інерції в плівці конденсату малі, і ними можна нехтувати;
- конвективне перенесення теплоти в плівці конденсату і теплопровідність вздовж осі x не враховуються;
- тертя на межі парової і рідкої фази відсутнє;
- температура зовнішньої границі плівки конденсату рівна температурі насичення;
- фізичні параметри конденсату не залежать від температури;
- сили поверхневого натягу на зовнішній межі плівки не впливають на характер її течії;
- густина пари мала порівнюючи з густиною конденсату.

Припустимо, що на координаті x від початку стінки товщина плівки конденсату δ . Нехтуючи тепловою переохолодження конденсату, можна вважати, що відведений від пари тепловий потік

$$Q = r \cdot G, \quad (9.3)$$

де G – кількість пари, що сконденсувалася на стінці від її початку до координати x . По рівнянню безперервності $G = \rho' \bar{w} L \delta$, а поверхня переносу теплоти $F = L \cdot x$. Тоді з (9.3) отримаємо

$$\bar{w} \delta = G / (r \rho') = \alpha \Delta t x / (r \rho'),$$

і критерій Рейнольдса набуває вигляд

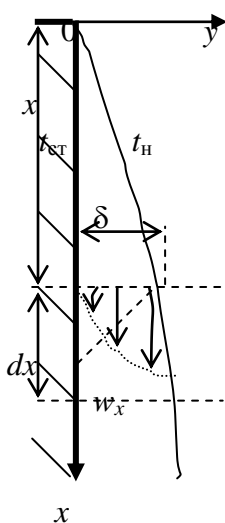


Рисунок 9.3 – Плівка конденсату на вертикальній стінці

$$\text{Re} = \frac{4 \alpha \Delta t x}{r \rho' v}. \quad (9.4)$$

Таким чином, при конденсації пари критерій Рейнольдса, крім ролі гідродинамічного критерію, грає роль визначального критерію.

Враховуючи зроблені вище припущення, рівняння енергії і руху для плівки конденсату запишуться у вигляді

$$d^2 t / dy^2 = 0, \quad (9.5)$$

$$\mu \frac{d^2 w_x}{dy^2} = -\rho' g. \quad (9.6)$$

Граничні умови для цих рівнянь при тих же припущеннях будуть:

$$\text{при } y = 0 \quad t = t_{\text{ст}}, \quad w_x = 0, \quad (9.7)$$

$$\text{при } y = \delta \quad t = t_{\text{н}}, \quad dw_x / dy = 0.$$

Інтегруючи двічі (9.5) і використавши (9.7) отримаємо:

$$-\frac{dt}{dy} = \frac{t_{\text{н}} - t_{\text{ст}}}{\delta}. \quad (9.8)$$

З рівняння тепловіддачі, використавши (9.8), отримаємо:

$$\alpha = \frac{-\lambda(dt/dy)}{t_{\text{н}} - t_{\text{ст}}} = \frac{\lambda}{\delta}. \quad (9.9)$$

Таким чином, локальний коефіцієнт тепловіддачі є величиною, зворотною термічному опору плівки конденсату.

Визначимо закон зміни товщини плівки конденсату за висотою стінки, для чого знайдемо спочатку середню швидкість течії плівки на координаті x від початку стінки. Проінтегруємо двічі (9.6) і врахуємо граничні умови (9.7). Отримаємо:

$$w_x = \frac{\rho' g}{\mu} (\delta y - y^2 / 2). \quad (9.10)$$

Середню швидкість течії плівки конденсату визначимо за теоремою про середнє

$$\bar{w} = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} w_x dy = \frac{\rho' g \delta^2}{3\mu}. \quad (9.11)$$

Кількість конденсату, що протікає через поперечний переріз плівки за одиницю часу при ширині плівки рівній одиниці, визначається з рівняння безперервності $G = \rho' \bar{w} \delta$. Через переріз, що лежить на dx нижче, протікає конденсату більше на $dG = d(\rho' \bar{w} \delta)$, що викликано конденсацією пари на поверхні dx . Вважаючи, що при конденсації відводиться тільки теплота фазового переходу, отримуємо, з урахуванням (9.9)

$$dG = \frac{dQ}{r} = \frac{q dx}{r} = \frac{\alpha(t_{\text{н}} - t_{\text{ст}}) dx}{r} = \frac{\lambda(t_{\text{н}} - t_{\text{ст}}) dx}{r \delta}. \quad (9.12)$$

Прирівнюючи отримані вирази для dG з урахуванням (9.11), провівши диференціювання, отримаємо диференціальне рівняння, що зв'язує товщину

плівки конденсату з відстанню від верхньої кромки стінки у вигляді

$$\frac{r\rho'^2 g}{\lambda\mu} \delta^3 d\delta = (t_H - t_{CT}) dx. \quad (9.13)$$

Інтегруючи (9.13) і, врахувавши, що $t_{CT} = \text{const}$, а при $x=0$ $\delta = 0$, отримуємо:

$$\delta = \sqrt[4]{\frac{4\lambda\mu(t_H - t_{CT})x}{r\rho'^2 g}}. \quad (9.14)$$

З (9.14) маємо, що товщина плівки конденсату пропорційна відстані від верхньої кромки стінки у вигляді $\delta = c \cdot x^{0,25}$. Якщо підставити (9.14) у (9.9), отримуємо:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{r\rho'^2 g \lambda^3}{4\mu(t_H - t_{CT})x}}. \quad (9.15)$$

Отриманий вираз для локальних коефіцієнтів тепловіддачі показує, що із збільшенням відстані від верхньої кромки стінки (при постійній різниці температур) інтенсивність теплообміну зменшується як $\alpha = c \cdot x^{-0,25}$.

Подібний вплив як на коефіцієнт тепловіддачі, так і на товщину плівки конденсату, надає і зміна температурного напору. Проте якщо при постійному температурному напорі щільність теплового потоку зменшується у міру збільшення координати x , то при температурному напорі, що змінюється $q = c \cdot \Delta t^{0,75}$, та, отже, при збільшенні температурного напору по координаті x , щільність теплового потоку також збільшується.

Середнє значення коефіцієнта тепловіддачі можна отримати з (9.15) по (4.11). Отже, маємо:

$$\bar{\alpha}_N = \frac{4}{3} \alpha_h = 0,943 \sqrt[4]{\frac{r\rho'^2 g \lambda^3}{\mu \Delta t h}}. \quad (9.16)$$

Це рівняння вперше було отримане Нуссельтом. Прийняті вище припущення роблять рішення Нуссельта наближеним. Більш точні рішення показують, що при великих температурних напорах і біля критичної області інтенсивність теплообміну істотно вища, ніж за рішенням Нуссельта. При конденсації пари рідких металів інтенсивність тепловіддачі істотно нижча, ніж за рішенням Нуссельта.

Вплив змінності теплофізичних характеристик конденсату по товщині плівки можна врахувати за рекомендаціями Лабунцова у вигляді

$$\varepsilon_T = \left[\left(\frac{\lambda_{CT}}{\lambda_H} \right)^3 \frac{\mu_H}{\mu_{CT}} \right]^{1/8}, \quad (9.17)$$

яка за чисельним значенням дуже близька до поправки Михєєва $\varepsilon_T = (\text{Pr}_H / \text{Pr}_{CT})^{0,25}$.

Експериментальні дані по характеру течії ламінарної плівки конденсату по вертикальній поверхні показують, що при $\text{Re} > 80$ на поверхні плівки з'являються стійкі хвилі, що приводять до зменшення середньої

товщини плівки конденсату і, як наслідок, до збільшення інтенсивності перенесення теплоти. За експериментальними даними врахування хвильового руху плівки конденсату може бути проведено за допомогою комплексу

$$\varepsilon_v = \text{Re}^{0,04}. \quad (9.18)$$

Тоді середній коефіцієнт тепловіддачі при конденсації пари на вертикальній поверхні може визначатися за рівнянням:

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_N \varepsilon_T \varepsilon_v, \quad (9.19)$$

де $\bar{\alpha}_N$ – середній коефіцієнт тепловіддачі за рішенням Нуссельта.

Приводячи (9.19) до безрозмірного вигляду, та врахувавши (9.4), отримуємо:

$$\text{Re}_{n,h} = 3,8 Z_{n,h}^{0,78} \varepsilon_T, \quad (9.20)$$

де Z – число (критерій) Грігуля має вигляд $Z = \text{Ga}^{1/3} \frac{\lambda \Delta t}{r \rho' v}$, $\text{Ga} = \frac{g h^3}{v^2}$.

Для практичних розрахунків конденсації водяної пари як найбільш поширеного енергетичного теплоносія критерій Рейнольдса представляється у вигляді:

$$\text{Re} = \alpha \Delta t h \frac{4}{r \rho' v} = \alpha \Delta t h B, \quad (9.21)$$

де комплекс B є функцією тільки температури насичення і для води табульований (див. табл. Д.6).

Аналогічно критерій Грігуля (Z) представляється у вигляді:

$$Z = \Delta t h \left[\left(\frac{g}{v^2} \right)^{1/3} \frac{\lambda}{r \rho' v} \right] = \Delta t h A, \quad (9.22)$$

де комплекс A також є функцією тільки температури насичення і для води табульований (див. табл. Д.6).

При конденсації пари на достатньо високих стінках (або довгих вертикальних трубах) на їх нижній частині може відбутися перехід ламінарної течії плівки конденсату в турбулентну течію (при $\text{Re} > 1600$). При цьому на верхній частині поверхні характер течії залишається ламінарним. Для цих умов середній по висоті коефіцієнт тепловіддачі можна знайти з рівняння

$$\text{Re}_{n,h} = \left[253 + 0,069 \text{Pr}_n^{0,5} (\text{Pr}_n / \text{Pr}_{ct})^{0,25} (Z - 2300) \right]^{4/3}. \quad (9.23)$$

Перший доданок правої частини (9.23) враховує середнє значення коефіцієнта тепловіддачі ламінарної плівки при $Z_{кр} = 2300$. Другий – теплообмін при турбулентній течії плівки конденсату.

У деяких задачах конденсації пари на вертикальній поверхні як незалежна змінна задається щільність теплового потоку на поверхні. Тоді, враховуючи, що $q = \alpha \Delta t$, критерій Рейнольдса $\text{Re} = q h B$ є відомою величиною. При $\text{Re} < 1600$ течія плівки конденсату є ламінарною, і з (9.20) шляхом послідовних наближень можна визначити Δt і шуканий коефіцієнт

тепловіддачі. При $Re > 1600$ і змішаній течії плівки конденсату, з (9.23) можна отримати співвідношення

$$\frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{v^2}{g} \right)^{1/3} = \frac{Re}{2300 + 14,5 Pr_H^{-0,5} (Re^{3/4} - 253) (Pr_H / Pr_{CT})^{0,25}}, \quad (9.24)$$

з якого також послідовним наближенням можна визначити шуканий коефіцієнт тепловіддачі.

9.1.2. Плівкова конденсація на горизонтальній трубці

При тих же спрощуючих припущеннях, як і у разі вертикальної поверхні, і, вважаючи, що ось x співпадає з напрямом течії плівки конденсату, коефіцієнт тепловіддачі для нахиленої поверхні (під кутом φ до напрямку сили тяжіння) повинен визначатися по проекції прискорення сили тяжіння $g_x = g \cos(\varphi)$. Тоді коефіцієнт тепловіддачі визначається у вигляді $\alpha_\varphi = \bar{\alpha}_N \cos(\varphi)^{0,25}$, де $\bar{\alpha}_N$ – коефіцієнт тепловіддачі для вертикальної поверхні згідно рішення Нуссельта.

Для криволінійної поверхні, зокрема для горизонтальної трубки, кут φ є змінною величиною. Враховуючи цей факт, Нуссельтом було отримане рішення для конденсації на горизонтальній трубці у вигляді

$$\bar{\alpha}_N = 0,728 \sqrt[4]{\frac{r \lambda^3 g \rho'^2}{\mu \Delta t d}}. \quad (9.25)$$

Це рішення відрізняється від рішення для вертикальної поверхні тільки постійним коефіцієнтом. За деякими даними для випадку $q = \text{const}$ постійна перед коренем дорівнює 0,693.

Перетворюючи (9.25) до вигляду, що подібний (9.20), та вводячи замість діаметру трубки шлях течії плівки конденсату (πR), отримуємо рівняння:

$$Re = 3,25 Z^{0,75} \epsilon_T, \quad (9.26)$$

де $Re = \alpha \Delta t \pi R B$, $Z = \Delta t \pi R A$.

У останньому рівнянні відсутня поправка на хвильовий характер руху плівки конденсату, оскільки на поверхні горизонтального циліндра через малу товщину плівки конденсату хвильова течія не встигає розвинутися.

9.1.3. Конденсація рухомої пари на горизонтальній трубці і пучку труб

Експериментальні дослідження показали, що при $\rho'' w^2 < 1$ впливом кінетичної енергії парового потоку на товщину плівки конденсату (і на інтенсивність теплообміну) можна нехтувати, і теплообмін слід розраховувати по залежностях для нерухомої пари. При великих швидкостях відбувається здування плівки конденсату з горизонтальної труби і, як наслідок, збільшення інтенсивності теплообміну. Оцінка цього впливу різна у різних дослідників. Зупинимося на рекомендаціях Л.Д. Бермана, згідно яким середнє значення коефіцієнта тепловіддачі при конденсації рухомої пари на горизонтальній трубці може бути знайдено з рівняння

$$\text{Nu}_{n,d} = 0,72 D \text{Re}_n^{0,16} \text{Re}_k^{-0,125} \text{Ga}_n^{0,045} (\mu_n / \mu_{ct})^{0,08}, \quad (9.27)$$

де $\text{Nu}_{n,d} = \alpha d / \lambda$, $\text{Re}_n = w_n d / \nu''$, $\text{Re}_k = \lambda \Delta t / (r \rho' \nu')$, $\text{Ga}_n = g d^3 / \nu'^2$.

При конденсації водяної пари коефіцієнт $D = 42$.

З (9.27) витікає, що коефіцієнт тепловіддачі зменшується зі зростом температурного напору як $\alpha = c \Delta t^{-0,125}$, тоді, як для нерухомої пари з (9.15) $\alpha = c_1 \Delta t^{-0,25}$.

Теплообмінні апарати, в яких відбувається конденсація пари, як правило, виконуються з горизонтальних труб, зібраних в пучки (коридорний або шаховий). В цьому випадку процес конденсації пари протікає інакше, ніж на одиничній трубці, оскільки по глибині пучка зменшується швидкість парового потоку через конденсацію пари, а конденсат, що утворився на верхніх рядах труб, стікає на нижчі, збільшуючи тим самим товщину плівки конденсату. Вплив останнього чинника для n -го ряду труб можна врахувати за допомогою співвідношення

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_1} = \left(\sum_{i=1}^n G_i / G_n \right)^{-0,07}, \quad (9.28)$$

де α_n і α_1 відповідно коефіцієнти тепловіддачі n -го і першого ряду труб, G_i – кількість конденсату, що утворився на i -ої трубці пучку.

Вважаючи, що температурний натиск і тиск пари по глибині пучку залишаються постійними, Л.Д. Берманом було отримане наближене співвідношення для визначення середнього по пучку коефіцієнта тепловіддачі

$$\bar{\alpha} = \alpha_1 \frac{0,84 \varepsilon}{[1 - (1 - \varepsilon)^{0,84}] n^{0,07}}, \quad (9.29)$$

де $\varepsilon = (G_{\text{вх}} - G_{\text{вих}}) / G_{\text{вх}}$ – ступінь конденсації пари, n – кількість рядів труб.

Таким чином, за допомогою (9.28) можна послідовно розрахувати теплообмін по глибині пучка труб, при цьому коефіцієнт тепловіддачі для кожного ряду труб слід визначати з урахуванням зміни швидкості пари через конденсацію, а потім використовувати (9.28) для оцінки поправки на вплив конденсату, що стікає з верхніх рядів труб.

9.1.4. Теплообмін при краплинній конденсації пари

Краплинна конденсація виникає на незмочуваній поверхні (для води – на гідрофобній поверхні). При цьому поверхня конденсації покривається окремими краплями конденсату, які спонтанно виникають на поверхні, ростуть в об'ємі за рахунок конденсації пари на поверхні краплі до тих пір, доки не скачуються з поверхні під дією сили тяжіння. У міру зростання краплі можуть зливатися при зіткненні. Тому, строго кажучи, процес краплинної конденсації не є стаціонарним процесом, але, якщо розглядати усереднені за часом характеристики процесу, то процес краплинної конденсації можна вважати квазістаціонарним процесом.

У зв'язку з тим, що на криволінійній поверхні розділу фаз (поверхні

краплі) виникає додатковий тиск, обумовлений силами поверхневого натягнення, яке по Лапласу для сферичної краплі має вигляд:

$$P_p = P_n + 2\sigma/R, \quad (9.30)$$

де P_p , P_n – тиск рідини в краплі та тиск пари (насичення), σ – коефіцієнт поверхневого натягнення, R – радіус краплі, при фіксованій температурі стінки можуть утворюватися і існувати тільки краплі з радіусом, більшим, ніж критичний (по Томпсону)

$$R_{кр} = \frac{2\sigma T_n}{r\rho'(T_n - T_{ст})}. \quad (9.31)$$

При краплинній конденсації, разом з краплями конденсату, на поверхні утворюється дуже тонка (порядку дії міжмолекулярних сил $\approx 1\mu\text{м}$) плівка конденсату. Плівка ця нестійка, періодично розривається і під дією сил поверхневого натягнення стягується в краплі. Таким чином, при краплинній конденсації рідка фаза знаходиться в русі, що викликаний дією капілярних сил на поверхні розділу фаз при змінній температурі. Такий рух називають термокапілярним, а термокапілярна рушійна сила має розмірність тиску і визначається

$$P_t = \theta\sigma \text{grad}(t_n), \quad (9.32)$$

де $\theta = \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dt}$ – температурний коефіцієнт поверхневого натягнення.

Ці уявлення про процес краплинної конденсації були використані В.П. Ісаченко при розробці математичної моделі процесу і обробці експериментальних даних. В результаті отримані рівняння для визначення середніх коефіцієнтів тепловіддачі при краплинній конденсації нерухомої пари

$$\begin{aligned} &\text{при } 8 \cdot 10^{-4} \leq \text{Re}_k < 3,3 \cdot 10^{-3} \\ &\text{Nu} = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{Re}_k^{-0,84} \Pi_k^{1,16} \text{Pr}_n^{1/3}, \end{aligned} \quad (9.33)$$

$$\begin{aligned} &\text{при } 3,3 \cdot 10^{-3} \leq \text{Re}_k < 1,8 \cdot 10^{-2} \\ &\text{Nu} = 5 \cdot 10^{-6} \text{Re}_k^{-1,57} \Pi_k^{1,16} \text{Pr}_n^{1/3}, \end{aligned} \quad (9.34)$$

$$\text{де } \text{Nu} = \frac{\alpha R_{кр}}{\lambda_p}, \quad \text{Re}_k = \frac{w_k R_{кр}}{\nu'} = \frac{\lambda_p (t_n - t_{ст})}{r\rho'\nu'}, \quad \Pi_k = \frac{2\theta\sigma^2 T_n}{r\rho'^2 \nu'^2}.$$

Умовна швидкість росту фази, що конденсується та входить в критерій Re_k , визначається з умови відведення теплоти фазового переходу теплопровідністю $w_k = \lambda \Delta t / (r\rho' R_{кр})$. Визначальна температура – температура насичення, визначальний розмір – критичний радіус краплі. Критерій Π_k враховує вплив термокапілярного руху на інтенсивність теплообміну.

З наведених вище рівнянь виходить, що при заданій різниці температури стінки і пари інтенсивність теплообміну залежить тільки від теплофізичних властивостей рідини. Для води легко побудувати номограму залежності інтенсивності теплообміну від температури насичення і різниці

температур «стінка – пара». З (9.33) витікає, що при $Re_k < 3,3 \cdot 10^{-3}$ інтенсивність теплообміну $\alpha \approx \Delta t^{0,16}$, а щільність теплового потоку $q \approx \Delta t^{1,16}$. Однак, при $Re_k \geq 3,3 \cdot 10^{-3}$ залежність інтенсивності теплообміну та щільності теплового потоку від різниці температури між стінкою та паром суттєво змінюється $\alpha \approx \Delta t^{-0,57}$, $q \approx \Delta t^{0,43}$. Тобто при малих температурних напорах інтенсивність теплообміну росте із зростанням температурного напору, причому дуже повільно, а при високих – зменшується достатньо сильно при збільшенні температурного напору. Цей факт можна пояснити таким чином. При малих температурних напорах швидкість конденсації лімітується необхідністю переохолодження пари у поверхні. Чим більше переохолодження пари, тим менше $R_{кр}$ і, відповідно, більше число центрів конденсації, і вище інтенсивність теплообміну. Проте із збільшенням швидкості конденсації збільшується кількість фази, що конденсується, і на інтенсивність теплообміну починає впливати термічний опір фази, що конденсується (ускладнює доступ пари до поверхні стінки). При $Re_k > 3,3 \cdot 10^{-3}$ швидкість конденсації, перш за все, залежить від термічного опору конденсату, що утворився. Відбувається своєрідна криза краплинної конденсації.

Досліди з краплинною конденсацією пари на пучках горизонтальних труб показали, що вплив рідини, що стікає з верхніх рядів труб, на інтенсивність теплообміну дуже малий, як і малий вплив кривизни поверхні. Тому розрахунок інтенсивності теплообміну можна проводити по наведених вище співвідношеннях.

На інтенсивність краплинної конденсації істотний вплив робить наявність у парі газів, що не конденсуються.

Питання для самоперевірки

1. Як зв'язані процеси фазового переходу і теплообміну?
2. Які існують режими конденсації пари на поверхні, чим вони визначаються?
3. Яка роль критерію Рейнольдса при розрахунку режиму течії плівки конденсату по вертикальній поверхні і інтенсивності теплообміну?
4. Як змінюється режим течії плівки конденсату на вертикальній поверхні? Особливості течії плівки.
5. Структура критеріального рівняння для розрахунку теплообміну при ламінарної течії плівки конденсат; при змішаному режимі течії на вертикальній поверхні.
6. У чому особливість процесу конденсації на горизонтальних трубах.
7. Структура рівняння для розрахунку теплообміну при конденсації на трубах. Визначальний розмір.
8. Особливості конденсації пари на пучку горизонтальних труб.
9. Вплив швидкості руху пари на інтенсивність теплообміну при конденсації пари на горизонтальній трубі.
10. Чинники, що визначають краплинну конденсацію пари на поверхні. Критичний радіус краплі.

11. Структура рівняння для розрахунку теплообміну при краплинній конденсації пари. Залежність інтенсивності теплообміну від різниці температури пара-стінка.

Задачі до розділу 9.1

1. На вертикальній трубі діаметром 30 мм, заввишки 2 м конденсується водяна пара при тиску 1 бар. Визначити кількість конденсату, що утворився на трубі за 1 с, якщо температура поверхні трубки 90 °С.

Коментар до задачі. Використайте (9.20) і рівняння теплового балансу у вигляді $Q = Gr = \alpha \pi d l (t_n - t_{cr})$.

2. Як вплине на інтенсивність теплообміну і кількість конденсату, що утворився за умовами задачі 1, збільшення висоти труби до 4 м, а до 6 м?

Коментар до задачі. Якщо $Z = \alpha \Delta t h A \leq 2300$ використайте (9.20), в іншому разі (9.23) і рівняння теплового балансу.

3. Як зміниться кількість конденсату, якщо трубу розташувати горизонтально, а умови конденсації відповідають задачі 1?

Коментар до задачі. Використайте (9.26) і рівняння теплового балансу.

4. Як зміниться кількість конденсату по попередньому завданню, якщо пара рухається зверху вниз із швидкістю 5 м/с?

Коментар до задачі. Оцініть вплив кінетичної енергії пари і використовуйте або (9.26), або (9.27) і рівняння теплового балансу.

5. Як зміниться кількість конденсату, якщо трубу покрити гідрофобним шаром, а інші умови залишити без зміни (як для нерухомої пари)?

Коментар до задачі. Використайте (9.33) або (9.34) в залежності від Re_k , а також рівняння теплового балансу. Приблизно $\theta \approx \frac{1}{\sigma} \frac{|\Delta\sigma|}{\Delta t}$ за табл. Д4.

9.2. Теплообмін при кипінні однокомпонентної рідини

9.2.1. Механізм процесу теплообміну і режими кипіння

Процес кипіння чистої рідини можливий в діапазоні від потрійної точки до критичного стану. При кипінні відбувається поглинання теплоти фазового переходу, тобто процес кипіння, як і процес конденсації, нерозривно пов'язаний з процесом теплообміну.

Розрізняють кипіння на твердій поверхні, до якої ззовні підводиться теплота, і кипіння в об'ємі рідини. В останньому випадку парова фаза виникає спонтанно по всьому об'єму рідини. Такий процес відбувається при значному перегріві рідини відносно температури насичення, що найчастіше має місце при різкому скиданні тиску. Цей випадок рідко зустрічається в практиці і тому далі не розглядається.

При кипінні рідини у твердій поверхні необхідна наявність двох умов: перегрів рідини у поверхні і наявність центрів паротворення. Останніми можуть бути різні мікронерівності поверхні, які полегшують появу парових бульбашок. Процес кипіння, при якому на поверхні пар утворюється у

вигляді окремих бульбашок, що ростуть за часом та періодично відриваються від поверхні, називається **бульбашковим** режимом кипіння. У міру зростання кількості бульбашок пари окремі бульбашки пари можуть зливатися, утворюючи у поверхні парову плівку, яка періодично відривається від поверхні. Такий режим кипіння називають **плівковим** режимом кипіння.

При бульбашковому режимі кипіння основний потік теплоти від стінки відводиться рідкою фазою, оскільки її теплопровідність істотно вища, ніж парової фази. Тому, як і у разі конвекції однофазної рідини, основним термічним опором є опір прикордонного шару рідині. Проте, періодичне виникнення, зростання і відрив бульбашок пари призводить до істотної турбулізації прикордонного шару, що, у свою чергу, призводить до значного збільшення тепловіддачі.

9.2.2. Мінімальний радіус парової бульбашки

Для виникнення і існування в оточенні рідини парової бульбашки, необхідно, щоб сумарний тиск в ній був не менше суми сил, що діють на неї. У момент утворення бульбашки на неї діють дві сили: тиск рідини і поверхневе натягнення на поверхні розділу фаз. Умова рівноваги цих сил визначається рівнянням Лапласа

$$\Delta P = P_1 - P = 2\sigma/R_k, \quad (9.35)$$

де R_k – мінімальний або критичний радіус бульбашки.

Як йшлося вище, утворення бульбашки можливе тільки в тому випадку, якщо рідина у поверхні перегріта відносно температури насичення, тобто є різниця температур $\Delta t = T_p - T_n$. Тоді різниця тиску, обумовлена цією різницею температур

$$\Delta P = P' \cdot \Delta T. \quad (9.36)$$

Якщо врахувати залежність тиску від кривизни поверхні бульбашки пари, виходить

$$\Delta P = P' \cdot \Delta T \cdot (\rho' - \rho'')/\rho'. \quad (9.37)$$

Похідна від тиску по температурі на кривій насичення визначається за рівнянням Клапейрона – Клаузіуса

$$P' = \frac{r \rho'' \rho'}{T_n (\rho' - \rho'')}. \quad (9.38)$$

З (9.35) з урахуванням (9.37) і (9.38) знаходиться критичний радіус парової бульбашки

$$R_k = \frac{2\sigma T_n}{r \rho'' (T_p - T_n)}. \quad (9.39)$$

Це співвідношення аналогічно рівнянню Томпсона для процесу краплинної конденсації, але в знаменнику стоїть густина парової фази. При $R < R_k$ парова бульбашка, що виникає на стінці, конденсується (захлопується), при $R > R_k$ вона починає рости і, зрештою, відривається від поверхні.

9.2.3. Відривний діаметр парової бульбашки

Парова бульбашка, що зародилася на поверхні, росте до деякого діаметру d_0 , при якому вона відривається від поверхні. За статичних умов і в припущенні сферичності поверхні бульбашки цей діаметр визначається з умови механічної рівноваги між підйомною силою $g(\rho' - \rho'')V$, яка намагається відірвати бульбашку від поверхні, і силою поверхневого натягнення σF , що утримує її на поверхні. Об'єм V і поверхня F парової бульбашки пропорційні кубу і квадрату характерного розміру δ відповідно. Тоді з умови рівноваги сил

$$\delta = \sqrt{\sigma/[g(\rho' - \rho'')]}. \quad (9.40)$$

Ця величина називається «капілярна постійна» і залежить від роду рідини та тиску.

Якщо під відривним діаметром бульбашки розуміти її еквівалентний діаметр, то на підставі (9.40) можна отримати

$$d_0 = 0,0208\Theta\sqrt{\sigma/[g(\rho' - \rho'')]}, \quad (9.41)$$

де Θ - крайовий кут змочування в кутових градусах. Величина відривного діаметру прямо пропорційна крайовому куту змочування. Із збільшенням цього кута змочуваність поверхні рідиною погіршується, і парова бульбашка при відриві набуває великих розмірів. Для рідини, що не змочує поверхню, $\Theta \geq 90^\circ$, це приводить до різкого збільшення поверхні стінки, зайнятої основами бульбашок пари, що ростуть, і, відповідно, до зменшення тепловіддачі.

При русі рідини біля парогенеруючої поверхні на умови відриву бульбашки пари додатково впливає динамічний натиск потоку.

Після відриву від поверхні парова бульбашка рухається через рідину (спливає). Якщо температура рідини менше температури насичення (пари в об'ємі бульбашки), то відбувається конденсація пари на поверхні бульбашки і зменшення її розмірів аж до повної конденсації (захлопування бульбашки). При температурі рідини вище за температуру насичення у міру руху бульбашки відбувається випаровування рідини в об'єм бульбашки і збільшення її розміру. Досліди показують, що інтенсивність теплообміну між перегрітою рідиною і поверхнею парової бульбашки дуже велика ($\approx 2 \cdot 10^5$ Вт/(м²К)). За рахунок цього відбувається інтенсивне випаровування рідини в об'єм бульбашки, і при спливанні бульбашка істотно збільшується в розмірах.

