МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
УКРАЇНСЬКА ІНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГІЧНА
АКАДЕМІЯ

Кафедра вищої та прикладної математики

О.М. Литвин, Ю.І. Першина, О.О. Литвин, О.П. Нечуйвітер

ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Навчально-методичний посібник

Харків
2018

Міністерство освіти і науки України
УКРАЇНСЬКА ІНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГІЧНА АКАДЕМІЯ
Кафедра вищої та прикладної математики

О.М. Литвин, Ю.І. Першина, О.О. Литвин, О.П. Нечуйвітер

ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Навчально-методичний посібник

Для магістрів денної та заочної форм навчання
спеціальності Прикладна математика

Затверджено
Науково-методичною радою
Української інженерно-
педагогічної академії
протокол № 7
від 03.05.2018 р

Харків
2018

УДК 004.42:51(075.5)

Литвин О.М.

Загальна теорія крайових задач: навч.-метод. посіб. для магістрів денної та заоч. форми навч. спец. Прикл. матем / О.М. Литвин, Ю.І. Першина, О.О. Литвин, О.П. Нечуйвітер; Укр. інж.-пед. акад. – Харків : [б. в.], 2018. – 82 с.

Даний посібник містить основні теоретичні та практичні відомості з курсу «Загальна теорія крайових задач»; докладне розв'язання типових прикладів; може бути використаний аспірантами, магістрами та спеціалістами всіх інженерних та інженерно-педагогічних спеціальностей

Рецензент: О. О. Литвин, д-р фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний за випуск: О. М. Литвин, д-р фіз.-мат. наук, проф

ЗМІСТ

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

$\forall$ - квантор загальності “для всіх”

$\exists$ - квантор існування “існує”

$\exists!$ - існує і єдиний

$\Rightarrow$ - витікає

$\Leftrightarrow$ - еквівалентне

- множина дійсних чисел $|R = \{x| -\infty < x < \infty\}$

R - евклідів n-вимірний простір $(n \geq r)$

R^n - множина натуральних чисел

N

$- N \cup \{0\}$

- пуста множина

$\overset{0}{N}$ - елемент x належить множині A

$\varnothing$ - елемент x не належить множині A

$x \in A$

$x \overline{\in} A,\ x \notin A$

$A \cup B$ - об´єднання множин A і $B : x \in A \cup B \Leftrightarrow \{x \in A$ àáî $x \in B\}$

$A \cap B$ - перетин множин A і B, їх спільна частина $x \in A \cap B \Leftrightarrow \{x \in A$ ³ $x \in B\}$

$A|B$ - $\{x \in A | x \notin B\}$ - різниця множин A і B

$\overline{A}$ - замикання множини A

$\{x|P_x|\},\ \{x : P_x\}$ - сукупність елементів x з властивістю P_x

$:=,\ =:$ - дорівнює за означенням

$\operatorname{sgn} x$ - $\operatorname{sgn} x = 1,$ якщо $x > 0,\quad \operatorname{sgn} 0 = 0,\ \operatorname{sgn} x = -1,$ якщо $x < 0$

Δ - оператор Лапласа $\Delta u = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$

k - коефіцієнт теплопровідності, $[k] = \frac{Âò}{ì \cdot ãðàä}$

c - питома теплоємність, $[c] = \frac{Äæ}{êã \cdot ãðàä}$

- густина тіла, $[\rho] = \frac{êã}{ì^3}$

ρ - лінійна густина стержня, $[\rho] = \frac{êã}{ì}$

ρ

$C^r(\overline{G}),\ (C^0(\overline{G}) =: C(G))$ - простір неперервних в $\overline{G} c R^n$ функцій n змінних $(n \geq 1)$ та неперервними похідними порядків $\leq r$

$f(x) \in kc'[a,b]$ - кусково-гладка функція $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, яка може мати скінченне число точок розриву 1-го роду, а між точками розриву $f(x)$ неперервна разом із своєю похідною $f'(x)$

$$f(x+0) =: \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} f(x+\Delta x) \qquad f(x-0) =: \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} f(x+\Delta x)$$

$\exp z = e^z$

Розділ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

1.1. Вступ

Теорія теплопровідності є однією з провідних дисциплін ряду технічних спеціальностей втузів. Вона є одним з основних розділів математичної фізики, водночас із теорією коливання струни, або коливання електричного струму в електричному колі тощо.

Знання закономірностей, за якими проходить процес переносу тепла, має велике практичне значення в станційній і промисловій теплоенергетиці, в технологічних процесах металургійної, хімічної промисловості, а також в процесах, які виникають при зварюванні металів тощо.

Такі знання потрібні при розрахунках апаратів, які працюють в нестаціонарних режимах (температура яких змінюється з часом), при розрахунках необхідної теплоізоляції споруд, доменних печей, трубопроводів, хімічних реакторів. Особливо велике значення відіграє ця теорія на етапі проектування вказаних апаратів, споруд, машин, коли необхідно розмістити джерела нагрівання так, щоб не допустити перегріву окремих вузлів агрегатів. Ці та багато інших питань пов'язані з розв'язанням нестаціонарних і стаціонарних задач теплопровідності.

