

С.І. КУЛИК, канд. фіз.-мат. наук, доц., НТУ «ХПІ»;
О.М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф., УІПА, Харків

МІШАНА ВЕЙВЛЕТ-АПРОКСИМАЦІЯ ХААРА ФУНКЦІЙ ТРЬОХ ЗМІННИХ

Запропоновано метод побудови операторів мішаної вейвлет-апроксимації Хаара функцій трьох змінних. Доведені їх властивості, а також теорема про оцінку похибки наближення неперервних функцій цими операторами.

Предложен метод построения операторов смешанной вейвлет-аппроксимации Хаара функций трех переменных. Доказаны их свойства, а также теорема об оценке погрешности приближения непрерывных функций этими операторами.

The article suggests a method of creating Haar's blending wavelet-approximation operators of functions of three variables. Proved their properties, as well as the theorem on error estimation of the approximation of continuous functions by these operators.

Вступ. Теорія *вейвлетів* на даний час є однією з найбільш ефективних теорій наближення функцій однієї та багатьох змінних. Вона знаходить широкі застосування в ряді областей науки і техніки. Вейвлет-аналіз використовується для стиснення й обробки зображень, розпізнавання мовних сигналів, передбачення землетрусів, прогнозування погоди, у медицині (томографія, електрокардіографія), при передбаченні курсу цінних паперів на ринку, гідродинаміці, гідроакустиці та інших галузях [1]-[9], а також в Інтернеті (для зменшення обсягу звукових та відео файлів). Вейвлети мають невичерпні можливості в обробці сигналів і зображень, наприклад для Інтернету [10], що полягає в зменшенні об'єму звукових та відеофайлів. На даний час широко використовуються і стали популярними *стандарти MP4, JPEG 2000*, а також відомі графічні програмні засоби, наприклад *Corel DRAW* тощо, які використовують вейвлет-технологію обробки зображень. Вейвлет-обробка сигналів забезпечує можливість доволі ефективного стиснення сигналів і їх відновлення з малими втратами інформації, а також використовується для задач фільтрації сигналів [11]. Для ряду типів вейвлетів існують швидкі алгоритми *вейвлет-перетворення* [12], [13], що дає можливість значно зменшити витрати часу при їх реалізації.

Проте, слід зазначити, що дослідження теорії вейвлет-апроксимацій функцій багатьох змінних на даний момент можна вважати недостатнім. Зокрема, не розвинуто та не досліджено такий важливий розділ теорії вейвлет-апроксимацій як мішана вейвлет-апроксимація функцій трьох і більше змінних, в той час як дослідження з двовимірної вейвлет-апроксимації продемонстрували її високу ефективність, як з точки зору точності апроксимації так і з точки зору стиснення інформації про двовимірні сигнали (образи). Тому ак-

туальною є розробка та дослідження мішаної вейвлет-апроксимації функцій трьох змінних та побудова і дослідження на їх основі узагальнених вейвлет-апроксимацій функцій трьох змінних.

Аналіз останніх досліджень. В роботах *Кашина Б.С., Саакяна А.А.* [14], *Ronald A. DeVore* [15], *Stephane G. Malat* [16], *Yves Meyer* [17], [18], *Cohen A.* [19], *Wayne M. Lawton* [20], *Ingrid Daubechies* [21], *K. Gröchenig* [22], *Jelena Kovačević та Martin Vetterli* [23], *K. Gröchenig та W. R. Madych* [24] досліджена теорія кратномасштабного аналізу (КМА) та теорія вейвлетів багатьох змінних (дивись також огляд «Fundamental Papers in Wavelet Theory» авторів *Christopher Heil та David F. Walnut* [25]). Відмітимо, що дослідження, присвячені побудові вейвлетів від багатьох змінних цих та інших авторів не використовували оператори мішаної вейвлет-апроксимації (blending function approximation operators). В роботах [26]-[31] авторів даної статті запропоновано і досліджено оператори $Wf(x, y)$ мішаної вейвлет-апроксимації Хаара функцій двох змінних. Нагадаємо вигляд цих операторів:

$$Wf(x, y) = (W_{1,p} + W_{2,q} - W_{1,p}W_{2,q})f(x, y),$$

де

$$W_{1,p}f(x, y) = (C1_{00}f)(y) + \sum_{i=0}^p \sum_{l=0}^{2^i-1} (C1_{i,l}f)(y)\psi_{i,l}(x),$$

