

Г.М., Күзьмин В.В. Фундаментальные и прикладные исследования в области энергетического электромашиностроения // Новини енергетики. – 2004. – № 9. – С. 20-28. **3.** *Ubercherst D., Weiland H., Wohrle G.* Life- Management Experiences with Generators in German Utilities. – CIGRE-96. – Report 11-205. – 6 p. **4.** *Остерник Э.С.* Моделирование деформационных полей в электромашиностроении с помощью функций N – переменных // Вестник НТУ «ХПИ», Сб. научных трудов. Тем. выпуск «Динамика и прочность машин». – 2003. – № 8, т. 3. – С. 29-42. **5.** *Harrison H., Hollauf H., Lapointe j.-L.* Design and Experience Freedback of Turbogenerator Retrofit Packages to the United States // Новини енергетики. – 2002. – № 10. – С. 27. **6.** *Хуторецкий Г.М., Токов М.И., Толвинская Е.В.* Проектирование турбогенераторов. – Л., Энергоатомиздат, 1987. – 256 с. **7.** *Станиславский Л.Я., Гаврилов Л.Г., Остерник Э.С.* Вибрационная надежность мощных турбогенераторов. – М.: «Энергия», 1985. – 240 с. **8.** *Кац А.М.* Теория упругости. – СПб: Лань, 2002. – 207 с. **9.** *Остерник Э.С.* Исследование динамики многослойных оболочек и пластин в тяжелом электромашиностроении // Проблемы машиностроения. – 1977. – Вып. 5. – С. 41-47. **10.** *Тарнопольский Ю.М., Кинцис Т.Я.* Методы статических испытаний армированных пластиков. – М.: «Химия», 1975. – 264 с. **11.** ISO Recommendation R 178. Plastics. Determination of Flexural Properties of Rigid Plastics. 1st Edition. February. 1971. Printed in Switzerland. **12.** Пластмассы. Методы определения модуля упругости при растяжении, сжатии и изгибе. ГОСТ 9550 – 81. – М., Госстандарт, 1981. – 10 с. **13.** Методы обработки результатов наблюдений при измерениях // Труды метрологических институтов СССР. – Вып. 134 (194). – М.-Л., Изд-во стандартов, 1972. – 118 с. **14.** Композиционные материалы: В 8-ми т. Пер. с англ./под ред. Л. Браутмана и Р. Крока. – М., Машиностроение, 1978. – Т.7, ч.1. – 300 с. **15.** *Кан К.Н., Николаевич А.Ф., Шаников В.М.* Механическая прочность эпоксидной изоляции. – Л.: «Энергия», 1973. – 152 с. **16.** *Мирский Г.Я.* Характеристики стохастической взаимосвязи и их измерения. – М.: Энергоиздат, 1982. – 320 с. **17.** Справочник по электротехническим материалам / В 3-х т. Под ред. Ю.В.Корицкого, В.В. Пасынкова, В.М. Тареева. – Т. 2. – М.: «Энергия», 1974. – 616 с. **18.** Машиностроение: Энциклопедия в 40 т. // М.: Машиностроение, Т. IV-3. Надежность машин. [В.В.Клюев, В.В.Болотин, Ф.Р.Сосни и др.]. – 1998. – 592 с.

*Поступила в редакцию 30.05.2007*

УДК 531

**В.П.ОЛЬШАНСКИЙ**, докт. физ.-мат. наук ХНТУСХ;  
**С.В.ОЛЬШАНСКИЙ**, НТУ «ХПИ»

## **ОБ ЭКСТРЕМУМАХ СКОРОСТИ ПАДЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ**

Досліджено екстремальні властивості швидкості вертикального падіння сферичного тіла, радіус якого змінюється в часі по лінійному закону. Визначені також умови, при виконанні яких зберігається монотонність швидкості руху.

The extreme properties of vertical fall speed of a spherical body with linearly changing in time radius are investigated. The conditions of motion speed monotonicity are determined.