У даному учбовому посібнику наведено розв'язок задач нестаціонарної теплопровідності для стержня (як скінченного, так і нескінченного), циліндра, кулі і пластини. До таких задач можна звести ряд задач, які зустрічаються на практиці. При цьому використані як класичні методи (метод розділу змінних, використання інтегралу Фур'є), так і наближені методи (метод сіток, або метод скінченних різниць та новий метод – метод скінченних елементів). У той час, як класичні методи добре пристосовані тільки для випадків, коли нам треба знайти розподіл тепла в тілах відносно простої форми (стержень, пластина, куля, циліндр), наближені методи можна використовувати також і для розрахунку розподілу тепла в тілах складної форми. При цьому дано класифікацію рівнянь математичної фізики.

Для розрахунків необхідно використовувати сучасні ЕОМ.

Рекомендується ознайомитися з основними позначеннями, які використовуються в даному посібнику, а також з довідковим матеріалом для тем "Ряди Фур'є", "Інтеграл Фур'є", "Задача Штурма-Ліувіля".

Автор висловлює подяку О.Р. Максимович за допомогу при підготовці рукопису до друку.

1.2. Виведення рівняння нестаціонарної теплопровідності

Як відомо, теплопровідність - це вид теплообміну, який проходить у макроскопічно нерухомому і нерівномірно нагрітому середовищі. Наприклад, дві протилежні стінки куба з газом можуть мати різні температури T_1 і T_2, які створюються зовнішніми джерелами. Це приводить до того, що молекули газу в різних точках куба будуть мати різні середні кінетичні швидкості.

Тому хаотичний тепловий рух молекул дає направлений переніс енергії у формі теплоти. Молекули, які перейшли з більш нагрітих частин куба в холодніші частини, під час молекулярних зіткнень віддають частину своєї середньої кінетичної енергії сусіднім молекулам. І навпаки менш нагріті молекули, які мають меншу середню кінетичну енергію, при переході до більш нагрітих частин куба збільшують свою середню кінетичну енергію після зіткнень із молекулами з більшими швидкостями.

У загальному випадку трьохвимірної теплопровідності, коли температура газу (або рідини, або твердого тіла) залежить від трьох координат $T = T(x, y, z)$, переніс енергії у формі теплоти проходить згідно з законом Фур'є (Fourier Jean Baptist Joseph, 22.03.1768 – 16.05.1830 – французький математик, один із фундаторів математичної фізики)

$$\vec{g} = -k grad\, T = -k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k}\right), \qquad (1.1)$$

де $\vec{g}$ - вектор густини потоку тепла, тобто величина, що чисельно дорівнює енергії, яка передається у формі теплоти за одиницю часу через плоску поверхню одиничної площі, розміщену перпендикулярно до напрямку переносу енергії (тобто перпендикулярно до вектора $grad\, T$). Величина k називається коефіцієнтом теплопровідності і чисельно дорівнює модулю теплового потоку, якщо

$$|grad\, T| = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2} = 1. \qquad (1.2)$$

Очевидно, знак "мінус" у формулі (1.1) дає змогу зробити висновок, що вектор $\vec{q}$ має напрямок, який співпадає з напрямком переносу енергії при теплопровідності.

Розглянемо трьохвимірне тіло Ω. Нехай $u(x, y, z, t)$- температура тіла в точці $M(x, y, z)$в момент часу t. Розглянемо елементарний паралелепіпед П в тілі Ω (рис. 1.1) з ребрами $\Delta x, \Delta y, \Delta z,$ паралельними осям координат (зображення тіла ми опускаємо).

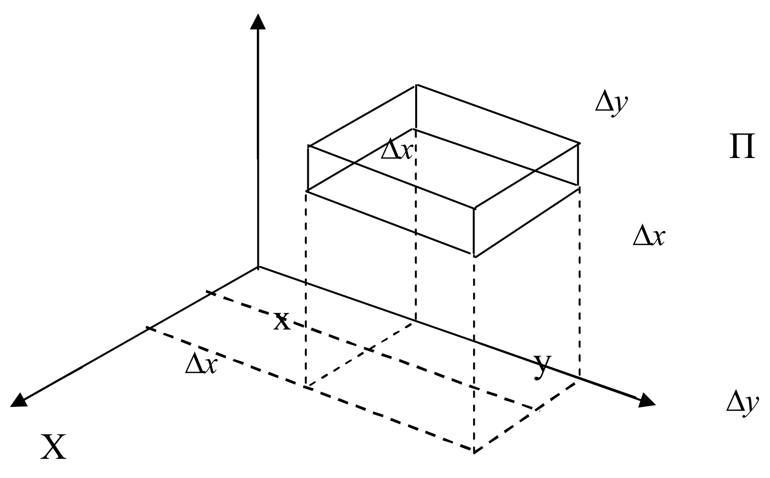

Рис. 1.1.

З досвіду відомо, що швидкість проходження тепла через площу ΔS (тобто кількість тепла, яке проходить за одиницю часу) визначається формулою

$$\Delta Q = \vec{q} \cdot \vec{n} \Delta S = -k(grad\, T, \vec{n})\Delta S, \qquad (1.3)$$

де $\vec{n}$ - вектор нормалі до площі $\Delta S (grad\, T, \vec{n}) = \frac{\partial T}{\partial n}$.