$$W_{2,q}f(x, y) = (C2_{00}f)(x) + \sum_{j=0}^q \sum_{m=0}^{2^j-1} (C2_{j,m}f)(x)\psi_{j,m}(y),$$

$$(C1_{00}f)(y) = \int_0^1 f(x, y) dx, \quad (C1_{i,l}f)(y) = \int_0^1 f(x, y)\psi_{i,l}(x) dx, \quad i, l \in \mathbb{Z},$$

$$(C2_{00}f)(x) = \int_0^1 f(x, y) dy, \quad (C2_{j,m}f)(x) = \int_0^1 f(x, y)\psi_{j,m}(y) dy, \quad j, m \in \mathbb{Z}.$$

Введемо позначення:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2}\psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{де } \psi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1/2), \\ -1, & t \in [1/2, 1), \\ 0, & t < 0 \vee t \geq 1. \end{cases}$$

Крім того, у вказаних роботах авторів запропоновані і досліджені оператори узагальненої двовимірної вейвлет-апроксимації Хаара функцій двох змінних (УДВА)

$$\widetilde{W}_{p,q,N}f(x,y) = (\widetilde{W}_{1,p,N} + \widetilde{W}_{2,q,N} - W_{1,p}W_{2,q})f(x,y),$$

$$\widetilde{W}_{1,p,N}f(x,y) = W_{1,p}W_{2,N}f(x,y),$$

$$\widetilde{W}_{2,q,N}f(x,y) = W_{1,N}W_{2,q}f(x,y),$$

де оператори $W_{1,p}f(x,y)$, $W_{1,N}f(x,y)$ – діють на функцію $f(x,y)$, як на функцію від змінної x (змінна y вважається параметром); оператори $W_{2,q}f(x,y)$, $W_{2,N}f(x,y)$ діють на функцію $f(x,y)$, як на функцію від змінної y (змінна x вважається параметром). Основними з найважливіших властивостей цих операторів є наступні:

$$1) \int_0^1 W_{p,q}f(x,y)dx = \int_0^1 f(x,y)dx = (C1_{00}f)(y), \int_0^1 W_{p,q}f(x,y)dy = \int_0^1 f(x,y)dy = (C2_{00}f)(x),$$

$$\int_0^1 W_{p,q}f(x,y)\psi_{i,l}(x)dx = \int_0^1 f(x,y)\psi_{i,l}(x)dx = (C1_{i,l}f)(y), \quad i = \overline{0,p}, \quad l = \overline{0,2^i-1},$$

$$\int_0^1 W_{p,q}f(x,y)\psi_{j,m}(y)dy = \int_0^1 f(x,y)\psi_{j,m}(y)dy = (C2_{i,m}f)(x), \quad j = \overline{0,q}, \quad m = \overline{0,2^j-1}.$$

$$2) f(x,y) - W_{p,q}f(x,y) = (I - W_{p,q})f(x,y) = R_{1,p}R_{2,q}f(x,y),$$

$$R_{1,p} = (I - W_{1,p})f(x,y), \quad R_{2,q} = (I - W_{2,q})f(x,y), \quad \text{де } I - \text{тотожний оператор.}$$

$$3) f(x,y) - \widetilde{W}_{p,q,N}f(x,y) = O\left(\left|(f - W_{p,q}f)(x,y)\right|\right), \quad \left|(f - W_{p,q}f)(x,y)\right| \rightarrow 0.$$

$$\exists N \in \mathbb{N}: f(x,y) - \widetilde{W}_{p,q,N}f(x,y) = O\left(\left|(f - W_{p,q}f)(x,y)\right|\right).$$

Таким чином, оператори мішаної вейвлет-апроксимації, які використовують оператори вейвлет-апроксимації Хаара, що діють на функцію $f(x,y)$ як на функцію однієї змінної (x або y відповідно), мають точність $O(\varepsilon^2)$ при $p = q$, якщо $R_{1,p}f = O(\varepsilon)$, $R_{2,p}f = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. При цьому класична двовимірна вейвлет-апроксимація Хаара $W_{1,p}W_{2,p}f(x,y)$ має таку ж саму за порядком точність при $p = N$, як і $R_{p,q,N}f(x,y)$ при значно більшій кількості коефіцієнтів двовимірної вейвлет-апроксимації.

Постановка задачі. Задача полягає у побудові операторів мішаної вейвлет-апроксимації Хаара функцій трьох змінних та дослідження їх апроксимативних властивостей.