9.2.4. Залежність щільності теплового потоку від температурного напору і способу обігріву поверхні паротворення (крива кипіння)

При кипінні рідини в необмеженому об'ємі у нагрітій поверхні щільність теплового потоку, що передається в рідину від стінки, достатньо складно залежить від різниці температур «стінка-рідина», що вказує на

істотний вплив різних чинників.

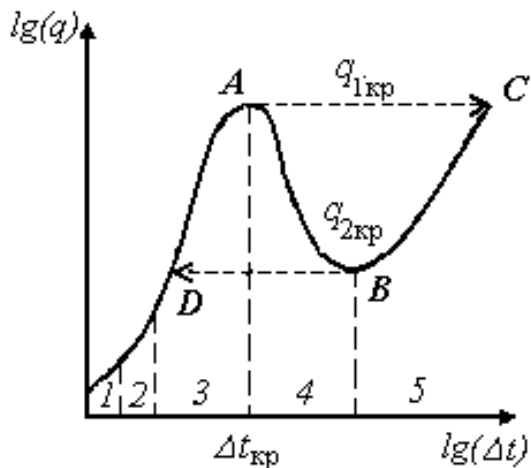


Рисунок 9.4 – Залежність щільності теплового потоку від температурного натиску і засобу обігріву поверхні

Характерна крива кипіння чистої однокомпонентної рідини представлена на рис.9.4. Аналіз цієї кривої дозволяє зробити деякі висновки.

При малих температурних напорах, коли кількість центрів паротворення порівняно невелика і турбулізація прикордонного шару мала, інтенсивність теплообміну визначається тільки природною конвекцією, а щільність теплового потоку залежить від різниці температури як $\Delta t^{1,25}$ (зона 1, рис. 9.4). У міру зростання температури поверхні кількість центрів паротворення збільшується (R_k

зменшується) і має місце перехідна зона (2). Область 3 (рис.9.4) відповідає розвиненому бульбашковому кипінню рідини, коли малій зміні температури стінки відповідає істотне зростання щільності теплового потоку. При цьому у міру зростання температури стінки швидкість росту q сповільнюється, і щільність теплового потоку досягає максимуму ($q_{1кр}$) для бульбашкового режиму кипіння (точка A). Подальша поведінка кривої кипіння залежить від способу обігріву поверхні кипіння.

Якщо обігрів поверхні здійснюється так, що є можливість керування її температурою (наприклад, паровий обігрів з вищими параметрами пари), то подальше підвищення температури поверхні приводить до зменшення щільності теплового потоку (до зниження інтенсивності теплообміну, зона 4). Цей факт пояснюється тим, що все більша частина парогенеруючої поверхні покривається паровою плівкою. Інтенсивність перенесення теплоти від стінки до парового середовища істотно нижче, ніж до рідкої фази. Зона 4 є перехідною зоною від бульбашкового кипіння до плівкового кипіння. Точка B відповідає мінімуму теплообміну при плівковому режимі кипіння.

При подальшому збільшенні температурного натиску щільність теплового потоку росте за рахунок збільшення радіаційної складової, оскільки зона 5 є областю достатньо високих температур поверхні (для води $> 500 \text{ }^\circ\text{C}$). Ця зона є областю плівкового режиму кипіння.

Якщо обігрів поверхні кипіння здійснюється таким чином, що незалежною змінною є щільність теплового потоку (наприклад, електричний обігрів поверхні), то після досягнення максимуму теплообміну при бульбашковому кипінні (точка A) і подальшому підвищенні щільності теплового потоку відбувається різкий перехід в область плівкового режиму кипіння (точка C). При цьому температура поверхні різко збільшується ($\approx 700\text{-}900 \text{ }^\circ\text{C}$). Якщо відбувається зменшення теплового потоку при електричному обігріві, а температура поверхні вища, ніж в точці C , то плівковий режим кипіння зберігається, аж до точки B , після чого

температура поверхні різко зменшується (точка D), а процес кипіння переходить в бульбашковий режим.

Щільність теплового потоку, яка відповідає точці A , називається першою критичною щільністю теплового потоку $q_{1кр}$. Вона залежить від теплофізичних властивостей рідини і тиску (температури насичення). Мінімальна щільність теплового потоку при плівковому кипінні, яка відповідає точці B , називається другою критичною щільністю теплового потоку $q_{2кр}$. Досліди показують, що ця величина залежить від тиску, роду рідини, шорсткості поверхні кипіння і ряду інших чинників. Н. Зибером показано, що $q_{2кр}$ пропорційна швидкості спливання бульбашок пари

$$\frac{q_{2кр}}{r\rho''} = c \sqrt{\sigma g(\rho' - \rho'')/\rho''^2}, \quad (9.42)$$

де постійна $c = 0,11-0,14$. Це співвідношення не враховує ряд чинників, проте, дає результати, близькі до експериментальних даних.

9.2.5. Тепловіддача при бульбашковому кипінні рідини у великому об'ємі

При бульбашковому кипінні рідини у великому об'ємі на поверхні підведення теплоти виникає велика кількість парових бульбашок різних розмірів. Відривання їх від поверхні призводить до пошкодження прикордонного шару рідини, а спливаючі бульбашки істотно турбулізують рідину в об'ємі. Якщо в об'ємі рідини знаходиться $M_{п}$ кг пари і, відповідно, $M_{р}$ кг рідини, то загальний об'єм суміші складе $V_{см} = M_{п}/\rho'' + M_{р}/\rho'$. Відношення об'єму пари до об'єму суміші називають об'ємними паровмістом

$$\varphi = M_{п} / \rho'' / V_{см}. \quad (9.43)$$

Якщо до поверхні кипіння F підводиться тепловий потік Q і цей потік витрачається на випаровування рідини, то приведеною швидкістю паротворення (кипіння) називають

$$w_{кип} = \frac{Q}{F r \rho''} = \frac{q}{r \rho''}. \quad (9.44)$$

Швидкість руху бульбашок пари в рідині вища за цю швидкість, оскільки площа перерізу, займана парою, менше загальної поверхні нагріву і складає φF . Тоді

$$w_{п} = w_{кип} / \varphi. \quad (9.45)$$

Процес тепловіддачі при кипінні відрізняється складністю математичного опису, оскільки до диференціальних рівнянь тепловіддачі додається рівняння руху парової бульбашки в рідині

$$d g(\rho' - \rho'')/3 = c \rho'' w_{п}^2 / 4, \quad (9.46)$$

і рівняння теплообміну на внутрішній поверхні парової бульбашки, яке враховує, що тепловий потік від перегрітої рідини до пари (переданий шляхом теплопровідності) витрачається на випаровування рідини і забезпечує збільшення об'єму бульбашки

$$-\int_F \lambda (dt/dn) dF = r \rho'' d(\pi d^3/6)/dt. \quad (9.47)$$

Аналіз системи диференціальних рівнянь тепловіддачі при бульбашковому кипінні у великому об'ємі методами теорії подібності дозволив отримати узагальнені змінні, які характерні для цього процесу

$$K_u = l_* / \delta, \quad K_q = \frac{q \delta}{r \rho'' a' l_*}, \quad \text{де } \delta - \text{ капілярна постійна,}$$

$l_* = \frac{c_p \rho' \sigma T_H}{(r \rho'')^2} = \frac{R_k c_p \Delta t \rho'}{2 r \rho''}$ – величина, що має розмірність довжини і пропорційна критичному радіусу бульбашки, яку іноді називають «**приведений критичний радіус**», a' – коефіцієнт температуропровідності рідини.

Тепловіддача при розвиненому бульбашковому кипінні на занурених в рідину поверхнях не залежить від їх орієнтації, якщо реалізовані умови безперешкодного відведення пари від поверхні. Це означає, що прискорення сили тяжіння не повинно впливати на тепловіддачу, а інтенсивність теплообміну визначається, головним чином, інтенсивністю пульсації рідини, викликані виникненням і відривом парових бульбашок на поверхні. Умови руху рідини в об'ємі (природна конвекція за рахунок руху парових бульбашок або вимушений рух при $w \leq 12$ м/с) не надають істотного впливу на інтенсивність теплообміну. Враховуючи автотемпературність тепловіддачі щодо сил тяжіння, Лабунцовим було отримане критеріальне рівняння

$$Nu_* = f(Re_*, Pr_p),$$

де $Nu_* = \alpha l_* / \lambda$, $Re_* = w_{\text{кип}} l_* / \nu' = q l_* / (r \rho'' \nu')$. Для води, як найбільш поширеного в енергетиці теплоносія, l_* і $l_* / r \rho'' \nu'$ зведені в таблиці в залежності від температури насичення (див. табл. Д.7).

Узагальнення цим же автором експериментальних даних по теплообміну при бульбашковому кипінні різних рідин дозволило отримати наступну залежність

$$Nu_* = C Re_*^n Pr_p^{1/3} \quad (9.48)$$

де при $Re_* < 0,01$ $C = 0,0625$, $n = 0,5$;

при $Re_* \geq 0,01$ $C = 0,125$, $n = 0,65$.

Ця залежність має місце за умов: $10^{-5} \leq Re_* \leq 10^4$; $0,86 \leq Pr_{ж} \leq 7,6$; $w \leq 7$ м/с.

Для певного роду рідини при розвиненому кипінні (область 3) коефіцієнт тепловіддачі залежить тільки від теплового навантаження і тиску. Це дозволило М.О. Михеєву рекомендувати для розрахунку тепловіддачі при кипінні води в діапазоні тиску від 1 до 40 бар наступні рівняння

$$\alpha = 3,14 q^{0,7} p^{0,15},$$

$$\alpha = 33,4 \Delta t^{2,33} p^{0,5}. \quad (9.49)$$

В цих рівняннях розмірності: q [Вт/м²], p [бар].

Рівняння (9.48) вимагає завдання як незалежної змінної щільності теплового потоку. Тоді в процесі розрахунку визначається температура поверхні. Якщо за умовами завдання відома температура поверхні, а потрібно визначити щільність теплового потоку, то (9.48) можна перетворити по незалежній змінній Δt . Враховуючи гіпотезу Ньютона, отримуємо

$$\text{при } \frac{\lambda \Delta t}{r \rho'' v'} \text{Pr}_{\text{ж}}^{1/3} \leq 1,6 \quad \text{Nu}_* = 3,91 \cdot 10^{-3} \frac{\lambda}{r \rho'' v'} \Delta t \text{Pr}_p^{2/3}, \quad (9.50)$$

$$\text{при } \frac{\lambda \Delta t}{r \rho'' v'} \text{Pr}_{\text{ж}}^{1/3} > 1,6 \quad \text{Nu}_* = 3,91 \cdot 10^{-3} \left(\frac{\lambda}{r \rho'' v'} \Delta t \right)^{1,86} \text{Pr}_p^{0,952}. \quad (9.51)$$

Комплекс $\frac{\lambda}{r \rho'' v'}$ залежить тільки від температури насичення, і для води наведений у таблицях (див. табл. Д.7).

Рівняння (9.48), (9.50) і (9.51) справедливі тільки для бульбашкового режиму кипіння, тобто при $q \leq q_{1\text{кр}}$. За даними Лабунцова перша критична щільність теплового потоку може бути визначена з рівняння

$$\text{Re}_{*\text{кр}} = 68 \text{Ar}_*^{4/9} \text{Pr}_p^{-1/3}, \quad (9.52)$$

$$\text{де } \text{Ar}_* = \frac{g l_*^3}{v'^2} \frac{\rho' - \rho''}{\rho'}, \quad \text{Re}_{*\text{кр}} = \frac{q_{1\text{кр}} l_*}{r \rho'' v'}.$$

9.2.5. Теплообмін при кипінні рідини в трубах

Труба або канал є обмеженою системою, в якій при русі киплячої рідини відбувається збільшення парової і зменшення рідкої фази. Відповідно змінюється і структура потоку (рис.9.5).

Розрізняють три основні області: I – економайзерна ділянка, де температура рідини в пристінковому шарі нижча за температуру насичення; II – ділянка кипіння рідини; III – ділянка підсушки пари.

На ділянці випаровування рідкої фази (II) розрізняють області з різним змістом парової фази, що визначає характер течії паро рідинної суміші: 2 – область пристінкового кипіння, коли в об'ємі труби температура рідини нижча за температуру насичення; 3 – область бульбашкового кипіння в об'ємі; 4 – область снарядної течії, коли парова фаза концентрується в середній частині труби у вигляді достатньо великих міхурів пари, які рухаються з швидкістю, яка є більшою за середню швидкість руху суміші; 5 – область стрижньової течії, коли центральна частина труби зайнята паровою фазою, а кипляча рідина відтісняється до стінок труби.

При течії киплячої рідини в горизонтальних трубах структура потоку декілька змінюється. При снарядній і стрижньовій течії парова фаза при малих швидкостях течії може займати верхню частину труби, а нижню займає кипляча рідина.

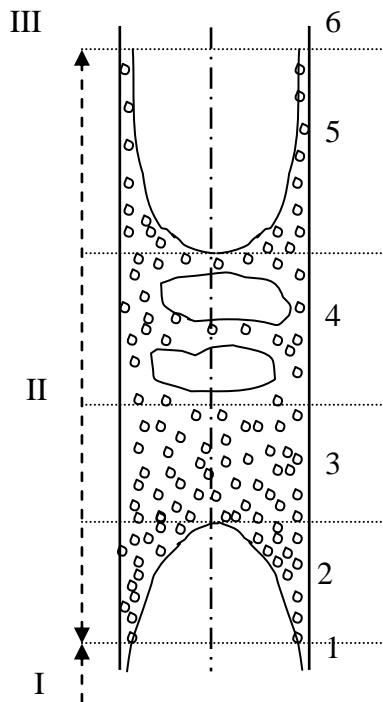


Рисунок 9.5 – Характерні області при кипінні рідини, що рухається у трубі

Відомі характеристики двофазного потоку: масовий витратний паровміст і об'ємний витратний паровміст (відповідно $x = G_{\text{п}}/G_{\text{см}}$ і $\beta = V_{\text{п}}/V_{\text{см}}$), істотно впливають на інтенсивність теплообміну.

Ці характеристики пов'язані між собою співвідношенням: $x/(1-x) = (\rho''/\rho') \cdot \beta/(1-\beta)$, звідкіля йде, що завжди $x < \beta$.

В області $0 < x < 0,3$ інтенсивність теплообміну найвища і досягає 170-200 кВт/(м²К). Потім вона різко зменшується (у 7-10 разів) і в подальшому практично не залежить від x . Це пояснюється структурою паро рідинного потоку, що розглянуто вище.

В кінці стрижньового режиму і переходу на ділянку підсушки вологої пари ($x > 0,3$; $\beta > 0,9$) рідина в потоці міститься у вигляді крапель. При цьому стінка труби омивається не рідиною, а вологою насиченою парою, що різко зменшує інтенсивність теплообміну.

У розрахунку коефіцієнта тепловіддачі при кипінні рідини в трубах виходять з того факту, що інтенсивність теплообміну залежить як від характеру пульсації руху, викликаного кипінням рідини, так і від гідродинаміки потоку, що визначається швидкістю руху рідини в трубі.

Тому використовується наступний метод розрахунку. По закономірностях конвективного теплообміну при русі однофазного потоку розраховується коефіцієнт тепловіддачі α_w .

По закономірностях розвиненого кипіння рідини в необмеженому об'ємі розраховується коефіцієнт тепловіддачі α_q . При цьому передбачається, що рух рідини не впливає на теплообмін. Далі використовується наступні співвідношення

$$\begin{aligned} \text{при } \alpha_q / \alpha_w < 0,5 & \quad \alpha = \alpha_w, \\ \text{при } 0,5 \leq \alpha_q / \alpha_w \leq 2 & \quad \alpha = \alpha_w \frac{4\alpha_w + \alpha_q}{5\alpha_w - \alpha_q}, \\ \text{при } 2 < \alpha_q / \alpha_w & \quad \alpha = \alpha_q. \end{aligned} \tag{9.53}$$

9.2.6. Теплообмін при плівковому режимі кипіння

Плівкове кипіння спостерігається при гарті металу, в деяких інтенсифікованих перегінних апаратах, при охолодженні ракетних двигунів і в деяких інших випадках. При високому тиску пари, коли густина пари близька до густини киплячої рідини, інтенсивність теплообміну при плівковому режимі достатньо висока, і перегріву (перепалу) поверхні

кипіння не відбувається, хоча температурний напір зберігається достатньо високим. Це забезпечує практичне застосування плівкового режиму кипіння.

Плівкове кипіння виникає за наявності великої кількості центрів паротворення, коли окремі бульбашки пари зливаються, утворюючи у поверхні суцільний шар пари. Періодично пара з поверхні проривається в об'єм рідини у вигляді великих бульбашок. Через парову плівку теплота передається не тільки конвекцією і теплопровідністю, але і випромінюванням. Частка променистого перенесення зростає у міру збільшення температури поверхні. Всі форми перенесення теплоти взаємно впливають одна на одну. Так пара, що утворюється за рахунок променистого перенесення теплоти, збільшує парову плівку і зменшує інтенсивність конвективного перенесення.

Розрахункові дані по тепловіддачі при плівковому кипінні рідини можна отримати теоретичним шляхом, використовуючи ту ж фізичну модель, що і в теорії плівкової конденсації. Відповідно початкова система рівнянь буде також ідентичною. Відмінності у граничних умовах на межі розділу фаз будуть

$$\text{при нерухомій рідині} \quad t = t_n, \quad w = 0; \quad (9.54)$$

$$\text{при рідині, що рухається} \quad t = t_{cr}, \quad (dw/dn)_{gr} = 0. \quad (9.55)$$

Рішення для вертикальної поверхні і горизонтального циліндру при ламінарній течії парової плівки мають однаковий вигляд і розрізняються постійними. У якості характерного розміру L прийнято висоту для пластини і діаметр для циліндру.

Рівняння для розрахунку коефіцієнта тепловіддачі має вигляд

$$\alpha = C \sqrt[4]{\frac{\lambda_n^3 r (\rho' - \rho'')}{\nu'' \Delta t L}}, \quad (9.56)$$

де: для пластини при (9.54) $C = 0,667$; при (9.55) $C = 0,943$;

для циліндру при (9.54) $C = 0,50$; при (9.55) $C = 0,72$.

Промениста складова може бути розрахована по закономірностях променистого теплообміну при відомій температурі поверхні і пари.

Тепловіддача при плівковому режимі кипіння залежить від недогріву рідини до температури кипіння. Дослідження показують, що при малому значенні комплексу $c_{pn} \Delta t / r$ (тобто малому перегріву пари в плівці), вплив недогріву малий, а при великому – великий. При цьому розрахункові залежності (за даними Е. Сперроу і ін.) виявляються достатньо складними.

Для вертикальної стінки при плівковому кипінні вірогіднішим є турбулентний рух плівки пари. Строгої теорії для цього випадку поки немає. Експериментальні дані Лабунцова узагальнені залежністю

$$Nu_m = 0,25 (Ar \cdot Pr)_m^{1/3}, \quad (9.57)$$

де визначною температурою є середня температура парової плівки, критерій

Архімеда $Ar = \frac{g L^3 \rho' - \rho''}{\nu_n^2 \rho'}$. Залежність має місце при $(Ar \cdot Pr) > 2 \cdot 10^7$.

Питання для самоперевірки

1. Як класифікуються режими кипіння чистої рідини?
2. Що таке «критичний радіус парової бульбашки», від чого він залежить? Умова існування парової бульбашки в рідині.
3. Намалуйте і прокоментуйте «криву кипіння». Як залежить вид цієї кривої від способу обігріву поверхні кипіння?
4. Що визначає перша критична щільність теплового потоку? Від чого вона залежить?
5. Яка структура критеріального рівняння для розрахунку теплообміну при кипінні рідини в необмеженому об'ємі при бульбашковому кипінні?
6. Застосування плівкового режиму кипіння в практиці. Оцінка інтенсивності теплообміну в цьому режимі кипіння.
7. Особливості кипіння рідини при русі в трубах. Зони кипіння залежно від структури потоку.
8. Розрахунок теплообміну при кипінні рухомої в трубах рідини.

Задачі до розділу 9.2

1. Визначити необхідну поверхню нагріву парогенератору продуктивністю 2 т/год. насиченої пари при тиску 10 бар, якщо температура поверхні кипіння 190 °С.

Коментар до задачі. Використайте рівняння теплового балансу у вигляді $Q = Gr = \alpha(t_{\text{ст}} - t_{\text{н}})F$. Коефіцієнт тепловіддачі визначається по (9.50) або (9.51), а необхідні комплекси по табл. Д7.

2. Знайти максимальну паровидатність цієї поверхні при заданому тиску. Яка при цьому температура поверхні?

Коментар до задачі. Максимальна паровидатність має місце при першій критичній щільності теплового потоку, яка визначається по (9.52). Тоді $G_{\text{max}} = q_{1\text{кр}} F / r$, а коефіцієнт тепловіддачі знаходиться з (9.48) по $Re_{*1\text{кр}}$. Температура поверхні знаходиться з $q_{1\text{кр}} = \alpha_{\text{кр}}(t_{\text{ст}} - t_{\text{н}})$.

3. Знайти паровидатність 3 м² поверхні кипіння при тиску 1 бар, якщо щільність теплового потоку на поверхні складає 3·10⁵ Вт/м². Яка температура поверхні?

Коментар до задачі. Використайте коментар до попередньої задачі.

4. У трубці діаметром 18 мм рухається кипляча вода при тиску 8 бар із швидкістю 1 м/с. Визначити тепловий потік, що передається з погонного метра трубки до води, і коефіцієнт тепловіддачі, якщо температура стінки трубки складає: 173 °С, 175 °С, 180 °С.

Коментар до задачі. Для визначення α_w використайте (5.11), а для α_q – (9.50) або (9.51). Коефіцієнт тепловіддачі знайдіть по (9.53).

10. ТЕПЛООБМІН ВИПРОМІНЮВАННЯМ

10.1. Основні поняття

Процес перенесення теплоти за допомогою електромагнітних хвиль називають тепловим випромінюванням. При цьому на поверхні

випромінюючого тіла відбувається перетворення внутрішньої енергії в кванти електромагнітного випромінювання, а на поверхні тіла, що поглинає випромінювання, відбувається зворотний процес – перетворення квантів електромагнітного випромінювання у внутрішню енергію тіла. Випромінювання характеризується довжиною хвилі (λ) і частотою коливання (ν), зв'язок між котрими: $c = \lambda \cdot \nu$, де c – швидкість світла в порожнечі. Історично прийнята класифікація випромінювання приведена в таб.10.1 залежно від довжини хвилі, хоча природа електромагнітного випромінювання єдина.

Таблиця 10.1 – Класифікація випромінювання

Вид випромінювання	довжина хвилі
Космічне	$< 0,05 \mu\mu\text{к}$
Гама випромінювання	$0,05 \div 1 \mu\mu\text{к}$
Рентгенівське випромінювання	$1 \mu\mu\text{к} \div 20 \mu\mu\text{к}$
Ультрафіолетове	$20 \mu\mu\text{к} \div 0,4 \mu\text{к}$
Видиме світло	$0,4 \div 0,8 \mu\text{к}$
Інфрачервоне випромінювання	$0,8 \mu\text{к} \div 1 \text{мм}$
Радіохвилі	$> 1 \text{мм}$

Більшість твердих і рідких тіл мають суцільний спектр випромінювання, тобто випромінюють енергію всіх довжин хвиль від 0 до ∞ . Проте деякі тіла випромінюють енергію тільки певних довжин хвиль (або діапазонів хвиль), тобто мають селективний спектр випромінювання. До таких

тіл відносяться чисті метали і гази. У твердих тілах процес випромінювання і поглинання відбувається в поверхневому шарі ($\approx 1 \mu\text{к}$ для провідників і 1мм для діелектриків), в газах через їх малу густину в процесі випромінювання і поглинання бере участь увесь об'єм газу.

10.2. Види променистих потоків

Інтегральним променистим потоком називають кількість теплоти, що випромінюється деякою поверхнею тіла в одиницю часу, по всіх напрямках (у напівпростір), в діапазоні довжин хвиль від 0 до ∞ . Цю величину позначають Q .

Якщо виділити потік теплоти в діапазоні довжин хвиль від λ до $\lambda+d\lambda$, то отримаємо монохроматичний (спектральний, однорідний) променистий потік, що позначається Q_λ .

Щільністю інтегрального випромінювання E (випромінювальною здатністю, щільністю власного випромінювання) називають інтегральний тепловий потік з одиниці поверхні тіла

$$E = dQ/dF. \quad (10.1)$$

Тоді інтегральний променистий потік знаходиться як

$$Q = \int_F E dF, \quad (10.2)$$

або при $E = \text{const}$

$$Q = E \cdot F. \quad (10.3)$$

Спектральною інтенсивністю випромінювання називають відношення щільності випромінювання в інтервалі довжин хвиль від λ до $\lambda+d\lambda$ до цього інтервалу

$$J_{\lambda} = dE/d\lambda. \quad (10.4)$$

Окрім зміни інтенсивності випромінювання по довжині хвилі, вона може змінюватися по напрямку випромінювання. Тепловий потік, що випромінюється в певному напрямі під кутом ϕ до напрямку нормалі, з одиниці поверхні, в одиниці тілесного кута ($d\omega$) називають кутовою щільністю випромінювання

$$E_{\phi} = \frac{d^2 Q}{dF d\omega} = \frac{dE}{d\omega}, \quad (10.5)$$

тоді

$$dE = E_{\phi} d\omega. \quad (10.6)$$

10.3. Баланс теплоти падаючого випромінювання

Припустимо, що ззовні на деяке тіло падає інтегральний променистий потік $Q_{\text{пад}}$. На поверхні тіла частина променистого потоку $Q_{\text{вд}}$ відбивається, частина променистого потоку поглинається тілом $Q_{\text{погл}}$ і йде на зміну його внутрішньої енергії, а частина потоку $Q_{\text{проп}}$ проходить крізь тіло. Згідно закону збереження енергії можна записати

$$Q_{\text{пад}} = Q_{\text{вд}} + Q_{\text{погл}} + Q_{\text{проп}}. \quad (10.7)$$

Приведемо це рівняння до безрозмірного вигляду, для чого розділимо ліву і праву частини на $Q_{\text{пад}}$. Отримаємо

$$1 = R + A + D, \quad (10.8)$$

де $R = Q_{\text{вд}} / Q_{\text{пад}}$ – відбивна здатність тіла ($R = 1$ – абсолютно біле тіло, а якщо віддзеркалення підкоряється законам лінійної оптики, то абсолютно дзеркальне тіло); $A = Q_{\text{погл}} / Q_{\text{пад}}$ – поглинальна здатність тіла ($A = 1$ – абсолютно чорне тіло); $D = Q_{\text{проп}} / Q_{\text{пад}}$ – пропускна здатність тіла (при $D = 1$ – абсолютно прозоре, діатермічне тіло, при $D = 0$ – непрозоре тіло, тобто тіло, що не пропускає ніякого випромінювання). Для непрозорого тіла рівняння (10.8) очевидно запишеться як

$$A + R = 1. \quad (10.9)$$

10.4. Закони випромінювання абсолютно чорного тіла

Закони випромінювання чорного тіла строго отримані в ідеальному випадку рівноважного випромінювання, коли деяка замкнена система складається з тіл з однаковою температурою, тобто кожне тіло такої системи поглинає і випромінює однаковий тепловий потік. Для чорного тіла встановлені теоретично і підтверджені експериментально наступні закони випромінювання.

10.4.1. Закон Планка

Закон Планка встановлює зв'язок між спектральною інтенсивністю випромінювання, довжиною хвилі і температурою тіла. Для рівноважного випромінювання чорного тіла цей закон може бути записаний у вигляді

$$J_{0\lambda} = C_1 / [\lambda^5 (e^{C_2/\lambda T} - 1)], \quad (10.10)$$

де постійні Планка $C_1 = 0,374 \cdot 10^{-15} [\text{Вт} \cdot \text{м}^2]$, $C_2 = 1,4388 \cdot 10^{-2} [\text{м} \cdot \text{К}]$.

Закон Планка має два граничні випадки. Перший відповідає умові $\lambda \cdot T \gg C_2$. Тоді показник при експоненті малий і, розклавши експоненту в ряд, обмежившись двома членами розкладання, отримуємо співвідношення

$$J_{0\lambda} = C_1 T / C_2 \lambda^4, \quad (10.11)$$

яке зветься законом Релея–Джинса. Цей закон показує, що за будь-яким значенням температури та $\lambda \rightarrow \infty$ $J_{0\lambda} \rightarrow 0$.

Другий граничний випадок відповідає умові $\lambda \cdot T \ll C_2$, тобто у випадку малої довжини хвилі. Тоді показник ступеня при експоненті великий, і одиницею у знаменнику (10.10) можна зневажати. Отримуємо:

$$J_{0\lambda} = C_1 / (\lambda^5 e^{C_2/\lambda T}). \quad (10.12)$$

Це співвідношення називають законом Віна. Прирівнявши нулю першу похідну по довжині хвилі, набудемо значення довжини хвилі, при якому спектральна інтенсивність випромінювання чорного тіла для даної температури має максимальне значення. Ця довжина хвилі

$$\lambda_{\max} \cdot T = 2898 [\mu\text{к} \cdot \text{К}]. \quad (10.13)$$

За цих умов максимум спектральної інтенсивності випромінювання

$$J_{0\max} = C_3 T^5, \quad (10.14)$$

де $C_3 = 1,286 \cdot 10^{-5} [\text{Вт}/(\text{м}^3 \text{К}^5)]$.

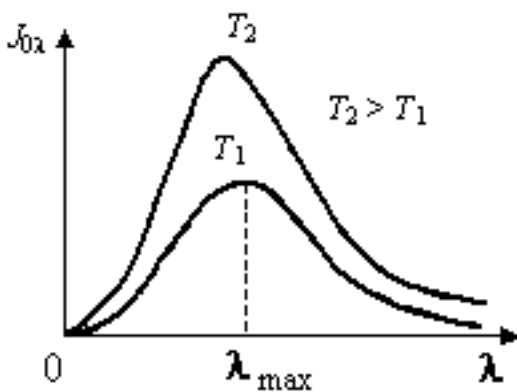


Рисунок 10.1 – Спектр випромінювання чорного тіла

Таким чином, з (10.13) витікає, що при збільшенні температури чорного тіла максимум спектральної інтенсивності випромінювання зміщується в бік коротших довжин хвиль. Цю обставину називають законом зсуву Віна.