Тому кількість тепла, яке проходить за час Δt через задню грань σ_{1x} паралелепіпеда в напрямку осі Ox.

$$\Delta Q_{1x} = -k \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial x} \Delta y \Delta z \Delta t. \qquad (1.4)$$

Аналогічно кількість тепла, яке проходить через передню грань σ_{2x} паралелепіпеда в напрямку осі Ox,

$$\Delta Q_{2x} = -k \frac{\partial T(x + \Delta x, y, z, t)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta t$$

Тому кількість тепла, яке ввійшло в елементарний паралелепіпед П в напрямку осі Ox через грані σ_{1x} та σ_{2x}.

$$\Delta Q_{1x} - \Delta Q_{2x} = +k\left[\frac{\partial T(x + \Delta x, y, z, t)}{\partial x} - \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial x}\right]\Delta y \Delta z \Delta t = $$
$$= k \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial x^2} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \qquad (1.5)$$

(використали відому рівність $T(x + \Delta x) - T(x) \approx T'(x)\Delta x$).

Загальна кількість тепла, яке ввійшло в паралелепіпед П за час Δt, з моменту t до моменту $t + \Delta t$, дорівнює сумі кількостей тепла, яке ввійшло за час Δt через усі грані паралелепіпеда П:

$$\Delta Q \approx k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \qquad (1.6)$$

Рівність (1.5) буде тим точнішою, чим менші проміжки часу Δt і довжини ребер $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ми розглядаємо.

Ця кількість тепла ΔQ витрачена для нагрівання елементарного паралелепіпеда П, тобто вона повинна дорівнювати величині

$$C\rho \frac{\partial T}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t, \qquad (1.7)$$

яка одержується з відомої формули

$$\Delta Q = C \Delta T \qquad (1.8)$$

де - С- теплоємність речовини тіла Ω, тобто фізична величина, яка чисельно дорівнює відношенню кількості тепла ΔQ, яке передається тілу, до зміни Δt температури тіла;

$C = cM$, де c- питома теплоємність, тобто теплоємність одиниці маси; M - маса тіла.

Прирівнюючи рівності (1.6) і (1.7) і скорочуючи на $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$, одержуємо рівняння нестаціонарної теплопровідності у формі

$$c\rho \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} = k \Delta T(x, y, z, t) \qquad (1.9)$$

Якщо в тілі Ω розміщені джерела тепла, то рівняння (1.9) приймає вигляд:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=k\Delta T+f(x,y,z,t) \tag{1.10}$$

де $f(x,y,z,t)$ - густина джерел тепла в Ω. У рівняннях (1.9), (1.10) вважаємо, що c,ρ,k - сталі. У загальному випадку, коли питома теплоємність $c=c(x,y,z,t)$, густина $\rho=\rho(x,y,z,t)$, коефіцієнт теплопровідності є тензором

$$k=\begin{pmatrix}\lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz}\\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz}\\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz}\end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

Рівняння (1.10) приймає такий вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho cT)=div(\lambda\, grad\, T)+f, \tag{1.12}$$

де

$$div(\lambda\, grad\, T)=div\left(\left(\lambda_{xx}\frac{\partial T}{\partial x}+\lambda_{xy}\frac{\partial T}{\partial y}+\lambda_{xz}\frac{\partial T}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\lambda_{yx}\frac{\partial T}{\partial x}+\lambda_{yy}\frac{\partial T}{\partial y}+\lambda_{yz}\frac{\partial T}{\partial z}\right)\vec{j}+\right.$$
$$\left.+\left(\lambda_{zx}\frac{\partial T}{\partial x}+\lambda_{zy}\frac{\partial T}{\partial y}+\lambda_{zz}\frac{\partial T}{\partial z}\right)\vec{k}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_{xx}\frac{\partial T}{\partial x}+\lambda_{xy}\frac{\partial T}{\partial y}+\lambda_{xz}\frac{\partial T}{\partial z}+\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_{yx}\frac{\partial T}{\partial x}+\lambda_{yy}\frac{\partial T}{\partial y}+\lambda_{yz}\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_{zx}\frac{\partial T}{\partial x}+\lambda_{zy}\frac{\partial T}{\partial y}+\lambda_{zz}\frac{\partial T}{\partial z}\right).$$

У даному посібнику ми будемо користуватися рівнянням (1.10), яке часто записують у формі

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a^2\Delta T+F(x,y,z,t); \tag{1.13}$$
$$a^2=\frac{k}{c\rho};\qquad F=\frac{f}{(c\rho)}.$$