Основні результати роботи. Введемо позначення:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{де } \psi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1/2), \\ -1, & t \in [1/2, 1), \\ 0, & t < 0 \vee t \geq 1. \end{cases}$$

Для кожної інтегрованої на R^3 функції $f(x, y, z)$ введемо оператори:

$$W_{1,p}f(x, y, z) = (C1_{00}f)(y, z) + \sum_{i=0}^p \sum_{l=0}^{2^i-1} (C1_{i,l}f)(y, z) \psi_{i,l}(x),$$

$$W_{2,q}f(x, y, z) = (C2_{00}f)(x, z) + \sum_{j=0}^q \sum_{m=0}^{2^j-1} (C2_{j,m}f)(x, z) \psi_{j,m}(y),$$

$$W_{3,r}f(x, y, z) = (C3_{00}f)(x, y) + \sum_{k=0}^r \sum_{n=0}^{2^k-1} (C3_{k,n}f)(x, y) \psi_{k,n}(z),$$

$$(C1_{00}f)(y, z) = \int_0^1 f(x, y, z) dx, \quad (C1_{i,l}f)(y, z) = \int_0^1 f(x, y, z) \psi_{i,l}(x) dx, \quad i, l \in \mathbb{Z},$$

$$(C1_{00}f)(y, z) = \int_0^1 f(x, y, z) dx, \quad (C1_{i,l}f)(y, z) = \int_0^1 f(x, y, z) \psi_{i,l}(x) dx, \quad i, l \in \mathbb{Z},$$

$$(C1_{00}f)(y, z) = \int_0^1 f(x, y, z) dx, \quad (C1_{i,l}f)(y, z) = \int_0^1 f(x, y, z) \psi_{i,l}(x) dx, \quad i, l \in \mathbb{Z},$$

$$W_{p,q,r}f(x, y, z) = (W_{1,p} + W_{2,q} + W_{3,r} - W_{1,p}W_{2,q} - W_{1,p}W_{3,r} - W_{2,q}W_{3,r} + W_{1,p}W_{2,q}W_{3,r}) \times f(x, y, z).$$

Лема 1. Оператори $W_{1,p}f(x, y, z)$ мають наступні властивості:

$$\int_0^1 W_{1,p}f(x, y, z) dx = \int_0^1 f(x, y, z) dx = (C1_{00}f)(y, z), \quad \forall y, z \in [0, 1], \quad (1)$$

$$\int_0^1 W_{1,p}f(x, y, z) \psi_{i,l}(x) dx = \int_0^1 f(x, y, z) \psi_{i,l}(x) dx = (C1_{i,l}f)(y, z),$$

$$i = \overline{0, p}, \quad l = \overline{0, 2^i - 1}. \quad (2)$$

Доведення цієї леми впливає з відомих властивостей вейвлет-сум Хаара [1] від однієї змінної, оскільки в даному випадку при інтегруванні за змінною x змінні y та z вважаються параметрами.

Зауваження. Аналогічні властивості мають оператори

$$\int_0^1 W_{2,q} f(x, y, z) dy \text{ та } \int_0^1 W_{3,r} f(x, y, z) dz :$$

$$\int_0^1 W_{2,q} f(x, y, z) dy = \int_0^1 f(x, y, z) dy = (C2_{00} f)(x, z), \quad \forall x, z \in [0, 1], \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 W_{2,q} f(x, y, z) \psi_{j,m}(y) dy &= \int_0^1 f(x, y, z) \psi_{j,m}(y) dy = \\ &= (C2_{j,m} f)(x, z), \quad j = \overline{0, q}, \quad m = \overline{0, 2^j - 1}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\int_0^1 W_{3,r} f(x, y, z) dz = \int_0^1 f(x, y, z) dz = (C3_{00} f)(x, y), \quad \forall x, y \in [0, 1], \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 W_{3,r} f(x, y, z) \psi_{k,n}(z) dz &= \int_0^1 f(x, y, z) \psi_{k,n}(z) dz = \\ &= (C3_{k,n} f)(x, y), \quad k = \overline{0, r}, \quad n = \overline{0, 2^k - 1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Теорема 1. Оператор $W_{p,q,r} f(x, y, z)$ має такі властивості:

$$1) \int_0^1 W_{p,q,r} f(x, y, z) dx = \int_0^1 f(x, y, z) dx = (C1_{00} f)(y, z) \quad (7)$$

