

В.П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С.В. ОЛЬШАНСЬКИЙ

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ПРУЖНОГО УДАРУ КОНУСА ПО ПІВПРОСТОРУ

З використанням основних положень теорії Г. Герца про механічний удар твердих тіл розглянуто динамічну взаємодію пружного конуса з пружним півпростором, обмеженим плоскою поверхнею. Досліджено випадок, коли вісь конуса обертання перпендикулярна до границі півпростору, а початковою точкою контакту тіл є вершина конуса. Для опису місцевих деформацій тіл в зоні їх взаємодії використано відомий розв'язок вісесиметричної статичної контактної задачі теорії пружності, побудований І.Я. Штаерманом. Задача співудару тіл зведена до диференціального рівняння другого порядку з квадратичною нелінійністю. Одержано дві форми аналітичного розв'язку цієї нелінійної задачі Коші. В першій використано Ateb-синус, а в другій – еліптичний косинус. Встановлено рівнозначність отриманих форм розв'язку, тобто можливість заміни однієї форми на іншу. Для обчислення значень Ateb-синуса методом лінійної інтерполяції подана спеціальна таблиця, а також запропонована аналітична апроксимація його елементарними функціями. Показана узгодженість результатів, до яких призводять ці два способи наближеного розрахунку значень Ateb-синуса. Виведена також наближена формула для обчислення значень еліптичного косинуса і підтверджена її вірогідність. За результатами розв'язання задачі удару отримано формули, що описують зміну у часі: зближення центрів мас тіл, сили ударної взаємодії, радіуса кругової площадки контакту та контактного тиску. Відзначено, що тиск нескінченний в центрі площадки, де вершина конуса контактує з півпростором. Проведено порівняння результатів, до яких призводять дві аналітичні форми розв'язку та числове комп'ютерне інтегрування диференціального рівняння стискання тіл, підданих удару. Встановлена гарна узгодженість числових результатів, одержаних різними способами. Досліджено вплив кута конусності на основні параметри динамічної взаємодії тіл. Показано, що збільшення кута конусності тіла, яке вдаряє, призводить до зменшення максимального динамічного стискання тіл і тривалості їх взаємодії та до зростання максимуму сили удару при сталому значенні її імпульсу. Наведено числовий приклад розрахунку, де матеріалом кінцевого тіла вибрано сталь, а матеріалом нерухомого півпростору – гуму. Задачі такого типу виникають при розрахунках параметрів удару куса мінеральної сировини по футерованому гумою валку вібраційного класифікатора.

Ключові слова: механічний удар, пружне кінцеве тіло, пружний півпростір, теорія Г. Герца, аналітичний розв'язок, Ateb-синус, еліптичний косинус.

В.П. ОЛЬШАНСКИЙ, С.В. ОЛЬШАНСКИЙ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРУГОГО УДАРА КОНУСА ПО ПОЛУПРОСТРАНСТВУ

С использованием основных положений теории Г. Герца о механическом ударе твердых тел рассмотрено динамическое взаимодействие упругого конуса с упругим полупространством, ограниченным плоской поверхностью. Исследован случай, когда ось конуса вращения перпендикулярна к границе полупространства, а начальной точкой контакта тел является вершина конуса. Для описания местных деформаций тел в зоне их взаимодействия использовано известное решение осесимметричной статической контактной задачи теории упругости, построенное И.Я. Штаерманом. Задача соударения тел сведена к дифференциальному уравнению второго порядка с квадратичной нелинейностью. Получено две формы аналитического решения этой нелинейной задачи Коши. В первой использовано Ateb-синус, а во второй – эллиптический косинус. Установлена равнозначность полученных форм решений, то есть возможность замены одной формы на другую. Для вычисления значений Ateb-синуса методом линейной интерполяции представлена специальная таблица, а также предложена аналитическая аппроксимация его элементарными функциями. Показана согласованность результатов, к которым приводят эти два способа приближенного расчета значений Ateb-синуса. Выведена также приближенная формула для вычисления значений эллиптического косинуса и подтверждена ее достоверность. По итогам решения задачи удара получены формулы, которые описывают изменение во времени: сближения центров масс тел, силы ударного взаимодействия, радиуса круговой площадки контакта и контактного давления. Отмечено, что давление бесконечно в центре площадки, где вершина конуса контактирует с полупространством. Проведено сравнение результатов, к которым приводят две аналитические формы решения и численное компьютерное интегрирование дифференциального уравнения сжатия тел, подвергнутых удару. Установлено хорошее согласование численных результатов, полученных разными способами. Исследовано влияние угла конусности на основные параметры динамического взаимодействия тел. Показано, что увеличение угла раствора конического тела, которое ударяет, приводит к уменьшению максимального динамического сжатия тел и продолжительности их взаимодействия, а также к увеличению максимума силы удара, при постоянном значении ее импульса. Приведен численный пример расчета, где материалом конического тела принято сталь, а материалом неподвижного полупространства – резину. Задачи такого типа возникают при расчетах параметров удара куса минерального сырья по футерованному резиной валку вибрационного классификатора.