**Актуальность темы и цель исследования.** Формулы, полученные Н.Е.Жуковским при изучении движения тела постоянной массы в газовой среде [1,2], успешно использовались при расчете парашютных систем. Эти результаты были также полезными при проектировании установок автоматического пожаротушения [3], при расчете движения капель распыленных топ-

лив [4] и пр. Существенно то, что вследствие сопротивления газовой среды, падение тела постоянной массы в зависимости от начальных условий происходит с монотонно возрастающей или монотонно убывающей скоростью, которая асимптотически стремится к постоянному значению, называемому скоростью витания. Но такого свойства нет при падении тела переменной массы. Поэтому в данной работе поставлена цель выяснить на простейших линейных моделях характерные особенности, присущие скорости падения тела переменной массы. К таким телам относятся летящие испаряющиеся или сгорающие частицы жидкости и твердых топлив, жидкие частицы огнетушащих веществ, капли воды при движении в условиях конденсации и пр.

Отдельно рассмотрим варианты возрастающей и убывающей масс.

**Случай падения тела увеличивающейся массы.** Предполагаем, аналогично [5], что радиус сферического тела  $r$  является линейной функцией времени  $t$

$$r = r(t) = r_0 + \gamma t, \quad (1)$$

где  $r_0 = r(0)$ ,  $\gamma$  – параметр, характеризующий интенсивность увеличения массы.

Силу сопротивления движению принимаем пропорциональной скорости падения  $v = v(t)$  и площади миделевого сечения сферы, т.е. берем в виде

$$R_c(t) = k \frac{\rho_B}{\rho_T} \pi r^2 v.$$

Здесь  $k$  – коэффициент аэродинамического сопротивления;  $\rho_B, \rho_T$  – соответственно плотности воздуха и падающего тела.

В рамках этих предположений изменение скорости движения сферы описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dv}{dt} + 3(\alpha + \gamma) \frac{v}{r} = g, \quad (2)$$

где  $\alpha = \frac{k\rho_B}{4\rho_T}$ ;  $g$  – ускорение свободного падения.

Учитывая (1), перейдем в (2) от производной по  $t$  к производной по  $r$ . Это преобразование дает

$$\frac{dv}{dr} + \mu \frac{v}{r} = g_1. \quad (3)$$

Здесь  $\mu = 3(1 + \alpha/\gamma)$ ;  $g_1 = g\gamma^{-1}$ .

Решение уравнения (3) при начальном условии

$$v(r_0) = v_0$$

имеет вид

$$v(r) = \frac{g_1 r}{1 + \mu} + \left( v_0 - \frac{g_1 r_0}{1 + \mu} \right) \left( \frac{r_0}{r} \right)^\mu. \quad (4)$$

Если не учитывать сопротивление среды, в нем следует положить  $\mu = 3$ .

Заметим, что выражение (4) отличается от ответа к соответствующей задаче в [5] знаком перед  $g_1$ . Следовательно, ответ в [5] соответствует не падению тела вниз, как поставлена там задача, а вертикальному движению вверх.

Чтобы из (4) получить выражение скорости падения тела постоянной массы нужно устремить  $\gamma \rightarrow 0$  и раскрыть неопределенность. Это несложно выполнить, учитывая, что

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \gamma(\mu + 1) = 3\alpha ;$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \left( \frac{r_0}{r} \right)^\mu = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{\gamma}{r_0} \right)^{-3\alpha/\gamma} = \exp\left( -\frac{3\alpha \cdot t}{r_0} \right).$$

В итоге для скорости падения тела постоянной массы получаем

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} v(t) = \left( v_0 - \frac{gr_0}{3\alpha} \right) \exp\left( -\frac{3\alpha \cdot t}{r_0} \right) + \frac{gr_0}{3\alpha}.$$

Это монотонная функция, которая при  $t \rightarrow \infty$  асимптотически стремится к значению

$$v_{\Pi} = \frac{gr_0}{3\alpha} = const.$$

Его называют скоростью витания.

Иными свойствами обладает решение (4). Оно не всегда монотонно. Проанализируем, когда нарушается монотонность в (4). Она нарушается при выполнении неравенства

$$v_0 > v^* = \frac{g_1 r_0}{\mu}. \quad (5)$$

Таким образом, если начальная скорость падения тела  $v_0$  меньше  $v^*$ , то скорость будет возрастать на всем промежутке движения.

В случае выполнения неравенства (5) решение (4) имеет минимум при  $r = r_3$  и это значение легко вычисляется по формуле

$$r_3 = r_0 \left[ \mu \left( \frac{(1 + \mu)}{g_1 r_0} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{1 + \mu}}.$$

Минимальная величина скорости падения равна

$$v_{\min} = \frac{g_1 r_3}{\mu} > \frac{g_1 r_0}{\mu}.$$

Поэтому при  $v_0 > v^*$  падающее тело сначала замедляется, а после достижения минимума – ускоряется. Такого свойства нет при падении тела постоянной массы.