10.4.2. Закон Стефана – Больцмана

Цей закон був вперше встановлений болгарським фізиком Стефаном і пізніше підтверджений теоретично німецьким фізиком і математиком Больцманом. Історично цей закон був сформульований раніше закону Планка. Закон Стефана-Больцмана встановлює зв'язок між випромінювальною здатністю чорного тіла і його температурою. Підставимо (10.10) в (10.4) і проінтегруємо по довжині хвилі від 0 до ∞ . Отримуємо

$$E_0 = \int_0^{\infty} J_{0\lambda} d\lambda = \sigma_0 T^4 = C_0 \left(\frac{T}{100} \right)^4, \quad (10.15)$$

де постійна Стефана-Больцмана (постійна випромінювання чорного тіла) $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8}$ або $C_0 = 5,67 [\text{Вт}/(\text{м}^2 \text{К}^4)]$.

10.5. Сірі тіла. Закон Кирхгофа

Абсолютно чорні тіла в природі практично не зустрічаються (виняток: зіниця ока, малий отвір в стінці чорного ящика і деякі подібні тіла). Тому виникає бажання використовувати закони випромінювання чорного тіла в розрахунку процесу випромінювання реальних тіл. Сірим тілом називають тіло, у якого спектр випромінювання подібний до спектру випромінювання чорного тіла, але спектральна інтенсивність випромінювання менша, ніж у чорного тіла. Умову подібності спектрів випромінювання можна представити у вигляді

$$\varepsilon_\lambda = J_\lambda / J_{0\lambda} = \text{const}, \quad (10.16)$$

де ε_λ – спектральний ступень чорноти тіла.

Інтегральним ступенем чорноти тіла називають відношення випромінювальної здатності тіла до випромінювальної здатності чорного тіла при однаковій температурі. Тоді

$$\varepsilon = E / E_0, \quad (10.17)$$

де ε – інтегральний ступень чорноти тіла.

Для сірих тіл, використовуючи (10.15) і (10.16), можна легко довести, що $\varepsilon = \varepsilon_\lambda$, тобто інтегральний і спектральний ступені чорноти рівні.

З визначення інтегрального ступеня чорноти виходить, що випромінювальна здатність реального тіла, якщо вважати його сірим, може бути визначена по випромінювальній здатності чорного тіла у вигляді

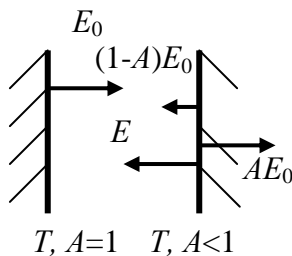


Рисунок 10.2 – Рівноважне випромінювання чорного і сірого тіл

$$E = \varepsilon \cdot E_0 = \varepsilon \cdot C_0 \left(\frac{T}{100} \right)^4. \quad (10.18)$$

Закон Кирхгофа встановлює зв'язок між випромінювальною і поглинальною здатністю сірого тіла.

Розглянемо замкнену систему, що складається з чорного і сірого тіл (рис.10.2) і знаходиться в рівновазі, тобто температури тіл рівні. Відома поглинальна здатність сірого тіла A . Чорне тіло випромінює на сіре тепловий потік щільністю E_0 . На поверхні сірого тіла частина цього потоку AE_0 поглинається. Прийmemo сіре тіло непрозорим ($D = 0$). Тоді сіре тіло віддзеркалює з поверхні в напрямку чорного тіла тепловий потік $(1-A)E_0$. Крім того, в напрямку чорного тіла сіре тіло випромінює власне випромінювання щільністю E .

Складемо тепловий баланс сірого тіла, врахувавши умови рівноваги

$$E = A \cdot E_0. \quad (10.19)$$

Складемо тепловий баланс чорного тіла за тими ж умовами

$$E_0 = E + (1 - A)E_0. \quad (10.20)$$

Обидва ці баланси теплоти призводять до одного співвідношення:

$$E/A = E_0, \quad (10.21)$$

яке виражає закон Кирхгофа: **відношення випромінювальної здатності сірого тіла до його поглинальної здатності рівне випромінювальній здатності чорного тіла при тій же температурі**. Слід зазначити, що строго закон Кирхгофа виконується тільки для рівноважного випромінювання. Зіставивши (10.21) з (10.18), отримуємо слідство із закону Кирхгофа

$$\varepsilon = A, \quad (10.22)$$

тобто інтегральний ступень чорноти сірого тіла дорівнює його поглинальній здатності.

Оскільки закон Кирхгофа справедливий тільки для рівноважного випромінювання, то співвідношення (10.22) також строго справедливо тільки для рівноважного випромінювання сірих тіл. Для твердих тіл це співвідношення з достатнім ступенем точності виконується і при нерівноважному випромінюванні за умови безперервності спектру випромінювання. Для чистих металів і газів через селективність спектру випромінювання це співвідношення не справедливе.

10.6. Ефективний променистий потік і результуюче випромінювання

Розглянемо сіре тіло, на одиницю поверхні якого ззовні падає променистий потік $E_{\text{пад}}$ (рис. 10.3). З одиниці поверхні тіла віддзеркалюється променистий потік $E_{\text{вд}} = (1-A)E_{\text{пад}}$. Частину потоку теплоти тіло поглинає в кількості $E_{\text{погл}} = AE_{\text{пад}}$. В той же час з одиниці поверхні тіла в середовище поступає сума власного випромінювання тіла E і віддзеркалений потік. Назвемо цю суму «**ефективний променистий потік**». Тоді $E_{\text{еф}} = E + E_{\text{вд}}$.

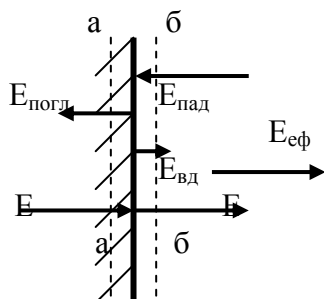


Рисунок 10.3 – Схема променистих потоків

Розглянемо баланс променистих потоків, що проходять через площину (б-б), проведену поза тілом, нескінченно близько до його поверхні. Через цю площину проходить падаюче випромінювання, направлене до поверхні тіла, і ефективний потік, направлений від тіла. У загальному випадку ці потоки не рівні. Назвемо **результуючим тепловим потоком** різницю між ефективним і падаючим потоком, тобто

$$q_{\text{рез}} = E_{\text{еф}} - E_{\text{пад}}. \quad (10.23)$$

Складемо тепловий баланс променистих потоків, що проходять через площину (а-а), проведену усередині тіла, нескінченно близько до його поверхні. Через цю площину проходить поглинене випромінювання і власне випромінювання. Очевидно, що в загальному випадку різниця між цими потоками також буде рівна щільності результуючого випромінювання. Тоді

$$q_{\text{рез}} = E - E_{\text{погл}} = E - AE_{\text{пад}}. \quad (10.24)$$

Виключимо з (10.23) і (10.24) $E_{\text{пад}}$ та використаємо закон Кирхгофа. Отримуємо:

$$E_{\text{эф}} = E_0 + (1 - 1/A) q_{\text{рез}}. \quad (10.25)$$

Таким чином, зв'язок між ефективним і результуючим тепловими потоками встановлюється співвідношенням (10.25).

10.7. Теплообмін випромінюванням двох нескінченних паралельних пластин

Розглянемо дві нескінченні паралельні пластини, які мають температури і поглинальні здібності відповідно T_1, A_1 і T_2, A_2 (рис. 10.4). Припустимо, що $T_1 > T_2$. Проведемо площину (с-с) між цими пластинами. З першої пластини у напрямі другої з одиниці поверхні йде променистий потік $E_{\text{эф}1}$, з другої на першу – $E_{\text{эф}2}$. При нерівності цих потоків виникає результуючий тепловий потік. У цьому випадку, маючи на увазі ту обставину, що в процесі променистого теплообміну тіла обмінюються ефективними променистими потоками, маємо:

$$q_{\text{рез}} = E_{\text{эф}1} - E_{\text{эф}2}, \quad (10.26)$$

Використавши (10.25), отримуємо, представляючи $q_{\text{рез}} = q_{1,2}$. Тоді

$$q_{1,2} = [E_{01} + (1 - 1/A_1)q_{1,2}] - [E_{02} + (1 - 1/A_2)q_{2,1}]. \quad (10.27)$$

Врахувавши, що $q_{1,2} = -q_{2,1}$, вирішимо отримане рівняння відносно $q_{1,2}$. Отримуємо, врахувавши закон Стефана – Больцмана,

$$q_{1,2} = \frac{C_0[(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4]}{1/A_1 + 1/A_2 - 1}. \quad (10.28)$$

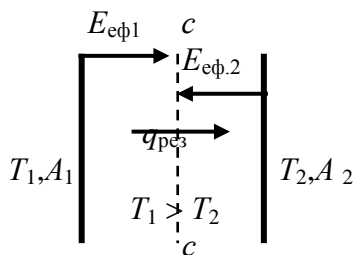


Рисунок 10.4 – Система двох пластин

Зважаючи на слідство із закону Кирхгофа ($A = \varepsilon$) і позначивши приведений ступінь чорноти системи двох плоских необмежених пластин

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1}, \quad (10.29)$$

отримуємо:

$$q_{1,2} = \varepsilon_{\text{пр}} C_0 [(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4]. \quad (10.30)$$

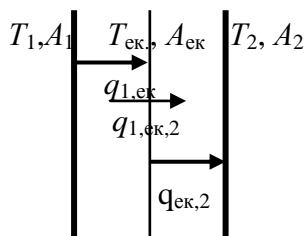


Рисунок 10.5 – Система пластин з екраном

Для зменшення результуючого випромінювання в системі тіл зазвичай застосовуються екрани. Розглянемо систему двох пластин з відомими температурами і поглинаючими здібностями, між якими встановлений екран з відомою поглинальною здатністю $A_{\text{ек}}$ (рис. 10.5).

Визначимо щільність результуючого випромінювання в цій системі тіл і температуру екрану. Використовуючи (10.29) і (10.30) запишемо результуючий тепловий потік від першої пластини до екрану. Отримаємо:

$$q_{1,\text{ек}} = \varepsilon_{\text{пр}1} C_0 [(T_1/100)^4 - (T_{\text{ек}}/100)^4]. \quad (a)$$

Тепловий потік від екрану до другої пластини запишеться аналогічно

$$q_{\text{ек},2} = \varepsilon_{\text{пр}2} C_0 [(T_{\text{ек}}/100)^4 - (T_2/100)^4]. \quad (\text{б})$$

У стаціонарному випадку перенесення теплоти ці потоки повинні бути рівні. Прирівнявши (а) і (б), знайдемо шукану температуру екрану

$$(T_{\text{ек}}/100)^4 = \frac{\varepsilon_{\text{пр}1} (T_1/100)^4 + \varepsilon_{\text{пр}2} (T_2/100)^4}{\varepsilon_{\text{пр}1} + \varepsilon_{\text{пр}2}}.$$

З отриманого співвідношення виходить, що температура екрану, розташованого між двома плоскими необмеженими пластинами, не залежить від місця його розташування. Підставивши температуру екрану в (а) або (б), отримаємо шуканий результуючий потік

$$q_{1,\text{ек},2} = \varepsilon_{\text{пр}} C_0 [(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4], \quad (10.32)$$

де приведений ступінь чорноти системи «пластини – екран»

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 + 2/\varepsilon_{\text{ек}} - 2}. \quad (10.33)$$

Зіставивши (10.33) з (10.28), отримаємо, що при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_{\text{ек}}$ введення екрану в систему двох нескінченних паралельних пластин зменшує результуючий тепловий потік в 2 рази. Аналіз (10.33) показує, що результуючий, променистий потік в розглянутій системі тим менше, чим менше ступінь чорноти екрану.

Якщо в системі двох нескінченних паралельних пластин розташовано n екранів з однаковим ступенем чорноти $\varepsilon_{\text{ек}}$, то, виходячи з (10.33), легко показати, що приведений ступінь чорноти такої системи

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 + 2n/\varepsilon_{\text{ек}} - (n+1)}. \quad (10.34)$$

Задачі до розділів 10.1-10.7

1. На тіло, що має температуру 127°C і поглинальну здібність $A = 0,7$, падає променистий потік щільністю 1000 Вт/м^2 . Визначити всі променисті потоки.

Коментар до задачі. Використайте (10.9), (10.18), (10.22) та визначення ефективного потоку.

2. Вважаючи поверхню Сонця чорною і такою, що має температуру 5770 К , визначити довжину хвилі максимуму спектральної інтенсивності випромінювання і щільність падаючого на Землю інтегрального променистого потоку (відстань Землі від Сонця – $150 \cdot 10^6 \text{ км}$., радіус Сонця – $6,96 \cdot 10^5 \text{ км}$.).

Коментар до задачі. Використайте (10.15) та $q_{\text{пад}} = E_0 (R_c / R_{c-3})^2$.

3. Обмурування топкової камери парового котла виконана з шамоту, а зовнішня обшивка із сталевого листа. Відстань між обмуруванням і обшивкою мала. Знайти втрати тепла випромінюванням з одиниці поверхні обмурування, якщо її температура 120°C , ступінь чорноти $0,8$, а температура обшивки 50°C , ступінь її чорноти $0,6$.

Коментар до задачі. Використайте (10.28).

4. У системі двох нескінченних паралельних пластин одна має температуру 127 °С і поглинальну здатність $A_1 = 0,8$. Інша має поглинальну здатність $A_2 = 0,6$. Визначити температуру іншої пластини, якщо щільність ефективного потоку першої пластини 1700 Вт/м².

Коментар до задачі. З (10.15) та (10.25) визначається q_{12} . Із балансу ефективних потоків $q_{12} = E_{1\text{еф}} - E_{2\text{еф}}$ визначається $E_{2\text{еф}}$, а з (10.25) – E_{02} , враховуючи, що $q_{12} = -q_{21}$. З (10.15) визначається температура іншої пластини.

5. У системі двох нескінченних паралельних пластин з поглинальними здібностями $A_1 = 0,7$, $A_2 = 0,8$ відомі щільність результуючого випромінювання 600 Вт/м² і ефективний потік з першої пластини 1400 Вт/м². Визначити температуру пластин і решту променистих потоків.

Коментар до задачі. Припускаючи, що результуючий потік направлений від першої пластини до другої, отримаємо $E_{2\text{еф}} = E_{1\text{еф}} - q_{12}$. З (10.25), і $q_{12} = -q_{21}$ знаходимо E_{01} і E_{02} , а із (10.15) – температуру пластин. Враховуючи, що $E_{1\text{еф}} = E_{2\text{пад}}$ і $E_{2\text{еф}} = E_{1\text{пад}}$, з балансу падаючого випромінювання визначаються остатні потоки.

6. У системі двох нескінченних паралельних пластин з поглинальними здібностями $A_1 = 0,6$, $A_2 = 0,8$ відомі щільності ефективних потоків $E_{\text{еф.1}} = 1800$, $E_{\text{еф.2}} = 900$ Вт/м². Визначити температуру пластин і усі променисті потоки.

Коментар до задачі. Див. коментар до попередньої задачі.

10.8. Променистий теплообмін тіл, довільно розташованих у просторі

10.8.1. Закон Ламберта

При розгляді основних видів променистих потоків була визначена кутова щільність випромінювання у вигляді $E_\phi = dE/d\omega$.

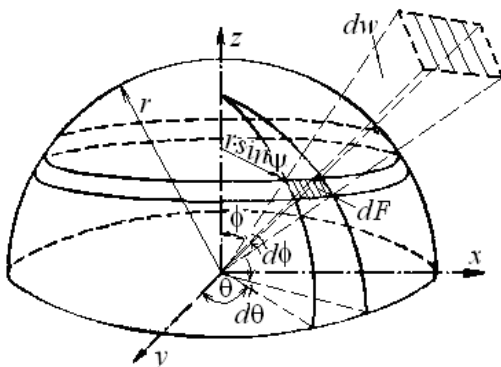


Рисунок 10.6 – До визначення тілесного кута

Яскравістю випромінювання називають променистий потік в даному напрямі (під кутом ϕ до напрямку нормалі) з одиниці площі, віднесений до проекції майданчика на площину, ортогональну до напрямку випромінювання. Тоді

$$B = E_\phi / \cos\phi = dE / (d\omega \cdot \cos\phi).$$

Інакше

$$dE = B \cdot \cos\phi \cdot d\omega \quad (10.35)$$

За визначенням тілесний кут дорівнює відношенню елементарного майданчика, вирізаного даним кутом на поверхні сфери радіусу r , до квадрата радіусу (рис. 10.6). Тоді елементарний майданчик можна представити як $dF = r \cdot \sin\phi \cdot d\theta \cdot r \cdot d\phi$. Тілесний кут $d\omega$ визначається

$$d\omega = \frac{dF}{r^2} = \sin\phi \cdot d\phi \cdot d\theta. \quad (10.36)$$

Для чорного і сірого дифузного випромінювання яскравість не залежить від напрямку випромінювання. Підставимо (10.36) в (10.35) і проінтегруємо по напівпростору. Отримаємо

$$E_0 = B_0 \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin \phi \cdot \cos \phi \cdot d\phi = B_0 \cdot \pi . \quad (10.37)$$

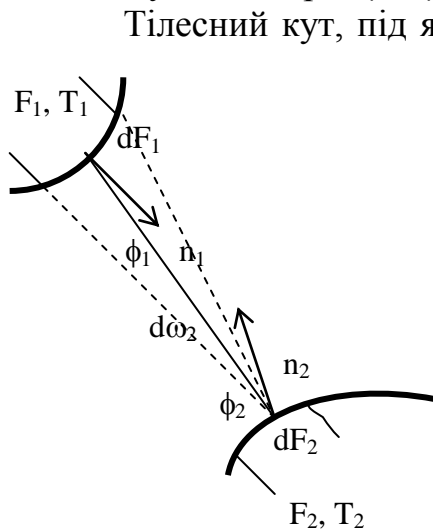
З отриманого виразу маємо, що яскравість випромінювання чорного тіла в π разів менша за щільність його півсферичного випромінювання. Підставивши (10.37) в (10.35), отримуємо закон Ламберта

$$dE_0 = \frac{E_0}{\pi} \cos \phi \cdot d\omega . \quad (10.38)$$

Слід зазначити, що закон Ламберта є приблизно дійсним для діелектриків (яскравість постійна в діапазоні $0-70^\circ$, а потім падає до 0) і не дійсним для полірованих металів (яскравість при куті $70-80^\circ$ перевищує яскравість при 0°). У всіх реальних тіл при $\phi \rightarrow 90^\circ$ яскравість наближається до 0.

10.8.2. Променистий теплообмін двох чорних тіл, довільно розташованих у просторі

Розглянемо два неувігнуті чорні тіла з різними температурами ($T_1 > T_2$) і поверхнями F_1 і F_2 (рис. 10.7). Виділимо на кожному тілі по елементарному майданчику dF_1 і dF_2 відповідно. Припустимо, що відстань між центрами майданчиків – r , а кут між нормаллю до майданчика і прямої, що з'єднує їх центри, ϕ_1 і ϕ_2 відповідно.



Тілесний кут, під яким з майданчика першого тіла видно майданчик другого тіла, $d\omega_1$, а з другого – перший $d\omega_2$. Променистий потік, падаючий з першого майданчика на другий, визначиться за законом Ламберта

$$d^2 Q_{\text{пад1}} = \frac{E_{01}}{\pi} \cos \phi_1 d\omega_1 dF_1, \quad (10.39)$$

а з другого – на перший

$$d^2 Q_{\text{пад2}} = \frac{E_{02}}{\pi} \cos \phi_2 d\omega_2 dF_2. \quad (10.40)$$

Маючи на увазі, що тілесні кути дорівнюють

$$d\omega_1 = dF_2 \cdot \cos \phi_2 / r^2, \quad (10.41)$$

$$d\omega_2 = dF_1 \cdot \cos \phi_1 / r^2,$$

Рисунок 10.7 – Система двох чорних тіл, довільно розташованих у просторі

отримаємо падаючі потоки в вигляді

$$d^2 Q_{\text{пад1}} = E_{01} \frac{\cos \phi_1 \cos \phi_2}{\pi r^2} dF_1 dF_2, \quad (10.42)$$

$$d^2 Q_{\text{пад2}} = E_{02} \frac{\cos \phi_1 \cos \phi_2}{\pi r^2} dF_2 dF_1. \quad (10.43)$$

Введемо позначення

$$d\varphi_{1,2} = \frac{\cos\phi_1 \cos\phi_2}{\pi r^2} dF_2, \quad (10.44)$$

$$d\varphi_{2,1} = \frac{\cos\phi_1 \cos\phi_2}{\pi r^2} dF_1,$$

назвемо ці величини «**елементарні кутові коефіцієнти опромінювання**». Тоді (10.42) і (10.43) можна представити у вигляді

$$d^2 Q_{\text{пад1}} = E_{01} d\varphi_{1,2} dF_1, \quad (10.45)$$

$$d^2 Q_{\text{пад2}} = E_{02} d\varphi_{2,1} dF_2.$$

З (10.45) витікає фізичний сенс елементарного кутового коефіцієнта опромінювання

$$d\varphi_{1,2} = \frac{d^2 Q_{\text{пад1}}}{E_{01} dF_1} = \frac{d^2 Q_{\text{пад1}}}{dQ_1}, \quad (10.46)$$

тобто **елементарний кутовий коефіцієнт опромінювання чисельно дорівнює відношенню потоку випромінювання елементарного майданчика одного тіла, що потрапило на елементарний майданчик другого тіла, до інтегрального випромінювання майданчика першого тіла в напівпростір.**

Проінтегруємо падаючий променистий потік, визначений з (10.45), по F_2 для потоку першого тіла і по F_1 – для другого. Отримаємо:

$$dQ_{\text{пад1}} = E_{01} \int_{F_2} d\varphi_{1,2} dF_1 = E_{01} \varphi_{1,2} dF_1, \quad (10.47)$$

$$dQ_{\text{пад2}} = E_{02} \int_{F_1} d\varphi_{2,1} dF_2 = E_{02} \varphi_{2,1} dF_2,$$

де

$$\varphi_{1,2} = \int_{F_2} \frac{\cos\phi_1 \cos\phi_2}{\pi r^2} dF_2, \quad (10.48)$$

$$\varphi_{2,1} = \int_{F_1} \frac{\cos\phi_1 \cos\phi_2}{\pi r^2} dF_1. \quad (10.48a)$$

локальні кутові коефіцієнти опромінювання елементарним майданчиком першого тіла – друге тіло і елементарним майданчиком другого тіла – перше. Якщо (10.47) представити у вигляді

$$\varphi_{1,2} = dQ_{\text{пад1}}/E_{01}dF_1, \quad \varphi_{2,1} = dQ_{\text{пад2}}/E_{02}dF_2, \quad (10.49)$$

то ясний фізичний сенс цього поняття: **локальний кутовий коефіцієнт опромінювання чисельно дорівнює відношенню променистого потоку з елементарного майданчика одного тіла, що потрапив на друге тіло, до інтегрального променистого потоку з цього майданчика в напівпростір.**

Проінтегрував (10.47) по всій поверхні випромінюючого тіла і використовуючи теорему про середнє інтегрального числення, отримаємо:

$$Q_{\text{пад1}} = E_{01} \bar{\varphi}_{1,2} F_1, \quad (10.50)$$

$$Q_{\text{пад2}} = E_{02} \bar{\varphi}_{2,1} F_2,$$

де $\bar{\varphi}_{1,2}, \bar{\varphi}_{2,1}$ – середні кутові коефіцієнти опромінювання першим тілом другого і другим – першого відповідно. З цього ж співвідношення слідує і фізичний сенс середнього кутового коефіцієнта опромінювання: **середній кутовий коефіцієнт опромінювання є часткою інтегрального променистого потоку даного тіла, яка падає на інше тіло.**

Визначимо результуючий, променистий потік між розглянутими чорними тілами. Оскільки чорне тіло поглинає все падаюче на нього випромінювання, то результуючий променистий потік в системі двох чорних тіл буде

$$Q_{\text{рез}} = Q_{\text{пад1}} - Q_{\text{пад2}} = E_{01}F_1\bar{\varphi}_{1,2} - E_{02}F_2\bar{\varphi}_{2,1}. \quad (10.51)$$

Якщо система знаходиться у рівновазі, то $T_1 = T_2$, $E_{01} = E_{02}$ і результуючий тепловий потік повинен бути рівним нулю. Тоді з (10.51) отримуємо

$$F_1\bar{\varphi}_{1,2} = F_2\bar{\varphi}_{2,1}, \quad (10.52)$$

що встановлює одну з властивостей променистих потоків: **властивість взаємності.**

Позначимо $\bar{H}_{1,2} = F_1\bar{\varphi}_{1,2}$, $\bar{H}_{2,1} = F_2\bar{\varphi}_{2,1}$ і назовемо «**взаємні опромінюючі поверхні**». Тоді з (10.52) маємо, що $Q_{\text{пад1}} = E_{01}\bar{H}_{1,2}$, $Q_{\text{пад2}} = E_{02}\bar{H}_{2,1}$, тобто **взаємна опромінююча поверхня тіла є частиною поверхні даного тіла, інтегральний променистий потік з якою є падаючим випромінюванням на інше тіло.** Тоді з (10.52) властивість взаємності променистих потоків можна сформулювати у вигляді: «**взаємні опромінюючі поверхні двох тіл є рівними**».

Остаточно результуючий променистий потік між двома чорними тілами, довільно розташованими в просторі, використовуючи закон Стефана – Больцмана, можна записати

$$Q_{\text{рез}} = C_0[(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4] \cdot \bar{H}_{1,2}. \quad (10.53)$$

10.8.3. Властивості променистих потоків

Вище було отримано першу властивість променистих потоків – властивість взаємності. Розглянемо замкнену плоску систему з трьох чорних тіл з поверхнями F_1, F_2, F_3 . Складемо баланс теплоти першого тіла. У загальному випадку випромінювання першого тіла потрапляє на друге і третє тіла, і частково може потрапляти і на само тіло, якщо дане тіло увігнуте. Тоді

$$Q_{\text{пад1,2}} + Q_{\text{пад1,3}} + Q_{\text{пад1,1}} = Q_1. \quad (10.54)$$

Розділивши ліву і праву частину (10.54) на інтегральний потік випромінювання першого тіла, і враховуючи (10.50), отримаємо

$$\bar{\varphi}_{1,2} + \bar{\varphi}_{1,3} + \bar{\varphi}_{1,1} = 1. \quad (10.55)$$

Рівняння (10.55) представляє наступну властивість променистих потоків – властивість замикаємості – «**у замкненій системі тіл сума**

середніх кутових коефіцієнтів взаємного опромінювання для кожного тіла дорівнює одиниці».

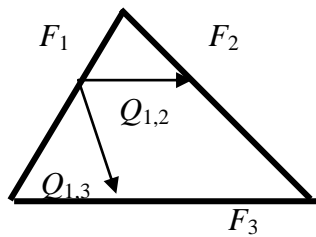


Рисунок 10.8 – Замкнута плоска система трьох тіл

Якщо тіло не увігнуте (плоске або опукле), то, очевидно, що потік самоопромінення тіла відсутній. Тоді властивість неувігнутості: «якщо тіло не увігнуте, то кутовий коефіцієнт самоопромінення дорівнює нулю» ($\bar{\varphi}_{1,1} = 0$).

Умова замикаємості для системи трьох неувігнутих тіл (рис.10.8) на підставі (10.55) представиться у вигляді

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_{1,2} + \bar{\varphi}_{1,3} &= 1, \\ \bar{\varphi}_{2,1} + \bar{\varphi}_{2,3} &= 1, \\ \bar{\varphi}_{3,1} + \bar{\varphi}_{3,2} &= 1.\end{aligned}\tag{10.56}$$

Помножуючи по строках отриману систему рівнянь: першу строку на F_1 , другу – на F_2 , третю – на F_3 , отримуємо

$$\begin{aligned}\bar{H}_{1,2} + \bar{H}_{1,3} &= F_1, \\ \bar{H}_{2,1} + \bar{H}_{2,3} &= F_2, \\ \bar{H}_{3,1} + \bar{H}_{3,2} &= F_3.\end{aligned}\tag{10.57}$$

Властивість затіняємості променистих потоків полягає в тому, що, якщо на шляху променистого потоку знаходиться непрозоре тіло, то падаючий променистий потік на затінені тіла дорівнює нулю. В цьому випадку і кутовий коефіцієнт опромінювання на затінене тіло дорівнює нулю.

Строго кажучи, властивість взаємності променистих потоків отримана в припущенні променистого теплообміну між чорними тілами. Проте, з достатнім для практики ступенем точності цю властивість можна використовувати і для розрахунку теплообміну сірих тіл.

10.8.4. Методи визначення кутових коефіцієнтів опромінювання

а/. Аналітичний метод

Для визначення локального (місцевого) коефіцієнта опромінювання потрібно обчислити

$$\varphi_{1,2} = \int_{F_2} \frac{\cos\phi_1 \cos\phi_2}{\pi r^2} dF_2,\tag{10.58}$$

а для середнього кутового коефіцієнта опромінювання –

$$\bar{\varphi}_{1,2} = \frac{1}{F_1} \int_{F_1} dF_1 \int_{F_2} \frac{\cos\phi_1 \cos\phi_2}{\pi r^2} dF_2.\tag{10.59}$$

Точне обчислення подібних інтегралів може бути проведене в простих випадках. Використання чисельних методів і ЕОМ дозволяє проводити обчислення цих інтегралів і в достатньо складних системах.

б/. Методи моделювання

Методи моделювання (зокрема – світлове моделювання) дозволяють знайти середні кутові коефіцієнти опромінювання реальної системи на її моделі. При цьому повинні дотримуватися загальні вимоги моделювання: дотримання масштабів, тотожність оптичних властивостей системи і т.д. Випромінююче тіло збирають з точкових джерел світла, а поглинаюче тіло – з світлодіодів. Загальний струм від світлодіодів пропорційний променистому потоку, падаючому на поглинаюче тіло. Подібні методи достатньо складні в реалізації.

