этапе $\lambda = \lambda_i$. Величина λ является значением процедуры. Пусть, например, при $\lambda = \lambda_1$

$$C(\lambda_1) = \left\| \begin{matrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{matrix} \right\|, \quad X(\lambda_1) = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\|, \quad F(\lambda_1) = \left\| \begin{matrix} F_1(t, X, \dot{X}) \\ F_2(t, X, \dot{X}) \end{matrix} \right\|,$$

а при $\lambda = \lambda_2$

$$C(\lambda_2) = \left\| \begin{matrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad X(\lambda_2) = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ 0 \end{matrix} \right\|, \quad F(\lambda_2) = \left\| \begin{matrix} F_0(t, X, \dot{X}) \\ \ddot{x}_2 \end{matrix} \right\|.$$

Тогда система (3) при λ_1 в случае отсутствия блокировок связей соответствует уравнениям типа (2), а при λ_2 — уравнениям типа (1) при блокировке. Выработка значения λ производится внутри оператора процедуры, т. е. алгоритм значительно упрощается, появляется возможность стандартизировать программы расчета дискретных многомерных систем переменной структуры для достаточно большого числа измерений.

Список литературы: 1. *Штейнвольф Л. И., Карабан В. Н.* Качественные результаты исследования автоколебаний в механических передачах с фрикционными ограничительными муфтами.— В кн.: Теория механизмов и машин. Вып. 6. Харьков, 1969, с. 69—73. 2. *Атоян А. М., Путятин В. В.* О влиянии сил конструкционного демпфирования на случайные колебания многомерной механической системы.— В кн.: Конференция по проблемам конструкционного демпфирования колебаний. Тезисы докл. Рига, 1971, с. 3. 3. *Пономарев А. С.* Исследование фрикционных автоколебаний в многомассовых системах. Дис. на соиск. учен. степени канд. техн. наук. Харьков, 1972. 124 с. 4. *Васильев В. А.* Язык АЛГОЛ-68. М., «Наука», 1972. 146 с.

УДК 534.1

Д. К. ОВЧАРОВА, канд. техн. наук

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Рассматривается применение метода малых возмущений [1] для исследования устойчивости периодического движения нелинейной системы, описываемой уравнениями

$$\ddot{x}_i + \sum_{k=1}^{n} f_{ik}(x_k, \dot{x}_k) = P_i \sin \omega t \quad (i = \overline{1, n}). \tag{1}$$

Для определения критерия устойчивости вынужденных колебаний системы (1) предлагается использовать метод усреднения периодических коэффициентов уравнений в возмущениях.

Вынужденные колебания системы (1) описываются частным решением вида

$$x_{i0} = A_i \sin(\omega t + \psi_i) \quad (i = \overline{1, n}). \tag{2}$$

Уравнения в вариациях, соответствующие этому решению, имеют вид

$$\ddot{u}_i + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial f_{ik}(x_k, \dot{x}_k)}{\partial x_k}\right]_0 u_k + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial f_{ik}(x_k, \dot{x}_k)}{\partial \dot{x}_k}\right]_0 \dot{u}_k = 0 \quad (i = \overline{1, n}), \qquad (3)$$

где $u_i = x_i - x_{i0}\,(i = \overline{1, n})$ — малые возмущения решения (2). Скобка с нулем обозначает, что выражение в скобке берется при $u_i = 0$. Коэффициенты уравнений (3) являются периодическими функциями времени периода $\frac{2\pi}{\omega}$. Оценивая влияние периодических коэффициентов на устойчивость стационарного невозмущенного движения, произведем операцию усреднения по времени коэффициентов уравнений (3) и получим

$$\ddot{u}_i + \sum_{k=1}^{n}\lambda_{ik}(A_k)\,u_k + \sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}(A_k)\,\dot{u}_k = 0 \quad (i = \overline{1, n}). \qquad (4)$$

Здесь

$$\lambda_{ik}(A_k) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\left[\frac{\partial f_{ik}(x_k, \dot{x}_k)}{\partial x_k}\right]_0 dt;$$

$$\alpha_{ik}(A_k) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\left[\frac{\partial f_{ik}(x_k, \dot{x}_k)}{\partial \dot{x}_k}\right]_0 dt.$$