Ключевые слова: механический удар, упругое коническое тело, упругое полупространство, теория Г. Герца, аналитическое решение, Ateb-синус, эллиптический косинус.

ANALYTICAL SOLUTION OF THE ELASTIC IMPACT PROBLEM FOR A CONE OVER A HALF-SPACE

Using the main provisions of the theory of H. Hertz on the mechanical impact of solids, the dynamic interaction of an elastic cone with an elastic half-space bounded by a flat surface is considered. The case is investigated when the axis of the cone of rotation is perpendicular to the boundary of the half-space, and the initial point of contact of the bodies is the vertex of the cone. To describe the local deformations of bodies in the zone of their interaction, the well-known solution of the axisymmetric static contact problem of the theory of elasticity, constructed by I. Ya. Shtaermann, is used. The problem of the collision of bodies is reduced to a second-order differential equation with quadratic nonlinearity. Two forms of analytical solution of this nonlinear Cauchy problem are obtained. The first uses the Ateb-sine, and the second uses the elliptical cosine. The equivalence of the obtained forms of solutions is established, that is, the possibility of replacing one form with another. To calculate the values of the Ateb-sine using the linear interpolation method, a special table is presented, and an analytical approximation by its elementary functions is proposed. The consistency of the results to which these two methods of approximate calculation of the Ateb-sine values are shown is shown. An approximate formula for calculating the values of the elliptical cosine is also derived and its reliability is confirmed. As a result of solving the impact problem, formulas were obtained that describe the change over time: the convergence of the centers of mass of the bodies, the forces of impact interaction, the radius of the circular contact area and the contact pressure. It is noted that the pressure is infinite in the center of the site, where the top of the cone is in contact with the half-space. The results are compared, to which two analytical forms of the solution result and numerical computer integration of the differential equation of compression of bodies subjected to impact. Established a good agreement of numerical results obtained in different ways. The effect of the taper angle on the main parameters of the dynamic interaction of bodies is investigated. It is shown that an increase in the angle of a solution of a conical body, which strikes, leads to a decrease in the maximum dynamic compression of bodies and the duration of their interaction, as well as to an increase in the maximum impact force, with a constant value of its momentum. A numerical example of calculation is given, where steel is taken as the material of a conical body, and rubber is used as the material of a fixed half-space. Problems of this type arise when calculating the parameters of impact of a piece of mineral raw materials on rubber-lined rolls of the vibration classifier.

Key words: mechanical shock, elastic conical body, elastic half-space, H. Hertz theory, analytical solution, Ateb-sine, elliptic cosine.

Вступ. Розрахунки міцності деталей при механічному ударі поширені в інженерній практиці, бо вказане короткочасне динамічне навантаження може вивести з ладу елементи конструкцій. Із багатьох наближених теорій удару заслуговує окремої уваги теорія Г. Герца. Вона висвітлена в багатьох виданнях [1-3]. Але там йдеться про удар тіл обмежених поверхнями другого порядку. Це стосується і роботи [4], де одержано аналітичний розв'язок задачі в Атеб-функціях. Поряд з цим варіантом, на практиці зустрічаються випадки, коли точка граничної поверхні одного із тіл, з якої починається процес стискання, є кутковою точкою. Тому далі розглянемо цей особливий випадок що виникає, наприклад, при ударі конуса об плоску перешкоду.