$$\int_0^1 W_{p,q,r} f(x, y, z) dy = \int_0^1 f(x, y, z) dy = (C2_{00} f)(x, z) \quad (8)$$

$$\int_0^1 W_{p,q,r} f(x, y, z) dz = \int_0^1 f(x, y, z) dz = (C3_{00} f)(x, y) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} 2) \int_0^1 W_{p,q,r} f(x, y, z) \psi_{i,l}(x) dx &= \int_0^1 f(x, y, z) \psi_{i,l}(x) dx = \\ &= (C1_{i,l} f)(y, z), \quad i = \overline{0, p}, \quad l = \overline{0, 2^i - 1}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 W_{p,q,r} f(x, y, z) \psi_{j,m}(y) dy &= \int_0^1 f(x, y, z) \psi_{j,m}(y) dy = \\ &= (C2_{j,m} f)(x, z), \quad j = \overline{0, q}, \quad m = \overline{0, 2^j - 1}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\int_0^1 W_{p,q,r} f(x, y, z) \psi_{k,n}(z) dz = \int_0^1 f(x, y, z) \psi_{k,n}(z) dz =$$

$$= (C3_{k,n}f)(x, y), \quad k = \overline{0, r}, \quad n = \overline{0, 2^k - 1}. \quad (12)$$

Доведення. З означення операторів $W_{p,q,r}f$, а також з тверджень леми витікає, що:

$$\begin{aligned} \int_0^1 W_{p,q,r}f(x, y, z) dx &= \int_0^1 W_{1,p}f(x, y, z) dx + \int_0^1 W_{2,q}f(x, y, z) dx + \int_0^1 W_{3,r}f(x, y, z) dx - \\ &\quad - \int_0^1 W_{1,p}W_{2,q}f(x, y, z) dx - \int_0^1 W_{1,p}W_{3,r}f(x, y, z) dx - \int_0^1 W_{2,q}W_{3,r}f(x, y, z) dx + \\ &\quad + \int_0^1 W_{1,p}W_{2,q}W_{3,r}f(x, y, z) dx = \int_0^1 f(x, y, z) dx + \int_0^1 W_{2,q}f(x, y, z) dx + \int_0^1 W_{3,r}f(x, y, z) dx - \\ &\quad - \int_0^1 W_{2,q}f(x, y, z) dx - \int_0^1 W_{3,r}f(x, y, z) dx - \int_0^1 W_{2,q}W_{3,r}f(x, y, z) dx + \\ &\quad + \int_0^1 W_{2,q}W_{3,r}f(x, y, z) dx = \int_0^1 f(x, y, z) dx = (C1_{00}f)(y, z), \quad \forall y, z \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Аналогічно:

$$\begin{aligned} \int_0^1 W_{p,q,r}f(x, y, z)\psi_{i,l}(x) dx &= \int_0^1 W_{1,p}f(x, y, z)\psi_{i,l}(x) dx + \int_0^1 W_{2,q}f(x, y, z)\psi_{i,l}(x) dx + \\ &\quad + \int_0^1 W_{3,r}f(x, y, z)\psi_{i,l}(x) dx - \int_0^1 W_{1,p}W_{2,q}f(x, y, z)\psi_{i,l}(x) dx - \int_0^1 W_{1,p}W_{3,r}f(x, y, z)\psi_{i,l}(x) dx - \\ &\quad - \int_0^1 W_{2,q}W_{3,r}f(x, y, z)\psi_{i,l}(x) dx + \int_0^1 W_{1,p}W_{2,q}W_{3,r}f(x, y, z)\psi_{i,l}(x) dx = \\ &= \int_0^1 f(x, y, z)\psi_{i,l}(x) dx + \int_0^1 W_{2,q}f(x, y, z)\psi_{i,l}(x) dx + \int_0^1 W_{3,r}f(x, y, z)\psi_{i,l}(x) dx - \\ &\quad - \int_0^1 W_{2,q}f(x, y, z)\psi_{i,l}(x) dx - \int_0^1 W_{3,r}f(x, y, z)\psi_{i,l}(x) dx - \\ &\quad - \int_0^1 W_{2,q}W_{3,r}f(x, y, z)\psi_{i,l}(x) dx + \int_0^1 W_{2,q}W_{3,r}f(x, y, z)\psi_{i,l}(x) dx = \\ &= \int_0^1 f(x, y, z)\psi_{i,l}(x) dx = (C1_{i,l}f)(y, z), \quad \forall y, z \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Теорема 2. Для похибки наближення функції $f(x, y, z) \in C(D)$,

