УДК 517.518.863

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ТЕОРЕМЫ ФЕРМА

Геворкян Юрий Левонович
к.ф.-м.н., профессор
Национальный Технический Университет
«Харьковский Политехнический Институт»
г. Харьков, Украина

В статье предлагается доказательство теоремы Ферма. Вместо целых чисел a, b, c в теореме Ферма рассматривается треугольник с длинами сторон a, b, c. Доказано, что в случае прямоугольного и тупоугольного треугольников уравнение Ферма решений не имеет. При рассмотрении случая, когда a, b, c являются сторонами остроугольного треугольника, доказана теорема для случая, когда a, b, c принимают последовательные значения натуральных чисел. В общем случае проведены вычисления, позволившие сделать вывод, что уравнение Ферма не имеет целых решений при $p > 2$.

Ключевые слова: теорема Ферма, геометрический подход, теорема Декарта.

Теорема Ферма. *Для любого натурального числа* $p > 2$ *уравнение*

$$a^p + b^p = c^p \qquad (1)$$

не имеет решений в целых ненулевых числах a, b, c.

Доказательство. Очевидно, что $a < c$, $b < c$, $c < a + b$. Применим геометрический подход, а именно: вместо тройки чисел a, b, c рассмотрим треугольник с длинами сторон a, b, c.

Возможны три варианта: треугольник прямоугольный, тупоугольный либо остроугольный.

В первом случае

$$a^2 + b^2 = c^2. \qquad (2)$$

Во втором случае из теоремы косинусов следует, что

$$a^2 + b^2 < c^2. \qquad (3)$$

Объединяя (2) и (3), получаем:

$$a^2 + b^2 \le c^2. \qquad (4)$$

Умножив неравенство (4) на c^{p-2}, получим:

$$a^2 \cdot c^{p-2} + b^2 \cdot c^{p-2} \le c^p.$$

Откуда

$$a^p + b^p < c^p,$$

так как $a^2 \cdot c^{p-2} > a^p$, $b^2 \cdot c^{p-2} > b^p$. То есть, в первых двух случаях уравнение (1) решений не имеет.

Рассмотрим третий случай, а именно: треугольник остроугольный. Не нарушая общности, будем считать, что $a < b$.

При $a = b$, уравнение (1) принимает вид:

$$a^p + a^p = c^p.$$

Откуда $c = a\sqrt[p]{2}$. То есть c является иррациональным числом при a и p целых.

По теореме косинусов

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Откуда следует, что c является иррациональным числом, если a и b – целые числа, а $\cos\gamma$ – иррациональное число.

Числа $a = k$, $b = k + m$, $c = k + n$, где k, m, n – целые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$n > m,\ n < k + m,$$

исчерпывают все возможные варианты целых чисел a, b, c, являющихся сторонами треугольника.

В остроугольном треугольнике дополнительно выполняется следующее условие:

$$k > n - m + \sqrt{2n(n-m)}. \qquad (5)$$

Докажем неравенство (5). Как известно,

$a^2+b^2>c^2$, $k^2+(k+m)^2>(k+n)^2$,

$k^2-2k(n-m)+m^2-n^2>0$.

Откуда

$k>n-m+\sqrt{2n(n-m)}$.

Из неравенства (5) следует, что $k>3$.

Рассмотрим функцию

$$f(k,p)=k^p+(k+m)^p-(k+n)^p, \qquad (6)$$

где p положительное число $(p\geq 2)$.

Полагая число p целым, преобразуем равенство (6):

$$f(k,p)=k^p-C_p^1(n-m)k^{p-1}-C_p^2(n^2-m^2)k^{p-2}-...-C_p^1(n^{p-1}-m^{p-1})k-(n^p-m^p). \qquad (7)$$

Таким образом, $f(k,p)$ является многочленом степени p целочисленного аргумента k.

По теореме Декарта [1] уравнение

$$f(k,p)=0 \qquad (8)$$

имеет единственный положительный корень.

Докажем некоторые утверждения.

Предложение 1. Пусть $f(k,p)<0$ $\forall p>p_0$. Тогда $f(k,p)$ монотонно убывает на интервале (p_0,∞) по переменной p.