Це рівняння у випадку, коли розповсюдження тепла не залежить від змінної z (або відповідно від змінних y,z) приймає вигляд:

$$\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+F(x,y,t)$$

або відповідно

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+F(x,t)$$

Зауважимо, що у випадку, коли $\frac{\partial T}{\partial t}=0$, то рівняння (1.13) перетворюється в рівняння Пуассона:

$$\Delta T=-\frac{f}{a^2}.$$

1.3. Граничні та початкові умови

Рівняння теплопровідності має нескінченне число розв'язків. Для знаходження конкретного розв'язку треба накласти на функцію T додаткові умови. Найпоширеніші такі умови:

$$T(x,y,z,t)\big|_{t=0}=\varphi(x,y,z)\qquad \forall(x,y,z)\in\Omega \tag{1.14}$$
$$T(x,y,z,t)=\psi(x,y,z,t)\qquad \forall(x,y,z)\in\partial\Omega \tag{1.15}$$

де $\partial\Omega$ - границі області Ω; функції φ та ψ вважаються відомими. Умова (1.14) називається початковою, а (1.15) – граничною умовою (вірніше, граничною умовою Діріхле або граничною умовою першого роду). На практиці зустрічаються також і граничні умови більш загального вигляду. Гранична умова другого роду (умова Неймана).

$$k\frac{\partial T}{\partial \upsilon}\Big|_{\partial\Omega} = q\Big|_{\partial\Omega},$$

де υ - напрям зовнішньої нормалі до поверхні $\partial\Omega$; k - коефіцієнт теплопровідності тіла;
$q = q(x, y, z, t)$ - тепловий потік; функції k і q вважаються відомими. Зокрема, якщо потік $q = 0$, умова

$$\frac{\partial T}{\partial \upsilon}\bigg|_{\partial\Omega} = 0$$

називається умовою теплоізоляції;

гранична умова третього роду (або умова конвективного теплообміну) має вигляд:

$$k\frac{\partial T}{\partial \upsilon}\bigg|_{\partial\Omega} = -\alpha\left(u - u_{\tilde{n}\mathring{a}\eth}\right)_{\partial\Omega},$$

де α - коефіцієнт теплообміну; $u_{\tilde{n}\mathring{a}\eth}$ - температура зовнішнього середовища. Ця умова відповідає теплообміну тіла з навколишнім середовищем згідно з законом Ньютона: потік тепла через границю тіла є пропорціональним різниці температур тіла і навколишнього середовища:

$$Q = \alpha\left(u - u_{\tilde{n}\mathring{a}\eth}\right).$$

1.4. Класифікація лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку

Лінійні диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку (рівняння математичної фізики) мають вигляд:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\vec{x})\frac{\partial^2 u(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(\vec{x})\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_j} + c(\vec{x})u(\vec{x}) + d(\vec{x}) = 0, \tag{1.16}$$

де функції $a_{ij}(\vec{x}), b_j(\vec{x}), c(\vec{x}), d(\vec{x})$ - відомі функції n змінних;
$u(\vec{x}),\ \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ - невідома двічі диференційована функція (відносно неї записано рівняння) n змінних. На практиці найбільш важливими є рівняння еліптичного, параболічного та гіперболічного типу. Розглянемо приклади.

1. Рівняння Лапласа (рівняння еліптичного типу)

$$\Delta u(x, y, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Воно описує:

1) стаціонарне теплове поле ($u(x, y, z)$ - температура поля в точці $\vec{x} = (x, y, z)$);
2) стаціонарне електричне та магнітне поля (u - потенціал поля);

3) рух рідини в трубі, каналі ($u(x,y,z)$ - швидкість руху рідини в точці $\vec{x}(x,y,z)$);
4) стаціонарну дифузію ($u(\vec{x})$ - концентрація речовини);
5) стаціонарний масопереніс ($u(\vec{x})$ - концентрація речовини в точці $\vec{x}=(x,y,z)$.

2. Рівняння коливання струни або хвильове рівняння (рівняння гіперболічного типу)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u; \qquad u=u(x,y,z,t).$$

Воно описує, якщо $u=u(x,t)$:

1) поперечні малі коливання струни (u - прогин струни);
2) повздовжні коливання пружного стержня (u - зміщення точки, яка мала при рівновазі абсцису x в момент t);
3) електричні коливання в дроті (наслідок телеграфних рівнянь), u - напруженість електричного поля;
4) $u(x,t)$ - кут закручування;
5) коливання газу; u - потенціал швидкостей $\vec{v}$ газу $\vec{v}=-grad\, u(x,y,z,t)$.

3. Рівняння нестаціонарної теплопровідності (рівняння параболічного типу)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u; \qquad u=u(x,y,z,t).$$

Воно описує:

1) розповсюдження тепла ($u(\vec{x},t)$ - температура в точці $\vec{x}=(x,y,z)$ в момент часу t);
2) масопереніс в рідині ($u(\vec{x},t)$ - концентрація речовини в точці $\vec{x}=(x,y,z)$ в момент часу t);
3) фільтрацію рідини та газу в пористому середовищі рідині ($u(\vec{x},t)$ - концентрація речовини в точці $\vec{x}$ в момент t).