Метою статті є виведення та апробація формул для розрахунку параметрів ударної взаємодії пружного конічного тіла з нерухомим пружним півпростором, обмеженим плоскою поверхнею.

Викладення основного матеріалу. Для досягнення поставленої мети, крім основних положень теорії Г. Герца, використаємо розв'язок статичної осесиметричної задачі теорії пружності, одержаний І.Я. Штаерманом. У відповідності з цим розв'язком [5, с. 188], зближення центрів мас тіл x , при їх стисканні силою P , подається виразом:

$$x = \frac{\pi}{2} a \operatorname{ctg} \gamma, \quad (1)$$

у якому:

$$a = \sqrt{\frac{2P}{\pi} (Q_1 + Q_2) \operatorname{tg} \gamma}; \quad Q_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1}; \quad Q_2 = \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}; \quad (2)$$

a – радіус області контакту; E_1, E_2, μ_1, μ_2 – модулі пружності та коефіцієнти Пуассона матеріалів тіл; 2γ – кут конусності одного із тіл (див. рис. 1).

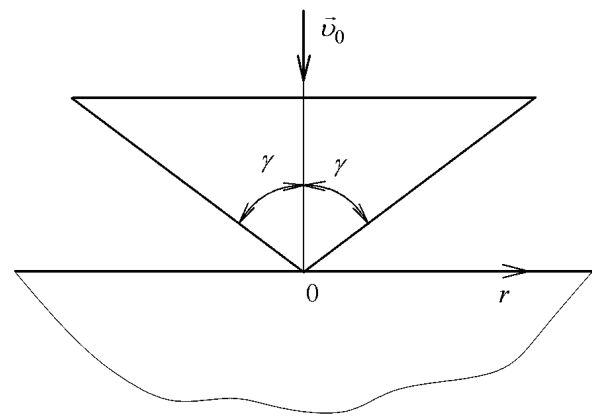


Рисунок 1 – Схема взаємодії тіл

Тиск $p(r)$ має логарифмічну особливість в центрі площадки контакту $r = 0$, бо згідно з [5, с. 188]:

$$p(r) = -\frac{P}{\pi a^2} \ln \left(\frac{a}{r} - \sqrt{\frac{a^2}{r^2} - 1} \right). \quad (3)$$

Тут осереднений тиск $p_{cp} = \frac{P}{\pi a^2} = \frac{\operatorname{ctg} \gamma}{2 \cdot (Q_1 + Q_2)}$

не залежить від сили P .

Щоб знайти відношення r/a , при якому $p(r) = p_{cp}$, розв'яжемо рівняння:

$$\frac{a}{r} - \sqrt{\frac{a^2}{r^2} - 1} = \frac{1}{e}.$$

Воно має корінь $\frac{r}{a} = \frac{2e}{1+e^2} \approx 0,64805$.

Графік зміни тиску в безрозмірних координатах подано на рис. 2, де $p(0) = \infty$.

Завдяки великому тиску, в зоні контакту не обійтись без пластичних деформацій. Але, аналогічно І.Я. Штаерману, їх не будемо враховувати при динамічному стисканні тіл.

Зближення центрів мас тіл в ході пружного удару $x(t)$ описуємо диференціальним рівнянням:

$$M \ddot{x} = -\beta x^2, \quad (4)$$

де крапка над x означає похідну за часом t ; M – маса конуса.