Доказательство.

$$f'_p(k,p)=k^p\ln k+(k+m)^p\ln(k+m)-(k+n)^p\ln(k+n)<k^p\ln(k+n)+$$
$$+(k+m)^p\ln(k+n)-(k+n)^p\ln(k+n)=f(k,p)\ln(k+n)<0.$$

Следовательно, $f(k,p)$ монотонно убывающая функция на интервале (p_0,∞).

Предложение 2. Пусть $f(k_0,p)>0$ для фиксированного целого $p\geq 2$. Тогда функция $f(k,p)$ монотонно возрастает по переменной k на промежутке (k_0,∞).

Доказательство. $f'_k(k,p)=pf(k,p-1)$.

По условию $f\left(k,\, p-1\right)>0$. Следовательно, $f_k'\left(k,\, p\right)>0$. То есть, $f\left(k,\, p\right)$ монотонно возрастает на интервале $\left(k_0,\infty\right)$.

Рассмотрим частный случай: $a=k-1,\ b=k,\ c=k+1$.

Уравнение (8) примет вид:

$$k^p-\left[\left(k+1\right)^p-\left(k-1\right)^p\right]=0. \qquad (9)$$

При k нечётном имеем:

$$k^p-2\left[C_p^1k^{p-1}+C_p^3k^{p-3}+...+1\right]=0. \qquad (10)$$

При k чётном, получаем:

$$k^{p-1}-2\left[C_p^1k^{p-2}+C_p^3k^{p-4}+...+C_p^1\right]=0. \qquad (11)$$

В обоих случаях при $k\le 2p$ функция $f\left(k,\, p\right)<0$. То есть, уравнение (9) может иметь корень только при $k\ge 2p+1$.

В уравнении (10) свободный член равен $\left(-2\right)$, а в уравнении (11) равен $\left(-2p\right)$. Как известно, уравнения (10), (11) могут иметь целые корни, являющиеся сомножителями свободных членов. Но $k\ge 2p+1$, следовательно, уравнение (9) не имеет целых положительных корней, при $p-$целом.

Рассмотрим еще один частный случай:

$$a=k-m,\quad b=k,\quad c=k+m,$$

причем $\dfrac{k}{m}$ является натуральным числом.

Очевидно, заменой $\dfrac{k}{m}=t$ приходим к рассмотренному выше случаю.

Действительно, уравнение (8) принимает вид:

$$k^p-\left[\left(k+m\right)^p-\left(k-m\right)^p\right]=0.$$

Разделив это равенство на m^p, получим уравнение вида (9):

$$t^p-\left[\left(t+1\right)^p-\left(t-1\right)^p\right]=0.$$

Рассмотрим общий случай (7). Очевидно, при

$k \le p(n-m)$ (12)

уравнение (8) корней не имеет. Таким образом, корни уравнения (8) должны удовлетворять неравенству (5) и неравенству

$k > p(n-m)$. (13)

Учитывая неравенство (13) можем считать, что $k = k(p)$.

Рассмотрим несколько произвольных случаев с учётом неравенства (5):

1. $m=16$, $n=17$, $k \ge 7$.
2. $m=3$, $n=21$, $k \ge 46$.
3. $m=12$, $n=20$, $k \ge 26$.
4. $m=16$, $n=37$, $k \ge 61$.
5. $m=53$, $n=78$, $k \ge 88$.
6. $m=39$, $n=40$, $k \ge 10$.

Для удобства вычислений вместо функции $f\left[k(p), p\right]$ рассмотрим функцию $F(p,z)$:

1. $F(p,z) = (p+4+z)^p + (p+20+z)^p - (p+21+z)^p$.
2. $F(p,z) = (18p+9+z)^p + (18p+12+z)^p - (18p+30+z)^p$.
3. $F(p,z) = (8p+9+z)^p + (8p+21+z)^p - (8p+29+z)^p$.
4. $F(p,z) = (21p+18+z)^p + (21p+34+z)^p - (21p+55+z)^p$.
5. $F(p,z) = (25p+37+z)^p + (25p+90+z)^p - (25p+115+z)^p$.
6. $F(p,z) = (p+7+z)^p + (p+46+z)^p - (p+47+z)^p$.

Во всех случаях при $z=1$ и $p=2$ получаем наименьшее число k, при котором выполняется неравенство (5). Будем вычислять значения указанных функций, придавая z следующие значения: $1, 2, 3, \ldots$.