в/. Метод потокової алгебри (алгебри променистих потоків)

Отримана вище властивість затінення дозволяє плоску замкнену систему з будь-якого числа тіл звести до системи з трьох тіл. Продовжимо розгляд приведеної вище системи трьох чорних тіл. Додамо до умови замикаємості (10.57) умови взаємності (10.54). Отримаємо систему з шести рівнянь з шістьма невідомими.

$$\begin{aligned} \bar{H}_{1,2} &= \bar{H}_{2,1}, & \bar{H}_{1,2} + \bar{H}_{1,3} &= F_1 \\ \bar{H}_{1,3} &= \bar{H}_{3,1}, & \bar{H}_{2,1} + \bar{H}_{2,3} &= F_2 \\ \bar{H}_{3,2} &= \bar{H}_{2,3}, & \bar{H}_{3,1} + \bar{H}_{3,2} &= F_3 \end{aligned} \quad (10.60)$$

Вирішуючи дану систему відносно будь-якого невідомого, отримаємо, зокрема

$$\bar{H}_{1,2} = (F_1 + F_2 - F_3)/2, \quad (10.61)$$

або

$$\bar{\Phi}_{1,2} = (F_1 + F_2 - F_3)/(2F_1). \quad (10.62)$$

З останнього виходить загальне правило визначення середнього кутового коефіцієнта опромінювання в системі трьох тіл: **«середній кутовий коефіцієнт опромінювання рівний відношенню суми поверхонь тіл, що беруть участь в теплообміні, без поверхні третього тіла, до подвоєної поверхні випромінюючого тіла».**

Окремим випадком замкненої системи, що часто зустрічається в практиці, є система з чотирьох неувігнутих тіл, коли потрібно визначити кутові коефіцієнти опромінювання протилежних тіл. Розглянемо систему тіл, наведену на рис.10.9. Припустимо, що потрібно визначити кутовий коефіцієнт опромінювання з першого тіла на друге. Введемо умовні розділяючі непрозорі діагональні поверхні F_5 , F_6 , які не перетинають поверхні тіл. З початкової системи отримуємо

$$\bar{\Phi}_{1,2} + \bar{\Phi}_{1,3} + \bar{\Phi}_{1,4} = 1, \text{ або } \bar{\Phi}_{1,2} = 1 - \bar{\Phi}_{1,3} - \bar{\Phi}_{1,4}. \quad (а)$$

З системи трьох тіл (F_1 – F_4 – F_5) отримуємо

$$\bar{\Phi}_{1,4} = (F_1 + F_4 - F_5)/(2F_1), \quad (б)$$

а з системи (F_1 – F_3 – F_6) отримуємо

$$\bar{\Phi}_{1,3} = (F_1 + F_3 - F_6)/(2F_1). \quad (в)$$

Якщо підставити (б) і (в) в (а), отримуємо

$$\bar{\Phi}_{1,2} = (F_5 + F_6 - F_3 - F_4)/(2F_1), \quad (10.63)$$

звідки витікає правило отримання шуканого коефіцієнта взаємного опромінювання: «у системі чотирьох неувігнутих тіл кутовий коефіцієнт опромінювання двох протилежних тіл дорівнює відношенню суми замикаючих діагональних поверхонь без поверхонь тіл, що не беруть участь в теплообміні, до подвоєної поверхні випромінюючого тіла».

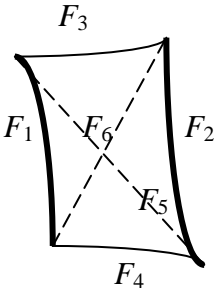


Рисунок 10.9 – Система чотирьох тіл

10.8.5. Теплообмін випромінюванням в замкненій системі сірих тіл

Як йшлося вище, будь-яку замкнену плоску систему тіл можна звести до системи з трьох тіл, використовуючи властивість затінення. Тому розглянемо систему з трьох сірих тіл, які мають поверхні F_1, F_2, F_3 ; температури T_1, T_2, T_3 ; поглинальні здібності A_1, A_2, A_3 (рис.10.10). Врахуємо положення, згідно якому в процесі променистого теплообміну сірі тіла обмінюються ефективними променистими потоками. Також вважатимемо, що отримане вище співвідношення (10.62) для чорних тіл, справедливе і для сірих тіл, оскільки середній кутовий коефіцієнт опромінювання залежить тільки від геометрії системи. В результаті отримуємо результуючий променистий потік між першим і другим тілом у вигляді

$$Q_{1,2} = Q_{\text{эф1}} \bar{\Phi}_{1,2} - Q_{\text{эф2}} \bar{\Phi}_{2,1}. \quad (10.64)$$

Використаємо зв'язок між $E_{\text{эф}}$ и $q_{\text{рез}}$. Отримуємо

$$Q_{1,2} = [E_{01} + (1 - 1/A_1)q_{1,2}]F_1\bar{\Phi}_{1,2} - [E_{02} + (1 - 1/A_2)q_{2,1}]F_2\bar{\Phi}_{2,1}.$$

Врахувавши, що $Q_{1,2} = q_{1,2}F_1 = -q_{2,1}F_2$, а також умову взаємності, отримуємо після угруповання подібних членів

$$Q_{1,2} = \frac{C_0[(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4]F_1\bar{\Phi}_{1,2}}{1 + (1/A_1 - 1)\bar{\Phi}_{1,2} + (1/A_2 - 1)\bar{\Phi}_{2,1}}. \quad (10.65)$$

Отримане співвідношення дозволяє визначити результуючий тепловий потік між двома довільно розташованими в просторі тілами, якщо визначені середні кутові коефіцієнти взаємного опромінювання цих тіл. Розглянемо деякі окремі випадки розташування тіл.

а/. Система з двох нескінченних паралельних пластин.

В цьому випадку, очевидно, що все випромінювання однієї пластини потрапляє на іншу, і, отже $\bar{\Phi}_{1,2} = \bar{\Phi}_{2,1} = 1$, а (10.65)

перетворюється в (10.28).

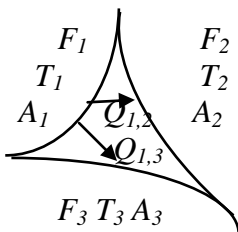


Рисунок 10.10 – Система трьох сірих тіл

б/. Перше тіло знаходиться в порожнині другого.

У зв'язку з прийнятою умовою, очевидно, що все випромінювання першого тіла потрапляє на поверхню другого тіла і $\bar{\varphi}_{1,2} = 1$. Тоді з умови взаємності виходить $\bar{\varphi}_{2,1} = F_1/F_2$, і результуючий потік

$$Q_{1,2} = \frac{C_0[(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4]F_1}{1/A_1 + (1/A_2 - 1)F_1/F_2}. \quad (10.66)$$

Частковий випадок, коли друге тіло абсолютно чорне ($A_2 = 1$),

$$Q_{1,2} = A_1 C_0 [(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4] F_1 \quad (10.67)$$

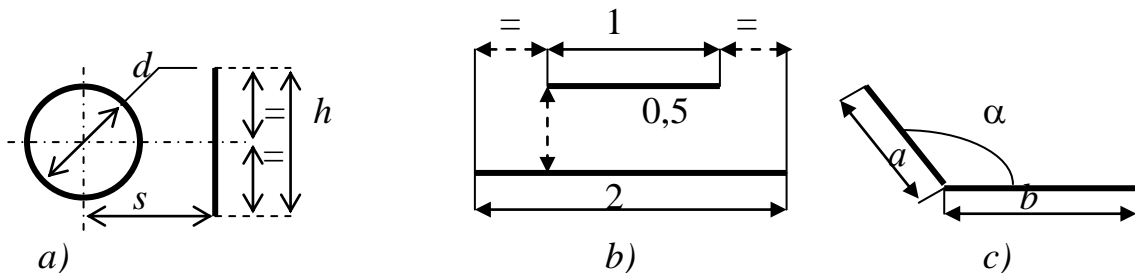
Якщо тіло розташовано в необмеженому просторі ($F_2 \gg F_1$), то (10.66) також приводиться до (10.67), де T_2 – температура навколишнього простору.

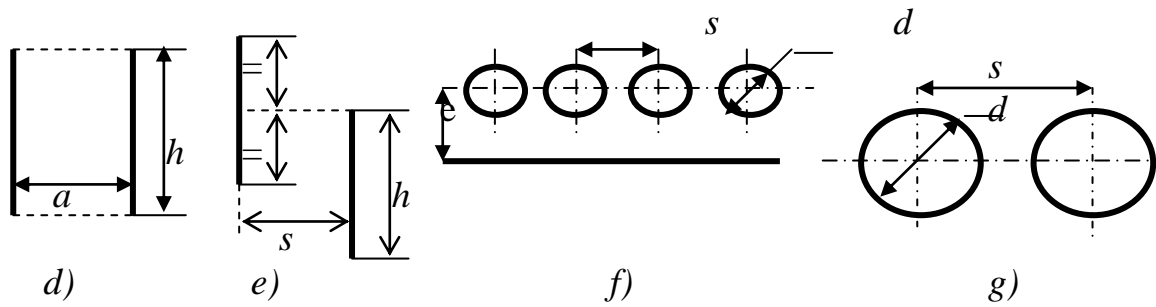
Задачі до розділу 10.8

1. Дві плоскі паралельні шини заввишки кожна 150 мм розташовані на відстані 60 мм одна від другої за схемою d (див. зад. 2). Температура однієї шини 77°C . Вважаючи, що поглинальні здібності шин однакові $A_1 = A_2 = 0,6$, визначити температуру другої шини, якщо вони знаходяться в приміщенні з температурою середовища 20°C . Конвективним перенесенням теплоти нехтувати.

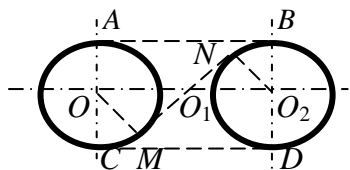
Коментар до задачі. Оскільки температура першої шини найбільша в заданій системі тіл, то вона є джерелом теплоти. Розглядаючи шини, як сірі тіла, довільно розташовані в просторі, результуючий тепловий потік від першої шини до другої визначається по (10.65), де поверхня шини завдовжки 1 м в площині, перпендикулярній площині схеми, $F = h$. Склавши баланс теплоти для другої шини, отримаємо рівняння для визначення шуканої температури. З однієї площини другої шини результуючий потік визначається по (10.67), з другою – як потік, направлений від шини на умовні тіла $F_3 = F_4 = a$, що замикають систему по (10.65). Проте, весь променистий потік, що падає на F_3 і F_4 , повністю поглинається середовищем. Тому F_3 і F_4 слід вважати чорними тілами. Середній кутовий коефіцієнт опромінювання $\bar{\varphi}_{12} = \bar{\varphi}_{21}$ знаходиться по (10.63), де $F_3 = F_4 = a$, $F_1 = F_2 = h$, $F_5 = F_6 = \sqrt{h^2 + a^2}$. Отримуємо $\bar{\varphi}_{12} = \bar{\varphi}_{21} = 0,677$. З умови замкненості для 2-ї шини $\bar{\varphi}_{21} + \bar{\varphi}_{23} + \bar{\varphi}_{24} = 1$ і симетрії системи $\bar{\varphi}_{23} = \bar{\varphi}_{24}$ маємо $\bar{\varphi}_{23} = 0,1675$.

3. Знайти середні кутові коефіцієнти опромінювання в приведених плоских системах тіл.





Коментар до задачі. Розглянемо, наприклад, схему с). Замкнемо систему умовним тілом 3, що з'єднує кінці пластин *a* і *b*. Використовуємо (10.62) і теорему косинусів $\bar{\varphi}_{ab} = 0,5 \cdot (1 + b/a - \sqrt{1 + (b/a)^2 - 2bc \cos \alpha})/a$. Для схеми *e*) замкнемо систему непрозорими тілами 3 і 4, що з'єднують кінці пластин. Проведемо діагоналі 5 і 6, що з'єднують протилежні кінці пластин.



$F_3 = F_4 = F_5 = \sqrt{s^2 + 0,25h^2}$, а $F_6 = \sqrt{s^2 + (1,5h)^2}$. Підставимо знайдене в (10.63) і отримуємо $\bar{\varphi}_{12} = 0,5 \cdot [\sqrt{2,25 + (s/h)^2} - \sqrt{0,25 + (s/h)^2}]$. З умови взаємності $\bar{\varphi}_{12} = \bar{\varphi}_{21}$.

Рисунок 10.11 – До схеми *g*)

Для схеми *g*) використаємо рис. 10.11, де проведені замикаючі площини $AB = CD = s$ і діагональ CB , що складається з дуг $CM = NB$ (в силу симетрії) і дотичної до кіл MN . Для визначення довжини дуг необхідно обчислити центральні кути $\angle COM = \angle BO_2N = \alpha$. Очевидно, що $\angle COM = \angle OO_1M = \arcsin(d/s)$. Дотична $NM = 2NO_1 = \sqrt{s^2 - d^2}$. Маємо з визначення середнього кутового коефіцієнта опромінювання і (10.63) $\bar{\varphi}_{12} = [\sqrt{(s/d)^2 - 1} + \arcsin(d/s) - s/d]/\pi$.

Для схеми *f*) використайте те, що для двох нескінченних площин: заданої та дотичній до ряду труб, середній кутовий коефіцієнт опромінювання = 1, і схему *g*). Решту схем вирішіть самостійно, на підставі сказаного вище.

3. Плоска і циліндрова шини розташовані по схемі *a*) (завдання 2). Діаметр циліндрової шини 100 мм, висота плоскої 100 мм, відстань між шинами $s = 120$ мм. Визначити температуру циліндрової шини, якщо температура плоскої 120 °С, а температура повітря в приміщенні 20 °С. Поглинальні здібності тіл прийняти $A_1 = A_2 = 0,7$. Нехтувати конвективним перенесенням теплоти не можна.

Коментар до задачі. З теплового балансу циліндрової шини (тіло 2) виходить, що результуючий тепловий потік від плоскої шини (тіло 1) до циліндрової шини рівний тепловому потоку від тіла 2 в навколишнє приміщення, який складається з променистої і конвективної складових. Конвективний потік знайдемо з (3.1), а коефіцієнт тепловіддачі з (7.17), врахувавши, що для повітря $(Pr_p/Pr_{cr})^{0,25} = 1$. З (7.17) витікає, що для повітря $\alpha = C \cdot \Delta t^{0,25}$, де Δt – різниця температури поверхня-повітря, а з (3.1) маємо $q_l = C \cdot \Delta t^{1,25} \pi d$. Результуючий потік q_{112} знаходиться по (10.65), а кутові коефіцієнти опромінювання з схеми *a*) попередній задачі. Результуючий потік від тіла 2 в приміщення знаходиться також по (10.65), де з умови замкненості для тіла 2 $\bar{\varphi}_{2n} = 1 - \bar{\varphi}_{21}$, а $\bar{\varphi}_{n2} = 0$ – виходячи з

визначення середнього кутового коефіцієнта опромінювання. У результаті з рівняння теплового балансу отримуємо рівняння з одним невідомим – температурою тіла 2, яке простими арифметичними перетвореннями приводиться до вигляду $(T_2/100)^4 = A - B \cdot \Delta t^{1,25}$, де A і B – постійні. Рівняння вирішується послідовними наближеннями.

4. Дві плоскі шини завтовшки кожна 2 мм розташовано по схемі e (задача 2). Висота шин 100 мм, відстань між шинами 50 мм. Шини розташовані в приміщенні з температурою повітря 20 °С. Температура однієї шини 27 °С, її поглинальна здатність 0,6. Визначити струм, що йде по другій шині, якщо її поглинальна здатність 0,8, а питомий електричний опір $\rho = 0,2 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$.

Коментар до задачі. Припустимо, що в схемі e ліва шина – 1, права – 2. Тепловий баланс шини 1 (на 1 пог. м) складається з: підвода теплоти від шини 2 випромінюванням і відведення теплоти в приміщення випромінюванням і конвекцією. Результуючий потік від шини 2 визначається по (10.62) (помінявши місцями T_1 і T_2) і див. коментар до задачі 2. Конвективний тепловий потік від шини 1 – по (3.1) з обліком (7.15) і коментар до цього рівняння. Променистий потік з лівої грані шини 1 – по (10.67), а з правої – у напрямі умовних тіл 3 і 4, що замикають систему тіл по схемі e по (10.62), але при цьому $A_3 = A_4 = 1$, оскільки весь променистий потік від шини 1 у напрямі цих тіл повністю поглинається. З цього балансу теплових потоків знаходиться температура шини 2. Тепловий баланс шини 2 складається з: теплоти Джоуля при проходженні струму $q_l = I^2 \rho / s$, результуючого потоку до шини 1 і витрат теплоти в приміщення випромінюванням і конвекцією (див. для шини 1). Звідки і визначається струм.

5. Визначити втрати теплоти з погонного метра трубопроводу діаметром 100 мм, вкритого ізоляцією завтовшки 50 мм ($\lambda = 0,2 \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К})$). Температура трубопроводу 150 °С. Температура повітря в приміщенні 20 °С. Ступінь чорноти поверхні ізоляції 0,8.

Коментар до задачі. З поверхні ізоляції в приміщення має місце тепловий потік випромінюванням по (10.67) і конвекцією по (3.1). Для визначення потоку по (10.67) і коефіцієнта тепловіддачі по (7.17) потрібна температура поверхні ізоляції, яка невідома. Слід задатися 3-4-ма значеннями цієї температури в діапазоні 40-60 °С і розрахувати тепловий потік. Тепловий потік з поверхні ізоляції в приміщення дорівнює тепловому потоку теплопровідністю крізь шар ізоляції по (2.18).

6. Дві труби діаметрами 100 мм кожна розташовані горизонтально в приміщенні з температурою повітря 20 °С (схема g задачі 2). Відстань між трубами 150 мм. Визначити тепловий потік, що передається з погонного метра одної труби в приміщення, якщо температура труб однакова і рівна 100 °С, поглинальні здібності труб також рівні і складають 0,7.

Коментар до задачі. Використайте коментар до задач 2 і 3. Слід пам'ятати, що результуючий потік між трубами дорівнює нулю, тому що їх температура однакова.

10.9. Зональний метод розрахунку променистого теплообміну

Суть зонального методу розрахунку променистого теплообміну полягає в тому, що неізотермічна поверхня F (або об'єм V) розділяється на n зон з поверхнею кожної F_i . В межах кожної зони оптичні характеристики і температура вважаються постійними. Отже, безперервні характеристики замінюються дискретними. Очевидно, що із збільшенням n збільшується і точність розрахунку, але зростає і об'єм обчислень. При цьому $F = \sum_{i=1}^n F_i$.

Для ефективного променистого потоку отримуємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$Q_{\text{эф.}i} = E_i F_i + R_i \sum_{k=1}^n Q_{\text{эф.}k} \bar{\varphi}_{k,i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (10.68)$$

і для результуючого потоку

$$Q_{\text{рез.}i} = Q_{\text{эф.}i} + \sum_{k=1}^n Q_{\text{эф.}k} \bar{\varphi}_{k,i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (10.69)$$

Крім того, для замкненої системи

$$\sum_{i=1}^n Q_{\text{рез.}i} = 0. \quad (10.70)$$

Таким чином, є система з $2n$ рівнянь (10.68) і (10.69), що містить стільки ж невідомих: температура n поверхонь і результуючі потоки на цих поверхнях $Q_{\text{рез.}i}$. При завданні n невідомих (температура поверхонь) рішення цієї системи рівнянь дозволяє знайти результуючі потоки. В принципі можуть бути відомими і деякі результуючі потоки, тоді підлягають визначенню відповідні зональні температури.

Зональний метод розрахунку променистого теплообміну знаходить застосування в теплових розрахунках робочого простору полум'яних і електричних печей, при розрахунку топкових пристроїв парогенераторів і інших випадках.

Питання для самоперевірки

1. Перерахуйте основні види променистих потоків. Дайте їх визначення.
2. Дайте визначення випромінювальної здатності.
3. Дайте визначення поглинальною, відбивною і пропускнуою здібностей.
4. Сформулюйте закони випромінювання чорного тіла.
5. Дайте визначення «сірого тіла». Що таке інтегральний ступінь чорноти.
6. Сформулюйте закон Кирхгофа, слідство з цього закону, застосовність.
7. Запишіть щільність результуючого променистого потоку в системі двох нескінченних пластин. Що таке приведений ступінь чорноти?
8. Як впливає установка екрану і його оптичні характеристики на результуючий променистий потік в системі двох пластин?
9. Дайте визначення «кутової щільності» випромінювання. Сформулюйте закон Ламберта.
10. Дайте визначення локального і середнього кутового коефіцієнта опромінювання.

11. Сформулюйте властивості променистих потоків: замкненості, взаємності, затінення. Запишіть рівняння, що характеризують ці властивості.

12. Як визначити середній кутовий коефіцієнт опромінювання.

10.10. Випромінювання газових середовищ

Газоподібні середовища, що складаються з одно- і двоатомних газів, практично діатермічні для теплового випромінювання. Істотну випромінювальну і, відповідно, поглинаючу здатність мають трьох- і більш атомні гази. З них найбільший практичний інтерес для енергетиків представляють CO_2 і H_2O , що містяться в продуктах згорання органічного палива, і менший – SO_2 (через малі концентрації).

На відміну від твердих тіл, що мають безперервний спектр випромінювання, випромінювання газів має селективний характер, тобто процес випромінювання і поглинання відбувається в деякому діапазоні довжин хвиль, а для решти спектру газ є прозорим середовищем. Основні смуги поглинання для CO_2 і H_2O наведені в табл. 10.2.

Крім того, відмінність випромінювання газів від подібного процесу в твердому тілі полягає в тому, що, в зв'язку з малою густиною газу, випромінювання відбувається за всім об'ємом, тоді як для твердого тіла випромінювання відбувається в поверхневому шарі завтовшки до 1 мм.

Таблиця 10.2 – Основні смуги поглинання CO_2 і H_2O

№ смуги	CO_2			H_2O		
	λ_1 μm	λ_2 μm	$\Delta\lambda$ μm	λ_1 μm	λ_2 μm	$\Delta\lambda$ μm
1	2,4	3,0	0,6	1,7	2,0	0,3
2	4,0	4,8	0,8	2,2	3,0	0,8
3	12,5	16,5	4,0	4,8	8,5	3,7
4	–	–	–	12	30	18

Із збільшенням температури газу щільність його зменшується, а ширина смуг поглинання збільшується. Ці чинники проти-

лежним чином впливають на випромінювальну здатність газу: перший чинник її зменшує, а другий – збільшує. Згідно з експериментальними даними для CO_2 і H_2O їх випромінювальні здібності представляються у вигляді

$$E_{\text{CO}_2} = 3,5(pL)^{0,33}(T/100)^{3,5}, \quad (10.71)$$

$$E_{\text{H}_2\text{O}} = 3,5 p^{0,8} L^{0,6} (T/100)^3,$$

де p – парціальний тиск даного газу, L – товщина випромінюючого шару.

Співвідношення (10.71) є інтегральними характеристиками випромінювання газу. Їх аналіз показує, що із зростанням температури випромінювальна здатність газу росте повільніше, ніж випромінювальна здатність чорного тіла. Ввівши, як і раніше, поняття інтегрального ступеня чорноти газу як відношення випромінювальної здатності газу до випромінювальної здатності чорного тіла при тій же температурі, отримаємо

$$\varepsilon_{\text{CO}_2} = E_{\text{CO}_2} / E_0, \quad \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} = E_{\text{H}_2\text{O}} / E_0. \quad (10.72)$$

Для практичних розрахунків побудовані номограми за співвідношеннями (10.72) з урахуванням (10.71) у функції від температури газу по параметру pL . Враховуючи, що по (10.71) випромінювальна здатність водяної пари залежить від p і L по різному (більш істотний вплив робить парціальний тиск і менший – оптична товщина шару), для визначення інтегрального ступеня чорноти водяної пари вводиться поправка на цей чинник залежно від p і твору pL . Зазвичай в літературі ця поправка позначається β . Тоді

$$\varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} = \beta \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} \quad (10.73)$$

При спалюванні природного органічного палива в продуктах згорання міститься як вуглекислий газ, так і водяна пара. Тому в практиці доводиться визначати ступінь чорноти суміші цих газів.

Смуги поглинання вуглекислого газу і водяної пари частково перекриваються (див. табл. 10.2), тобто випромінювання одного газу поглинається другим газом. Ця обставина приводить до того, що сумарна випромінювальна здатність (а, відповідно, і ступінь чорноти) суміші газів виявляється менше, ніж арифметична сума випромінювальних здібностей компонентів. Для суміші вуглекислого газу і водяної пари ступінь чорноти

$$\varepsilon_{\text{см}} = \varepsilon_{\text{CO}_2} + \beta \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} - \Delta\varepsilon, \quad (10.74)$$

де наближено можна врахувати $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{\text{CO}_2} \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}}$ – поправка на перекривання смуг поглинання.

Для більш точних розрахунків ця поправка визначається за спеціальними номограмами залежно від концентрації кожного з компонентів.

На наведених нижче рис. 10.11–10.13 представлені номограми для розрахунку ступеня чорноти CO_2 і H_2O .

10.11. Поглинання енергії газовим середовищем

Розглянемо паралельний пучок монохроматичного випромінювання, що падає на деякий газовий поглинаючий шар (рис.10.14). Припустимо, що спектральна інтенсивність падаючого випромінювання $J_{\lambda\text{вх}}$, те ж, що пройшло через шар – $J_{\lambda\text{вих}}$. Згідно гіпотезі Бугера, відносна зміна щільності монохроматичного випромінювання при проходженні через поглинаюче середовище пропорційна довжині шляху променя в середовищі. Тоді, якщо при зміні координати x на dx , інтенсивність випромінювання змінюється на dJ_λ , отримуємо

$$dJ_\lambda / J_\lambda = -k \cdot dx, \quad (10.75)$$

де k – коефіцієнт послаблення. Вважаючи k постійним, проінтегруємо (10.75) по товщині шару. Отримуємо

$$\ln(J_{\lambda\text{вих}} / J_{\lambda\text{вх}}) = -kL, \quad J_{\lambda\text{вих}} / J_{\lambda\text{вх}} = e^{-kL}. \quad (10.76)$$

Відношення $J_{\lambda\text{вих}} / J_{\lambda\text{вх}}$ є пропускнуою монохроматичною здатністю газу. Вважаючи, що газовий шар не віддзеркалює падаюче випромінювання ($R = 0$), отримуємо поглинальну монохроматичну здатність газу (рис. 10.11).

$$A_\lambda = 1 - e^{-kL}$$

(10.77)