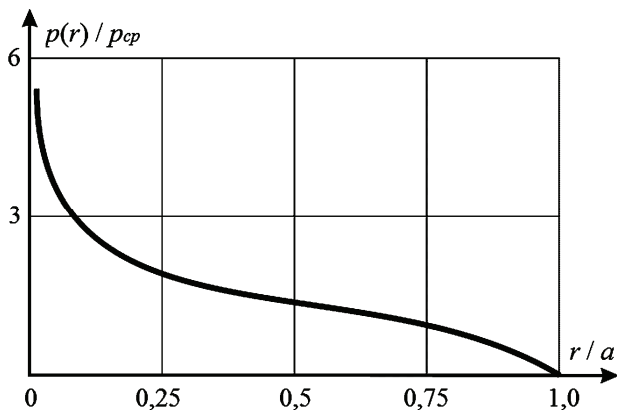


Рисунок 2 – Графік розподілу контактної тиску

Враховуючи (1) і (2), для обчислення коефіцієнта β отримуємо формулу:

$$\beta = \frac{2tg\gamma}{\pi \cdot (Q_1 + Q_2)}.$$

Рівняння (4) розв'язуємо при початкових умовах:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad (5)$$

де v_0 – початкова швидкість зіткнення конуса з півпростором.

Розглянемо спочатку процес динамічного стискання тіл. Щоб одержати перший інтеграл рівняння (4) подамо його у вигляді:

$$\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{\beta}{M} x^2. \quad (6)$$

Проінтегрувавши (6), з урахуванням (5), отримуємо:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2\beta}{3M} \sqrt{x_c^3 - x^3}}. \quad (7)$$

Тут:

$$x_c = \left(\frac{3Mv_0^2}{2\beta} \right)^{1/3}.$$

Це максимальне стискання тіл при ударі.

Подальше інтегрування (7), з урахуванням (5), дає:

$$\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{x_c^3 - y^3}} = \sqrt{\frac{2\beta}{3M}} t. \quad (8)$$

Із (8) переходом до безрозмірної змінної

$y = u \cdot x_c$, одержуємо:

$$\int_0^{x/x_c} \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = \eta = \frac{v_0 t}{x_c}. \quad (9)$$

Далі можливі дві форми подання x/x_c . Спочатку розглянемо першу з них.

1. Верхня межа інтегралу в лівій частині в (9) виражається через Атеб-синус [6, 7]. Тому:

$$x(t) = x_c \cdot \text{Sa} \left(2, 1, \frac{3}{2} \eta \right). \quad (10)$$

Максимальне зближення центрів мас досягається при

$$\text{Sa} \left(2, 1, \frac{3}{2} \eta \right) = 1. \quad (11)$$

Воно становить:

$$\max x(t) = x_c = \left(\frac{3Mv_0^2}{2\beta} \right)^{1/3}.$$

Для обчислення сили удару $P(t)$, як функції часу, одержуємо формулу:

$$P(t) = \beta x_c^2 \left[\text{Sa} \left(2, 1, \frac{3}{2} \eta \right) \right]^2,$$

причому:

$$\max P(t) = \beta x_c^2.$$

Знаючи $P(t)$, по формулах (2) і (3) потім можна обчислити $a(t)$ і $p(r,t)$, причому $p(0,t)$ буде нескінченним, що підкреслює особливість цієї точки.

Процес стискання закінчується при $t = t_c$, коли виконується умова (11) або:

$$\eta = \frac{v_0 t_c}{x_c} = I = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}}.$$

Цей інтеграл виражається через затабульовану в [8, 9] Гама-функцію $\Gamma(z)$ по формулі [10]:

$$I = \sqrt[3]{4} \frac{\Gamma^2(4/3)}{\Gamma(5/3)}.$$

Враховуючи, що $\Gamma(4/3) \approx 0,8929795$, $\Gamma(5/3) \approx 0,9027453$, знаходимо, що $I \approx 1,402182$.

Отже тривалість процесу стискання становить:

$$t_c = 1,402182 \cdot \frac{x_c}{v_0},$$

а тривалість пружного удару дорівнює $t_y = 2t_c$.