При вычислении функции $F(p,z)$ будем использовать предложения 1 и 2, а именно:

1. Если $F(p_0, z) < 0$, то нет необходимости считать $F(p, z)$ при $p > p_0$, так как в силу Предложения 1 $F(p, z) < 0$.

2. Если $F(p, z_0) > 0$, то нет необходимости вычислять $F(p, z)$ для $z > z_0$, так как по Предложению 2 $F(p, z) > 0$.

Составим таблицы 1 – 6.

1. $F(p, z) = (p + 4 + z)^p + (p + 20 + z)^p - (p + 21 + z)^p$, $m = 16$, $n = 17$.

Таблица 1

№	$F(p, z) > 0$	$F(p, z) < 0$	$F(\tilde{p}, z) = 0$
1.	$F(2,1) > 0$	$F(3,1) < 0$	$2 < \tilde{p} < 3$
2.	$F(3,8) > 0$	$F(4,8) < 0$	$3 < \tilde{p} < 4$
3.	$F(4,15) > 0$	$F(5,15) < 0$	$4 < \tilde{p} < 5$
4.	$F(5,22) > 0$	$F(6,22) < 0$	$5 < \tilde{p} < 6$
5.	$F(6,29) > 0$	$F(7,29) < 0$	$6 < \tilde{p} < 7$
6.	$F(7,36) > 0$	$F(8,36) < 0$	$7 < \tilde{p} < 8$
7.	$F(8,43) > 0$	$F(9,43) < 0$	$8 < \tilde{p} < 9$
8.	$F(9,50) > 0$	$F(10,50) < 0$	$9 < \tilde{p} < 10$
9.	$F(10,57) > 0$	$F(11,57) < 0$	$10 < \tilde{p} < 11$
10.	$F(11,64) > 0$	$F(12,64) < 0$	$11 < \tilde{p} < 12$
11.	$F(12,71) > 0$	$F(13,71) < 0$	$12 < \tilde{p} < 13$
12.	$F(13,78) > 0$	$F(14,78) < 0$	$13 < \tilde{p} < 14$
13.	$F(14,85) > 0$	$F(15,85) < 0$	$14 < \tilde{p} < 15$
14.	$F(15,92) > 0$	$F(16,92) < 0$	$15 < \tilde{p} < 16$
15.	$F(16,99) > 0$	$F(17,99) < 0$	$16 < \tilde{p} < 17$
16.	$F(17,106) > 0$	$F(18,106) < 0$	$17 < \tilde{p} < 18$
17.	$F(18,113) > 0$	$F(19,113) < 0$	$18 < \tilde{p} < 19$

18.	$F(19,120)>0$	$F(20,120)<0$	$19<\tilde{p}<20$
19.	$F(20,127)>0$	$F(21,127)<0$	$20<\tilde{p}<21$
20.	$F(21,134)>0$	$F(22,134)<0$	$21<\tilde{p}<22$
21.	$F(22,141)>0$	$F(23,141)<0$	$22<\tilde{p}<23$
22.	$F(23,148)>0$	$F(24,148)<0$	$23<\tilde{p}<24$
23.	$F(24,155)>0$	$F(25,155)<0$	$24<\tilde{p}<25$
24.	$F(25,162)>0$	$F(26,162)<0$	$25<\tilde{p}<26$
25.	$F(26,169)>0$	$F(27,169)<0$	$26<\tilde{p}<27$

2. $F(p,z)=(18p+9+z)^p+(18p+12+z)^p-(18p+30+z)^p$, $m=3$, $n=21$.

Таблица 2

№	$F(p,z)>0$	$F(p,z)<0$	$F(\tilde{p},z)=0$
1.	$F(2,1)>0$	$F(3,1)<0$	$2<\tilde{p}<3$
2.	$F(3,11)>0$	$F(4,11)<0$	$3<\tilde{p}<4$
3.	$F(4,21)>0$	$F(5,21)<0$	$4<\tilde{p}<5$
4.	$F(5,31)>0$	$F(6,31)<0$	$5<\tilde{p}<6$
5.	$F(6,41)>0$	$F(7,41)<0$	$6<\tilde{p}<7$
6.	$F(7,51)>0$	$F(8,51)<0$	$7<\tilde{p}<8$
7.	$F(8,61)>0$	$F(9,61)<0$	$8<\tilde{p}<9$
8.	$F(9,71)>0$	$F(10,71)<0$	$9<\tilde{p}<10$
9.	$F(10,81)>0$	$F(11,81)<0$	$10<\tilde{p}<11$
10.	$F(11,91)>0$	$F(12,91)<0$	$11<\tilde{p}<12$
11.	$F(12,101)>0$	$F(13,101)<0$	$12<\tilde{p}<13$
12.	$F(13,111)>0$	$F(14,111)<0$	$13<\tilde{p}<14$
13.	$F(14,121)>0$	$F(15,121)<0$	$14<\tilde{p}<15$
14.	$F(15,131)>0$	$F(16,131)<0$	$15<\tilde{p}<16$
15.	$F(16,142)>0$	$F(17,142)<0$	$16<\tilde{p}<17$
16.	$F(17,152)>0$	$F(18,152)<0$	$17<\tilde{p}<18$