Розділ 2. СТАЦІОНАРНИЙ РОЗПОДІЛ ТЕПЛА

2.1. Стаціонарний розподіл тепла в стержні довжини l

Математична постановка задачі: знайти функцію $u=u(x)$, яка задовольняє рівняння стаціонарної теплопровідності

$$u''(x)=f(x), \qquad 0<x<l \tag{2.1}$$

при умовах

$$u(0)=u_0, \qquad u(l)=u \tag{2.2}$$

або при умовах, коли стержень має конвективний обмін із зовнішнім середовищем

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha\left(u-u_c\right)\right]\Bigg|_{x=0}=0,\ \left[\frac{\partial u}{\partial x}-\alpha\left(u-u_c\right)\right]\Bigg|_{x=l}=0. \tag{2.3}$$

Розв’язок. Загальний розв’язок рівняння (2.1) має вигляд:

$$u(x)=c_0+c_1x+\int_0^x\left(\int_0^\xi f(t)dt\right)d\xi, \tag{2.4}$$

де c_0 і c_1 - довільні сталі.

Тому у випадку граничних умов (2.2) для знаходження c_0 і c_1 одержимо систему:

$$\begin{cases} c_0+c_1\cdot 0+\int\limits_0^0\left(\int\limits_0^\xi f(t)dt\right)d\xi=u_0 \\ c_0+c_1l+\int\limits_0^l\left(\int\limits_0^\xi f(t)dt\right)d\xi=u_1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} c_0=u_0 \\ c_1=\dfrac{u_1-u_0}{l} \end{cases}$$

Таким чином, у випадку граничних умов (2.2) розв’язок рівняння (2.1) має вигляд:

$$u(x)=u_0+\left(u_1-u_0\right)\frac{x}{l}+\int_0^x\left(\int_0^\xi f(t)dt\right)d\xi \tag{2.5}$$

У випадку граничних умов (2.3) для знаходження c_0 і c_1 одержимо систему:

$$\begin{cases} c_1+\alpha\left(c_0-u_c\right)=0 \\ c_1+\int\limits_0^l f(t)dt-\alpha\left[c_0+c_1l+\int\limits_0^l\left(\int\limits_0^\xi f(t)dt\right)d\xi-u_c\right]=0 \end{cases}$$

З цієї системи маємо (при умові $\alpha l\neq 2$):

$$c_1=\frac{1}{2-\alpha l}\left[\alpha\int_0^l\left(\int_0^\xi f(t)dt\right)d\xi-\int_0^l f(t)dt\right]$$

$$c_0=u_c-\frac{1}{\alpha(2-\alpha l)}\left[\alpha\int_0^l\left(\int_0^\xi f(t)dt\right)d\xi-\int_0^l f(t)dt\right].$$

Таким чином, у випадку граничних умов (2.3) розв’язок рівняння (2.1) має вигляд:

$$u(x)=u_c-\frac{1}{\alpha(2-\alpha l)}\left[\alpha\int_0^l\left(\int_0^\xi f(t)dt\right)d\xi-\int_0^l f(t)dt\right]+$$
$$+\frac{x}{2-\alpha l}\left[\alpha\int_0^l\left(\int_0^\xi f(t)dt\right)d\xi-\int_0^l f(t)dt\right]+\int_0^x\left(\int_0^\xi f(t)dt\right)d\xi. \tag{2.6}$$

2.2. Стаціонарний розподіл тепла в циліндрі з постійними значеннями температури на внутрішній і зовнішній поверхнях

Математична постановка задачі: знайти $u(x,y,z)$, якщо

$$\Delta u(x,y,z)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\ \left(R_1^2<x^2+y^2<R_2^2;\quad z\in R\right) \tag{2.7}$$

$$u\big|_{x^2+y^2=R^2}=u_1;\qquad u\big|_{x^2+y^2=R_2^2}=u_2. \tag{2.8}$$

Перейдемо до циліндричних координат (r,φ,z):

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=z;\qquad r=\sqrt{x^2+y^2},\qquad tg\,\varphi=\frac{y}{x}.$$

Покладемо $u(x,y,z)=w(r,\varphi,z)$, тоді (див. підрозд. 4.4.)

$$\Delta u=\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0 \tag{2.9}$$

$$w(R_1,\varphi,z)=u_1,\qquad w(R_2,\varphi,z)=u_2. \tag{2.10}$$

З рівняння (2.9) і граничних умов (2.10) витікає, що розподіл температури w не залежить від φ і z: $w(r,\varphi,z)=\overline{w}(r)$. Тому задача зводиться до знаходження функції $\overline{w}(r)$, яка задовольняє умови:

$$\overline{w}''(r)+\frac{1}{r}\overline{w}'(r)=0 \tag{2.11}$$

$$\overline{w}(R_1)=u_1,\qquad \overline{w}(R_2)=u_2 \tag{2.12}$$

Перепишемо рівняння (2.11) у вигляді $\frac{1}{r}(rw')'_r=0.$ Звідси видно, що $r\overline{w}'=c_1,\quad c_1=const$ або

$$\frac{d\overline{w}(r)}{dr}=\frac{c_1}{r}\Rightarrow \overline{w}(r)=c_1\ln r+c_2 \tag{2.13}$$

Знаходимо c_1 і c_2 з граничних умов:

$$\begin{aligned}\overline{w}(R_1)=u_1&\Rightarrow\\ \overline{w}(R_2)=u_2&\Rightarrow\end{aligned}\begin{cases}c_1\ln R_1+c_2=u_1\\ c_1\ln R_2+c_2=u_2\end{cases}.$$