Імпульс сили удару $S(P)$ подається інтегралом:

$$S(P) = \int_0^{t_y} P(t) dt = 2\beta x_c^2 \int_0^{t_c} \text{Sa}^2 \left(2, 1, \frac{3}{2} \eta \right) dt,$$

який не виражається в замкнутому вигляді через відомі функції. Але його досить просто обчислити наближено, наприклад, по формулі Сімсона. При такому варіанті обчислення:

$$S(P) \approx \frac{1}{3} \beta x_c^2 t_c \left[1 + 4 \cdot \text{Sa}^2 \left(2, 1, \frac{3}{2}, \frac{I}{2} \right) \right] \approx 0,70109 \cdot \left[1 + 4 \cdot \text{Sa}^2 \left(2, 1, \frac{3}{2}, \frac{I}{2} \right) \right] Mv_0. \quad (12)$$

Оскільки за лінійною інтерполяцією даних в

Таким чином, за розглянутою формою розв'язку, розрахунок параметрів удару пов'язаний з обчисленням значень Атеб-сінуса. Для зручності проведення розрахунків наводимо таблицю цієї функції, запозичену з роботи [11]. Вказаних значень достатньо, щоб методом лінійної інтерполяції проводити відповідні розрахунки. Для порівняння в дужках в табл. 1. Також вказано наближені значення Атеб-сінуса, до яких призводить апроксимація:

$$\text{Sa} \left(2; 1; \frac{3}{2} \eta \right) \approx \begin{cases} \eta & 0 \leq \eta < 0,2 \\ 0,2 + 1,0283(\eta - 0,2) - 0,1833(\eta - 0,2)^2 & \text{при } 0,2 \leq \eta \leq 0,8 \\ 1 - \sin^2 \left[\left(\sqrt{3}/2 \right) \cdot (I - \eta) \right] & 0,8 < \eta \leq I. \end{cases} \quad (13)$$

Таблиця 1 – Значення Атеб-сінуса (в дужках наближені)

10η	10Sa(2,1, 3/2 η)	10η	10Sa(2,1, 3/2 η)
0,0	0,00 (0,00)	7,5	7,12 (7,10)
0,5	0,50 (0,50)	8,0	7,51 (7,51)
1,0	1,00 (1,00)	8,5	7,88 (7,88)
1,5	1,50 (1,50)	9,0	8,22 (8,22)
2,0	2,00 (2,00)	9,5	8,54 (8,54)
2,5	2,50 (2,51)	10,0	8,83 (8,84)
3,0	2,99 (3,01)	10,5	9,10 (9,10)
3,5	3,48 (3,50)	11,0	9,33 (9,33)
4,0	3,97 (3,98)	11,5	9,53 (9,53)
4,5	4,45 (4,46)	12,0	9,70 (9,70)
5,0	4,92 (4,92)	12,5	9,83 (9,83)
5,5	5,39 (5,37)	13,0	9,92 (9,92)
6,0	5,84 (5,82)	13,5	9,98 (9,98)
6,5	6,28 (6,26)	I	10,00 (10,0)
7,0	6,71 (6,68)		

Порівняння результатів підтверджує досить високу точність запропонованої апроксимації.

Зазначимо, що (13) є окремим випадком більш загального наближення, запропонованого в [12].

2. Зупинимось далі на другій формі аналітичного розв'язку поставленої задачі. Щоб отримати її, виразу (9) надаємо вигляд:

$$\int_0^{x/x_c} \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} - \int_{x/x_c}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = \eta,$$

звідки одержуємо:

$$\int_{x/x_c}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} - \eta = I - \eta. \quad (14)$$

Інтеграл в лівій частині цього співвідношення виражається через неповний еліптичний інтеграл першого роду $F(\varphi, K)$ [9]. Тому (14) набуває форму:

$$F(\varphi, \sin 75^\circ) = \sqrt[4]{3}(I - \eta),$$

причому

табл. 1 $\text{Sa} \left(2, 1, \frac{3}{2}, \frac{I}{2} \right) \approx 0,672$, то, у відповідності з (12), $S(P) \approx 1,967 Mv_0$. Точне значення імпульсу $S(P) = 2Mv_0$, що підтверджує вірогідність одержаних аналітичних розв'язків.

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{3} - 1 - (x/x_c)}{\sqrt{3} + 1 + (x/x_c)} = \text{cn} \left[\sqrt[4]{3}(I - \eta), \sin 75^\circ \right];$$

$\text{cn} \left[\sqrt[4]{3}(I - \eta), \sin 75^\circ \right]$ – еліптичний косинус.

