

## ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ФЕРРОРЕЗОНАНСНОЙ ЦЕПИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА СХЕМНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Канов Л.Н., к.т.н., доц.

Севастопольский национальный технический университет  
Украина, 99053, Севастополь, Стрелецкая бухта, СевНТУ,  
кафедра "Судовые и промышленные электромеханические системы"  
тел. (0692) 235-272

*Запропоновано схемні моделі основних лінійних і нелінійних електротехнічних елементів у стаціонарному режимі змінного струму, на підставі яких побудована схемна модель феррорезонансного кола. Запропоновано методику побудови вольтамперних і амплітудочастотних характеристик кола, а також визначення границь областей стійких режимів.*

*Предложены схемные модели основных линейных и нелинейных электротехнических элементов в стационарном режиме переменного тока, на основании которых получена схемная модель феррорезонансной цепи. Предложена методика построения вольтамперных и амплитудочастотных характеристик цепи и определения границ устойчивых режимов.*

### ВВЕДЕНИЕ

В электроприводах переменного тока, где применяются магнитные усилители и все чаще частотно регулируемые асинхронные двигатели, важное значение имеет анализ вольтамперных (ВАХ) и амплитудочастотных (АЧХ) характеристик феррорезонансных цепей [1]. Точное аналитическое исследование периодических режимов в таких цепях невозможно. Существует несколько методов приближенного аналитического определения параметров периодических режимов, постоянно появляются новые их модификации. Так в [2] на основе метода оптимальной линеаризации изложен итеративный подход к расчету установившихся режимов нелинейных цепей переменного тока, особенностью которого является возможность нахождения параметров нелинейных элементов по их ВАХ. В [3] предлагается метод последовательных приближений для анализа вынужденных колебаний в цепях, описываемых дифференциальными уравнениями высокого порядка. Для нахождения очередных приближений предлагается формировать системы нелинейных алгебраических уравнений, распадающихся на каждом шаге решения на отдельные подсистемы линейных уравнений второго порядка.

В ряду этих методов выделяется простой и экономный метод гармонической линеаризации [4, 5], который является основой частотного анализа нелинейных цепей. Этот метод предполагает близкую к синусоидальной форму токов и напряжений в цепи и позволяет использовать комплексные амплитуды. Существует несколько модификаций этого метода, позволяющих повысить его точность, например, [6]. Обзор этих методов показывает, что все они связаны с большим количеством аналитических преобразований и не позволяют получить явных выражений для характеристик феррорезонансных цепей. Графические методы построения таких характеристик громоздки и имеют невысокую точность.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Целью статьи является разработка методики применения схемного моделирования для построения ВАХ и АЧХ нелинейных цепей в рамках условий метода гармонической линеаризации, т.е. в предположении малого отличия форм токов и напряжений от синусоидальной. Схемное моделирование представляет эффективный численный метод исследования режимов переменного тока в нелинейных цепях [7].

### МАТЕРИАЛЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Определим схемные модели основных элементов в режиме синусоидального тока. Для линейного комплексного сопротивления  $\underline{Z} = R + jX$  справедливо  $(R + jX)(I' + jI'') = U' + jU''$ , где  $R, X$  – активное и реактивное сопротивление;  $I', I'', U', U''$  – вещественные и мнимые части комплексных, действующих токов и напряжений. Отделяя вещественные и мнимые части, получаем  $RI' - XI'' = U'$ ;  $RI'' + XI' = U''$ . Этим уравнениям соответствует схемная модель в виде пары последовательных цепей, изображенная на рис. 1, на которой реактивное сопротивление входит коэффициентом управления в управляемые источники напряжения. Очевидно, в схемной модели резистора эти источники будут отсутствовать, а для реактивных элементов будет отсутствовать активное сопротивление. Аналогично строятся схемные модели проводимостей, взаимных индуктивностей [7] и др.