$D = [0, 1]^3$ операторами $W_{p,q,r}f(x, y, z)$ виконується співвідношення

$$f(x, y, z) - W_{p,q,r}f(x, y, z) = (I - W_{p,q,r})f(x, y, z) = R_{1,p}R_{2,q}R_{3,r}f(x, y, z),$$

де I – тотожній оператор, $R_{1,p}f = f - W_{1,p}f(x, y, z)$,

$$R_{2,q}f = f - W_{2,q}f(x, y, z), \quad R_{3,r}f = f - W_{3,r}f(x, y, z).$$

Доведення. Запишемо систему операторних рівностей:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) - W_{p,q,r}f(x, y, z) &= (I - W_{p,q,r})f(x, y, z) = (I - W_{1,p} + W_{2,q} + W_{3,r} - \\ &- W_{1,p}W_{2,q} - W_{1,p}W_{3,r} - W_{2,q}W_{3,r} + W_{1,p}W_{2,q}W_{3,r})f(x, y, z) = (I - W_{1,p})(I - W_{2,q}) \times \\ &(I - W_{3,r}) = R_{1,p}R_{2,q}R_{3,r}f(x, y, z). \end{aligned}$$

Наслідок. Отже, якщо $R_{1,p}f = O(\varepsilon)$, $R_{2,q}f = O(\varepsilon)$, $R_{3,r}f = O(\varepsilon)$, то

$$R_{1,p}R_{2,q}R_{3,r}f = O(\varepsilon^3).$$

Для порівняння зауважимо, що оператори класичної тривимірної вейвлет-апроксимації Хаара $W_{1,p}W_{2,q}W_{3,r}f(x, y, z)$ наближують функцію $f(x, y, z)$ з похибкою, яка має оцінку $R_{classic} = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективними напрямки досліджень, пов'язані зі створенням операторів узагальненої тривимірної вейвлет-апроксимації, дослідженням їх апроксимативних властивостей, створенням швидких алгоритмів їх реалізації та дослідженням можливостей щодо їх впровадження у різноманітні галузі застосувань вейвлетів, які вимагають обробки багатовимірних залежностей.

Висновки. Таким чином, оператори класичної тривимірної вейвлет-апроксимації Хаара $W_{1,p}W_{2,q}W_{3,r}f(x, y, z)$ наближують функцію $f(x, y, z)$ з похибкою, яка має оцінку $R_{classic} = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. В той час як оператори тривимірної мішаної вейвлет-апроксимації $W_{p,q,r}f(x, y, z)$ наближують функцію трьох змінних з похибкою, яка має оцінку $R_{1,p}R_{2,q}R_{3,r}f = O(\varepsilon^3)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Це дуже значна перевага запропонованих операторів над класичними схемами і може бути використана у багатьох застосуваннях теорії вейвлетів.

Список літератури: 1. Петухов А. П. Введение в теорию базисов всплесков. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999. – 132 с. 2. Столиць Э., Дероуз Т., Салезин Д. Вейвлеты в компьютерной графике. Теория и приложения. – Москва, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 272 с. 3. Уэлстид С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. – Москва: Триумф, 2003. – 320 с. 4. Яковлев А. Основы вейвлет-преобразования сигналов. Серия «Конспекты лекций по радиотехническим дисциплинам», выпуск 10. – Москва: Физматлит, 2003. – 176 с. 5. Гудим