17.	$F(18,162)>0$	$F(19,162)<0$	$18<\tilde{p}<19$
18.	$F(19,172)>0$	$F(20,172)<0$	$19<\tilde{p}<20$
19.	$F(20,182)>0$	$F(21,182)<0$	$20<\tilde{p}<21$
20.	$F(21,192)>0$	$F(22,192)<0$	$21<\tilde{p}<22$
21.	$F(22,202)>0$	$F(23,202)<0$	$22<\tilde{p}<23$
22.	$F(23,212)>0$	$F(24,212)<0$	$23<\tilde{p}<24$
23.	$F(24,222)>0$	$F(25,222)<0$	$24<\tilde{p}<25$
24.	$F(25,232)>0$	$F(26,232)<0$	$25<\tilde{p}<26$
25.	$F(26,242)>0$	$F(27,242)<0$	$26<\tilde{p}<27$

3. $F(p,z)=(8p+9+z)^p+(8p+21+z)^p-(8p+29+z)^p$, $m=12$, $n=20$.

Таблица 3

№	$F(p,z)>0$	$F(p,z)<0$	$F(\tilde{p},z)=0$
1.	$F(2,1)>0$	$F(3,1)<0$	$2<\tilde{p}<3$
2.	$F(3,12)>0$	$F(4,12)<0$	$3<\tilde{p}<4$
3.	$F(4,23)>0$	$F(5,23)<0$	$4<\tilde{p}<5$
4.	$F(5,34)>0$	$F(6,34)<0$	$5<\tilde{p}<6$
5.	$F(6,45)>0$	$F(7,45)<0$	$6<\tilde{p}<7$
6.	$F(7,56)>0$	$F(8,56)<0$	$7<\tilde{p}<8$
7.	$F(8,67)>0$	$F(9,67)<0$	$8<\tilde{p}<9$
8.	$F(9,78)>0$	$F(10,78)<0$	$9<\tilde{p}<10$
9.	$F(10,89)>0$	$F(11,89)<0$	$10<\tilde{p}<11$
10.	$F(11,100)>0$	$F(12,100)<0$	$11<\tilde{p}<12$
11.	$F(12,111)>0$	$F(13,111)<0$	$12<\tilde{p}<13$
12.	$F(13,122)>0$	$F(14,122)<0$	$13<\tilde{p}<14$
13.	$F(14,133)>0$	$F(15,133)<0$	$14<\tilde{p}<15$
14.	$F(15,144)>0$	$F(16,144)<0$	$15<\tilde{p}<16$
15.	$F(16,155)>0$	$F(17,155)<0$	$16<\tilde{p}<17$
16.	$F(17,166)>0$	$F(18,166)<0$	$17<\tilde{p}<18$
17.	$F(18,177)>0$	$F(19,177)<0$	$18<\tilde{p}<19$

18.	$F(19,188)>0$	$F(20,188)<0$	$19<\tilde{p}<20$
19.	$F(20,199)>0$	$F(21,199)<0$	$20<\tilde{p}<21$
20.	$F(21,210)>0$	$F(22,210)<0$	$21<\tilde{p}<22$
21.	$F(22,221)>0$	$F(23,221)<0$	$22<\tilde{p}<23$
22.	$F(23,232)>0$	$F(24,232)<0$	$23<\tilde{p}<24$
23.	$F(24,243)>0$	$F(25,243)<0$	$24<\tilde{p}<25$
24.	$F(25,254)>0$	$F(26,254)<0$	$25<\tilde{p}<26$
25.	$F(26,265)>0$	$F(27,265)<0$	$26<\tilde{p}<27$

4. $F(p,z)=(21p+18+z)^p+(21p+34+z)^p-(21p+55+z)^p$, $m=16$, $n=37$.