Розв’язуючи цю систему рівнянь, знаходимо c_1 і c_2:

$$c_1=\frac{\begin{vmatrix}u_1 & 1\\ u_2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\ln R_1 & 1\\ \ln R_2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{u_1-u_2}{\ln\frac{R_1}{R_2}};\qquad c_2=\frac{\begin{vmatrix}\ln R_1 & u_1\\ \ln R_2 & u_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\ln R_1 & 1\\ \ln R_1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{u_2\ln R_1-u_1\ln R_2}{\ln\frac{R_1}{R_2}}.$$

Тому шуканий розподіл температури матиме вигляд:

$$\overline{w}(r)=\frac{u_1-u_2}{\ln\frac{R_1}{R_2}}\ln r+\frac{u_2\ln R_1-u_1\ln R_2}{\ln\frac{R_1}{R_2}},$$

або

$$\overline{w}(r)=\frac{u_2\ln\frac{r}{R_1}-u_1\ln\frac{r}{R_2}}{\ln\frac{R_2}{R_1}}. \tag{2.14}$$

Це і є розподіл температури в циліндрі з внутрішнім R_1 і зовнішнім R_2 радіусами.

Зауваження. Фактично формула (2.14) дає розв’язок такої задачі: знайти $u(x,y,z)$, яка задовольняє умови:

$$\Delta u = 0; \quad \left(R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2;\ 0 < z < H\right) \tag{2.15}$$

$$u\big|_{x^2+y^2=R_1^2} = u_1; \qquad u\big|_{x^2+y^2=R_2^2} = u_2;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=H} = 0; \qquad \forall H \in R, \tag{2.16}$$

бо $u(x, y, z) = u(r)$, тобто не залежить від z, φ.

2.3. Стаціонарний розподіл тепла в круговій шайбі

(задача Діріхле для круга)

Нехай кругова шайба радіуса R з центром в точці O(0,0) лежить на площині OXY і має на своїй границі (тобто на колі $r = R$) заданий розподіл тепла $f(\varphi)$, де φ - полярний кут; r - полярний радіус. Знайти розподіл температури у внутрішніх точках шайби, вважаючи, що нижня і верхня поверхні шайби теплоізольовані.

У декартовій системі координат задача ставиться так: знайти функцію $u(x, y)$, якщо

$$\Delta u(x, y) = u''_{xx} + u''_{yy} = 0 \qquad (x, y) \in \Omega = \left\{0 \le x^2 + y^2 < R^2\right\} \tag{2.17}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = u\big|_{x^2+y^2=R^2} = f(\varphi) \qquad (0 \le \varphi < 2\pi) \tag{2.18}$$

Переходячи до полярних координат r, φ, одержимо таку задачу: знайти функцію $w(r, \varphi)$, якщо

$$w''_{rr} + \frac{1}{r} w'_r + \frac{1}{r^2} w''_{\varphi\varphi} = 0 \qquad (0 \le r < R,\ 0 \le \varphi < 2\pi) \tag{2.19}$$

$$w(R, \varphi) = f(\varphi) \qquad (0 \le \varphi < 2\pi) \tag{2.20}$$

Розв'язок. Будемо шукати розв'язок цієї задачі методом розділу змінних у вигляді:

$$w(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \tag{2.21}$$

Підставляючи цей вираз у рівняння (2.19), помножене на r^2, одержимо:

$$r^2 R''\Phi + rR'\Phi + R\Phi'' = 0.$$

Поділимо обидві частини цього рівняння на $R\Phi$:

$$\frac{r^2 R'' + rR'}{R} + \frac{\Phi''}{\Phi} = 0$$

або

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\lambda^2, \qquad \lambda - const. \tag{2.22}$$

Тут функція $\dfrac{\Phi''}{\Phi}$ не залежить від r, а функція $\dfrac{r^2 R'' + rR'}{R}$ від φ. Тобто кожна з цих функцій є сталою, яку ми позначимо $-\lambda^2$. Таким чином, рівність (2.22) дає рівняння:

$$\Phi''(\varphi) + \lambda^2 \Phi(\varphi) = 0 \tag{2.23}$$

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda^2 R(r) = 0 \tag{2.24}$$

Загальний розв'язок рівняння (2.23) має вигляд:

$$\Phi(\varphi) = c_1 \cos\lambda\varphi + c_2 \sin\lambda\varphi \tag{2.25}$$

Розв'язок рівняння (2.24) будемо шукати у вигляді $R(r)=r^m$, де m - невідоме поки що число. Підставляючи цей вираз у рівняння (2.24) ($R'(r)=mr^{m-1}$, $R''(r)=m(m-1)r^{m-2}$), одержимо:

$$r^2m(m-1)r^{m-2}+r\cdot m\cdot r^{m-1}-\lambda^2r^m=0 \qquad (2.26)$$

або

$$r^m\left[m(m-1)+m-\lambda^2\right]=0 \qquad (2.27)$$

Звідси витікає, що $m^2=\lambda^2$, тобто $m=\lambda$, $m=-\lambda$.