Систему (4) с помощью линейного преобразования $u_i = \sum_s a_{is}q_s$ приводим к квазинормальному виду [2]:

$$\ddot{q}_s + \lambda_s^2 q_s = -\sum_i\sum_k\sum_\sigma b_{si}\alpha_{ik}(A_k)\,a_{k\sigma}\dot{q}_\sigma \quad (s = \overline{1, n}), \qquad (5)$$

где $\lambda_s\,(s = \overline{1, n})$ — собственные частоты системы (4), определяемые от частотного уравнения $\Delta(\lambda) \equiv |\lambda_{ik}(A_k) - \delta_{ik}\lambda^2| = 0$; a_{ik} — фундаментальные функции, удовлетворяющие системе алгебраических уравнений $\lambda_s^2 a_{ik} + \sum_s \lambda_{is}(A_s)\,a_{sk} = 0 \quad (i = \overline{1, n})$; b_{ik} — элементы матрицы, обратной модальной матрице $\|a_{ik}\|$; δ_{ik} — символ Кронекера.

Устойчивость невозмущенного движения зависит от знака коэффициентов уравнений системы (5), стоящих при $\dot{q}_s$. Поэтому условия устойчивости периодического движения системы (1) определяются в первом приближении неравенствами [3]

$$\sum_i\sum_k b_{si}\alpha_{ik}(A_k)\,a_{ks} > 0 \quad (s = \overline{1, n}). \qquad (6)$$

При невыполнении одного из неравенств (6) возникают раскачивающиеся свободные колебания с частотой, близкой к соответствующей собственной частоте системы λ_s.

Рассмотрим применение данного метода для построения области устойчивости вынужденных колебаний уравнения Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x} + \mu (x^2 - 1)\dot{x} + x = P \sin \omega t. \qquad (7)$$

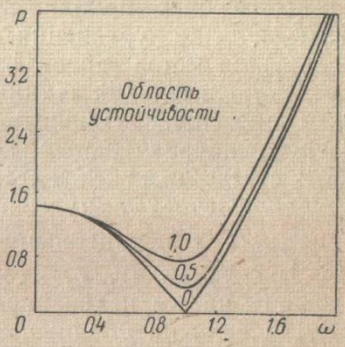
Уравнение в вариациях, определяющее устойчивость частотного решения $x_0 = A \sin (\omega t + \psi)$, имеет вид

$$\ddot{u} + \mu [A^2 \sin^2 (\omega t + \psi) - 1]\dot{u} + u = 0. \qquad (8)$$

Амплитуду вынужденных колебаний системы (7) можно определить из выражения

$$A^2 \left[(1 - \omega^2)^2 + \mu^2 \omega^2 \left(\frac{A^2}{4} + 1\right)^2\right] = P^2,$$

которое несложно получить при помощи метода энергетического баланса [2]. При усреднении по времени периодического коэффициента, стоящего при u в уравнении (8), устойчивость невозмущенного движения определяется неравенством $\frac{A^2}{2} - 1 > 0$ или $A > 1{,}42$.



На рисунке показаны границы областей устойчивости вынужденных колебаний уравнения (7) на плоскости $\omega 0P$ при параметре $\mu = 0$; 0,5 и 1. Электромоделирование уравнения (7) на АВМ МН-7 подтвердило результаты, полученные аналитическим методом. Действительно, если амплитуда вынужденных колебаний системы $A > 1{,}42$, то при стационарных режимах наблюдаются моногармонические колебания с частотой возмущения ω. При $A < 1{,}42$ самовозбуждаются автоколебания с частотой, примерно равной 1 $с^{-1}$, и в системе устанавливаются почти периодические колебания.

Итак, сравнение результатов аналитического исследования и электромоделирования позволяет сделать вывод, что методом малого параметра можно пользоваться в случае построения границы области устойчивости практически при любом значении параметра μ.

Список литературы: 1. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат. 1956. 448 с. 2. *Голоскоков Е. Г., Филиппов А. П.* Нестационарные колебания деформируемых систем. Киев, «Наукова Думка», 1977. 336 с. 3. *Гонкл А.* Динамика роторов турбогенераторов. М., «Энергия», 1971. 387 с.