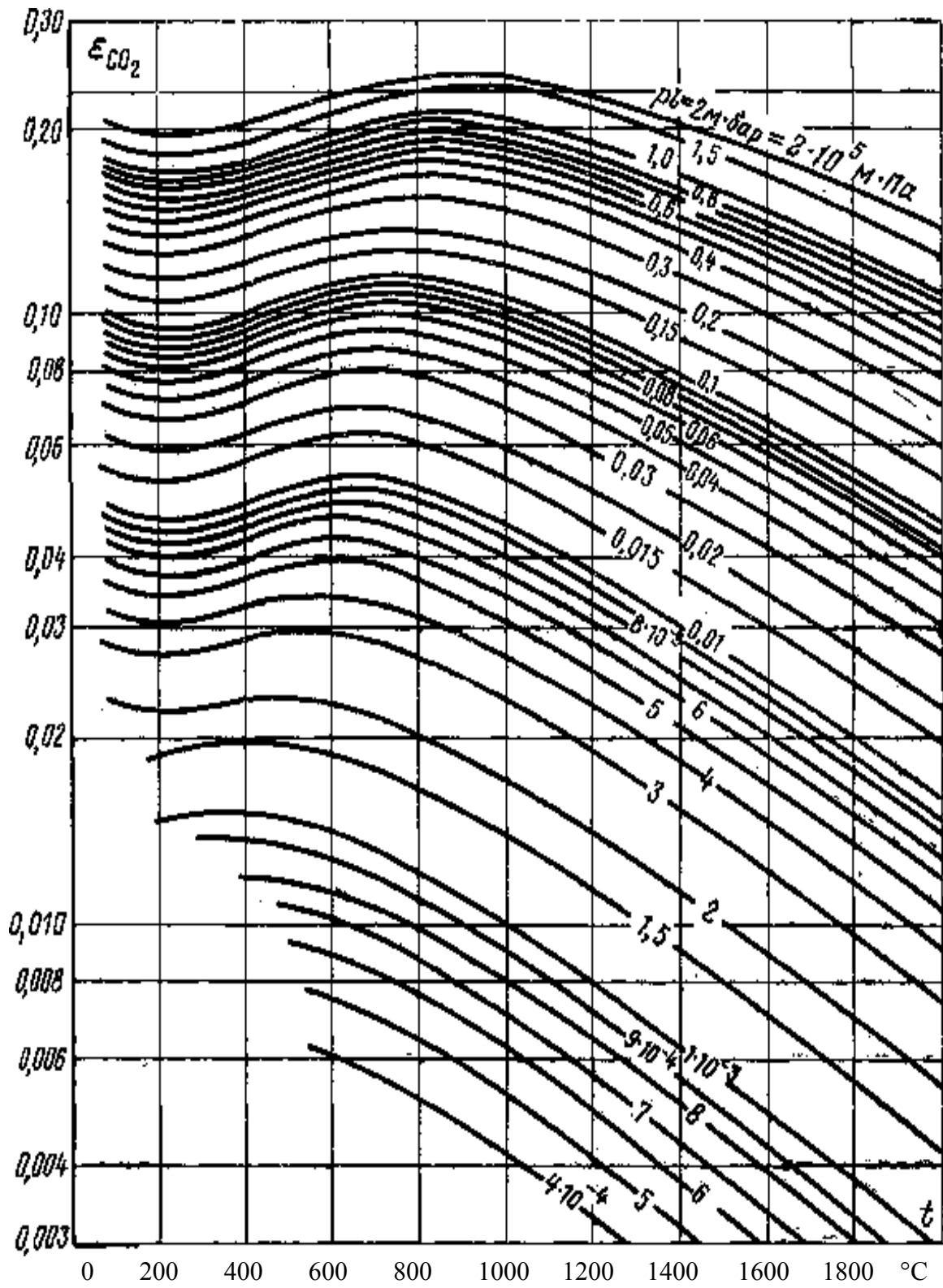


Рисунок 10.11 – Ступінь чорноти CO₂

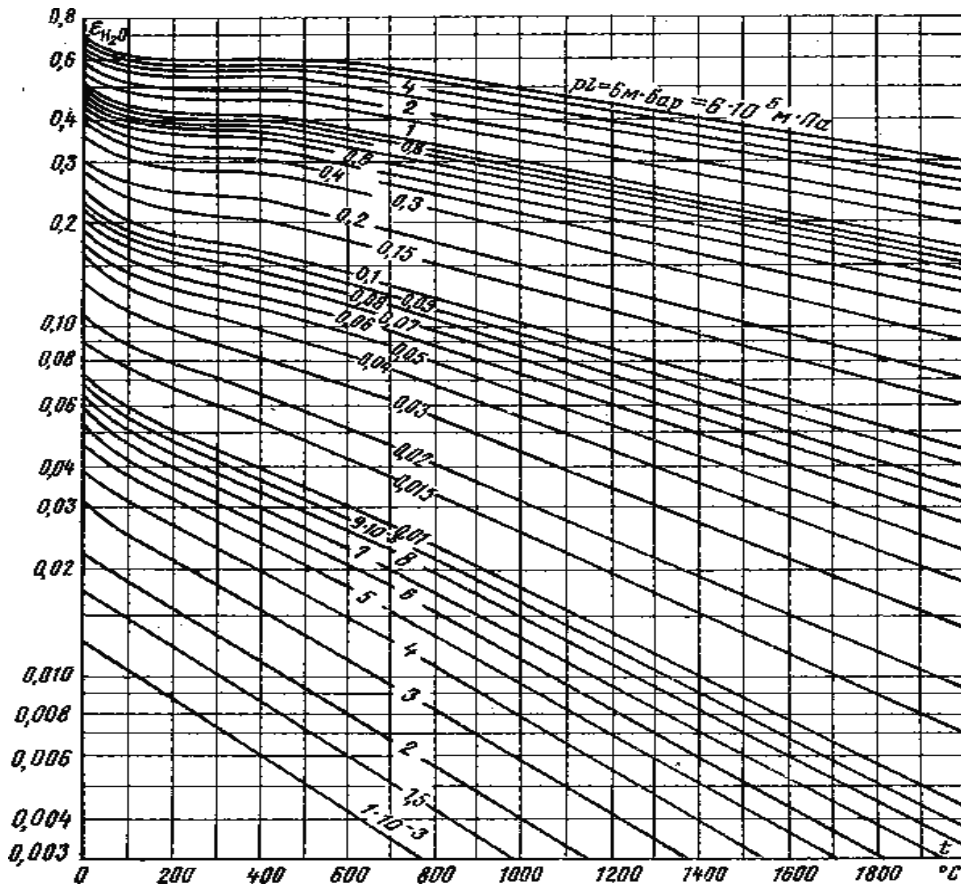


Рисунок 10.12 – Ступінь чорноти H₂O

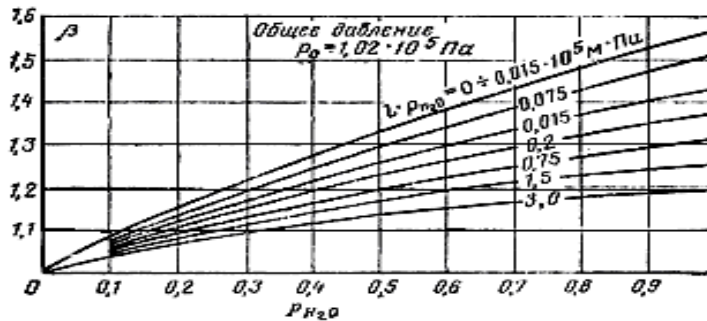


Рисунок 10.13 – Поправковий коефіцієнт до ступеня чорноти H₂O

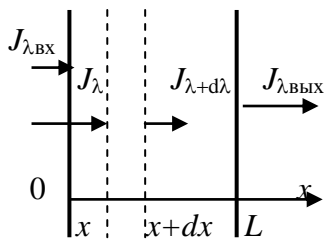


Рисунок 10.14 – Монохроматичний променистий потік

Сумуючи (10.76) по всьому спектру поглинання газу (по довжинах хвиль, що входять до спектру), отримуємо

$$A = 1 - e^{-\bar{k}L}, \quad (10.78)$$

де \bar{k} – деякий середній коефіцієнт послаблення інтегрального випромінювання, A – інтегральна поглинальна здібність газового шару.

При аналізі випромінювальної здатності газів було відмічено, що на неї впливає і парціальний тиск (концентрація) випромінюючого середовища. Тому

Беєром була внесена поправка до закону Бугера, згідно якої відносна зміна

щільності монохроматичного випромінювання при проходженні променистого потоку через газовий поглинаючий шар пропорційна довжині шляху променю і концентрації поглинаючого середовища.

Тоді інтегральна поглинальна здатність газового шару вийде у вигляді

$$A = 1 - e^{-\bar{k} pL}, \quad (10.79)$$

де p – концентрація (парціальний тиск) поглинаючого газу.

Для практичного розрахунку променистого теплообміну в топках парогенераторів при спалюванні різних палив, а також в робочому просторі полум'яних печей при опалюванні їх органічним паливом, можна використовувати рекомендоване Ключниковим експериментальне значення середнього коефіцієнта поглинання газового шару

$$\bar{k} = \frac{0,78 + 1,6 p_{\text{H}_2\text{O}}}{\sqrt{p_{\text{сум}} L}} \left(1 - 0,38 \frac{T}{1000} \right), \quad (10.80)$$

де $p_{\text{сум}}$ – сумарний парціальний тиск CO_2 і H_2O (в барах).

У зв'язку з тим, що спектр випромінювання, що падає на газовий поглинаючий шар, залежить від температури випромінювача (стінки, якщо розглядається теплообмін між газом і оболонкою), можна використовувати метод розрахунку поглинальної здатності газу, заснований на номограмах ступеня чорноти газів (приведені вище). Для цього заздалегідь визначається добуток pL для CO_2 і H_2O . По температурі випромінювача (стінки) за допомогою номограм визначається ступені чорноти $\varepsilon_{\text{CO}_2}(t_{\text{ст}})$, $\varepsilon_{\text{H}_2\text{O}}(t_{\text{ст}})$ та поправка на відхилення випромінювання (поглинання) H_2O від закону Бугера – Беєра β . Підсумкова поглинальна здатність газової суміші визначається як

$$A_{\text{г}} = \varepsilon_{\text{CO}_2}(t_{\text{ст}}) (T_{\text{г}}/T_{\text{ст}})^{0,65} + \beta \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}}(t_{\text{ст}}) (T_{\text{г}}/T_{\text{ст}})^{0,45} - \Delta A, \quad (10.81)$$

де ΔA – поправка на перекривання смуг поглинання CO_2 і H_2O , визначається як

$$\Delta A = A_{\text{CO}_2} A_{\text{H}_2\text{O}}. \quad (10.82)$$

При пиловому спалюванні твердого палива в топках парогенераторів в продуктах згорання міститься дуже велика кількість попелових частинок з розмірами від мікронів до міліметрів. Концентрація цих частинок складає від 10 до 200 г/м³, а ступінь їх чорноти близька до одиниці, оскільки поверхня частинок пориста. Очевидно, що ці частинки істотним чином впливають на оптичні властивості газового середовища.

Експериментальні дослідження оптичних властивостей запилених потоків газу показали, що концентрація пилу і оптична товщина шару однаково впливають на оптичні властивості цього потоку. Тоді для поглинальної здатності пилу в потоці газу можна використовувати закон Бугера–Беєра у вигляді

$$A_{\text{п}} = 1 - e^{-k F_{\text{п}} m L} = 1 - e^{-k_{\text{п}} m L}, \quad (10.83)$$

де $k F_{\text{п}} = k_{\text{п}}$ – коефіцієнт послаблення випромінювання пиловими частками, m – концентрація пилу, $F_{\text{п}}$ – питома поверхня пилових частинок.

Для коефіцієнта ослаблення запиленого потоку в топках парогенераторів при спалюванні кам'яного вугілля запропоновано співвідношення

$$k_{\pi} = 7\sqrt[3]{T_{\Gamma}^2 d^2}, \quad (10.84)$$

де T_{Γ} – абсолютна температура газу, d – середнє геометричний розмір пилових частинок.

Загальна поглинальна здатність запиленого газового потоку визначається як

$$A = 1 - e^{-(k_{\pi} m + \bar{k} p)L}. \quad (10.85)$$

Якщо при спалюванні природного газу відбувається його реформація з виділенням вуглецю (сажі), то при визначенні оптичних властивостей такого газового потоку необхідно враховувати і поглинання випромінювання частинками сажі.

10.12. Ефективна довжина шляху променю в поглинаючому середовищі

Як випромінювання, так і поглинання енергії газами залежить від оптичної довжини шляху променю в газовому середовищі. Паралельний променистий потік в практиці не зустрічається, тому виникає питання визначення середньої (ефективної) довжини шляху променю. Розглянувши простий процес перенесення теплоти між двома паралельними пластинами, розділеними поглинаючим середовищем, отримаємо очевидний факт, що довжина променя залежить від відхилення його від нормалі до поверхні. Середню довжину шляху променю в простих схемах можна визначити інтегруванням по кутовій координаті. Проте, в складніших випадках це практично неможливо. Тому в практиці розрахунку променистого теплообміну в поглинаючих середовищах ефективну довжину шляху променя визначають за співвідношенням

$$L_{\text{еф}} = 3,6 \frac{V}{F}, \quad (10.86)$$

де V – випромінюючий газовий об'єм, F – поверхня, що поглинає випромінювання.

Тоді для простих випадків отримаємо: система двох паралельних нескінченних пластин на відстані h одна від одної $L_{\text{еф}} = 1,8h$; порожнистий нескінченний циліндр $L_{\text{еф}} = 0,9d$; нескінченний квадратний канал із стороною a – $L_{\text{еф}} = 0,9a$.

10.13. Променистий теплообмін між газом і оболонкою

Розглянемо променистий теплообмін між газом з температурою T_{Γ} , випромінювальною здатністю E_{Γ} і поглинальною здатністю A_{Γ} і замкненим об'ємом з поверхнею F , температурою $T_{\text{ст}}$, випромінювальною здатністю $E_{\text{ст}}$, поглинальною здатністю $A_{\text{ст}}$ (рис.10.16). Припустимо, що $T_{\Gamma} > T_{\text{ст}}$.

На одиницю поверхні, що оточує об'єм газу, падає променистий потік $E_{\text{пад}} = E_{\Gamma}$. Стінка поглинає потік випромінювання в кількості $E_{\text{погл.с}} = A_{\text{ст}} E_{\Gamma}$ і

віддзеркалює (при $D=0$) $E_{\text{вд.с}} = (1-A_{\text{ст}})E_{\text{Г}}$. Віддзеркалений потік проходить через поглинаючий газ, частково поглинається їм і знову може потрапити на поверхню.

З одиниці поверхні в газове середовище випромінюється потік $E_{\text{ст}}$. Цей потік частково поглинається газовим середовищем в кількості $E_{\text{погл.Г}} = A_{\text{Г}}E_{\text{ст}}$, а решта потоку проходить через газ ($R_{\text{Г}} = 0$) і знову потрапляє на поверхню, де частково поглинається поверхнею, а частково відбивається.

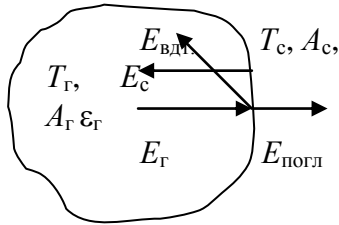


Рисунок 10.15 – Схема променистого теплообміну між газом і оболонкою

Нехтуючи впливом віддзеркалених потоків (обмежившись одним туром випромінювання – поглинання енергії) можемо визначити щільність результуючого випромінювання як різницю потоків поглиненого стінкою (поверхнею) і поглиненого газом. Отримаємо, використовуючи закон Стефана - Больцмана,

$$q_{\text{рез}} = E_{\text{погл.ст}} - E_{\text{погл.Г}} = A_{\text{ст}} \varepsilon_{\text{Г}} C_0 (T_{\text{Г}}/100)^4 - A_{\text{Г}} \varepsilon_{\text{ст}} C_0 (T_{\text{ст}}/100)^4.$$

Враховуючи, що згідно слідства із закону Кирхгофа для твердих тіл можна з достатнім ступенем точності прийняти $A_{\text{ст}} = \varepsilon_{\text{ст}}$, отримуємо

$$q_{\text{рез}} = \varepsilon_{\text{ст}} C_0 [\varepsilon_{\text{Г}} (T_{\text{Г}}/100)^4 - A_{\text{Г}} (T_{\text{ст}}/100)^4]. \quad (10.87)$$

Отриманий вираз є наближенням, оскільки не враховує подальші тури процесу поглинання – віддзеркалення променистого потоку. Ці тури повинні збільшити результуючий потік через значний (як правило) ступень чорноти стінки. Один з можливих шляхів урахування вказаної обставини – введення ефективного ступеня чорноти стінки в (10.87) як

$$\varepsilon_{\text{еф.ст}} = (\varepsilon_{\text{ст}} + 1)/2. \quad (10.88)$$

Тоді остаточно для результуючого променистого потоку між газом і стінкою отримаємо

$$q_{\text{рез}} = \varepsilon_{\text{еф.ст}} C_0 [\varepsilon_{\text{Г}} (T_{\text{Г}}/100)^4 - A_{\text{Г}} (T_{\text{ст}}/100)^4]. \quad (10.89)$$

Існує інший метод розрахунку результуючого променистого потоку між газом і твердою оболонкою, заснований на понятті граничного ступеня чорноти газового шару. При нескінченно великій оптичній товщині шару газу ($pL \rightarrow \infty$) через селективність спектру випромінювання газу його ступінь чорноти виявляється істотно менше одиниці, тобто випромінювальна здатність газу виявляється нижчою, ніж у чорного тіла. На рис. 10.16 показані граничні ступені чорноти CO_2 і H_2O . Використовуючи відомий зв'язок між результуючим і ефективним променистими потоками, можна записати для системи «газ – стінка» очевидне співвідношення

$$q_{\text{рез}} = (E_{\text{еф.Г}})_{\Delta\lambda} - (E_{\text{еф.ст}})_{\Delta\lambda}, \quad (10.90)$$

де символ $\Delta\lambda$ указує, що ефективний потік газу і стінки розглядається тільки в діапазонах довжин хвиль для зон поглинання газу. На наведеному нижче рис.10.17 умовно показано дві смуги поглинання ($\lambda_1 - \lambda_2$ і $\lambda_3 - \lambda_4$). Щільність

ефективного променистого потоку газу пов'язана з результируючим випромінюванням відомим співвідношенням, отриманим раніше

$$E_{\text{эф.г}} = (E_{0\text{г}})_{\Delta\lambda} + (1 - 1/\varepsilon_{\text{г}\Delta\lambda})q_{\text{рез.г}},$$

де символ $\Delta\lambda$ розглянуто вище, а $(E_{0\text{г}})_{\Delta\lambda} = \tilde{\varepsilon}_{\text{г}}(t_{\text{г}})C_0(T_{\text{г}}/100)^4$.

Щільність ефективного променистого потоку стінки, відповідно, запишеться

$$E_{\text{эф.ст}} = (E_{0\text{ст}})_{\Delta\lambda} + (1 - 1/\varepsilon_{\text{ст}\Delta\lambda})q_{\text{рез.ст}},$$

де

$$(E_{0\text{ст}})_{\Delta\lambda} = \tilde{\varepsilon}_{\text{ст}}(t_{\text{ст}})C_0(T_{\text{ст}}/100)^4,$$

тобто випромінювальна здатність стінки у вказаному діапазоні довжин хвиль при граничному ступені чорноти газу, визначеному по температурі стінки.

Ступінь чорноти $\varepsilon_{\text{г}\Delta\lambda}$ може бути визначена як відношення площин (див. рис.10.17)

$$\varepsilon_{\text{г}\Delta\lambda} = \frac{\text{пл}(dc) + \text{пл}(gh)}{\text{пл}(ab) + \text{пл}(ef)} = \frac{\varepsilon_{\text{г}}}{\tilde{\varepsilon}_{\text{г}}}. \quad (10.91)$$

Якщо врахувати, що $q_{\text{рез.г}} = -q_{\text{рез.ст}}$, а $\varepsilon_{\text{ст}\Delta\lambda} = \varepsilon_{\text{ст}}$, тобто спектральна ступінь чорноти стінки дорівнює інтегральній, то з (10.90) легко отримати

$$q_{\text{рез}} = \frac{C_0[\tilde{\varepsilon}_{\text{г}}(t_{\text{г}})(T_{\text{г}}/100)^4 - \tilde{\varepsilon}_{\text{г}}(t_{\text{ст}})(T_{\text{ст}}/100)^4]}{\frac{\tilde{\varepsilon}_{\text{г}}}{\varepsilon_{\text{г}}} + \frac{1}{\varepsilon_{\text{ст}}} - 1}. \quad (10.92)$$

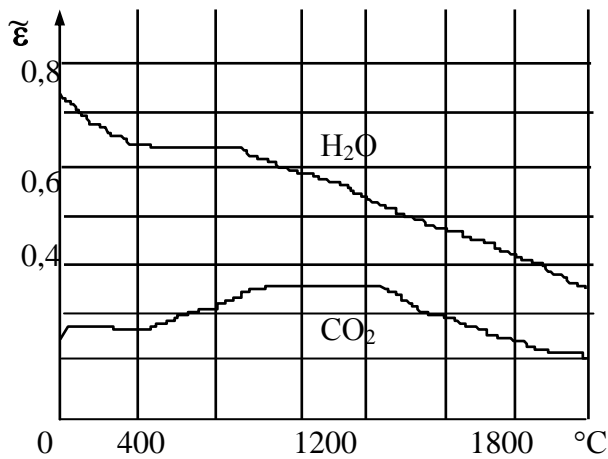


Рисунок 10.16 – Граничні ступені чорноти CO_2 і H_2O

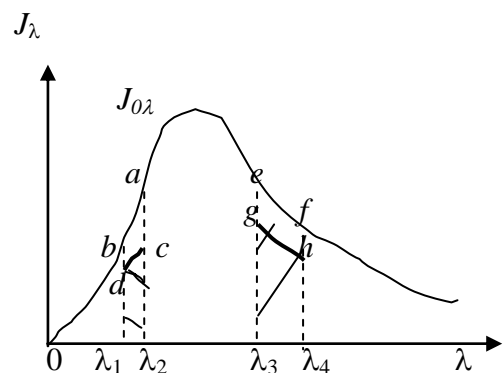


Рисунок 10.17 – До визначення розрахункового ступеню чорноти газу

Слід зазначити, що при розрахунку за останньою методикою променистого теплообміну суміші газів із стінкою слід граничний ступінь чорноти суміші газів визначати так само, як і ступінь чорноти з урахуванням часткового перекриття спектрів поглинання водяної пари і вуглекислого газу.

Через селективності спектру випромінювання і поглинання газів розрахунок результируючого променистого потоку є достатньо складним завданням. Розглянуті вище методи такого розрахунку досить наближені.

Точніші розрахунки такого роду повинні враховувати всі особливості спектру випромінювання-поглинання газів.

Питання для самоперевірки

1. Які газові середовища випромінюють і поглинають енергію?
2. У чому відмінність випромінювання і поглинання енергії газами від тих же процесів в твердих тілах?
3. Від яких чинників залежить випромінювальна здатність CO_2 і H_2O ?
4. Як визначається ступінь чорноти суміші газів (зокрема CO_2 і H_2O)?
5. Сформулюйте і запишіть закон Бугера. У чому сенс поправки Бєєра до закону Бугера?
6. У чому сенс поняття «ефективна довжина шляху променю». Як визначається ця величина?
7. Запишіть щільність результуючого випромінювання між газом і оболонкою.
8. У чому сенс поняття «ефективний ступінь чорноти стінки»?

Задачі до розділів 10.10 – 10.13

1. Коридорний пучок труб діаметром 45 мм, розташованих з кроком по фронту і в глибину пучка 95 мм, омивається поперечним потоком топкових газів з температурою 600 °С. Швидкість набігаючого потоку газу 6 м/с. Парціальний тиск $p_{\text{CO}_2} = 0,12$ бар; $p_{\text{H}_2\text{O}} = 0,14$ бар. Визначити середній тепловий потік, що передається погонному метру труб, якщо по ходу газу розташовано 10 труб з температурою поверхні 200 °С і ступенем чорноти 0,8.

Коментар до задачі. Променистий тепловий потік визначається з (10.89) з урахуванням поверхні 1 пог.м. Ступінь чорноти і поглинальна здатність суміші газів – з (10.74) і (10.81) за допомогою номограм рис. 10.11-10.13. Ефективну довжину шляху променя визначите по (10.86), для чого розглянете один крок труб по фронту і в глибину пучка. Тепловий потік конвекцією знайдіть, використовуючи коментар до задачі 4 розділу 6.

2. По футерованому газоходу з діаметром 500 мм течуть топкові гази з середньою температурою 700°С. Швидкість газів 5 м/с. Парціальний тиск $p_{\text{CO}_2} = 0,1$ бар. $p_{\text{H}_2\text{O}} = 0,13$ бар. Визначити втрати теплоти на погонний метр газоходу, якщо температура футеровки 400 °С, а її ступінь чорноти $\varepsilon_{\text{ст}} = 0,8$.

Коментар до задачі. Використовуйте коментар до попередньої задачі. Тепловий потік конвекцією знайдіть, використовуючи (3.1) і (5.11).

3. Як зміняться втрати теплоти, якщо газохід прямокутного перерізу з розмірами 0,5 x 1 м, а решта умов залишається без зміни?

11. ОСНОВИ МАССОБМІНУ

У техніці багато процесів теплообміну безпосередньо пов'язано з перенесенням маси компонентів середовища, якщо в процесі бере участь багатокомпонентна суміш (принаймні, суміш двох компонентів – бінарна суміш). Це відбувається при конденсації пари з парогазової суміші, випаровування рідини в парогазовий потік і т.д. При цьому парове

середовище проникає в потік двокомпонентної суміші, що впливає на процес течії і, відповідно, на теплообмін.

Дифузією називають спонтанний процес встановлення в багатокомпонентному середовищі рівноважного розподілу концентрації компонентів. В однорідній за температурою і тиском суміші процес дифузії направлений на вирівнювання концентрації в системі. При цьому відбувається перенесення речовини з області більшої в область меншої концентрації. Аналогічно теплообміну, масообмін може відбуватися як на молекулярному (дифузія), так і на молярному рівні.

Дифузія характеризується потоком маси через ізоконцентраційну поверхню у напрямі нормалі до цієї поверхні. Позначимо потік маси через деяку поверхню G [кг/с]. Тоді щільність потоку маси $g = dG/dF$ [кг/(м² с)]. Щільність потоку маси є векторною величиною, і в разі однорідної за температурою і тиском суміші дифузійний потік маси визначається законом Фіка

$$g_{m,i} = -D_i \frac{d\rho_i}{dn}, \quad (11.1)$$

де ρ_i – концентрація (густина) даного компонента; D_i – коефіцієнт дифузії по концентрації. Знак мінус в (11.1), як і в законі Фур'є, вказує, що напрям потоку маси і градієнта концентрації зворотні за напрямом. У разі бінарної суміші щільності потоку маси першого і другого компонентів є рівними за величиною і зворотними за напрямом, також рівні і градієнти концентрації. Тоді витікає, що і коефіцієнти дифузії рівні ($D_1 = D_2$).

Якщо компоненти суміші можна вважати ідеальними газами, то щільність дифузійного потоку маси можна записати у вигляді

$$g_{m,i} = -D_{p,i} \frac{dp_i}{dn}, \quad (11.2)$$

де p_i – парціальний тиск компонента; $D_{p,i} = D/(R_i T)$ – коефіцієнт дифузії по парціальному тиску.

Враховуючи рівняння стану ідеального газу, отримаємо

$$D = D_{p,1} R_1 T = D_{p,2} R_2 T, \quad (11.3)$$

або

$$D_{p,1}/D_{p,2} = R_2/R_1 = \mu_1/\mu_2. \quad (11.4)$$

де μ_1, μ_2 – молекулярні маси компонентів.

Якщо температура суміші газів змінна за об'ємом, то виникає термодифузія (ефект Сорре). При цьому масивніші молекули намагаються переміститися в область зниженої температури. Термодифузія призводить до виникнення градієнта концентрації, що, у свою чергу, обумовлює виникнення концентраційної дифузії, яка намагається вирівняти концентрації речовин. З часом термодифузія і концентраційна дифузія врівноважуються. Наслідком концентраційної дифузії є виникнення різниці температури в результаті дифузійного змішення газів, що спочатку мали однакову температуру (дифузійний термoeфект або ефект Дюфо).

Наприклад, при змішенні водню і азоту виникає різниця температури порядку декілька градусів. Чим менше відрізняються молекулярні маси газів, що змішуються, тим менше ефект Дюфо.

Якщо в об'ємі газів є градієнт повного тиску, то виникає бародифузія. Коефіцієнти термодифузії і бародифузії на декілька порядків менші, ніж у концентраційної дифузії. Тому надалі розглядається тільки концентраційна дифузія (назвемо її просто «дифузія»).

Окрім дифузійного перенесення маси, в рухомому середовищі має місце і молекулярне перенесення маси, щільність потоку якого для i -го компоненту

$$g_{k,i} = \rho_i w. \quad (11.5)$$

У загальному випадку щільність потоку маси дорівнює сумі молекулярного і молярного перенесення, тобто

$$g_i = g_{m,i} + g_{k,i}. \quad (11.6)$$

У двокомпонентному середовищі при постійному повному тиску кількість маси в одиниці об'єму повинна залишатися постійною, тому щільність потоку маси дифундуючих речовин повинна бути рівні за величиною і зворотні за напрямом, тобто $g_1 = -g_2$. Разом з потоком маси переноситься і тепловий потік рівний

$$q = g_1 i_1 + g_2 i_2 = g_1 (i_1 - i_2) = g_1 (c_{p1} - c_{p2}) t. \quad (11.7)$$

Дифузійний переніс теплоти відсутній при $i_1 = i_2$, $c_{p1} = c_{p2}$. Загальний тепловий потік в рухомому середовищі має вигляд

$$q = -\lambda \text{grad}(t) + \rho w i + g_1 (i_1 - i_2). \quad (11.8)$$

Таким чином, щільність теплового потоку в рухомому середовищі залежить і від дифузійного потоку маси.

11.1. Диференціальні рівняння тепло- і масообміну

Для визначення теплового потоку, що переноситься від рухомого середовища до поверхні тіла необхідно мати поля температури, швидкості і концентрації речовини в прикордонному шарі. Раніше були отримані рівняння для однокомпонентного середовища без дифузійного перенесення теплоти. Необхідно отримати рівняння для двокомпонентного середовища.

а/. Рівняння енергії

Рівняння енергії для однокомпонентного середовища отримано раніше

$$\rho \frac{\partial i}{\partial \tau} = -\text{div}(q). \quad (11.9)$$

Врахувавши (11.8), визначимо складові правої частини рівняння (11.9). Отримуємо:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \rho_1 \left(w_x \frac{\partial i}{\partial x} + i \frac{\partial w_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial [(i_1 - i_2) g_{x1}]}{\partial x}, \quad (11.10a)$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial y} = -\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \rho_1 \left(w_y \frac{\partial i}{\partial y} + i \frac{\partial w_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial [(i_1 - i_2) g_{y1}]}{\partial y}, \quad (11.10b)$$

$$\frac{\partial q_z}{\partial z} = -\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \rho_1 \left(w_z \frac{\partial i}{\partial z} + i \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial [(i_1 - i_2) g_{z1}]}{\partial z}. \quad (11.10в)$$

Підставивши отримані часткові похідні у (11.9) і врахувавши рівняння нерозривності, отримуємо

$$\rho_1 \frac{Di}{d\tau} = \lambda \nabla^2 t - \operatorname{div}[(i_1 - i_2) g_1]. \quad (11.11)$$

Вважаючи, що перенесення маси здійснюється тільки концентраційною дифузиею і, використовуючи закон Фіка, записаний через відносну концентрацію $m_1 = \rho_1/\rho$, де ρ_1 – густина даного компонента, ρ – густина суміші, отримуємо

$$g_1 = -\rho D \nabla m_1. \quad (11.12)$$

Остаточно рівняння енергії отримуємо у вигляді

$$\rho \frac{Di}{d\tau} = \lambda \nabla^2 t + [(i_1 - i_2) \rho D \nabla m_1]. \quad (11.13)$$

У рівняння (11.13) додатково входить відносна концентрація компонента в суміші. Таким чином, за наявності дифузійного перенесення маси система диференціальних рівнянь конвективного теплообміну стає незамкненою. Необхідно мати диференціальне рівняння, що описує розподіл концентрації компонентів суміші.

б/. Рівняння масообміну

Для знаходження рівняння, що описує розподіл концентрації даного компонента в рухомій суміші, виділимо в рідині нерухомий елементарний об'єм, що не деформується, з ребрами dx , dy , dz , і розглянемо для нього баланс маси, нехтуючи термо- і бародифузиею. Вважатимемо рідину нестискуваною.