Таблица 4

№	$F(p,z)>0$	$F(p,z)<0$	$F(\tilde{p},z)=0$
1.	$F(2,1)>0$	$F(3,1)<0$	$2<\tilde{p}<3$
2.	$F(3,20)>0$	$F(4,20)<0$	$3<\tilde{p}<4$
3.	$F(4,40)>0$	$F(5,40)<0$	$4<\tilde{p}<5$
4.	$F(5,59)>0$	$F(6,59)<0$	$5<\tilde{p}<6$
5.	$F(6,79)>0$	$F(7,79)<0$	$6<\tilde{p}<7$
6.	$F(7,99)>0$	$F(8,99)<0$	$7<\tilde{p}<8$
7.	$F(8,119)>0$	$F(9,119)<0$	$8<\tilde{p}<9$
8.	$F(9,138)>0$	$F(10,138)<0$	$9<\tilde{p}<10$
9.	$F(10,158)>0$	$F(11,158)<0$	$10<\tilde{p}<11$
10.	$F(11,178)>0$	$F(12,178)<0$	$11<\tilde{p}<12$
11.	$F(12,197)>0$	$F(13,197)<0$	$12<\tilde{p}<13$
12.	$F(13,217)>0$	$F(14,217)<0$	$13<\tilde{p}<14$
13.	$F(14,237)>0$	$F(15,237)<0$	$14<\tilde{p}<15$
14.	$F(15,256)>0$	$F(16,256)<0$	$15<\tilde{p}<16$
15.	$F(16,276)>0$	$F(17,276)<0$	$16<\tilde{p}<17$
16.	$F(17,296)>0$	$F(18,296)<0$	$17<\tilde{p}<18$
17.	$F(18,315)>0$	$F(19,315)<0$	$18<\tilde{p}<19$
18.	$F(19,335)>0$	$F(20,335)<0$	$19<\tilde{p}<20$

19.	$F(20,355)>0$	$F(21,355)<0$	$20<\tilde{p}<21$
20.	$F(21,374)>0$	$F(22,374)<0$	$21<\tilde{p}<22$
21.	$F(22,394)>0$	$F(23,394)<0$	$22<\tilde{p}<23$
22.	$F(23,414)>0$	$F(24,414)<0$	$23<\tilde{p}<24$
23.	$F(24,434)>0$	$F(25,434)<0$	$24<\tilde{p}<25$
24.	$F(25,453)>0$	$F(26,453)<0$	$25<\tilde{p}<26$
25.	$F(26,473)>0$	$F(27,473)<0$	$26<\tilde{p}<27$

5. $F(p,z)=(25p+37+z)^p+(25p+90+z)^p-(25p+115+z)^p$, $m=53$, $n=78$.

Таблица 5

№	$F(p,z)>0$	$F(p,z)<0$	$F(\tilde{p},z)=0$
1.	$F(2,1)>0$	$F(3,1)<0$	$2<\tilde{p}<3$
2.	$F(3,42)>0$	$F(4,42)<0$	$3<\tilde{p}<4$
3.	$F(4,83)>0$	$F(5,83)<0$	$4<\tilde{p}<5$
4.	$F(5,124)>0$	$F(6,124)<0$	$5<\tilde{p}<6$
5.	$F(6,166)>0$	$F(7,166)<0$	$6<\tilde{p}<7$
6.	$F(7,208)>0$	$F(8,208)<0$	$7<\tilde{p}<8$
7.	$F(8,250)>0$	$F(9,250)<0$	$8<\tilde{p}<9$
8.	$F(9,292)>0$	$F(10,292)<0$	$9<\tilde{p}<10$
9.	$F(10,333)>0$	$F(11,333)<0$	$10<\tilde{p}<11$
10.	$F(11,375)>0$	$F(12,375)<0$	$11<\tilde{p}<12$
11.	$F(12,417)>0$	$F(13,417)<0$	$12<\tilde{p}<13$
12.	$F(13,459)>0$	$F(14,459)<0$	$13<\tilde{p}<14$
13.	$F(14,501)>0$	$F(15,501)<0$	$14<\tilde{p}<15$
14.	$F(15,543)>0$	$F(16,543)<0$	$15<\tilde{p}<16$
15.	$F(16,585)>0$	$F(17,585)<0$	$16<\tilde{p}<17$
16.	$F(17,627)>0$	$F(18,627)<0$	$17<\tilde{p}<18$
17.	$F(18,668)>0$	$F(19,668)<0$	$18<\tilde{p}<19$
18.	$F(19,710)>0$	$F(20,710)<0$	$19<\tilde{p}<20$
19.	$F(20,752)>0$	$F(21,752)<0$	$20<\tilde{p}<21$