Отже другою формою аналітичного розв'язку задачі удару є:

$$x(t) = x_c \cdot \left\{ 1 - \sqrt{3} \cdot \frac{1 - \text{cn} \left[\sqrt[4]{3}(I - \eta), \sin 75^\circ \right]}{1 + \text{cn} \left[\sqrt[4]{3}(I - \eta), \sin 75^\circ \right]} \right\}. \quad (15)$$

Решта параметрів удару, а саме $P(t)$, $a(t)$ і $q(t)$ теж будуть виражатись через еліптичний косинус. Тому зупинимось на обчисленні значень цієї функції. Скористаємось відомою залежністю [13]:

$$\text{cn}(\xi, \sin 75^\circ) = \cos \theta, \quad (16)$$

де

$$\theta = \frac{\pi \xi}{2K} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^n}{1+q^{2n}} \sin \frac{n \pi \xi}{K}, \quad (17)$$

$$q = \exp \left(-\pi \frac{K'}{K} \right), \quad K = F \left(\frac{\pi}{2}, \sin 75^\circ \right),$$

$$K' = F \left(\frac{\pi}{2}, \sin 15^\circ \right) \text{ – повні еліптичні інтеграли першого роду.}$$

Оскільки [9]: $K = 2,7681$, $K' = 1,5981$, то $q \approx 0,16305 < 1$.

Прискоримо збіжність ряду в (17). Для цього подамо його у вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^n}{1+q^{2n}} \sin \frac{n \pi \xi}{K} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} q^n \sin \frac{n \pi \xi}{K} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^3}{1+q^{2n}} \sin \frac{n \pi \xi}{K}. \quad (18)$$

Оскільки $q < 1$, то другий ряд в правій частині в (18), збігається досить швидко і його суму можна наближено подати одним першим членом. Сума першого ряду в правій частині в (18) виражається в замкнутому вигляді [10]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} q^n \sin \frac{n\pi\xi}{K} = \operatorname{arctg} \left(\frac{q \sin \frac{\pi\xi}{K}}{1 - q \cos \frac{\pi\xi}{K}} \right).$$

Таким чином, приходимо до наближеної формули:

$$\theta \approx \frac{\pi\xi}{2K} + 2 \cdot \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{q \sin \frac{\pi\xi}{K}}{1 - q \cos \frac{\pi\xi}{K}} \right) - \frac{q^3}{1+q^2} \sin \frac{\pi\xi}{K} \right]. \quad (19)$$

Перевіримо точність цієї формули. Для цього покладемо $F(\varphi, \sin 75^\circ) = \sqrt[4]{3}(I - \eta) = 1,6468$. Йому в табл. 27 в [9] відповідає $\varphi = 70^\circ$. Тоді $\operatorname{cn}(1,6468; \sin 75^\circ) = \cos 70^\circ = 0,34202$. Якщо користуватись формулою (19), то туди треба задати: $\xi = 1,6468$; $q = 0,16305$; $K = 2,7681$. Для цих чисел одержуємо: $\theta \approx 1,22173$ рад, $\cos \theta = 0,34202$. Отже формули (16), (19) забезпечують високу точність обчислення значень еліптичного косинуса. Якщо вказане значення еліптичного косинуса підставити в (15), то одержимо $x(t)/x_c = 0,1509$. При $\sqrt[4]{3}(I - \eta) = 1,6468$ аргумент $\eta = 0,15088$. Підставивши це η в асимптотичну формулу (13), знаходимо, що $\operatorname{Sa}\left(2, 1, \frac{3}{2}\eta\right) \approx 0,1509$. Тому, згідно з (10), $x(t)/x_c = 0,1509$. Отже обидві форми аналітичного розв'язку дають однакове відношення $x(t)/x_c$, що підтверджує їх рівнозначність.