С ростом  $t$  (или  $r$ ) второе слагаемое в решении (4) стремится к нулю. Следовательно, при больших  $t$  асимптотой скорости падения является на-

клонная прямая

$$v_a(t) = \frac{g_1}{1 + \mu}(r_0 + \gamma t),$$

причем  $\lim_{\gamma \rightarrow 0} v_a(t) = v_{II}$ .

Таким образом, падающее тело увеличивающейся массы не имеет скорости витания, установленной для тела постоянной массы.

**Случай падения тела убывающей массы.** Предполагаем, что радиус сферического тела уменьшается по линейному закону [6]

$$r = r(t) = r_0 - \gamma t,$$

где  $\gamma$  – параметр характеризующий интенсивность уменьшения массы.

Изменение скорости падения такого тела описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dv}{dt} + 3(\alpha - \gamma)\frac{v}{r} = g. \quad (6)$$

В дальнейшем предполагаем, что  $\alpha > \gamma$ , т.е. рассматриваем движение при наличии сопротивления.

Для этого случая решение уравнения (6) получим из (4), поменяв там знак у  $\gamma$ . В результате находим

$$v(r) = \left( v_0 + \frac{g_1 r_0}{1 - \nu} \right) \left( \frac{r}{r_0} \right)^\nu - \frac{g_1 r}{1 - \nu}. \quad (7)$$

Здесь  $\nu = 3(\alpha - \gamma)/\gamma \neq 1$ ,  $\nu > 0$ .

При  $\nu = 1$  в решении (7) имеем неопределенность типа 0/0. Раскрыв ее, получаем

$$v(r) = v_0 \frac{r}{r_0} - g_1 r \ln \frac{r}{r_0}. \quad (8)$$

Условием нарушения монотонности в (7) является выполнение неравенства

$$v_0 < v_* = \frac{g_1 r_0}{\nu}.$$

Максимум достигается при

$$r = r_3 = r_0 \begin{cases} \left[ 1 / \left( \nu \left[ 1 + \frac{v_0(1-\nu)}{g_1 r_0} \right] \right) \right]^{\frac{1}{\nu-1}}, & \nu \neq 1; \\ \exp \left( \frac{v_0}{r_0 g_1} - 1 \right), & \nu = 1. \end{cases}$$

Вычисление максимального значения скорости падения сводится к фор-

муле

$$v_{\max} = \frac{g_1 r_0}{v}$$

Достигнув максимума, далее скорость уменьшается и при  $t = r_0/\gamma$  равна нулю. В этом легко убедиться, анализируя поведение решений (7), (8) при  $r \rightarrow 0$ .

Если  $v_0 > v^*$ , то скорость падения тела убывающей массы не имеет экстремума. Она монотонно уменьшается от начального значения  $v_0$  до нуля.

Отмеченные особенности сохраняются и в том случае, когда  $v = 3a/\gamma$ , т.е. не учитывается реактивная сила. С таким движением приходится иметь дело при падении равномерно испаряющихся или обгорающих по всей граничной поверхности сферических тел [6].

**Численные результаты.** Проведем расчет по предложенным теориям. Для моделирования падения тела с возрастающей массой примем следующие исходные данные:  $r_0 = 10^{-3}$  м;  $a = 8 \cdot 10^{-5}$  м/с;  $\gamma = 2 \cdot 10^{-4}$  м/с. Скорость  $v(t)$  вычисляем по формуле (4)

На рис. 1 цифрами 1; 2; 3; 4 отмечены кривые, соответствующие следующим начальным скоростям:  $v_0 = 0; 11,68; 25; 40$  м/с.