20.	$F(21,794)>0$	$F(22,794)<0$	$21<\tilde{p}<22$
21.	$F(22,836)>0$	$F(23,836)<0$	$22<\tilde{p}<23$
22.	$F(23,878)>0$	$F(24,878)<0$	$23<\tilde{p}<24$
23.	$F(24,920)>0$	$F(25,920)<0$	$24<\tilde{p}<25$
24.	$F(25,962)>0$	$F(26,962)<0$	$25<\tilde{p}<26$
25.	$F(26,1004)>0$	$F(27,1004)<0$	$26<\tilde{p}<27$

6. $F(p,z)=(p+7+z)^p+(p+46+z)^p-(p+47+z)^p$, $m=39$, $n=40$.

Таблица 6

№	$F(p,z)>0$	$F(p,z)<0$	$F(\tilde{p},z)=0$
1.	$F(2,1)>0$	$F(3,1)<0$	$2<\tilde{p}<3$
2.	$F(3,12)>0$	$F(4,12)<0$	$3<\tilde{p}<4$
3.	$F(4,26)>0$	$F(5,26)<0$	$4<\tilde{p}<5$
4.	$F(5,39)>0$	$F(6,39)<0$	$5<\tilde{p}<6$
5.	$F(6,52)>0$	$F(7,52)<0$	$6<\tilde{p}<7$
6.	$F(7,66)>0$	$F(8,66)<0$	$7<\tilde{p}<8$
7.	$F(8,79)>0$	$F(9,79)<0$	$8<\tilde{p}<9$
8.	$F(9,93)>0$	$F(10,93)<0$	$9<\tilde{p}<10$
9.	$F(10,106)>0$	$F(11,106)<0$	$10<\tilde{p}<11$
10.	$F(11,120)>0$	$F(12,120)<0$	$11<\tilde{p}<12$
11.	$F(12,134)>0$	$F(13,134)<0$	$12<\tilde{p}<13$
12.	$F(13,147)>0$	$F(14,147)<0$	$13<\tilde{p}<14$
13.	$F(14,161)>0$	$F(15,161)<0$	$14<\tilde{p}<15$
14.	$F(15,175)>0$	$F(16,175)<0$	$15<\tilde{p}<16$
15.	$F(16,188)>0$	$F(17,188)<0$	$16<\tilde{p}<17$
16.	$F(17,202)>0$	$F(18,202)<0$	$17<\tilde{p}<18$
17.	$F(18,216)>0$	$F(19,216)<0$	$18<\tilde{p}<19$
18.	$F(19,229)>0$	$F(20,229)<0$	$19<\tilde{p}<20$
19.	$F(20,243)>0$	$F(21,243)<0$	$20<\tilde{p}<21$
20.	$F(21,257)>0$	$F(22,257)<0$	$21<\tilde{p}<22$

21.	$F(22,270)>0$	$F(23,270)<0$	$22<\tilde{p}<23$
22.	$F(23,284)>0$	$F(24,284)<0$	$23<\tilde{p}<24$
23.	$F(24,298)>0$	$F(25,298)<0$	$24<\tilde{p}<25$
24.	$F(25,311)>0$	$F(26,311)<0$	$25<\tilde{p}<26$
25.	$F(26,325)>0$	$F(27,325)<0$	$26<\tilde{p}<27$

Анализ приведенных таблиц позволяет сделать следующие очевидные выводы:

1. При целых p, z функция $F(p,z)\neq 0$.

2. Функция $F(p,z)$ меняет знак с некоторой закономерностью в зависимости от m, n.

3. При заданных m, n нетрудно найти интервал изменения переменной z, в котором $F(\tilde{p},z)=0$ (при этом $\tilde{p}$ не является целым числом).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1968. – 431 с.