По осі x в даний об'єм вноситься маса $M_{1x} = g_{1x} dy dz d\tau$, а уноситься маса $M_{1(x+dx)} = g_{1(x+dx)} dy dz d\tau$. Розкладаючи $g_{1(x+dx)}$ в ряд Тейлора біля точки x , і обмежуючись двома членами розкладу, отримуємо, що в елементі акумульована маса

$$dM_{1x} = M_{1x} - M_{1(x+dx)} = -\frac{\partial g_{1x}}{\partial x} dv d\tau. \quad (a)$$

Аналогічно можна отримати і для решти осей:

$$dM_{1y} = M_{1y} - M_{1(y+dy)} = -\frac{\partial g_{1y}}{\partial y} dv d\tau, \quad (b)$$

$$dM_{1z} = M_{1z} - M_{1(z+dz)} = -\frac{\partial g_{1z}}{\partial z} dv d\tau. \quad (c)$$

Акумуляція маси в елементі, що не деформується, призводить до зміни густини даного компонента в цьому об'ємі, тобто

$$dM_1 = dM_{1x} + dM_{1y} + dM_{1z} = \partial \rho_1 dv = \rho \partial m_1 dv. \quad (d)$$

Підставивши (a),(b),(c) в (d) і скоротивши, отримуємо:

$$\rho \frac{\partial m_1}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(g_1) \quad (e)$$

Враховуючи (11.6) і умову нестискуваності, отримаємо диференціальне рівняння масообміну:

$$\frac{Dm_1}{d\tau} = D \left(\frac{\partial^2 m_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 m_1}{\partial z^2} \right) = D \nabla^2 m_1. \quad (11.14)$$

11.2. Тепло- і масовіддача

По аналогії з конвективним теплообміном процес сумісного молекулярного і молярного перенесення маси в рухомому багатокомпонентному середовищі називають конвективним масообміном. За наявності масообміну ускладнюється і процес теплообміну, оскільки здійснюється додаткове перенесення теплоти за рахунок масообміну. Практичний інтерес має процес теплообміну і масообміну при випаровуванні, конденсації, сублімації і інших подібних процесах. Поверхня рідкої фази (при випаровуванні або конденсації) або твердої фази (при сублімації) грає роль напівпроникної поверхні, біля якої відбуваються процеси теплообміну і дифузії. Наприклад, при конденсації пари з парогазової суміші плівка конденсату проникна для молекул пари і непроникна для молекул газу.

Аналогічно тепловіддачі масообмін між паровою фазою і рідкою (твердою) поверхнею називають «масовіддачею». При цьому аналогічно закону Ньютона для тепловіддачі

$$q = \alpha(t_{\text{ст}} - t_0) \text{ [Вт/м}^2\text{]},$$

для практичних розрахунків масовіддачі використовують

$$g = b(\rho_{\text{ст}} - \rho_0) \text{ [кг/(м}^2\text{с)]}, \quad (11.15)$$

де b – коефіцієнт масовіддачі, віднесений до різниці концентрації дифундуючої речовини на поверхні ($\rho_{\text{ст}}$) і в об'ємі (ρ_0). Вважаючи компоненти суміші ідеальними газами та перейшовши від концентрації до парціального тиску, (11.15.) можна записати

$$g = b_p(p_{\text{ст}} - p_0), \quad (11.15a)$$

де $b_p = b/RT$ – коефіцієнт масовіддачі віднесений до різниці парціального тиску.

Розглянемо (рис.11.1) процес конденсації пари з парогазової суміші на поверхні плівки конденсату при постійному повному тиску суміші. Внаслідок конденсації пари на поверхні плівки парціальний тиск пари $p_{\text{пс}} < p_{\text{по}}$, і має місце дифузійне перенесення маси пари у напрямі плівки $g_{\text{п}}$. Оскільки при постійному повному тиску суміші $dp_{\text{п}}/dx = -dp_{\text{г}}/dx$, то газ повинен дифундувати в напрямі, зворотному напрямку дифузії пари, тобто від плівки в середовище. Очевидно, що дифузійне переміщення газу від плівки в середовище повинне компенсуватися молярним (конвективним) перенесенням маси з об'єму у напрямку плівки (напівпроникній поверхні).

Цей конвективний потік маси, що виникає біля напівпроникної поверхні, називають «стефановим потоком» (по імені болгарського фізика Стефана, що вперше розглянув цей процес). Позначимо швидкість цього потоку $W_{\text{ст}}$.

Тоді сумарний потік пари на поверхні плівки можна представити у вигляді

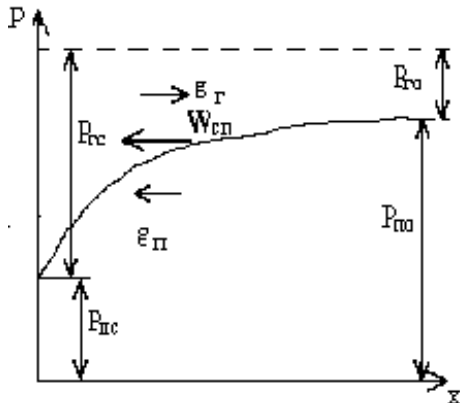


Рисунок 11.1 – Стефанів потік маси у напівпроникної поверхні

$$g_{\text{п.ст}} = -D_{\text{рп}} \left(\frac{dp_{\text{п}}}{dx} \right)_{\text{ст}} + \rho_{\text{п.ст}} W_{\text{ст.ст}}, \quad (11.16)$$

а потік газу на поверхні плівки

$$g_{\text{г.ст}} = -D_{\text{рг}} \left(\frac{dp_{\text{г}}}{dx} \right)_{\text{ст}} + \rho_{\text{г.ст}} W_{\text{ст.ст}}. \quad (11.17)$$

Оскільки плівка непроникна для газу, то потік газу на поверхні плівки повинен дорівнювати нулю. Тоді швидкість стефанового потоку на поверхні плівки з урахуванням (11.4)

$$W_{\text{ст.ст}} = - \frac{D_{\text{р.п}} R_{\text{п}}}{\rho_{\text{г.ст}} R_{\text{г}}} \left(\frac{dp_{\text{п}}}{dx} \right)_{\text{ст}}. \quad (11.18)$$

Підставивши (11.18) в (11.16), отримуємо щільність потоку пари на поверхні плівки:

$$g_{\text{п.ст}} = -D_{\text{р.п}} \left(\frac{dp_{\text{п}}}{dx} \right)_{\text{ст}} \left(1 + \frac{\rho_{\text{п.ст}} R_{\text{п}}}{\rho_{\text{г.ст}} R_{\text{г}}} \right) = -D_{\text{р.п}} \frac{P}{p_{\text{г.ст}}} \left(\frac{dp_{\text{п}}}{dx} \right)_{\text{ст}}. \quad (11.19)$$

Рівняння (11.19) було вперше отримане Стефаном і відрізняється від закону Фіка, що відноситься до умови безперешкодного розповсюдження обох компонентів суміші при дифузії, співмножником $(P/p_{\text{г.ст}})$, який враховує додаткове конвективне перенесення маси, що виникає біля напівпроникної поверхні. Прирівнюючи (11.15а) і (11.19), отримаємо коефіцієнт масовіддачі, віднесений до різниці парціального тиску у вигляді

$$b_p = -D_{\text{р.п}} \frac{P/p_{\text{г.ст}}}{p_{\text{п.с}} - p_{\text{п.о}}} \left(\frac{dp_{\text{п}}}{dx} \right)_{\text{ст}}. \quad (11.20)$$

Рівняння (11.20) називають диференціальним рівнянням масовіддачі.

11.3. Потрійна аналогія

Рівняння масообміну без урахування термо- і бародифузії має вигляд

$$D\rho_i/d\tau = D\nabla^2\rho_i. \quad (11.21)$$

Рівняння енергії без урахування дифузійного перенесення теплоти:

$$Dt/d\tau = a\nabla^2 t. \quad (11.22)$$

Рівняння руху для безнапірної течії за відсутності масових сил:

$$Dw/d\tau = \nu\nabla^2 w. \quad (11.23)$$

Ці рівняння за формою запису аналогічні і містять три фізичні параметри: D – коефіцієнт дифузії; a – коефіцієнт температуропровідності;

ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості. Кожен з них характеризує відповідне перенесення: маси (D), енергії (a), кількості руху (ν). Розмірність їх однакова, і при $D = a = \nu$ поля концентрації, температури і швидкості подібні, якщо подібні умови однозначності (крайові умови).

По аналогії з критерієм Прандтля $Pr = \nu/a$, отриманим при аналізі системи диференціальних рівнянь теплообміну і таким, що визначає міру відношення гідродинамічного і теплового прикордонних шарів, співвідношення $Le = D/a$ називають критерієм Люїса. Цей критерій є мірою відношення поля концентрації і температури в прикордонному шарі. Відношення $Pr_D = \nu/D$ називають дифузійним критерієм Прандтля. Він визначає подібність гідродинамічного і концентраційного прикордонних шарів.

Для процесу теплообміну, не ускладненого масообміном (чистий теплообмін) і без урахування масових сил, структура критеріального рівняння для розрахунку теплообміну має вигляд

$$Nu = f(Re, Pr). \quad (11.24)$$

Якщо ввести поняття «дифузійний» критерій Нуссельта у вигляді $Nu_D = bL/D$, то, виходячи з аналогії рівнянь дифузії і теплообміну, можна припустити, що структура критеріального рівняння для масообміну буде подібна до структури рівняння для теплообміну, тобто

$$Nu_D = f(Re, Pr_D), \quad (11.24a)$$

при цьому вигляд функціональної залежності залишиться без зміни.

Проте подібний прийом може бути використаний тільки для наближених, оціночних розрахунків, оскільки рівняння тепловіддачі істотно відрізняється від рівняння масовіддачі (порівняйте (11.20) і (3.5)), крім того, відрізняються і умови однозначності (наявність «стефанового потоку» маси).

Л.Д. Берманом теоретично було отримано рівняння для розрахунку тепловіддачі при випаровуванні рідини в парогазове середовище і конденсації пари з парогазового середовища у вигляді

$$Nu = f(Re, Pr, Ar, \Pi_w, c_{p,п}/c_{p,р}), \quad (11.25)$$

де $\Pi_w = g_{п.ст}L/(\nu\rho')$ – критерій поперечного потоку маси. В той же час, їм було отримане рівняння для розрахунку масовіддачі у вигляді

$$Nu_D = f(Re, Pr_D, Ar, \Pi_D, \varepsilon_r, R_{п}/R_r), \quad (11.26)$$

де $\Pi_D = (p_{п.ст} - p_{п.о.})/P$ – критерій парціального тиску пари; $\varepsilon_r = p_{г.о.}/P$ – відносний вміст компоненту, що не конденсується. Очевидно, що структура цих рівнянь істотно розрізняється.

11.4. Тепло- і масовіддача при конденсації пари з парогазової суміші

Цей процес має широке застосування, зокрема, при розрахунку конденсаційних пристроїв паросилових установок. Наявність в парі газів, що не конденсуються, приводить до зменшення інтенсивності конденсації через ускладнення доступу пари до поверхні плівки конденсату. На рис.11.2 схематично показаний розподіл парціального тиску і температури у поверхні плівки конденсату, завтовшки δ . Зміна парціального тиску пари від $p_{п.о.}$ до

$p_{п.ст}$ викликає відповідно зміну температури пари від $t_{п.о}$ до $t_{п.пов}$, тобто з'являється різниця температури пара, обумовлена дифузією Δt_d . Крім того, у поверхні плівки виникає різниця температури, обумовлена фазовим переходом Δt_ϕ , і є різниця температури по товщині плівки конденсату, що визначає її термічний опір Δt_π .

Щільність парового потоку на поверхні плівки конденсату може бути записана

$$g_{п.пов.} = b_p (p_{п.о.} - p_{п.пов.}). \quad (11.27)$$

Щільність теплового потоку від пари до стінки, складається з конвективного потоку теплоти і теплоти, перенесеної масообміном

$$q = \alpha (t_{п.о.} - t_{п.пов.}) + g_{п.пов.} i_{п.пов.},$$

де α – коефіцієнт тепловіддачі, що залежить від відомих чинників. При конденсації пари на межі розділу фаз виділяється теплота фазового переходу r і разом з конвективним тепловим потоком передається стінці через плівку конденсату. Нехтуючи теплотою переохолодження конденсату в плівці, можна представити щільність теплового потоку у вигляді

$$q = \alpha (t_{п.о.} - t_{ст.}) + r b_p (p_{п.о.} - p_{п.пов.}), \quad (11.28)$$

або, користуючись сумарним коефіцієнтом тепловіддачі

$$q = \alpha_\Sigma (t_{п.о.} - t_{ст.}). \quad (11.30)$$

У останньому виразі коефіцієнт тепловіддачі віднесений до повної різниці температури.

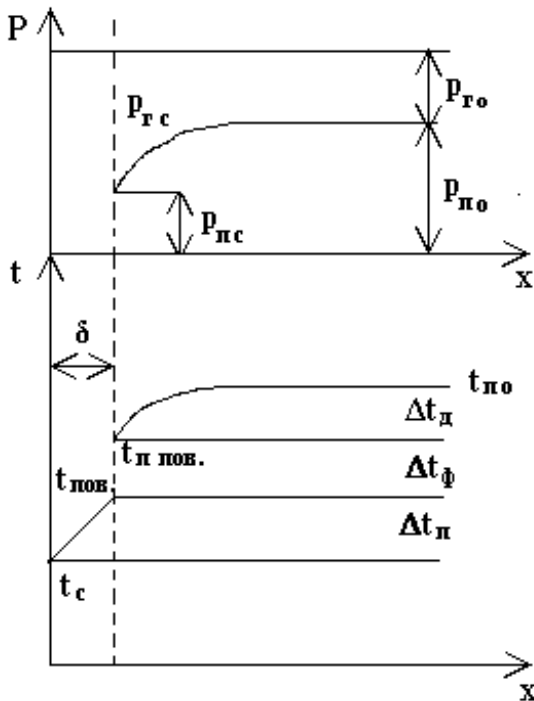


Рисунок 11.2 – Конденсація пари з парогазової суміші

Сумарний термічний опір перенесенню теплоти можна представити як суму термічних опорів плівки конденсату, фазового переходу і дифузійного перенесення теплоти спільно з масою пари, тобто $R_\Sigma = R_\pi + R_\phi + R_d$. Цим опорам відповідають різниці температури, сума яких дорівнює повній різниці температури, тобто

$$\Delta t = t_{п.о.} - t_{с.} = \Delta t_\pi + \Delta t_\phi + \Delta t_d. \quad (11.31)$$

В більшості випадків термічним опором фазового переходу можна нехтувати, і визначити температуру зовнішньої поверхні плівки конденсату по температурі насичення пари при тиску $p_{п.с}$, тобто $t_{пов.} = t_{п.пов.}$. Тоді термічні опори плівки конденсату і дифузійного перенесення маси можуть бути представлені у вигляді

$$R_\pi = 1/\alpha_\kappa, \quad R_d = 1/[\alpha + b_p r (p_{п.о.} - p_{п.с.}) / (t_{п.о.} - t_{пов.})], \quad (11.32)$$

де: α_κ – коефіцієнт тепловіддачі при конденсації чистої пари, α – коефіцієнт

тепловіддачі від парогазової суміші до плівки конденсату. Тоді сумарний коефіцієнт тепловіддачі може бути представлений у вигляді:

$$\alpha_{\Sigma} = \frac{1}{1/\alpha_k + 1/[\alpha + rb_p(p_{п.о.} - p_{п.с.})/(t_{п.о.} - t_{пов.})]}. \quad (11.33)$$

Дослідження масовіддачі при конденсації пари з парогазової суміші на одиночних трубках і пучках труб, проведені в МЕІ під керівництвом Л.Д. Бермана, дозволили отримати узагальнену залежність для коефіцієнта масовіддачі у вигляді:

$$Nu_D = C Re^{0,8} \Pi_D^{-1/3} \varepsilon_r^{-0,6}, \quad (11.34)$$

де Π_D і ε_r ті ж параметр, про які йшлося вище. Постійна в рівнянні приймається: $C = 0,47$ – для одиночної трубки; $C = 0,53$ – для першого ряду пучка; $C = 0,82$ – для наступних рядів труб. Рівняння може використовуватися при $350 < Re < 4800$.

При $40 < Re < 350$ для глибинних рядів пучка можна використовувати рівняння

$$Nu_D = 0,52 Re^{0,5} \Pi_D^{-1/3} \varepsilon_r^{-0,6}. \quad (11.35)$$

У цих рівняннях критерій Рейнольдса розраховується за швидкістю парогазового потоку перед трубкою або перед рядом труб. Визначальний розмір – діаметр трубки. Фізичні параметри суміші визначаються по стану перед трубкою. Зокрема коефіцієнт динамічної в'язкості:

$$\mu_{см} = \frac{(1 - \varepsilon_r)\mu_{п.} + 1,6\varepsilon_r\mu_r}{1 + 0,61\varepsilon_r}. \quad (11.36)$$

Аналогічно можна визначити і решту теплофізичних параметрів суміші.

У практичних розрахунках конденсації пари з парогазової суміші впливом тепловіддачі від пари до плівки конденсату можна нехтувати, як і теплою переохолодження конденсату. Тоді, з (11.33) витікає, що для розрахунку сумарного коефіцієнта тепловіддачі можна не враховувати α , але необхідно знати парціальний тиск пари у поверхні плівки конденсату $p_{п.пов.}$. Останній істотно залежить від інтенсивності дифузії, швидкості стефанового потоку і т.д. Крім того, по цьому тиску визначається і температура поверхні плівки конденсату. Знайти цей тиск можна тільки послідовними наближеннями теплового балансу у вигляді:

$$rb_p(p_{п.о.} - p_{п.пов.}) = \alpha_k(t_{п.пов.} - t_{ст}). \quad (11.37)$$

Очевидно, що подібний розрахунок складніший за розрахунок конденсації чистої пари.

Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення процесу дифузії. Що є рушійною силою цього процесу?
2. Сформулюйте і запишіть гіпотезу (закон) Фіка.
3. Дайте визначення коефіцієнта дифузії. Його властивості.
4. Які механізми перенесення маси в рухомому середовищі? Запишіть щільність потоку маси.
5. Що таке «масовіддача»? Запишіть і поясніть щільність потоку маси в

процесі масовіддачі.

6. Дайте визначення коефіцієнта масовіддачі.

7. Які особливості масопереносу на напівнепроникненій поверхні?

8. Причини появи «стефанового потоку». Швидкість «стефанового потоку».

9. Вплив «стефанового потоку» маси на дифузійне перенесення маси. Коректування закону Фіка.

10. Рівняння масовіддачі, його відмінність від рівняння тепловіддачі.

11. Принцип і наслідки «потрійної аналогії».

12. Принцип розрахунку теплообміну і масообміну при конденсації пари з паро газової суміші. Особливості розрахунку.

12. НЕСТАЦІОНАРНА ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ ТІЛ ПРОСТИХ ФОРМ

Процеси теплопровідності, коли поле температури в тілі змінюється не тільки в просторі, але й за часом, називаються нестационарними. Задачі нестационарної теплопровідності розглядають процеси нагрівання та охолодження тіл, які пов'язані з термонапруженим станом, тобто з термічною напругою, що виникає в тілі при його нагріванні або охолодженні. Сучасний інженер зобов'язаний володіти питаннями постановки і рішення задач нестационарної теплопровідності.

Математична постановка задачі нестационарної теплопровідності включає:

- диференціальне рівняння теплопровідності (Фур'є);
- умови однозначності рішення для конкретної задачі.

Розглянемо особливості процесу нагрівання-охолодження тіл при граничних умовах третього роду.

12.1. Термічно тонкі тіла

Запишемо граничні умови третього роду у вигляді

$$-\lambda(dt/dn)_{\Pi} = \alpha(t_c - t_{\Pi}). \quad (12.1)$$

Введемо надлишкову температуру $\vartheta_0 = t_c - t_{\Pi}$, тоді $dt/dn = -d\vartheta/dn$, і граничні умови представляться у вигляді

$$\lambda(d\vartheta/dn)_{\Pi} = \alpha\vartheta_0. \quad (12.2)$$

Скориставшись методами теорії подібності, з (12.2) отримаємо узагальнену змінну, звану критерієм Біо

$$Bi = \frac{\alpha L}{\lambda} = \frac{L/\lambda}{1/\alpha}. \quad (12.3)$$

За фізичним сенсом критерій Біо є мірою відношення термічного опору теплопровідності тіла до термічного опору тепловіддачі з поверхні тіла. Представивши $N = n/L$, з (12.2) отримаємо

$$(d\vartheta/dN)_{n=0} = Bi \vartheta_0. \quad (12.4)$$

Якщо $Bi \rightarrow 0$ (практично достатньо, щоб $Bi < 0,1$), що має місце при

малих L , тобто для тіл малої товщини (розміру), або при великих λ , тобто для тіл з високим коефіцієнтом теплопровідності (частіш за все, металів), то з (12.4) витікає, що $d\vartheta/dN \rightarrow 0$. Виходить, що градієнт температури по товщині тіла дуже малий та їм можна нехтувати. Тіла, в яких градієнтом температури по товщині можна нехтувати, називаються **термічно тонкими тілами**.

Для термічно тонкого тіла (далі просто **тонкого тіла**) зміну температури при нагріванні або охолодженні можна знайти з рівняння теплового балансу. Припустимо, що тонке тіло нагрівається внутрішніми джерелами теплоти з об'ємною щільністю тепловиділення q_v і знаходиться в середовищі з постійною температурою. Вважаємо коефіцієнт тепловіддачі з поверхні тіла в середовище також постійним. Об'єм тіла V , його поверхня F . Тоді рівняння теплового балансу можна представити у вигляді:

$$c\rho V \frac{dt}{d\tau} = q_v V - \alpha F (t - t_c), \quad (12.5)$$

де c , ρ – відповідно теплоємність і густина матеріалу тіла. За фізичним сенсом лівий член рівняння (12.5) є зміною внутрішньої енергії тіла. Перший доданок правої частини – теплота, що виділена внутрішніми джерелами в об'ємі тіла, другий – теплота, що віддана з поверхні тіла в середовище.

У стаціонарному стані зміни внутрішньої енергії не відбувається, і з (12.5) отримаємо стаціонарну температуру тіла в кінці процесу нагрівання

$$q_v V = \alpha F (t_{\text{уст}} - t_c). \quad (12.6)$$

Підставимо (12.6) в (12.5) і розділимо обидві частини рівняння на $(t_{\text{уст}} - t_c)$. Позначимо

$$\Theta = (t_{\text{уст}} - t) / (t_{\text{уст}} - t_c). \quad (12.7)$$

Рівняння (12.5) з урахуванням (12.7) можна записати у вигляді

$$-\frac{d\Theta}{d\tau} = \frac{\alpha F}{c\rho V} \Theta, \quad (12.8)$$

де $m = \frac{\alpha F}{c\rho V}$ зветься «темпом» нагрівання (охолодження) тіла. При постійних теплофізичних властивостях тіла і постійному коефіцієнті тепловіддачі темп нагрівання також є постійним. Розділивши змінні в (12.8) і інтегруючи, отримаємо при постійному темпі нагріву:

$$\Theta = e^{-m\tau}. \quad (12.9)$$

Таким чином, при нагріванні тонкого тіла внутрішніми джерелами теплоти в середовищі з постійною температурою при постійному темпі нагріву відносна надлишкова температура змінюється за експонентою.

Прологарифмувавши (12.9), отримаємо

$$\ln(\Theta) = -m\tau, \quad (12.10)$$

звідки витікає, що в напівлогарифмічних координатах графік нагріву тонкого тіла представляється прямою лінією з тангенсом кута нахилу до осі τ , що дорівнює темпу нагріву.

Тепловий баланс тонкого тіла при охолодженні від деякої температури $t_{уст}$ в середовищі з постійною температурою можна записати у вигляді

$$-c\rho V \frac{dt}{d\tau} = \alpha F(t - t_c), \quad (12.11)$$

тобто зменшення внутрішньої енергії тіла дорівнює тепловому потоку, відданому з поверхні тіла в середовище. При відносній надлишковій температурі тіла у вигляді

$$\Theta = (t - t_c)/(t_{уст} - t_c), \quad (12.12)$$

рівняння (12.11) перетвориться в (12.8). Отже, рішення рівняння (12.11) співпадає з рішенням рівняння (12.8), і все, сказане вище для процесу нагрівання, справедливе для процесу охолодження тонкого тіла.

Якщо в процесі нагрівання або охолодження тонкого тіла коефіцієнт тепловіддачі виявляється змінним, то графік зміни $\ln(\Theta) - \tau$ виявляється нелінійною залежністю. Тоді, провівши дотичну до графіка в певній точці (при τ_1), можна визначити локальний темп нагрівання (охолодження) як тангенс кута нахилу дотичною до осі τ .

Метод нагрівання-охолодження тонкого тіла в середовищі з постійною температурою ефективно використовується для визначення коефіцієнта тепловіддачі тіл різних форм.

12.2. Нагрівання і охолодження термічно товстих тіл

12.2.1. Необмежена пластина

Нагадаємо, що необмеженою пластинною називається тіло, у якого один розмір кінцевий, а два інших – нескінченно великі. Розглянемо задачу визначення температурного поля і кількості акумульованої теплоти при нагріванні пластини від початкової температури t_0 в середовищі з постійною температурою $t_c > t_0$ при постійному коефіцієнті тепловіддачі і постійних теплофізичних характеристиках матеріалу.

Припустимо, що товщина пластини рівна $2R$, а нагрівання симетрично, тобто температура середовища і інтенсивність теплообміну з обох боків пластини однакові. Розташуємо початок координат в центрі пластини (рис.12.1), а ось x направимо нормально до поверхні пластини.

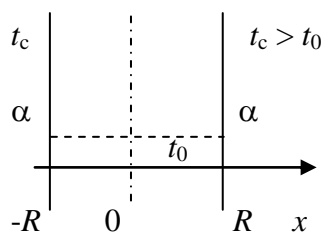


Рисунок 12.1 – Симетричне нагрівання пластини при ГУ 3-го роду

В цьому випадку математичне формулювання задачі можна представити таким чином. Відшукується рішення рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad (12.13)$$

в області $0 \leq x \leq R$, $\tau > 0$, з граничними умовами:

$$\text{при } x = 0 \quad \partial t / \partial x = 0, \quad (12.14)$$

$$\text{при } x = R \quad \lambda(\partial t / \partial x) = \alpha(t_c - t), \quad (12.15)$$

початкова умова:

$$\text{при } \tau = 0 \quad t = t_0. \quad (12.16)$$

Перейдемо від температури t до надлишкової температури $\vartheta = t_c - t$. Легко показати, що рівняння (12.13) перетворюється у

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}, \quad (12.17)$$

а початкова умова і граничні умови представляються у вигляді

$$\tau = 0 \quad \vartheta = \vartheta_0 = t_c - t_0, \quad (12.18)$$

$$x = 0 \quad \partial \vartheta / \partial x = 0, \quad (12.19)$$

$$x = R \quad -\lambda(\partial \vartheta / \partial x) = \alpha \vartheta. \quad (12.20)$$

Для вирішення (12.17) використовуємо метод розділення змінних (метод Фур'є), для чого представимо надлишкову температуру у вигляді

$$\vartheta(x, \tau) = \vartheta_1(\tau) \cdot \vartheta_2(x). \quad (12.21)$$

Тоді рівняння (12.17) представиться у вигляді

$$\vartheta_1'(\tau) / \vartheta_1(\tau) = a \vartheta_2''(x) / \vartheta_2(x) = -a \cdot k^2. \quad (12.22)$$

Таким чином, з (12.17) отримуємо систему з двох звичайних диференціальних рівнянь:

$$\vartheta_1'(\tau) = -a \cdot k^2, \quad (a) \quad \vartheta_2''(x) = -k^2 \vartheta_2(x). \quad (b)$$

Загальне рішення рівняння (a) має вигляд

$$\vartheta_1(\tau) = C \cdot e^{-ak^2\tau}, \quad (12.23)$$

де C – постійна інтегрування.

Рівнянню (b) задовольняють тригонометричні синус і косинус, тоді загальне рішення може бути представлено, як сума цих функцій, тобто

$$\vartheta_2(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx). \quad (12.24)$$

Таким чином, загальне рішення (12.17) на основі (12.21) представляється у вигляді

$$\vartheta(x, \tau) = [A \cos(kx) + B \sin(kx)] \cdot e^{-ak^2\tau}, \quad (12.25)$$

де A , B і k – невідомі постійні, які повинні бути визначені на підставі крайових умов задачі (12.18) – (12.20).

З (12.19) витікає, що у (12.25) $B \equiv 0$. Тоді (12.25) перетворюється у

$$\vartheta(x, \tau) = A \cos(kx) \cdot e^{-ak^2\tau}. \quad (12.26)$$

Для визначення постійної інтегрування k скористаємося умовою (12.20), заздалегідь продиференціювавши (12.26). Отримаємо

$$\lambda A k \sin(kR) \cdot e^{-ak^2\tau} = \alpha A \cos(kR) \cdot e^{-ak^2\tau}. \quad (12.27)$$

Скоротивши подібні члени в (12.27), і позначивши $\mu = kR$ та $B_i = \alpha R / \lambda$, після нескладних перетворень отримаємо рівняння для визначення постійної інтегрування k або μ

$$\text{ctg}(\mu) = \mu / B_i. \quad (12.28)$$

Для рішення (12.28) позначимо ліву частину рівняння y_1 , праву – y_2 . Побудуємо залежність y_1 і y_2 від μ (рис.12.2). Перше рівняння є

котангенсоїда, друге – пряма з кутом нахилу до осі μ пропорційним $1/Vi$. Точки перетину графіків y_1 і y_2 дадуть значення коренів рівняння (12.28).

З періодичності котангенса виходить, що рівняння (12.28) має нескінченну кількість коренів, що задовольняють співвідношенню

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots \quad (12.29)$$

Очевидно, в силу (12.29), існує нескінченна кількість часткових рішень вигляду (12.26), а загальне рішення рівняння (12.17) повинне бути записане як сума часткових рішень. Отримаємо:

$$\vartheta(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{R}\right) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (12.30)$$

де $Fo = \frac{a\tau}{R^2}$ – критерій Фур'є (критерій часової подібності).