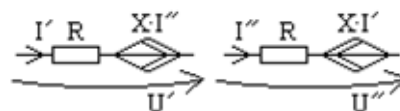


Рис. 1. Схемная модель комплексного сопротивления

Нелинейные элементы с однозначной ВАХ по действующим значениям токов и напряжений  $I = f(U)$  представляются парой нелинейных управляемых источников тока, соответствующих вещественным и мнимым частям тока в элементе. Эти ис-

точники зависят от вещественных и мнимых частей напряжения на них:  $I' = f_1(U', U'')$ ;  $I'' = f_2(U', U'')$ . Для конкретизации этих функций обратимся к записи активной и реактивной мощностей элемента:  $P = U'I' + U''I''$ ;  $Q = U''I' - U'I''$ . В резистивном нелинейном элементе

$$U''I' = U'I'', \quad (1)$$

в реактивном элементе

$$U'I' = -U''I''. \quad (2)$$

Запишем ВАХ нелинейного элемента в виде  $I^2 = f^2(U) = (I')^2 + (I'')^2$ . Тогда для резистивного элемента с учетом (1) получаем

$$I' = \pm \frac{U'}{U} f(U); I'' = \pm \frac{U''}{U} f(U); \quad (3)$$

для реактивного элемента с учетом (2)

$$I' = \pm \frac{U''}{U} f(U); I'' = \pm \frac{U'}{U} f(U). \quad (4)$$

Из выражения активной мощности следует для резистивного элемента  $U'I' > -U''I''$ . Подставляя сюда  $U'', U'$  из (1), получаем  $U'I' > -\frac{U'}{I'}(I'')^2$ ;  $\frac{U''}{I''}(I')^2 > -U''I''$ . Поэтому знаки  $U'$  и  $I'$ , а также  $U''$  и  $I''$  в выражениях (3) совпадают, и эти выражения принимают окончательный вид

$$I' = \frac{U'}{U} f(U); I'' = \frac{U''}{U} f(U).$$

Из выражения для реактивной мощности в индуктивном элементе  $U''I' > U'I''$ . Подставляя сюда  $U', U''$  из (2), получаем  $U''I' > -\frac{U''}{I'}(I'')^2$ ;  $-\frac{U'}{I''}(I')^2 > U'I''$ . Поэтому знаки  $U''$  и  $I'$  в выражениях (4) совпадают, а знаки  $U'$  и  $I''$  противоположны, и эти выражения принимают окончательный вид

$$I' = \frac{U''}{U} f(U); I'' = -\frac{U'}{U} f(U). \quad (5)$$

Для нелинейного емкостного элемента знаки в (5) будут противоположны. Аналогичное представление можно выполнить для нелинейных элементов с ВАХ вида  $U = f(I)$ .

С помощью полученных схемных моделей элементов строятся схемные модели цепей переменного тока, представляющие собой две цепи, объединенные управляемыми источниками. Расчет этих моделей дает вещественные и мнимые составляющие токов и напряжений в исследуемой цепи.

Рассмотрим построение характеристик последовательной феррорезонансной цепи с подмагничиванием. Примем для веберамперной характеристики индуктивности полиномиальную аппроксимацию  $F = a_1\Phi + a_3\Phi^3$ , где магнитодвижущая сила определяется как током  $i$  рабочей обмотки  $w$ , так и током  $I_y$  обмотки подмагничивания  $w_y$ :  $F = wi + w_y I_y$ .

Магнитный поток кроме основной гармоники содержит постоянную составляющую  $\Phi_0$ :

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_M \cos \omega t, \quad \Phi_M = \frac{U_M}{\omega w}, \quad (6)$$

где  $U_M$  – амплитуда напряжения на рабочей обмотке.

Выделим в выражении веберамперной характеристики слагаемые, соответствующие постоянным составляющим тока и потока

$$w_y I_y = \left( a_1 + 3a_3 \left( \frac{U}{\omega w} \right)^2 \right) \Phi_0 + a_3 \Phi_0^3 \quad (7)$$

и составляющим первой гармоники

$$wi = - \left( a_1 \frac{U_M}{\omega w} - 3\Phi_0^2 \frac{U_M}{\omega w} a_3 - \frac{3}{4} a_3 \left( \frac{U_M}{\omega w} \right)^3 \right) \cos \omega t.$$

Последнее выражение дает уравнение ВАХ нелинейной индуктивности по действующим значениям тока