Таким чином, загальний розв'язок рівняння (2.24) можна представити у вигляді:

$$R(r)=D_1r^{\lambda}+D_2r^{-\lambda} \qquad (2.28)$$

Тобто функція

$$u_{\lambda}(r,\varphi)=\left[c_1\cos\lambda\kappa+c_2\sin\lambda\varphi\right]\left[D_1r^{\lambda}+D_2r^{-\lambda}\right] \qquad (2.29)$$

є розв'язком рівняння (2.19)

Шукаємо розв'язок , який повинен бути обмежений в центрі круга,

$$|u(0,\varphi)|<M,\quad M=const,\quad 0\le\varphi<2\pi\ .$$

Тому $D_2=0$ і сума

$$w(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left(A_{\lambda}\cos\lambda\ \varphi+B_{\lambda}\sin\lambda\varphi\right)r^{\lambda} \qquad (2.30)$$

задовольняє рівняння (2.19) для довільних $A_0, A_{\lambda}, B_{\lambda}, \lambda\in N$, бо

$$w(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}\Rightarrow\Delta w(r,\varphi)=0\ .$$

З граничної умови (2.20) одержимо:

$$w(R,\varphi)=f(\varphi)\Rightarrow\frac{A_0}{2}+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left(A_{\lambda}\cos\lambda\varphi+B_{\lambda}\sin\lambda\varphi\right)R^{\lambda}=f(\varphi).$$

Звідси витікає, що A_0, A_{λ}, B_{λ} - коефіцієнти ряду Фур'є функції $f(\varphi)$:

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi,\qquad A_{\lambda}=\frac{1}{R^{\lambda}\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos\lambda\varphi\,d\varphi,\qquad \mathbf{B}_{\lambda}=\frac{1}{R^{\lambda}\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin\lambda\ \varphi\,d\varphi,\ \lambda\in N$$

Підставляючи ці формули у рівність (2.30), одержимо розв'язок задачі (2.19), (2.20) у вигляді:

$$w(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi\right)\left(\frac{r}{R}\right)^k, \qquad (2.31)$$

де

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos k\varphi\,d\varphi,\qquad b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin k\varphi\ d\varphi.$$

2.4. Стаціонарний розподіл тепла у напівплощині

Нехай на осі OX задано розподіл температури $u(x,y)$:

$$u(x,0)=\varphi\ (x)\qquad(-\infty<x<\infty) \qquad (2.32)$$

Треба знайти розподіл температури $u(x,y)$ у кожній точці (x,y) верхньої частини площини OXY. Математична постановка задачі: треба знайти функцію $u(x,y)$, якщо вона задовольняє умову (2.32) і рівняння

$$\Delta u(x,y) \equiv u''_{xx} + u''_{yy} = 0 \qquad (-\infty < x < +\infty, \quad y > 0) \tag{2.33}$$

Розв'язок. Безпосередньою перевіркою можна впевнитися в тому, що функція

$$u_\lambda(x,y) = [C(\lambda)\cos\lambda x + D(\lambda)\sin\lambda x]\exp(-\lambda y) \tag{2.34}$$

Задовольняє рівняння (2.33) $\forall \lambda \geq 0$. Тоді сума таких функцій та інтеграл від такої функції (по змінній λ)

$$u(x,y) = \int_0^\infty [C(\lambda)\cos\lambda x + D(\lambda)\sin\lambda x] e^{-\lambda y} d\lambda \ , \tag{2.35}$$

Якщо (2.35) існує, будуть задовольняти рівняння (2.33). Знайдемо $C(\lambda)$, $D(\lambda)$ з граничної умови (2.32):

$$u(x,0) = \varphi(x) \Rightarrow \int_0^\infty [c(\lambda)\cos\lambda x + D(\lambda)\sin\lambda x] d\lambda = \varphi(x), \quad x \in R \tag{2.36}$$

Згадаємо представлення функції $\varphi(x)$ з допомогою інтегралу Фур'є:

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \left[\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \varphi(\xi)\cos\lambda\xi \ \ \xi \right)\cos\lambda x + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \varphi(\xi)\sin\lambda\xi \, d\xi \right)\sin\lambda x \right] d\lambda \tag{2.37}$$

Порівнюючи формули (2.36) та (2.37), можна зробити висновок, що для того, щоб функція (2.35) задовольняла граничній умові (2.32), повинні виконуватись рівності

$$c(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \varphi(\xi)\cos\lambda\xi \, d\xi; \quad D(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \varphi(\xi)\sin\lambda\xi \, d\xi \tag{2.38}$$

Підставляючи ці формули у (2.35), одержимо:

$$u(x,y) = \int_0^\infty \left\{ \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi(\xi)\cos\lambda\xi \, d\xi \right)\cos\lambda x + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \varphi(\xi)\sin\lambda\xi \, d\xi \right)\sin\lambda x \right\} e^{-\lambda y} d\lambda \tag{2.39}$$

Формулу (2.39) можна переписати у вигляді:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \int_{-\infty}^\infty \varphi(\xi)\cos\lambda(\xi - x) d\xi \right\} e^{-\lambda y} d\lambda = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \varphi(\xi) \left[\int_0^\infty \cos\lambda(\xi - x) e^{-\lambda y} d\lambda \right] d\xi, \end{aligned} \tag{2.40}$$

Внутрішній інтеграл можна записати у вигляді:

$$\int_0^\infty \cos\lambda(\xi - x) e^{-\lambda y} d\lambda = \frac{y}{(\xi - x)^2 + y^2}, \tag{2.41}$$

бо

$$\int_0^\infty \cos\lambda s e^{-\lambda y} d\lambda = \frac{y}{s^2 + y^2} (y > 0).$$

Таким чином, ми одержали формулу

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \varphi(\xi) \frac{y}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi \tag{2.42}$$

яка і дає розв'язок задачі (2.32), (2.33).