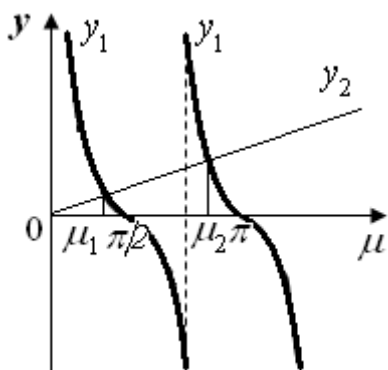


Рисунок 12.2 – Схема рішення рівняння (12.28)

Для визначення постійних A_n використаємо початкову умову (12.18). Звідкіля отримуємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{R}\right) = \vartheta_0. \quad (12.31)$$

Помножимо обидві частини (12.31) на $\cos(\mu_m \frac{x}{R}) dx$ і проінтегруємо по x від 0 до R (у силу симетрії задачі). Врахувавши очевидне співвідношення

$$\cos(a)\cos(b) = 0,5[\cos(a-b) + \cos(a+b)], \quad (12.32)$$

при $\mu_n \neq \mu_m$ інтеграл, що стоїть в лівій частині (12.31), представиться у вигляді

$$I = \int_0^R \cos(\mu_n x/R) \cos(\mu_m x/R) dx,$$

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{R}{\mu_n - \mu_m} \sin(\mu_n - \mu_m) + \frac{R}{\mu_n + \mu_m} \sin(\mu_n + \mu_m) \right],$$

або після нескладних перетворень, враховуючи (12.28)

$$I = \frac{R}{\mu_n^2 - \mu_m^2} [\mu_n \sin(\mu_n) \cos(\mu_m) - \mu_m \sin(\mu_m) \cos(\mu_n)].$$

Очевидно, що на підставі (12.28) всі інтеграли, що стоять під знаком підсумовування, дорівнюють нулю, за винятком одного, коли $\mu_n = \mu_m$. Останній інтеграл легко вирахувати

$$A_n \int_0^R \cos^2\left(\mu_n \frac{x}{R}\right) dx = A_n \frac{R}{2\mu_n} [\mu_n + \sin(\mu_n) \cos(\mu_n)]. \quad (12.33)$$

Інтеграл, що стоїть в правій частині (12.31), після множення її на $\cos(\mu_n \frac{x}{R}) dx$ достатньо тривіальний

$$\vartheta_0 \int_0^R \cos(\mu_m \frac{x}{R}) dx = \vartheta_0 \frac{R}{\mu_n} \sin(\mu_n). \quad (12.34)$$

Тоді

$$A_n = \vartheta_0 \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cdot \cos \mu_n}. \quad (12.35)$$

Позначивши $\Theta = \frac{t(x, \tau) - t_0}{t_c - t_0}$, підставимо (12.35) у (12.30), після простих перетворень отримуємо кінцеве рішення поставленої задачі

$$\Theta = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{R}\right) e^{-\mu_n^2 Fo}. \quad (12.36)$$

У (12.36) A_n називають «**початкові теплові амплітуди**», величина яких залежить від критерію Bi і порядкового номеру.

$$A_n = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cdot \cos \mu_n}. \quad (12.37)$$

Слід зазначити, що різниця між двома коренями рівняння (12.28) при збільшенні номера кореня наближається до π . Тому A_n є знакозмінними, і $A_1 > 0$.

Проведемо деякий аналіз рівняння (12.36).

1. Припустимо, що $Bi \rightarrow \infty$ (достатньо, щоб $Bi > 100$). Тоді з рівняння (12.28) йде, що його коренями є корені косинуса, тобто

$$\mu_n = (2n - 1)\pi / 2, \quad (12.38)$$

а початкові теплові амплітуди знакозмінні та не залежать від Bi

$$A_n = (-1)^{n-1} \frac{4}{(2n - 1)\pi}. \quad (12.39)$$

В цьому випадку швидкість нагрівання пластини

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{a}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n - 1)\pi \cos\left(\mu_n \frac{x}{R}\right) e^{-\mu_n^2 Fo} \quad (12.40)$$

пропорційна коефіцієнту температуропровідності та обернено пропорційна квадрату розміру пластини.

2. Припустимо, що $Bi \rightarrow 0$ (достатньо, щоб $Bi < 0,1$). Тоді з рівняння (12.28) маємо, що $\mu_1 \rightarrow 0$, а останні корені $\mu_n \rightarrow (n - 1)\pi$. З (12.35) випливає, що $A_1 \rightarrow 1$, а останні початкові теплові амплітуди $A_n \rightarrow 0$. З (12.28) маємо, що при малих Bi з достатньою точністю $\mu_1^2 \approx Bi$. Тоді (12.36) перетворюється у

$$\Theta = 1 - e^{-Bi Fo}, \quad (12.41)$$

тобто нагрівання пластини підкоряється закономірності нагрівання «тонкого тіла» з темпом нагрівання

$$m = \frac{\alpha}{c\rho R}. \quad (12.42)$$

Для визначення кількості теплоти, що акумульована пластиною при її

нагріванні, скористаємося очевидним співвідношенням

$$Q = c\rho V(\bar{t} - t_0), \quad (12.43)$$

де V – об'єм пластини (при поверхні пластини $F = 1 \text{ м}^2$, $V = 2R$), \bar{t} – середня температура пластини в даний момент часу. Позначимо

$$\bar{\Theta} = (\bar{t} - t_0)/(t_c - t_0). \quad (12.44)$$

Тоді (12.43) може бути записано у вигляді

$$Q = 2c\rho R\bar{\Theta}(t_c - t_0), \quad (12.45)$$

де відносна надлишкова температура

$$\bar{\Theta} = \frac{1}{R} \int_0^R \Theta(x) dx. \quad (12.46)$$

Використовуючи (12.36), обчислимо інтеграл (12.46). Отримаємо після простих перетворень

$$\bar{\Theta} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (12.47)$$

де

$$B_n = \frac{A_n \sin \mu_n}{\mu_n} = \frac{2 \sin^2 \mu_n}{\mu_n (\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n)}, \quad (12.48)$$

які всі позитивні.

12.2.2. Нагрівання необмеженого суцільного циліндра

Розглянемо процес нагрівання необмеженого суцільного циліндру зовнішнього радіусу R від початкової температури t_0 в середовищі з постійною температурою $t_c > t_0$ при постійному коефіцієнті тепловіддачі з бічної поверхні циліндра, як по периметру, так і по висоті циліндру.

Ввівши в розгляд, як це було зроблено раніше, надлишкову температуру

$$\vartheta(r, \tau) = t_c - t(r, \tau), \quad (12.49)$$

математичне формулювання задачі можна представити в наступному вигляді.

Відшукується рішення рівняння

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) \quad (12.50)$$

в області $0 \leq r \leq R$, $\tau > 0$ з початковими умовами

$$\tau = 0 \quad \vartheta = \vartheta_0 = t_c - t_0, \quad (12.51)$$

та граничними умовами

$$r = 0, \quad \partial \vartheta / \partial r = 0, \quad (12.52)$$

$$r = R, \quad -\lambda(\partial \vartheta / \partial r) = \alpha \vartheta. \quad (12.53)$$

Використовуємо, як і в попередньому випадку, метод Фур'є (розділення змінних). Вважатимемо, що

$$\vartheta(r, \tau) = \vartheta_1(\tau) \cdot \vartheta_2(r). \quad (12.54).$$

Тоді рівняння (12.50) може бути представлено у вигляді

$$\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1} = a \frac{\vartheta_2'' + (1/r)\vartheta_2'}{\vartheta_2} = -a \cdot k^2. \quad (12.55)$$

Як і у випадку для пластини, з (12.55) маємо два звичайні диференціальні рівняння

$$\vartheta_1' + ak^2\vartheta_1 = 0, \quad (12.56)$$

$$\vartheta_2'' + \frac{1}{r}\vartheta_2' + k^2\vartheta_2 = 0. \quad (12.57)$$

Загальне рішення рівняння (12.56) є відомим з попереднього.

$$\vartheta_1(\tau) = Ae^{-ak^2\tau}. \quad (12.58)$$

Рівняння (12.57) є рівнянням Бесселя нульового порядку. Його загальне рішення має вигляд

$$\vartheta_2(r) = AJ_0(kr) + BY_0(kr), \quad (12.59)$$

де $J_0(kr)$, $Y_0(kr)$ – функції Бесселя відповідно першого та другого роду нульового порядку. Вони мають вигляд

$$J_0(kr) = 1 - \frac{(kr)^2}{2^2} + \frac{(kr)^4}{2^2 4^2} - \frac{(kr)^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots,$$

$$Y_0(kr) = [\ln(kr/2) + \gamma]J_0(kr) + \frac{(kr)^2}{2^2} - (1+1/2)\frac{(kr)^4}{2^2 4^2} + (1+1/2+1/3)\frac{(kr)^6}{2^2 4^2 6^2} - \dots,$$

де $\gamma = 0,5772$ – постійна Ейлера.

Загальне рішення поставленої задачі на підставі (12.54) запишеться у вигляді

$$\vartheta(r, \tau) = [AJ_0(kr) + BY_0(kr)]e^{-ak^2\tau}. \quad (12.60)$$

Постійні інтегрування A , B , k визначаються з крайових умов. З умови (12.52), враховуючи, що $J_0'(kr) = -kJ_1(kr)$, $Y_0'(kr) = -kY_1(kr)$, і при $r \rightarrow 0$ $Y_1 \rightarrow -\infty$, а $J_1 \rightarrow 0$ маємо, що $B \equiv 0$. Тоді (12.60) перетворюється в

$$\vartheta(r, \tau) = A J_0(kr) e^{-ak^2\tau}. \quad (12.61)$$

Використовуємо умову (12.53). Отримаємо, враховуючи похідну від Бесселевої функції першого роду нульового порядку

$$\lambda AkJ_1(kR) e^{-ak^2\tau} = \alpha AJ_0(kR) e^{-ak^2\tau},$$

або, скоротивши отримане рівняння і позначивши $kR = \mu$, а $Bi = \alpha R/\lambda$ (як і раніш),

$$\frac{\mu}{Bi} = \frac{J_1(\mu)}{J_0(\mu)}. \quad (12.62)$$

Отримане рівняння аналогічно рівнянню для необмеженої пластини, тільки замість котангенса стоїть відношення функцій Бесселя першого роду першого і нульового порядків. Виходячи з представленого вище виразу функції Бесселя першого роду нульового порядку, можна легко обчислити функцію Бесселя першого роду першого порядку, звідки витікає, що функція

Бесселя першого роду нульового порядку аналогічна косинусу (але із змінним періодом і амплітудою, що зменшується), а та ж функція першого порядку аналогічна синусу. Тобто графік функції, що стоїть в правій частині рівняння (12.62), подібний до графіку котангенсу. Очевидно, що рішення (12.62) подібно до рішення аналогічного характеристичного рівняння необмеженої пластини і має нескінченну безліч коренів, що задовольняють співвідношенню

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots \quad (12.63)$$

Таким чином, рівняння (12.50) має нескінченну кількість часткових рішень вигляду (12.61), і загальне рішення буде:

$$\vartheta(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (12.64)$$

де постійні інтегрування A_n підлягають визначенню.

Враховуючи ортогональність функцій Бесселя з вагою r , запишемо початкову умову (12.51) для вирішення (12.64), помножимо обидві частини рівняння на $r J_0\left(\mu_m \frac{r}{R}\right) dr$ та проінтегруємо від 0 до R . Отримуємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^R r A_n J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) J_0\left(\mu_m \frac{r}{R}\right) dr = \int_0^R \vartheta_0 r J_0\left(\mu_m \frac{r}{R}\right) dr. \quad (12.65)$$

При $\mu_m \neq \mu_n$ інтеграл, що стоїть в лівій частині (12.65), рівний нулю (по ортогональності функцій Бесселя і (12.62)). Тоді після інтегрування при $\mu_m = \mu_n$ отримуємо

$$A_n = \vartheta_0 \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n [J_0(\mu_n)^2 + J_1(\mu_n)^2]} = \vartheta_0 \frac{2Bi}{J_0(\mu_n)(\mu_n^2 + Bi^2)}. \quad (12.66)$$

Підставимо отримане значення A_n у (12.64) та позначимо

$$\Theta = \frac{t(r, \tau) - t_0}{t_c - t_0}, \quad (12.67)$$

отримуємо:

$$\Theta = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (12.68)$$

де початкові теплові амплітуди

$$A_n = \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n [J_0(\mu_n)^2 + J_1(\mu_n)^2]} = \frac{2Bi}{J_0(\mu_n)(\mu_n^2 + Bi^2)}. \quad (12.69)$$

Проведемо деякий аналіз рівняння (12.69).

Припустимо, що $Bi \rightarrow \infty$ (достатньо, щоб $Bi > 100$). Тоді з рівняння (12.62) витікає, що його коренями є корні $J_0(\mu)$, які не залежать від Bi . Швидкість нагрівання циліндру в цьому випадку, як і при нагріванні пластини, пропорційна коефіцієнту температуропровідності и обернено пропорційна квадрату радіусу циліндру.

Припустимо, що $Bi \rightarrow 0$ (достатньо, щоб $Bi < 0,1$). Тоді з (12.62),

враховуючи розкладення у ряд функцій Бесселя, отримуємо, що $\mu_1 \approx \sqrt{2Bi}$, а остатні корені (12.62) співпадають з коренями $J_1(\mu)$. Початкові теплові амплітуди $A_1 = 1, A_2 = A_3 = \dots = 0$. Рішення (12.68), враховуючи, що при малому μ_1 $J_0(\mu_1 r/R) = 1$, перетворюється у

$$\Theta = 1 - e^{-2BiFo}, \quad (12.70)$$

що відповідає нагріванню «тонкого тіла», а темп нагрівання циліндру за тих же умов в два рази вище, ніж пластини.

Для визначення кількості теплоти, що акумульована одиницею довжини циліндру, використаємо очевидне співвідношення:

$$Q = c\rho\pi R^2(\bar{t} - t_0) = c\rho\pi R^2\bar{\Theta}(t_c - t_0). \quad (12.71)$$

Середню відносну температуру циліндру знайдемо як

$$\bar{\Theta} = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \Theta(r) dr. \quad (12.72)$$

Після інтегрування отримуємо:

$$\bar{\Theta} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (12.73)$$

де

$$B_n = \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n} A_n = \frac{4Bi^2}{\mu_n^2(\mu_n^2 + Bi^2)}. \quad (12.74)$$

Задачі до розділів 12.1, 12.2

1. Сталева ($\lambda = 45$ Вт/(м К); $c = 550$ Дж/(кг К); $\rho = 7800$ кг/м³) труба $d_1/d_2 = 110/100$ мм нагріта до $t_0 = 400$ °С охолоджується в приміщенні $t_{\text{п}} = 20$ °С. Визначити час охолодження труби до $t = 200$ °С, якщо ступінь чорноти поверхні труби $\varepsilon = 0,7$.

Коментар до задачі. Для визначення режиму охолодження (тонке тіло чи ні) слід знайти критерій Ві. Обчислимо коефіцієнт тепловіддачі на початку α_1 і в кінці α_2 процесу охолодження по (7.17) при $\Delta t_1 = t_0 - t_{\text{п}}$ та $\Delta t_2 = t - t_{\text{п}}$. В розрахунок приймемо $\bar{\alpha} = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$. Урахування променистого теплообміну проведемо за допомогою приведенного коефіцієнта тепловіддачі випромінюванням, визначуваного як $\alpha_{\text{л}} = q_{\text{л}}/\Delta t$. Щільність теплового потоку випромінюванням знайдемо по (10.67) на початку і в кінці процесу охолодження і, відповідно, $\alpha_{\text{л}}$ також на початку і в кінці процесу. В розрахунок приймемо середнє значення. Сумарний коефіцієнт тепловіддачі $\alpha_{\Sigma} = \bar{\alpha} + \bar{\alpha}_{\text{л}}$. Критерій $Bi = \alpha_{\Sigma}\delta/\lambda$, де δ – товщина стінки труби. Якщо $Bi < 0,1$, то труба охолоджується як тонке тіло. З (12.41) отримуємо (нехтуючи кривизною стінки труби) $\Theta = \Delta t_2 / \Delta t_1 = e^{-BiFo}$, звідкіля находимо $Fo = a\tau/\delta^2$ та час охолодження.

2. Сталева заготовка ($c = 400$ Дж/(кг К), $\rho = 7800$ кг/м³, $\lambda = 40$ Вт/(мК)) діаметром 40 мм розташована у поперечному потоці топкових газів ($p_{\text{CO}_2} = 0,12$; $p_{\text{H}_2\text{O}} = 0,14$ бар) $t_{\text{г}} = 300$ °С, $w = 10$ м/с. Початкова температура заготовки $t_0 = 20$ °С, її ступінь чорноти $\varepsilon = 0,8$. Визначити час нагрівання заготовки до 200 °С. Прийняти $l_{\text{еф}} = 0,4$ м.

Коментар до задачі. Використовуйте коментар до попередньої задачі. Коефіцієнт тепловіддачі – по (6.1), вважаючи $\varepsilon_r = 1$. Щільність променистого теплового потоку – по (10.89) для початку і кінця процесу нагрівання, середній тепловий потік i , відповідно, середній коефіцієнт тепловіддачі випромінюванням. По $\bar{\alpha}_z$ знаходимо $Bi = \bar{\alpha}_z R / \lambda$ і режим нагрівання (тонке тіло або ні). Якщо тіло тонке – з (12.70) при $\Theta = (t - t_0) / (t_e - t_0)$ знаходимо Fo і час нагрівання.

3. Керамічна плита ($\lambda = 1$ Вт/(м К); $c = 1$ кДж/(кг К); $\rho = 2500$ кг/м³) завтовшки $2\delta = 80$ мм нагрівається в печі ($t_{п} = 600$ °С) від температури $t_0 = 20$ °С. Ступінь чорноти поверхні плити $\varepsilon = 0,7$. Вважаючи пічний простір абсолютно чорним, визначити температуру поверхні та центру плити через 0,6 години від початку нагрівання.

Коментар до задачі. Оскільки в пічному просторі має місце тільки променисте перенесення теплоти, по (10.67) знайдемо щільність теплового потоку і коефіцієнт тепловіддачі випромінюванням (див. задачу 1). Визначимо критерій Bi і тип процесу нагрівання. Якщо $Bi > 0,1$, то для розрахунку розподілу температури по плиті (вважаючи її нескінченною пластиною) використаємо (12.36). Для оцінки кількості членів ряду в (12.36), які необхідно утримувати при обчисленнях, розрахуємо критерій $Fo = a\tau/\delta^2$. При $Fo > 0,4$ досить утримувати тільки 1 член ряду. Перший корінь характеристичного рівняння (12.28) знайдемо у [3] по значенню Bi , або наближеним (чисельним) рішенням цього рівняння. З (12.36), вважаючи $R = \delta$, при $x = \delta$ знайдемо температуру поверхні плити у кінці нагрівання $t(\delta, \tau) = t_0 + \Theta(t_{п} - t_0)$. По знайденій температурі визначимо щільність променистого потоку і коефіцієнт тепловіддачі випромінюванням у кінці процесу нагрівання (див. вище). По середньому за період нагрівання коефіцієнту тепловіддачі перерахуємо критерій Bi і повторимо обчислення температури поверхні і центру плити.

12.3. Нагрівання циліндра кінцевої довжини

Розглянемо нагрівання циліндра радіусу R заввишки $2H$ від початкової температури t_0 у середовищі з температурою t_c при постійній інтенсивності теплообміну на всіх поверхнях. Розташуємо початок координат у центрі циліндру. Ось r направимо нормально до бічної поверхні циліндра, ось z сумістимо з віссю циліндру. Математичне формулювання задачі для надлишкової температури $\vartheta = t_c - t$ може бути представлено у вигляді:

шукається рішення рівняння:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \left[\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right], \quad (12.75)$$

у області $0 \leq r \leq R$, $0 \leq z \leq H$, $\tau > 0$ при початковій умові

$$\vartheta(r, z, 0) = \vartheta_0 = t_c - t_0, \quad (12.76)$$

та граничних умовах:

$$\frac{\partial \vartheta(0, z, \tau)}{\partial r} = 0, \quad (\text{симетрія по } r) \quad (12.77)$$

$$\frac{\partial \vartheta(r, 0, \tau)}{\partial z} = 0, \text{ (симетрія по } z) \quad (12.78)$$

$$-\lambda \frac{\partial \vartheta(R, z, \tau)}{\partial r} = \alpha \vartheta(R, z, \tau), \quad (12.79)$$

$$-\lambda \frac{\partial \vartheta(r, H, \tau)}{\partial z} = \alpha \vartheta(r, H, \tau). \quad (12.80)$$

Доведемо, що рішення поставленої задачі може бути знайдене як добуток рішень для необмеженого циліндра і для необмеженої пластини. Тобто

$$\vartheta(r, z, \tau) = t_c - t(r, z, \tau) = \vartheta_1(r, \tau) \vartheta_2(z, \tau), \quad (12.81)$$

де $\vartheta_1(r, \tau) = t_c - t(r, \tau)$, $\vartheta_2(z, \tau) = t_c - t(z, \tau)$

Підставимо (12.81) у (12.75) і врахувавши, що $\vartheta_1(r, \tau)$ є рішення для необмеженого циліндра, а $\vartheta_2(z, \tau)$ є рішення для необмеженої пластини, після диференціювання отримуємо:

$$\left[\frac{\partial \vartheta_1}{\partial \tau} - a \left(\frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial r} \right) \right] \vartheta_2 + \left[\frac{\partial \vartheta_2}{\partial \tau} - a \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial z^2} \right] \vartheta_1 = 0. \quad (12.82)$$

Вирази, що стоять в квадратних дужках, дорівнюють нулю, оскільки вони представляють собою диференціальні рівняння для необмеженого циліндра і пластини відповідно. Отже, вираз (12.81) є рішенням початкового рівняння. Розглянемо, як (12.81) задовольняє граничні умови. Для цього підставимо (12.81) у (12.77). Отримаємо

$$(\partial \vartheta_1(0, \tau) / \partial r) \vartheta_2(z, \tau) = 0. \quad (12.83)$$

Для задоволення умови (12.83) при будь-якому значенні z необхідно, щоб

$$\partial \vartheta_1(0, \tau) / \partial r = 0. \quad (12.84)$$

Останнє є умовою симетрії для необмеженого циліндра.

Підставимо (12.81) в (12.77). Отримуємо:

$$-\lambda \frac{\partial \vartheta_1(R, \tau)}{\partial r} \vartheta_2(z, \tau) = \alpha \vartheta_1(R, \tau) \vartheta_2(z, \tau), \quad (12.85)$$

а, скоротивши на $\vartheta_2(z, \tau) \neq 0$, отримуємо граничну умову для необмеженого циліндра.

Поступивши так само з умовами (12.78) і (12.80), отримаємо, що $\vartheta_2(z, \tau)$ задовольняє граничні умови для необмеженої пластини.

Таким чином, (12.81) є рішенням для циліндра кінцевої довжини. Перейшовши до відносної безрозмірної температури, отримаємо в розгорненому вигляді:

$$\Theta(r, z, \tau) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0 \left(\mu_n \frac{r}{R} \right) e^{-\mu_n^2 Fo_R} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos \left(\mu_m \frac{z}{H} \right) e^{-\mu_m^2 Fo_H},$$

де $Fo_R = a\tau/R^2$, $Fo_H = a\tau/H^2$.

Інакше отримане рішення можна записати

$$\Theta(r, z, \tau) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_n A_m J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \cos\left(\mu_m \frac{z}{H}\right) e^{-\left(\mu_n^2 + \mu_m^2 \frac{R^2}{H^2}\right) Fo_R}. \quad (12.86)$$

12.4. Аналіз узагальненого рішення. Регулярний режим

Порівнюючи рішення задачі нестационарної теплопровідності пластини і циліндру, можна відмітити, що загальна структура рішення у відносних температурах однакова і відрізняється тільки виразом для початкових теплових амплітуд і базовими функціями, що використовуються в рішенні (косинус – для пластини, функція Бесселя – для циліндру). Тому у загальному вигляді рішення задачі нестационарної теплопровідності можна представити як

$$\Theta(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Phi\left(\mu_n \frac{\xi}{R}\right) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (12.87)$$

де A_n – початкові теплові амплітуди, $\Phi\left(\mu_n \frac{\xi}{R}\right)$ – базова функція задачі, що визначає розподіл температури за координатою ξ , R – характерний розмір тіла, μ_n – корені відповідного характеристичного рівняння, що підкоряються нерівності

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots \quad (12.88)$$

Через нерівність (12.88), кожен подальший член рівняння (12.87) із зростанням часу нагрівання (критерію Fo) буде істотно менший попереднього. Тому, починаючи з деякого моменту часу (значення критерію Fo_1), у (12.87) можна обмежитися тільки першим членом ряду і представити рішення як

$$\Theta(\xi, \tau) = A_1 \Phi\left(\mu_1 \frac{\xi}{R}\right) e^{-\mu_1^2 Fo}. \quad (12.89)$$

Логарифмуючи (12.89), отримуємо

$$\ln[\Theta(\xi, \tau)] = \ln\left[A_1 \Phi\left(\mu_1 \frac{\xi}{R}\right)\right] - \mu_1^2 \frac{a\tau}{R^2}. \quad (12.90)$$

З (12.90) витікає, що залежність логарифма надлишкової температури від часу при $Fo > Fo_1$ представляється прямою лінією з кутом нахилу, що є незалежним від координати тіла. Отже, весь процес нагрівання (охолодження) тіла можна розділити на три стадії. Перша стадія ($Fo < Fo_1$) – нерегульований режим, характерний тим, що у цій стадії температурне поле тіла істотно залежить від початкового розподілу температури в тілі. Будь-яка нерівномірність у початковому розподілі температури відбивається на температурному полі тіла. Друга стадія (при $Fo > Fo_1$) характеризується тим, що залежність відносної, надлишкової температури від часу описується простою експонентою. Цю стадію за пропозицією Кондрат'єва називають «регулярним режимом». Розподіл температури в тілі описується базовою функцією і не залежить від початкового розподілу температури. Третя стадія

– стаціонарний режим, при якому температура тіла рівна температурі середовища. У стадії регулярного режиму, якщо продиференціювати (12.90) за часом, отримуємо

$$\frac{d[\ln(\Theta)]}{d\tau} = -\mu_1^2 \frac{a}{R^2} = -m, \quad (12.91)$$

де m – темп нагрівання (охолодження) тіла. Для тіл простих форм темп нагрівання (охолодження) пропорційний першому кореню характеристичного рівняння (залежить від критерію Ві) і коефіцієнту температуропроводності, обернено пропорційний квадрату характерного розміру тіла.

А.Г. Темкин показав, що задачу нагрівання (охолодження) тіла складної форми можна звести до еквівалентної задачі для тіла простій форми (пластина, циліндр, куля) шляхом введення критерію наближеної подібності.

Припустимо, що $\bar{\Theta}_v = t_c - \bar{t}_v$, $\bar{\Theta}_n = t_c - \bar{t}_n$ – середня надлишкова температура за об'ємом і поверхнею тіла відповідно. Виходячи з (12.91) і рівняння теплового балансу на стадії регулярного режиму можна записати:

$$-c\rho V \frac{d\bar{\Theta}_v}{d\tau} = \alpha F \bar{\Theta}_n = c\rho V m \bar{\Theta}_v. \quad (12.92)$$

З (12.92), якщо прийняти $R = V/F$, отримуємо

$$m = \frac{\alpha}{c\rho R} \frac{\bar{\Theta}_n}{\bar{\Theta}_v} = \frac{\alpha}{c\rho R} \Psi = \frac{\alpha a}{\lambda R} \Psi = \frac{a}{R^2} \text{Kn}, \quad (12.93)$$

де параметричний критерій $\Psi = \bar{\Theta}_n / \bar{\Theta}_v$, $\text{Kn} = \Psi \text{Vi}$ – критерій Кондрат'єва.

Якщо критерій Біо малий ($\text{Bi} < 0,1$), то $\bar{\Theta}_n \approx \bar{\Theta}_v$, $\Psi \approx 1$ і $\text{Kn}_0 = \text{Bi}$. У цьому випадку $m = \alpha / (c\rho R)$, як для тонкого тіла.

Якщо критерій Ві $\rightarrow \infty$ ($\text{Bi} > 100$), то, порівнюючи (12.93) і (12.91), отримуємо, що для тіл простих форм $\text{Kn}_\infty = \mu_1^2$, тобто критерій Кіндрат'єва наближається до деякої постійної величини, залежної від форми тіла. Тоді темп нагрівання (охолодження) для тіла будь-якої форми

$$m = \frac{a}{R^2} \text{Kn}_\infty. \quad (12.94)$$

Останнє співвідношення дозволило Кондрат'єву з учнями розробити методи визначення теплофізичних характеристик різних матеріалів.

13. ОСНОВИ РОЗРАХУНКУ ТЕПЛОБМІННИХ АПАРАТІВ

13.1. Класифікація теплообмінних апаратів

Теплообмінні апарати – це пристрої, у яких відбувається нагрівання одного теплоносія за рахунок теплоти, відібраної від другого теплоносія. За принципом дії ці апарати розділяються на: рекуперативні, регенеративні, змішувальні та апарати з тепловиділяючими елементами (ТВЕЛ).

Рекуперативні – це апарати, у яких гарячий і холодний теплоносії одночасно протікають через апарат, а їх потоки розділяються твердою

стілкою. Подібні апарати широко поширені в техніці і побуті, а їх прикладом є батарея опалювальної системи.

Регенеративні – це апарати, у яких одна і та ж поверхня теплообміну поперемінно омивається то гарячим, то холодним теплоносієм. При цьому спочатку поверхня апарату акумулює теплоту гарячого теплоносія і нагрівається, а потім віддає теплоту холодному теплоносію і охолоджується. Прикладом подібних пристроїв є повітрянагрівачі доменних печей.

Змішувальні – це апарати, у яких відбувається змішення гарячого і холодного теплоносіїв. Прикладом такого апарату є деаератор системи регенеративного підігріву живильної води турбоустановок, в якому змішуються холодна живильна вода і водяна пара. Остання конденсується, віддає теплоту фазового переходу і нагріває воду.

Апарати з ТВЕЛ – це пристрої, у яких теплоносієм охолоджує поверхню елемента, у якому відбувається тепловиділення. Простим прикладом такого апарату є електричний чайник. У енергетиці – це ядерні реактори.