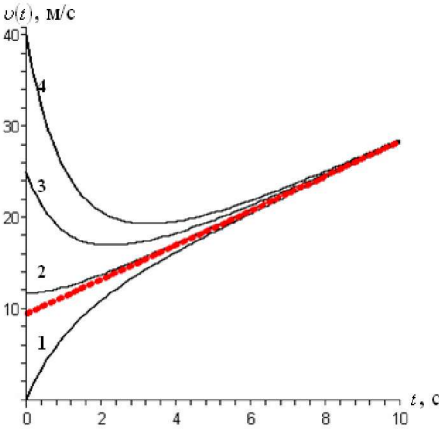


Рисунок 1 – Зависимость скорости от времени для тела возрастающей массы

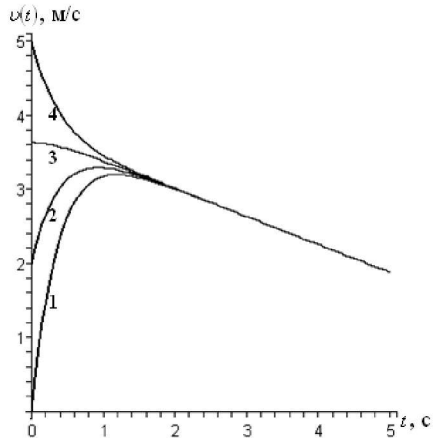


Рисунок 2 - Зависимости скорости от времени для тела убывающей массы

Кривая 1 получена при  $v_0 < v^* \approx 11,68$  м/с, когда падающее тело по мере движения ускоряется без начального замедления. Цифрой 2 обозначен график, соответствующий  $v_0 = v^*$ , на нем также отсутствует экстремум. Кривые 3 и 4 построены для случаев, когда  $v_0 > v^*$ . На них видны участки замедления, ускорения и минимум скорости. Из рис. 1 следует, что независимо от  $v_0$  с те-

чением времени происходит сближение графиков  $v(t)$  близко к указанному то независимо от начального значения скорости падения, с течением времени. Они стремятся к наклонной прямолинейной асимптоте.

Для моделирования движения тела убывающей массы примем следующие исходные данные:  $r_0 = 10^{-4}$  м;  $\alpha = 10^{-4}$  м/с;  $\gamma = 10^{-5}$  м/с. Расчет скорости проводим по формуле (7).

На рис. 2 цифрами 1; 2; 3; 4 отмечены кривые, соответствующие начальным скоростям:  $v_0 = 0$ ; 2; 3,64; 5 м/с.

Кривые 1 и 2 имеют выраженный максимум, кривая 3 получена для граничной скорости  $v_0 = v_* \approx 3,64$  м/с, а кривая 4 соответствует монотонному замедлению тела. Независимо от  $v_0$  графики  $v(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ .

**Выводы.** Отмечен факт отсутствия скорости витания для тела с переменной массой. Аналитически получены условия существования экстремума скорости падения тела с возрастающей или убывающей массой. Установлен линейный характер асимптотики скорости падения тела с возрастающей массой. Независимо от начальной скорости, скорость падения стремится к нулю, когда к нулю стремится размер падающей сферы.

**Список литературы:** 1. Жуковский Н.Е. Сочинения, том 3. М.: ОНТИ – НКТП, 1936. – 380 с. 2. Жуковский Н.Е. Механика системы. Динамика твердого тела. – М.: Оборонгиз, 1939. – 293 с. 3. Иванов Е.Н. Расчет и проектирование систем пожарной защиты. – М.: Химия, 1977. – 376 с. 4. Лышевский А.С. Распыливание топлива в судовых дизелях. – Л.: Судостроение, 1971. – 248 с. 5. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1986. – 448 с. 6. Кучеренко С.Л., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В., Тищенко Л.М. Моделирование польоту крапель, які випаровуються при русі в газі. – Харків: Едена, 2006. – 204 с.

*Поступила в редколлегию 14.02.2007*

УДК 536.26

**В.О.ПОВГОРОДНИЙ**, канд.техн.наук; ИПМаш НАН Украины

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПЛАТЫ С РАЗМЕЩЕННЫМИ НА НЕЙ ЭЛЕКТРОННЫМИ РАДИОТЕХНИЧЕСКИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ**

Визначаються температурні напруження для плати з розміщеними на них електронними радіотехнічними елементами (ЕРЕ), виходячи з вирішення задачі теплопровідності та термопружності. Температурні напруження визначаються за допомогою аналогової залежності та чисельно за допомогою комплексу програм ANSYS для прямокутної пластини. Результати розрахунку необхідні для вибору системи охолодження. Такі плати з ЕРЕ та рідинною системою охолодження використовуються в бортовій радіоелектронній апаратурі вітчизняних літаків.