Після досягнення $x = x_c$ розпочинається процес розтискання тіл. Він проходить на проміжку $t \in (t_c; t_y)$. Оскільки удар пружний, то графіки $x(t)$, $P(t)$ і $p(t)$ симетричні відносно вертикалі $t = t_c$. Тому при розтисканні зберігає чинність розв'язок (15), а у розв'язку (10) треба замінити $\operatorname{Sa}\left(2; 1; \frac{3}{2}\eta\right)$ на

$$\operatorname{Sa}\left[\left[2; 1; \frac{3}{2}(2I - \eta)\right]\right].$$

Таким чином, немає потреби заново розв'язувати рівняння (4) з новими початковими умовами.

Користуючись одержаними аналітичними розв'язками, розглянемо приклад, в припущенні, що удар сталевого конуса масою $M = 0,5$ кг по нерухомому гумовому півпростору відбувається зі швидкістю $v_0 = 3$ м/с. Задачі такого типу виникають при розрахунках удару куску сировини по футерованому валку вібраційного класифікатора [14]. Модуль пружності сталі $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$ Па, а коефіцієнт Пуассона $\mu_1 = 0,25$.

Відповідно для гуми приймаємо: $E_2 = 5 \cdot 10^6$ Па, $\mu_2 = 0,5$. Обчислимо основні параметри удару при $\gamma = 70^\circ$. Для вказаних вихідних даних: $Q_1 + Q_2 \approx 1,5 \cdot 10^{-7}$ 1/Па; $\beta = 1,16607 \cdot 10^7$ Па;

$x_c = 0,008334$ м; $\max P = 809,9$ Н; $t_c = 0,003895$ с. Обчислені трьома способами відношення $x(t)/x_c$ у різні моменти часу вказано в табл. 2.

Таблиця 2 – Значення x/x_c , обчислені трьома способами

t/t_c	η	Значення $x(t)/x_c$		
		формула (10)	формула (15)	числове інтегрування
0,25	0,35055	0,3485	0,3486	0,3487
0,50	0,70109	0,6719	0,6716	0,6716
0,75	1,05164	0,9107	0,9105	0,9106
1,00	1,40218	1,0000	1,0000	1,0000

При використанні формули (10) значення Атеб-синуса знаходили лінійною інтерполяцією табличних даних. Для обчислення значень еліптичного косинуса використовували (16), (19). Числове інтегрування рівняння (4) проводили на комп'ютері. Маємо малі розбіжності результатів в табл. 2, що підтверджує вірогідність аналітичних розв'язків.

Зберігаючи прийняті вихідні дані, з'ясуємо вплив кута конусності на динамічне стискання тіл. Результати розрахунків для трьох значень кута конусності наведено в табл. 3.

Таблиця 3 – Значення максимумів стискання тіл і сили удару та його тривалості при різних γ

γ , град.	x_c , м	$\max P$, Н	t_y , с
60	0,009720	694,52	0,00909
70	0,008334	809,90	0,00779
80	0,006546	1031,39	0,00612

Як бачимо, зі збільшенням γ зменшується x_c і t_y та зростає $\max P$.

Висновки. Задача пружного удару кінцевого тіла по півпростору має дві форми аналітичного розв'язку. Перша пов'язана з Атеб-синусом, а друга – з еліптичним косинусом. Одержані розв'язки дають розгортку процесу удару в часі. Вони дозволяють також обчислювати максимуми стискання тіл і сили контактної взаємодії та розраховувати тривалість удару.

Список літератури

1. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. Москва: Стройиздат, 1965. 447 с.
2. Кильчевский Н.А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. Киев: Наукова думка, 1976. 319 с.
3. Пановко Я.Г. Введение в теорию механического удара. Москва: Наука, 1977. 223 с.
4. Ольшанський В.П., Ольшанський С.В. Атеб-синус у розв'язку задачі Герца про удар. Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків: НТУ «ХПІ», 2018. № 3 (1279). С. 98-103.
5. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. Москва-Ленинград: Гостехиздат, 1949. 272 с.
6. Грицик В.В., Назаркевич М.А. Математичні моделі алгоритмів і реалізація Атеб-функцій. Доповіді Національної академії наук України. Київ: 2007. № 12. С. 37-42.
7. Пукач П.Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливань систем. Львів: Львівська політехніка, 2014. 288 с.
8. Абрамовиц А., Стиган И. Справочник по специаль-

ним функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). Москва: Наука, 1979. 832 с.

9. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Москва: Наука, 1977. 344 с.

10. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. Москва: Наука, 1981. 800 с.

11. Ольшанський В.П., Бурлака В.В., Сліпченко М.В., Малець О.М. Про коливання осцилятора з квадратично-нелінійною жорсткістю. Технічний сервіс агропромислового, лісового та транспортного комплексів. Харків: ХНТУСГ, 2017. № 8. С. 177-185.

12. Ольшанський В.П., Ольшанський С.В. Про рух осцилятора зі степенною характеристикою пружності. Вібрації в техніці та технологіях: Всеукраїнський науково-технічний журнал. Вінниця, 2017. № 3 (86). С. 34-40.

13. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва: Наука, 1962. 1100 с.

14. Надутый В.П., Ягнюков В.Ф., Ягнюкова И.В. Взаимодействие кусков материала с футерованным валком вибрационного классификатора. Вібрації в техніці та технологіях: Всеукраїнський науково-технічний журнал. Вінниця, 2014. № 1 (73). С. 94-99.

References (transliterated)

1. Goldsmith W. Impact. Theory and physical properties of the colliding bodies. Moscow: Stroyizdat, 1965. 447 p.

2. Kilchevsky N.A. Dynamic contact compression of solids. Blow. Kyiv: Naukova Dumka, 1976. 319 p.

3. Panovko Y.G. Introduction to the theory of mechanical shock. Moscow: Nauka, 1977. 223 p.

4. Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V. Ateb-sine in solving the Hertz problem. Bulletin of NTU «KhPI». Series: Mathemati-

cal modeling in engineering and technologies. Kharkiv: NTU «KhPI», 2018. № 3 (1279). P. 98-103.

5. Shtaerman I.Ya. Contact problem of the theory of elasticity. Moscow-Leningrad: Gostekhizdat, 1949. 272 p.

6. Gricik V.V., Nazarkevich M.A. Matematichni modeli algoritmiv i realizacija Ateb-funkcij. Dopovidi Nacional'noi akademii nauk Ukraïni. Kyiv, 2007. № 12. P. 37-42.

7. Pukach P.Ya. Qualitative methods for the investigation of nonlinear oscillations of systems. Lviv: Lviv Polytechnic, 2014. 288 p.

8. Abramovits A., Stigan I. Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables). Moscow: Science, 1979. 832 p.

9. Janke E., Emde F., Lesch F. Special functions. Moscow: Nauka, 1977. 344 p.

10. Prudnikov A.P., Brychkov Ju.A., Marichev O.I. Integraly i ryady. Jelementarnye funkci. Moscow: Nauka, 1981. 800 p.

11. Olshanskiy V.P., Burlaka V.V., Slipchenko M.V., Malets O.M. On fluctuation oscillator with square nonlinear stiffness. Technical service of agroindustrial, forestry and transport complexes. Kharkiv: KhNTUSG, 2017. No. 8. P. 177-185.

12. Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V. On the motion of an oscillator with a power characteristic of elasticity. Vibrations in technology and technologies: All-Ukrainian scientific and technical journal. Vinnytsya, 2017. № 3 (86). P. 34-40.

13. Gradstein I.S., Rugik I.M. Table of integrals, sums, rows and works. Moscow: Science, 1962. 1100 p.

14. Naduty V.P., Yagnyukov V.F., Yagnyukova I.V. Interaction of pieces of material with a lined roll of a vibration classifier. Vibrations in technology and technologies: All-Ukrainian scientific and technical journal. Vinnytsya, 2014. № 13 (73). P. 94-99.

Надійшло (received) 31.01.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasyl Pavlovych) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com

Ольшанський Станіслав Васильович (Ольшанский Станислав Васильевич, Olshanskiy Stanislav Vasilevich) – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (057) 343-29-41, e-mail: stasolsh77@gmail.com