13.2. Основні положення і рівняння теплового розрахунку

Розрізняють **конструктивний** і **перевірочний** розрахунки теплообмінних апаратів.

Метою конструктивного розрахунку є визначення необхідної поверхні перенесення теплоти при заданому тепловому потоці і параметрах теплоносіїв на вході у апарат.

При перевірочному розрахунку відома поверхня перенесення теплоти і її компоновка, а метою розрахунку є визначення теплового потоку, що передається апаратом, при заданих витратах теплоносіїв і їх початкових параметрах.

Незалежно від конструкції теплообмінного апарату і типу розрахунку, в основі теплового розрахунку лежать одні і ті ж рівняння. Це рівняння теплового балансу і рівняння теплопередачі.

13.2.1. Рівняння теплового балансу

Повна зміна ентальпії теплоносія при постійній витраті, що викликана теплообміном, визначається у вигляді

$$Q = G(i'' - i'), \quad (13.1)$$

де i' та i'' – ентальпія теплоносія на вході та виході з апарату. Позначивши ентальпію гарячого теплоносія i_1 , а i_2 – холодного, запишемо рівняння теплового балансу (за відсутності втрат теплоти в навколишнє середовище)

$$Q = G_1(i_1' - i_1'') = G_2(i_2'' - i_2'). \quad (13.2)$$

Якщо в процесі теплообміну не відбувається зміни агрегатного стану теплоносіїв, то рівняння (13.2) можна представити у вигляді

$$Q = G_1 c_{p1} (t_1' - t_1'') = G_2 c_{p2} (t_2'' - t_2'), \quad (13.3)$$

де c_{p1} , c_{p2} – ізобарні теплоємності теплоносіїв, середні у даному інтервалі

температур.

У (13.3) твір витрати теплоносія на його теплоємність називають витратною теплоємністю. Позначивши $C_1 = G_1 c_{p1}$, $C_2 = G_2 c_{p2}$, отримуємо

$$C_1 (t_1' - t_1'') = C_2 (t_2'' - t_2'), \quad (13.4)$$

або у безрозмірному вигляді

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{(t_2'' - t_2')}{(t_1' - t_1'')} = \frac{\delta t_2}{\delta t_1}. \quad (13.5)$$

Останнє показує, що відношення витратних теплоємностей обернено пропорційно до відношення різниці температур теплоносіїв. Це відношення справедливе як для кінцевої різниці температури, так і для нескінченно малої, тобто

$$C_1/C_2 = dt_2/dt_1. \quad (13.5a)$$

13.2.2. Рівняння теплопередачі

Рівняння теплопередачі зв'язує тепловий потік з поверхнею перенесення теплоти і для елемента поверхні теплообмінника може бути записано у вигляді

$$dQ = k(t_1 - t_2)df, \quad (13.6)$$

де k – коефіцієнт теплопередачі на елементарній поверхні df , $(t_1 - t_2)$ – різниця температур теплоносіїв на цій поверхні (поточний температурний натиск). Повний тепловий потік можна отримати, якщо проінтегрувати (13.6) по всій поверхні теплообмінника

$$Q = \int_0^F k(t_1 - t_2)df. \quad (13.7)$$

Визначення теплового потоку по (13.7) вимагає завдання закону зміни по поверхні коефіцієнта теплопередачі і температурного напору. Найчастіше у розрахунок вводиться деякий середній по поверхні коефіцієнт теплопередачі, визначуваний як

$$\bar{k} = (k_1 F_1 + \dots + k_n F_n) / \sum F_i, \quad (13.8)$$

де k_i – коефіцієнт теплопередачі на поверхні F_i , що являє собою деяку частку поверхні F .

Замінивши у (13.7) поточне значення k на середнє значення і використовуючи теорему про середнє, отримуємо:

$$Q = \bar{k} \left(\frac{1}{F} \int_0^F (t_1 - t_2)df \right) F, \quad (13.9)$$

або

$$Q = \bar{k} \Delta t F, \quad (13.9a)$$

де середній температурний напір

$$\bar{\Delta t} = \frac{1}{F} \int_0^F (t_1 - t_2) df. \quad (13.10)$$

13.3. Середній температурний напір і його обчислення

Для визначення середнього температурного напору по (13.10) потрібно мати розподіл температури теплоносіїв уздовж поверхні теплообміну. Цей розподіл залежить від схеми течії теплоносіїв. Існує три прості схеми течії, умовно представлені на рис.13.1. Комбінуючи ці схеми довільним чином, можна отримати достатньо складні схеми течії.

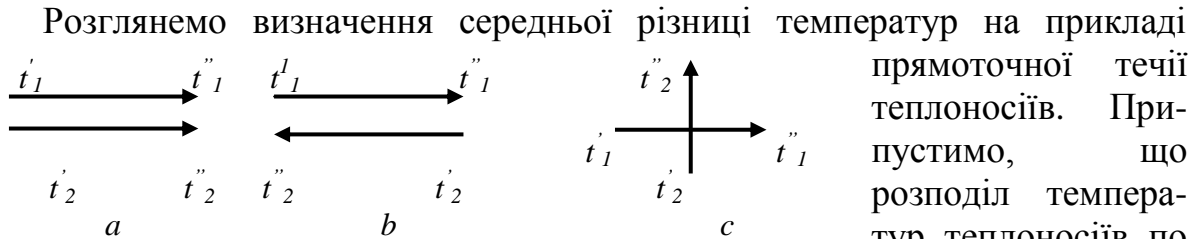


Рисунок 13.1 – Основні схеми взаємної течії теплоносіїв
a – прямоток; b – протиток; c – перехресний потік

прямоточної течії теплоносіїв. Припустимо, що розподіл температур теплоносіїв по поверхні теплообміну відповідає

даним, приведеним на рис.13.2.

Виділимо елементарну поверхню перенесення теплоти df , і з (13.4)

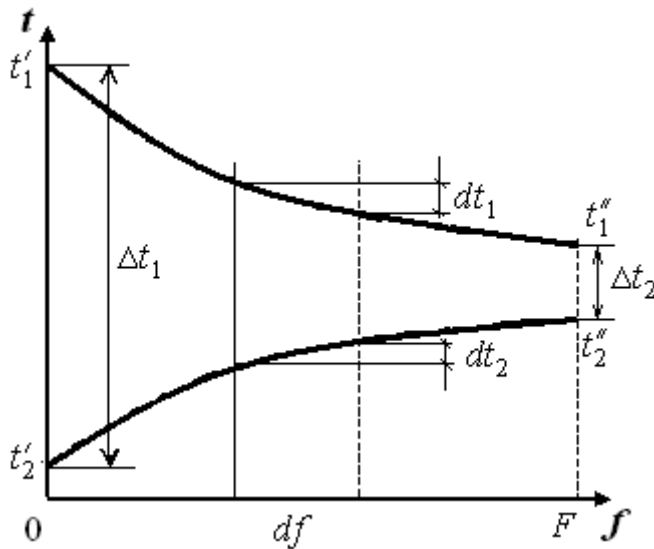


Рисунок 13.2 – Змінення температури і температурного напору вздовж поверхні теплообміну при прямотоці

визначимо зміну температури кожного теплоносія на цій поверхні.

$$dt_1 = -dQ/C_1, \quad (13.11)$$

$$dt_2 = dQ/C_2. \quad (13.12)$$

Повну зміну температурного напору на поверхні df можна визначити як

$$d\Delta t = dt_1 - dt_2, \quad \text{або}$$

$$d\Delta t = -dQ(1/C_1 + 1/C_2).$$

Позначивши величину, що знаходиться усередині дужок як m , отримаємо, враховуючи (13.6),

$$d\Delta t = -k \Delta t m df. \quad (13.13)$$

Розділивши в

(13.13) змінні, проінтегруємо по Δt від Δt_1 до поточного значення, і по f від 0 також до поточного значення. Отримаємо, враховуючи, що k і m величини постійні

$$\ln(\Delta t/\Delta t_1) = -k m f. \quad (13.14)$$

Потенціюючи отриманий вираз, отримаємо зміну температурного напору уздовж поверхні теплообміну

$$\Delta t = \Delta t_1 e^{-mkf}. \quad (13.15)$$

Таким чином, уздовж поверхні теплообміну температурний напір змінюється за експоненціальним законом. При прямої, враховуючи, що

$$m = (1/C_1 + 1/C_2) \quad (13.16)$$

величина позитивна, температурний напір зменшується уздовж поверхні теплообміну. Маючи розподіл температурного напору за поверхнею теплообміну (13.15), визначимо середній температурний напір з (13.10). Для цього підставимо (13.15) у (13.10) і врахуємо, що в кінці поверхні теплообміну (тобто при $f = F$) $\Delta t = \Delta t_2$.

Отримуємо:

$$\bar{\Delta t} = \frac{\Delta t_1}{F} \int_0^F e^{-mkf} df = \frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{\ln(\Delta t_1/\Delta t_2)}. \quad (13.17)$$

Таким чином, середній температурний напір в теплообміннику визначається як середньологарифмічний між напорами на вході і виході апарату.

Для протитечії вирази (13.11) і (13.12), враховуючи, що по поверхні апарату температура, як гарячого, так і холодного теплоносіїв зменшується, запишуться у вигляді

$$dt_1 = -dQ/C_1, \quad dt_2 = -dQ/C_2, \quad (13.18)$$

очевидно, що

$$m = (1/C_1 - 1/C_2) \quad (13.19)$$

може бути як позитивною величиною (при $C_1 < C_2$), так і негативною інакше, так і рівною нулю (при $C_1 = C_2$). Розподіл температурного напору при цьому підкоряється залежності (13.15), але при негативному m температурний напір збільшується уздовж поверхні теплообміну, а при $m = 0$ залишається постійним. Середній температурний напір визначається також виразом (13.17), де під Δt_1 і Δt_2 розуміється більший і менший з температурних напорів на вході або виході з апарату.

Таким же чином середній температурний напір визначається і для перехресної схеми течії теплоносіїв.

Для складніших схем течії теплоносіїв спочатку визначається середній температурний напір для найбільш характерної простої схеми течії (прямотечія або протитечія), а потім за допомогою номограм, які наводяться в довідковій літературі, знаходиться поправка ψ на конструктивні особливості даної схеми. Остаточний розрахунковий середній температурний напір визначається, як

$$\bar{\Delta t}_{cx} = \psi \bar{\Delta t}_{прост}. \quad (13.20)$$

13.4. Особливості перевірного теплового розрахунку теплообмінних апаратів

Конструктивний розрахунок теплообмінних апаратів виходить за рамки даного курсу, і розглядатиметься в курсі «Тепло-масообмінні апарати і установки».

Зупинимося на аналізі особливостей перевірного розрахунку. Як вказувалося вище, при перевіреному розрахунку теплообмінного апарату відома компоновка поверхні теплообміну, витрати теплоносіїв і їх параметри на вході в апарат. Підлягають визначенню тепловий потік, що передається, і параметри теплоносіїв на виході з апарату. Таким чином, є система двох рівнянь (теплового балансу і теплопередачі) з трьома невідомими. Рішення такої задачі може проводитися тільки методом послідовного наближення.

На основі аналізу роботи подібних апаратів приймається температура на виході одного з теплоносіїв, з рівняння теплового балансу визначається температура на виході іншого теплоносія, розраховується теплообмін в апараті по середніх температурах теплоносіїв. По рівнянню теплопередачі визначається тепловий потік, який може бути переданий за даних умов через задану поверхню теплопередачі. При неспівпадінні теплового потоку, визначеного з рівняння теплового балансу (для прийнятої температури на виході одного з теплоносіїв) і визначеного з рівняння теплопередачі, необхідно прийняти нове значення температури на виході теплоносія і повторити розрахунок. При цьому може знадобитися декілька наближень розрахунку для досягнення необхідної точності.

Є можливість істотно зменшити витрати часу на послідовні наближення при перевіреному розрахунку. Припустимо, що температурний напір в апараті змінюється мало (принаймні $\Delta t_1 / \Delta t_2 \leq 2$), що найчастіше має місце для апаратів з протиточною схемою течії теплоносіїв. Тоді можна записати

$$\bar{\Delta t} = \bar{t}_1 - \bar{t}_2 = \frac{t_1' + t_1''}{2} - \frac{t_2' + t_2''}{2}. \quad (13.21)$$

З рівняння теплового балансу виходить

$$t_1'' = t_1' - Q/C_1, \quad t_2'' = t_2' + Q/C_2. \quad (13.22)$$

Тоді (13.21) можна записати у вигляді

$$\bar{\Delta t} = t_1' - t_2' - Q [(1/(2C_1) + 1/(2C_2))]. \quad (13.23)$$

З рівняння теплопередачі $\bar{\Delta t} = Q/(kF)$. Підставимо останнє в (13.23) та вирішимо його відносно Q . Отримуємо

$$Q = \frac{t_1' - t_2'}{1/(kF) + 1/(2C_1) + 1/(2C_2)}. \quad (13.24)$$

Використовувати отримане співвідношення можна таким чином. По параметрах теплоносіїв на вході в апарат розраховується теплообмін в апараті і знаходиться коефіцієнт теплопередачі. З (13.24) визначається тепловий потік, а з теплового балансу знаходяться температури теплоносіїв на виході. Визначаються середні температури теплоносіїв і, при

необхідності, уточнюється коефіцієнт теплопередачі, знаходиться середній температурний напір і уточнюється тепловий потік. Таким чином, в цьому випадку потрібно не більш, ніж за одне наближення.

Питання для самоперевірки

- 1. Назвіть основні типи теплообмінних апаратів. Їх особливості.*
- 2. Основні типи взаємного перебігу теплоносіїв в теплообмінних апаратах.*
- 3. Рівняння теплового балансу для теплообмінного апарату. Його особливості.*
- 4. Рівняння теплопередачі. Його особливості при розрахунку теплообмінних апаратів.*
- 5. Середній температурний напір і його зміна уздовж поверхні теплообміну.*
- 6. Основні види теплового розрахунку теплообмінного апарату.*

ЛІТЕРАТУРА

1. Исаченко В.П., Осипова В.А., Мукомел А.С. Теплопередача. – М.: Энергия.1981.
2. Шнейдер Г. Инженерные проблемы теплопроводности. – М.: ИЛ, 1960.
3. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967.
4. Кутателадзе С.С. Основы теория теплообмена. – Новосибирск: Наука, 1970.
5. Эккерт Э., Дрейк Р. Теория тепло и массообмена. – М.: ГЭИ,1961.
6. Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи.–М.: Энергия 1977.

Таблиця Д.1 – Теплофізичні характеристики повітря

t , °C	C_p , кДж/(кг·К)	$\lambda \cdot 10^2$, Вт/(м·К)	$\mu \cdot 10^6$, Па·с	$\nu \cdot 10^6$, м ² /с	Pr
10	1,005	2,51	17,6	14,16	0,705
20	1,005	2,59	18,1	15,06	0,703
30	1,005	2,67	18,6	16,00	0,701
40	1,005	2,76	19,1	16,96	0,699
50	1,005	2,83	19,6	17,95	0,698
60	1,005	2,90	20,1	18,97	0,696
70	1,009	2,96	20,6	20,02	0,694
80	1,009	3,05	21,1	21,09	0,692
90	1,009	3,13	21,5	22,10	0,690
100	1,009	3,21	21,9	23,13	0,688
120	1,009	3,34	22,8	25,45	0,686
140	1,013	3,49	23,7	27,8	0,684
160	1,017	3,64	24,5	30,09	0,682
180	1,022	3,78	25,3	32,49	0,681
200	1,026	3,93	26,0	34,85	0,680
300	1,047	4,60	29,7	48,33	0,674
400	1,068	5,21	33,0	63,09	0,678
600	1,114	6,22	39,1	96,9	0,700
800	1,156	7,18	44,3	134,8	0,706
1000	1,185	8,07	49,0	177,1	0,719
1200	1,210	9,15	53,5	233,7	0,724

Таблиця Д.2 – Теплофізичні характеристики трансформаторного масла

t , °C	ρ , кг/м ³	C_p , кДж/(кг·К)	$\lambda \cdot 10^2$, Вт/(м·К)	$\mu \cdot 10^6$, Па·с	$\nu \cdot 10^6$, м ² /с	$\beta \cdot 10^4$, 1/К	Pr
20	880,3	1,666	11,06	198,2	22,5	6,9	298
30	874,2	1,729	10,98	128,5	14,7	6,95	202
40	868,2	1,788	10,90	89,4	10,3	7,00	146
50	862,1	1,846	10,82	65,3	7,58	7,05	111
60	856,0	1,905	10,72	49,5	5,78	7,10	87,8
70	850,0	1,964	10,64	38,6	4,54	7,15	71,3
80	843,9	2,026	10,56	30,8	3,66	7,20	59,3
90	837,8	2,085	10,47	25,4	3,03	7,25	50,5

Таблиця Д.3 – Теплофізичні характеристики масла МК

t , °C	ρ , кг/м ³	C_p , кДж/(кг·К)	$\lambda \cdot 10^2$, Вт/(м·К)	$\mu \cdot 10^6$, Па·с	$\nu \cdot 10^6$, м ² /с	$\beta \cdot 10^4$, 1/К	Pr
20	903,0	1,712	14,85	185,6	1514	8,64	15800
30	894,5	1,758	14,61	61,8	691,2	8,71	7450
40	887,5	1,804	14,37	30,3	342,0	8,79	3810
50	879,0	1,851	14,13	16,4	186,2	8,86	2140
60	871,5	1,897	13,89	9,61	110,6	8,95	1320
70	864,0	1,943	13,63	6,03	69,3	9,03	858
80	865,0	1,989	13,40	4,00	46,6	9,12	591
90	848,2	2,035	13,14	2,74	32,3	9,20	424

Таблиця Д.4 – Теплофізичні характеристики води

t , °C	ρ , кг/м ³	C_p , кДж/(кг·К)	r , кДж/кг	$\lambda \cdot 10^2$, Вт/(м·К)	$\mu \cdot 10^6$, Па·с	$\nu \cdot 10^6$, м ² /с	$\beta \cdot 10^4$, 1/К	$\sigma \cdot 10^4$, Н/м	Pr
10	999,7	4,191	2477	57,4	1306	1,306	0,7	741,6	9,52
20	998,2	4,183	2454	59,9	1004	1,006	1,82	726,9	7,02
30	995,7	4,174	2430	61,8	801,5	0,805	3,21	712,2	5,42
40	992,2	4,174	2406	63,5	653,3	0,659	3,87	696,5	4,31
50	988,1	4,174	2383	64,8	549,4	0,556	4,49	676,9	3,54
60	983,2	4,179	2358	65,9	469,9	0,478	5,11	662,2	2,98
70	977,8	4,187	2333	66,8	406,1	0,415	5,70	643,5	2,55
80	971,8	4,195	2308	67,4	355,1	0,365	6,32	625,9	2,21
90	965,3	4,208	2282	68,0	314,9	0,326	6,95	607,2	1,95
100	958,4	4,220	2257	68,3	282,5	0,295	7,52	588,6	1,75
120	943,1	4,250	2202	68,6	237,4	0,252	8,64	548,4	1,47
140	926,1	4,287	2145	68,5	201,1	0,217	9,72	507,2	1,26
160	907,4	4,346	2082	68,3	173,6	0,191	10,7	466,0	1,10
180	886,9	4,417	2015	67,2	153,0	0,173	11,9	422,8	1,03
200	863,0	4,505	1941	65,8	136,4	0,158	13,3	367,7	0,93
220	840,3	4,614	1858	64,0	124,6	0,148	14,8	331,6	0,90
240	813,6	4,760	1766	61,7	114,8	0,141	16,8	285,5	0,88
260	784,0	4,980	1661	59,3	105,9	0,135	19,7	237,4	0,892
280	750,7	5,300	1543	56,5	98,1	0,129	26,2	191,3	0,944
300	712,5	5,760	1404	53,2	91,2	0,128	29,2	144,2	0,986
320	667,1	6,570	1238	49,4	85,3	0,128	38,2	98,1	1,14

Таблиця Д.5 – Теплофізичні характеристики водної пари

t , °C	P бар	ρ'' , кг/м ³	i'' , кДж/кг	$\lambda \cdot 10^2$, Вт/(м·К)	$\mu \cdot 10^6$, Па·с	$\nu \cdot 10^6$, м ² /с	Pr
100	1,013	0,598	2676	2,372	11,97	20,02	1,08
110	1,43	0,826	2691	2,489	12,46	15,07	1,09
120	1,98	1,121	2707	2,593	12,85	11,46	1,09
130	2,70	1,496	2721	2,686	13,24	8,85	1,11
140	3,61	1,966	2734	2,791	13,54	6,89	1,12
150	4,76	2,547	2746	2,884	13,93	5,47	1,16
160	6,18	3,258	2758	3,012	14,32	4,39	1,18
170	7,92	4,122	2769	3,128	14,72	3,57	1,21
180	10,03	5,177	2779	3,286	15,11	2,93	1,25
190	12,55	6,397	2786	3,419	15,60	2,44	1,30
200	15,55	7,862	2793	3,547	15,99	2,03	1,36
220	23,2	11,62	2802	3,896	16,87	1,45	1,47
240	33,48	16,76	2803	4,290	17,75	1,06	1,61
260	46,94	23,72	2796	4,800	18,83	0,794	1,75
280	64,19	33,19	2780	5,940	19,91	0,600	1,90
300	85,92	46,21	2749	6,840	21,97	0,403	2,29
320	112,9	64,72	2700	7,510	22,85	0,353	2,50
340	146,1	92,76	2622	9,30	25,20	0,272	3,35
360	186,7	144	2481	12,79	29,13	0,202	5,23

Таблиця Д.6 – Значення комплексів $A = \left(\frac{g}{\nu^2}\right)^{1/3} \frac{\lambda}{r\rho'\nu}$, $B = \frac{4}{r\rho'\nu}$

при конденсації водної пари

t , °C	A , 1/(м·К)	$B \cdot 10^3$, м/Вт	t , °C	A , 1/(м·К)	$B \cdot 10^3$, м/Вт
20	5,16	1,61	160	122	11,09
30	7,88	2,06	170	136	12,04
40	11,4	2,55	180	150	12,9
50	15,6	3,06	190	167	14,02
60	20,9	3,62	200	182	15,05
70	27,1	4,22	210	197	16,08
80	34,5	4,88	220	218	17,63
90	42,7	5,57	230	227	21,4
100	51,5	6,28	240	246	23,0
110	60,7	7,57	250	264	24,8
120	70,3	7,65	260	278	26,4
130	82	8,47	270	296	28,4
140	94,0	9,28	280	312	30,6
150	107	10,15	290	336	33,4

Таблиця Д.7 – Значення комплексів для розрахунку теплообміну при кипінні води

t , °C	$l \cdot 10^6$, м	$l / r\rho''\nu \cdot 10^6$, м ² /Вт	$\lambda / r\rho''\nu \cdot 10^2$, 1/К	t , °C	$l \cdot 10^6$, м	$l / r\rho''\nu \cdot 10^6$, м ² /Вт	$\lambda / r\rho''\nu \cdot 10^2$, 1/К
30	16 450	276 870	1 040	180	0,715	0,391	37,5
40	5 950	73 350	782	190	0,45	0,216	32,2
50	2 305	20 900	587	200	0,296	0,123	27,5
60	960	6 540	450	210	0,200	0,0718	23,5
70	423	2 200	347	220	0,136	0,0426	20,2
80	197	797	273	230	0,0938	0,0255	17,3
90	96	304	216	240	0,0646	0,0155	15,1
100	48,7	122	172	250	0,0451	0,0115	13,6
110	25,9	51,8	138	260	0,0318	0,0069	11,4
120	14,2	22,8	110	270	0,0224	0,00434	9,80
130	8,05	107	96	280	0,0158	0,00283	8,80
140	4,7	5,13	75	290	0,0114	0,00178	7,47
150	2,82	2,58	60,5	300	0,0080	0,00106	6,16
160	1,73	1,33	52,6	310	0,00565	0,000708	5,64
170	1,08	0,71	44,5	320	0,00398	0,000451	4,93

ЗМІСТ

ВСТУП	3
1. ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ	4
1.1. Основні поняття	4
1.2. Рівняння Фур'є	4
1.3. Крайові умови рівняння Фур'є	6
2. СТАЦІОНАРНА ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ ТІЛ ПРОСТОЇ ФОРМИ	7
2.1. Необмежена пластина	7
2.2. Необмежений порожнистий циліндр	9
2.3. Теплопровідність при змінному коефіцієнті теплопровідності	11
Задачі до розділів 2.2 и 2.3	13
2.4. Теплопровідність за наявності внутрішніх джерел теплоти	15
2.5. Методи інтенсифікації теплопередачі	17
Задачі до розділу 2.5	26
3. КОНВЕКТИВНИЙ ТЕПЛООБМІН В ОДНОФАЗНОМУ СЕРЕДОВИЩІ	27
3.1. Чинники, що впливають на інтенсивність тепловіддачі	27
3.2. Система диференціальних рівнянь процесу тепловіддачі	29
3.3. Основи теорії подібності і моделювання процесу тепловіддачі	34
3.4. Отримання узагальнених змінних	35
3.5. Узагальнені змінні конвективного теплообміну	36
3.6. Друга теорема подібності і температурні умови тепловіддачі	38
4. ТЕПЛОВІДДАЧА ПРИ ПОВЗДОВЖНЬОМУ ОБТІКАННІ ПЛОСКОЇ ПОВЕРХНІ	40
4.1. Рівняння теплового потоку для прикордонного шару	41
4.2. Тепловіддача при ламінарній течії в прикордонному шарі	42
4.3. Тепловіддача при турбулентному прикордонному шарі	44
Задачі до розділу 4	47
5. ТЕПЛОВІДДАЧА ПРИ ТЕЧІЇ РІДИНИ В ТРУБАХ І КАНАЛАХ	47
5.1. Тепловіддача при ламінарній течії рідини в трубах	48
5.2. Тепловіддача при турбулентній течії рідини в трубах і каналах	51
5.3. Тепловіддача при перехідному режиму течії	52
Задачі до розділу 5	53
6. ТЕПЛОВІДДАЧА ПРИ ПОПЕРЕЧНОМУ ОБТІКАННІ ОДИНИЧНОГО ЦИЛІНДРА І ПУЧКІВ ТРУБ	54
Задачі до розділу 6	57
7. ТЕПЛОВІДДАЧА ПРИ ВІЛЬНОМУ РУСІ РІДИНИ	58
7.1. Тепловіддача при вільному русі в великому об'ємі	58
7.2. Тепловіддача горизонтального циліндра при вільному русі	61
7.3. Тепловіддача при малих значеннях критерію Релея	62
7.4. Тепловіддача при вільному русі в обмеженому просторі	62
Задачі до розділу 7	63
8. ОКРЕМІ ЗАДАЧІ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМІНУ	65
8.1. Тепловіддача рідких металів	65
8.2. Теплообмін при русі газу з високою швидкістю	67

9. ТЕПЛООБМІН ПРИ ФАЗОВИХ ПЕРЕТВОРЮВАННЯХ	68
9.1. Теплообмін при конденсації чистої пари	68
Задачі до розділу 9.1	78
9.2. Теплообмін при кипінні однокомпонентної рідини	78
Задачі до розділу 9.2	87
10. ТЕПЛООБМІН ВИПРОМІНЮВАННЯМ	87
10.1. Основні поняття	87
10.2. Види променистих потоків	88
10.3. Баланс теплоти падаючого випромінювання	89
10.4. Закони випромінювання абсолютно чорного тіла	89
10.5. Сірі тіла. Закон Кирхгофа	91
10.6. Ефективний променистий потік і результуюче випромінювання	92
10.7. Теплообмін випромінюванням двох нескінченних паралельних пластин	93
Задачі до розділів 10.1-10.7	94
10.8. Променистий теплообмін тіл, довільно розташованих у просторі	95
Задачі до розділу 10.8	102
10.9. Зональний метод розрахунку променистого теплообміну	105
10.10. Випромінювання газових середовищ	106
10.11. Поглинання енергії газовим середовищем	107
10.12. Ефективна довжина шляху проміню в поглинаючому середовищі	111
10.13. Променистий теплообмін між газом і оболонкою	111
Задачі до розділів 10.10-10.13	114
11. ОСНОВИ МАСООБМІНУ	114
11.1. Диференціальні рівняння тепло- і масообміну	116
11.2. Тепло- і масовіддача	118
11.3. Потрійна аналогія	119
11.4. Тепло- і масовіддача при конденсації пари з парогазової суміші	120
12. НЕСТАЦІОНАРНА ТЕПЛОПРОВІДНОСТЬ ТІЛ ПРОСТИХ ФОРМ	123
12.1. Термічно тонкі тіла	123
12.2. Нагрівання і охолодження термічно товстих тіл	125
Задачі до розділів 12.1, 12.2	132
12.3. Нагрівання циліндра кінцевої довжини	133
12.4. Аналіз узагальненого рішення. Регулярний режим	135
13. ОСНОВИ РОЗРАХУНКУ ТЕПЛООБМІННИХ АПАРАТІВ	136
13.1. Класифікація теплообмінних апаратів	136
13.2. Основні положення і рівняння теплового розрахунку	137
13.3. Середній температурний напір і його обчислення	139
13.4. Особливості перевірного теплового розрахунку теплообмінних апаратів	141
Література	142
Додатки	143

Навчальне видання

АКМЕН Роберт Генріхович

ТЕПЛО- І МАСООБМІН

Текст лекцій і задачі з коментарями до розв'язання
для студентів спеціальностей 7.050601-01 «Теплоенергетика»,
7.050601-02 «Енергетичний менеджмент»

Відповідальний за випуск
Роботу до видання рекомендував

В.М. Кошельник
Ю.В. Шульгін

В авторській редакції

План 2008р., поз.44/

Підп. до друку _____ 09. Формат 60x84 1/16. Папір офсетн. Друк – ризографія.
Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. _____ Обл.-вид. арк 11,0 Тираж 100 прим.
Зам. _____ . Ціна договірна

Видавничий центр НТУ „ХПІ” 61002, Харків-2, вул. Фрунзе, 21
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК №116 від 10.07.2000р.

Друкарня НТУ „ХПІ”, 61002, м. Харків, вул. Фрунзе, 21