В. В. Використання вейвлет-перетворень та нейронних мереж для обробки та покращання розпізнавання мовних сигналів: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: 05.12.13. Нац. ун-т "Львів. політехніка". – Л., 2003. – 20 с.: рис., табл. – укр. **6.** *Sweldens W.* The lifting scheme: a construction of second generation wavelets // *SIAM J. Math. Anal.* – 1996. – Vol. 3(2). – P. 186 – 200. **7.** *Стаховський І. П.* Вейвлетний аналіз часових сейсмічних рядів // ДАН. – 1996. – Т. 350, № 3. – С. 393 – 396. **8.** *DeVore R., Jawerth W., Lucier B.* Image compression through wavelet transform coding // *IEEE Trans. on Information Theory.* – 1992. – Vol. 39(2). – P. 719 – 746. **9.** *Захаров В. Г.* Розробка і застосування методів вейвлет-аналізу до нелинійних гідродинамічних систем. Автореф. дис. на соискание науч. степени канд. физ.-мат. наук: спец. 01.02.05. – Пермь, 1997. **10.** *Дьяконов В. П.* Настольная книга пользователя Internet. – М.: Изд-во "СОЛЮН-Пресс", 2000. – 640 с. **11.** *Воробьев В. И., Грибунин В. Г.* Теория и практика вейвлет-преобразования. – Санкт-Петербург: Изд-во Воен. ун-та связи, 1999. – 204 с. **12.** *Beylkin G., Coifman R., Rokhlin V.* Fast wavelet transforms and numerical algorithms // *Comm. on Pure and Appl. Math.* – 1991. – Vol. 44. – P. 141 – 183. **13.** *Задирака В. К., Абдикаликов К. А.* Быстрые ортогональные преобразования: теория и приложения. – Алматы: Научно издательский центр «Фылым», 2003. – 220 с. **14.** *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. – М.: Изд-во АФЦ, 1999. – 560 с. **15.** *Ronald A. DeVore, Björn Jawerth, Vasil Popov.* Compression of wavelet decompositions // *Amer. J. Math.* – 1992. – Vol. 114. – P. 737 – 785. **16.** *Stephane G. Mallat.* A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation // *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* – 1989. – Vol. 11. – P. 674 – 693. **17.** *Y. Meyer.* Ondelettes, fonctions splines et analyses graduees [Wavelets, Spline functions, and multiresolution analysis]. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino.* – 1987. – Vol. 45. – P. 1-42. Translated by John Horvath. **18.** *Y. Meyer.* Wavelets with compact support // *Zygmund Lectures.* U. Chicago. – 1987. **19.** *Cohen A.* Ondelettes, analysis multiresolutions et filtres miroirs en quadrature // *Ann. Inst. H. Poincare, Anal. Non Lineaire.* – 1990. – Vol. 7. – P. 439 – 459. **20.** *Lawton Wayne M.* Tight frames of compactly supported affine wavelets // *J. Math. Phys.* – 1990. – Vol. 31. – P. 1898 – 1901. **21.** *Ingrid Daubechies.* Orthonormal bases of compactly supported wavelets // *Comm. Pure Appl. Math.* – 1988. – Vol. 41. – P. 909 – 996. **22.** *Karlheinz Gröchenig.* Analyse multi-échelle et bases d'ondelettes [Multiscale analyses and wavelet bases]. // *C.R. Acad. Sci. Paris Série I.* – 1987. – Vol. 305. – P. 13 – 17. Translated by Robert D. Ryan. **23.** *Jelena Kovačević and Martin Vetterli.* Nonseparable multidimensional perfect reconstruction filter banks and wavelet bases for R^n . // *IEEE Trans. Inform. Theory.* – 1992. – Vol. 38. – P. 533 – 555. **24.** *K. Gröchenig and W. R. Madych.* Multiresolution analysis, Haar bases and self-similar tilings of R^n // *IEEE Trans. Inform. Theory.* – 1992. – Vol. 38. – P. 556 – 568. **25.** *Fundamental Papers in Wavelet Theory / Edited by Christopher Heil and David F. Walnut.* Princeton University Press. 2006. – 878 p. **26.** *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Х.: Основа, 2002. – 544 с. **27.** *Литвин О. М., Кулик С. І.* Узагальнені оператори Хаара, побудовані на основі двовимірної мішаної апроксимації вейвлетами Хаара // *Оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів.* – Київ: Видання Міжнародного науково-навчального центру інформаційних технологій та систем, 2004. – С. 297 – 300. **28.** *Литвин О., Кулик С. І.* Bivariate Wavelet Sums, Constructed on the Basis of Haar Blending Approximation and Experimental Data // *Управляющие системы и машины.* – 2008. – №3. – С. 53 – 59. **29.** *Литвин О. Н., Кулик С. И.* Некоторые аспекты быстрого вычисления смешанных сумм Хаара // *Компьютерная математика.* – 2008. – №2. – С. 83 – 95. **30.** *Литвин О. М., Кулик С. І.* Використання мішаної апроксимації кусково-сталими сплайнами у стискуванні інформації // *Оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів.* – Київ: Видання Міжнародного науково-навчального центру інформаційних технологій та систем, 2006. – С. 155 – 158. **31.** *Литвин О. М., Кулик С. І.* Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням вейвлетів // *Проблеми машинобудування.* – 2008. – Т.11, №2. – С. 56 – 65.

Надійшла до редколегії 15.12.2011