и напряжения  $I = \frac{U}{\omega w^2} \left( a_1 + 3a_3 \Phi_0^2 + 1,5a_3 \left( \frac{U}{\omega w} \right)^2 \right)$ , в

котором  $\Phi_0$  определяется из (7) и зависит от тока подмагничивания. В соответствии с этим выражения (5) для управляемых источников тока схемной модели индуктивности принимают вид

$$I' = \frac{U''}{\omega w^2} \left( a_1 + 3a_3 \Phi_0^2 + 1,5a_3 \left( \frac{U}{\omega w} \right)^2 \right); \quad (8)$$

$$I'' = -\frac{I'}{U'} U'; \quad U^2 = (U')^2 + (U'')^2.$$

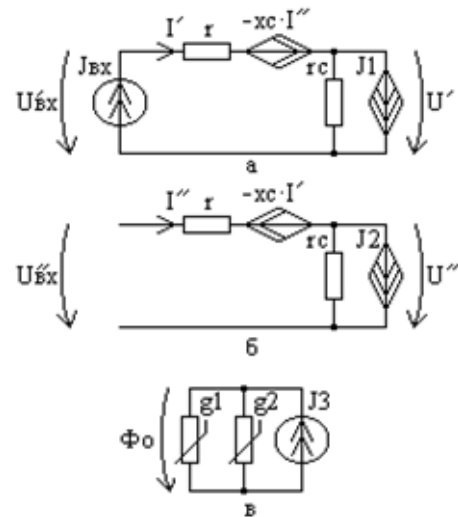


Рис. 2. Схемная модель последовательной феррорезонансной цепи

Схемная модель последовательной феррорезонансной цепи изображена на рис. 2, где в соответствии с (7) обозначены:  $g1 = a_1 + 3a_3 \left( \frac{U}{\omega w} \right)^2$  – управляемая проводимость,  $g2 = a_3 \Phi_0^2$  – нелинейная проводимость,  $J3 = w_y I_y$ ,  $r$  – сопротивление рабочей обмотки, управляемые источники напряжения представля-

ют емкость, а сопротивление  $r_c$  имитирует потери на гистерезис и принимается постоянным [8]. Управляемые источники тока  $J_1, J_2$  определяются в соответствии с (8). Напряжение на проводимости  $g_1$  численно соответствует постоянной составляющей магнитного потока.

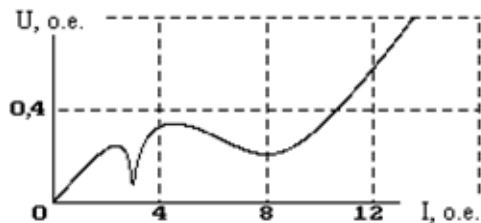


Рис. 3. Вольтамперная характеристика последовательной феррорезонансной цепи

На рис. 3 изображена ВАХ цепи, полученная просчетом схемной модели при изменении величины  $J_{BX}$ . Входное напряжение подсчитывается по выражению  $U_{BX} = \sqrt{(U'_{BX})^2 + (U''_{BX})^2}$ . Параметры цепи в относительных единицах:  $r = 0,025$ ;  $\omega w = 1$ ;  $x_c = 0,22$ ;  $r_c = 100$ ;  $a_1 = 0,5$ ;  $a_3 = 1$ ;  $w_y I_y = 1$ . Провал напряжения при  $I = 8$  возникает из-за насыщения индуктивности при больших токах, второй провал при  $I = 3$  объясняется искривлением ВАХ индуктивности вследствие подмагничивания. При плавном изменении входного напряжения в цепи возникает двойной триггерный эффект.

Для построения АЧХ в схемной модели на рис. 2,а источник тока  $J_{BX}$  следует заменить единичным источником напряжения, а на рис.2,б контакты с левой стороны схемы закоротить. На рис. 4 изображена АЧХ цепи, построенная просчетом измененной таким образом схемной модели при изменении частоты. Наклон резонансной кривой вправо (участок 2 – 4) при высоких токах объясняется повышением резонансной частоты с падением индуктивности, а наклон влево (участок 1 – 2) при небольших токах возникает при некотором возрастании индуктивности вследствие подмагничивания.

### АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для оценки устойчивости режима цепи обратимся к уравнению

$$u_L + ri(\Phi, I_y) + \frac{1}{C} \int i(\Phi, I_y) dt = U_M \sin \omega t,$$

где  $i(\Phi, I_y)$  – нелинейная зависимость между мгновенными значениями токов и магнитного потока. После дифференцирования получаем

$$\frac{du_L}{dt} = f(\Phi, I_y) + \omega U_M \cos \omega t, \quad (9)$$

где  $f(\Phi, I_y) = -r \frac{\partial i}{\partial \Phi} \frac{d\Phi}{dt} - \frac{1}{C} i(\Phi, I_y)$ . Перепишем далее выражение (6) в более общем виде:

$$\Phi(t) = \Phi_0 + \Phi_M(t) \cos x; \quad x = \omega t + \varphi(t),$$

где  $\Phi_M(t), \varphi(t)$  – медленно меняющиеся амплитуда первой гармоники потока и его начальная фаза.

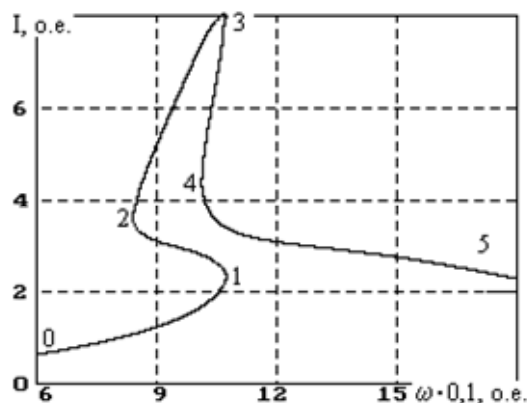


Рис. 4. Амплитудочастотная характеристика последовательной феррорезонансной цепи

Дифференцируя последнее выражение по "короткому времени", как это принято в методе медленно меняющихся амплитуд [4, 5, 8], получаем  $\frac{d\Phi}{dt} = -\omega \Phi_M \sin x$ . Дифференцирование же по "длинному времени" дает

$$\frac{d\Phi_M}{dt} \cos x - \Phi_M(t) \left( \omega + \frac{d\varphi}{dt} \right) \sin x = -\omega \Phi_M \sin x. \quad (10)$$

С учетом равенства  $u_L(t) = w \frac{d\Phi(t)}{dt}$  и соотношения

(10) уравнение (9) принимает вид

$$\frac{d\Phi_M}{dt} \sin x + \Phi_M \cdot \left( \omega + \frac{d\varphi}{dt} \right) \cos x - \frac{1}{\omega w} f(\Phi, I_y) = -\frac{U_M}{w} \cos \omega t. \quad (11)$$

Уравнения (10), (11) представляют уравнения для медленно меняющихся амплитуды магнитного потока  $\Phi_M(t)$  и начальной фазы  $\varphi(t)$ . После приведения этих уравнений к нормальному виду и усреднения за период по  $x$ , получаем укороченные уравнения, правые части которых не зависят явно от времени:

$$\frac{d\Phi_M(t)}{dt} = F_1(\Phi_M, \varphi); \quad \frac{d\varphi(t)}{dt} = F_2(\Phi_M, \varphi). \quad (12)$$

Необходимое условие устойчивости стационарного режима состоит в выполнении неравенств

$$-(a_{11} + a_{22}) > 0; \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0,$$

где  $a_{11} = \frac{\partial F_1}{\partial \Phi_M}$ ;  $a_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial \varphi}$ ;  $a_{21} = \frac{\partial F_2}{\partial \Phi_M}$ ;  $a_{22} = \frac{\partial F_2}{\partial \varphi}$ .

Непосредственная проверка этих условий для исследуемой цепи достаточно громоздка, однако для второго условия непосредственно по виду АЧХ можно определить граничные по устойчивости точки, в которых  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ .

Для этого отметим, что условия стационарного режима укороченных уравнений имеют вид:  $F_1(\Phi_M, \varphi) = 0$ ;  $F_2(\Phi_M, \varphi) = 0$ . Последнее равенство задает неявную функцию  $\varphi = \varphi(\Phi_M)$ ; тогда для ста-

ционарного режима получаем уравнение относительно одной переменной

$$F_1(\Phi_M, \varphi(\Phi_M)) = 0. \quad (13)$$

Согласно правилам дифференцирования неявной

функции получаем  $\frac{dF_1}{d\Phi_M} = \frac{\partial F_1}{\partial \Phi_M} - \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial F_2}$ . Следова-

тельно, граничное условие состоит в равенстве  $\frac{dF_1}{d\Phi_M} = 0$ . Поэтому для выявления граничных точек

на АЧХ, которая является графическим представлением уравнения (13), нужно найти точки касания АЧХ с вертикальными прямыми, так как при заданном токе управления амплитуды рабочего тока и потока связаны однозначно.

В соответствии с выполненным анализом на рис.4 выделим граничные точки 1 – 4, отделяющие устойчивые и неустойчивые режимы. Из физических соображений можно заключить, что режимы на участках 0 – 1 и 4 – 5 устойчивы. Тогда участкам 1 – 2 и 3 – 4 соответствуют неустойчивые режимы. К устойчивым можно отнести участок 2 – 3. В соответствии с этим в цепи возможны множественные триггерные эффекты при плавном изменении частоты.

При плавном увеличении частоты с точки 1 происходит скачок тока вверх на участок 2 – 3; при дальнейшем увеличении частоты с точки 3 на вершине кривой происходит скачок тока вниз на участок 4 – 5. При плавном уменьшении частоты с точки 4 происходит скачок тока вверх на участок 2 – 3; при дальнейшем уменьшении частоты происходит скачок тока вниз на участок 0 – 1. Кроме того, при увеличении частоты с точки 1 скачок тока может происходить сразу на участок 4 – 5, минуя вершину графика. Поэтому неустойчивые участки не могут быть достигнуты при изменении частоты.

## ВЫВОДЫ

Предложены схемные модели основных линейных и нелинейных электротехнических элементов в стационарном режиме переменного тока в условиях метода гармонической линеаризации. Построена схемная модель последовательной феррорезонансной цепи, состоящая из сопротивлений, линейных, нелинейных, управляемых и независимых источников напряжения и тока.

Предложена методика построения вольтамперных и амплитудочастотных характеристик феррорезонансных цепей с помощью полученных схемных моделей, основанная на просчете режима при изменении входного тока и частоты.

Обосновано применение метода медленно меняющихся синусоид для выявления граничных точек на АЧХ, отделяющих участки, соответствующие устойчивым и неустойчивым режимам феррорезонансной цепи. Граничные точки являются точками касания вертикальных прямых и графика амплитудочастотной характеристики.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Соколовский Г.Г. Электроприводы переменного тока с частотным регулированием. – М.: Изд. центр "Академия", 2006. – 272 с.
- [2] Калугин Е.Н. Метод оптимальной линеаризации для расчета установившихся режимов нелинейной электрической цепи // Электричество. – 1989. – № 10. – С. 53-60.
- [3] Орешников В.Г. Метод анализа вынужденных колебаний в нелинейных цепях // Известия ВУЗов. Электромеханика. – 1997. – № 6. – С. 9-11.
- [4] Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. – М.: Изд-во "Гардарика", 2006. – 701 с.
- [5] Данилов Л.В. Теория нелинейных электрических цепей / Л.В. Данилов, П.Н. Матханов, Е.С. Филиппов. – Л.: Энергоатомиздат, 1990. – 256 с.
- [6] Бирюк Н.Д. Анализ колебаний в нелинейном контуре методом комплексных амплитуд / Н.Д. Бирюк, В.Н. Дальчев // Электричество. – 1988. – № 8. – С. 46-51.
- [7] Канов Л.Н. Схемное моделирование нелинейных электрических цепей переменного тока // Вестник СевГТУ. Вып. 41. Информатика, электроника, связь: Сб. науч. тр. Севастоп. нац. техн. ун-т. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2002. – С. 151-154.
- [8] Филиппов Е. Нелинейная электротехника. – М.: Энергия, 1976. – 496 с.

Поступила 30.05.2008