Зауваження. Безпосередньо у формулу (2.40) підставляти значення $y = 0$ не можна. Гранична рівність (2.42) має бути встановлена тільки з допомогою граничного переходу.

$$\lim_{y \to 0+0} u(x, y) = \varphi(x).$$

Розділ 3. НЕСТАЦІОНАРНИЙ РОЗПОДІЛ ТЕПЛА В СТЕРЖНІ

3.1. Розповсюдження тепла в нескінченному стержні

Будемо розглядати задачу Коші для рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in R, \quad t > 0 \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in R \tag{3.2}$$

Цій задачі відповідає задача про розподіл температури в нескінченному стержні при умові, що в момент часу $t = 0$ цей розподіл відомий (до такої задачі зводиться задача для стержня такої довжини, при якій температура у внутрішніх точках стержня такої довжини, при якій температура у внутрішніх точках стержня мало залежить від умов на кінцях стержня у всі моменти часу $t > 0$).

Застосуємо метод розділу змінних, тобто будемо шукати розв'язок у вигляді:

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{3.3}$$

Підставляючи цю формулу в рівняння (3.1), одержуємо:

$$XT' = a^2 X'' T$$

або

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 \tag{3.4}$$

Тобто

$$T'(t) + a^2 \lambda^2 (t) = 0 \tag{3.5}$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \tag{3.6}$$

Розв'язуючи ці рівняння, одержуємо:

$$T(t) = c \exp\left(-a^2 \lambda^2 t\right), \qquad c = const \tag{3.7}$$

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x; \qquad c_1, c_2 - const. \tag{3.8}$$

В результаті формулу (3.3) можна записати у вигляді:

$$u_\lambda(x,t) = [c(\lambda)\cos \lambda x + D(\lambda)\sin \lambda x] e^{-a^2 \lambda^2 t}, \tag{3.9}$$

де використані позначення: $cc_1 = c(\lambda)$, $cc_2 = D(\lambda)$.

Легко перевірити, що функція $u_\lambda(x,t)$ задовольняє рівняння (3.1) $\forall \lambda \in [0, +\infty)$. Тому сума таких функцій

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} u_\lambda(x,t)$$

і навіть інтеграл

$$u(x,t) = \int_0^\infty u_\lambda(x,t) d\lambda = \int_0^\infty e^{-a^2 \lambda^2 t} [c(\lambda)\cos \lambda x + D(\lambda)\sin \lambda x] d\lambda \tag{3.10}$$

будуть задовольняти рівняння (3.1). Звичайно, функції $c(\lambda)$ й $D(\lambda)$, повинні досить швидко спадати на нескінченності, щоб інтеграл (невласний) (3.10) існував, навіть, якщо формулу (3.10) продиференціювати по t або вдвічі по x.

Таким чином, якщо $u(x,t)$ - розв'язок задачі Коші (3.1), (3.2), то повинна виконуватись умова

$$u(x,0)=\varphi(x)\Rightarrow\int_0^{\infty}[c(\lambda)\cos\lambda x+D(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda=\varphi(x);\quad x\in R. \tag{3.11}$$

Щоб із рівності (3.11) знайти невідомі функції $c(\lambda)$ й $D(\lambda)$, згадаємо розклад функції $\varphi(x)$ в інтеграл Фур'є

$$\varphi(x)=\int_0^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi\right)\cos\lambda x+\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi\right)\sin\lambda x\right]d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda(\xi-x)d\xi\right]d\lambda\,. \tag{3.12}$$

З рівностей (3.11) та (3.12) витікає, що

$$c(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi;\quad D(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\,\xi\,d\,\xi. \tag{3.13}$$

Тобто розв'язок задачі (3.1), (3.2) має вигляд:

$$u(x,t)=\int_0^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi\right)\cos\lambda x+\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi\right)\sin\lambda x\right]e^{-a^2\lambda^2t}d\lambda \tag{3.14}$$

або

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda(\xi-x)d\xi\right]e^{-a^2\lambda^2t}d\lambda \tag{3.15}$$

Перепишемо формулу (3.15) у вигляді:

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\left[\int_0^{\infty}e^{-a^2\lambda^2t}\cos\lambda(\xi-x)d\lambda\right]d\xi=\left|\begin{matrix}a^2\lambda^2t=\beta^2\\ \lambda=\dfrac{\beta}{a\sqrt{t}};\ d\lambda=\dfrac{d\beta}{a\sqrt{t}};\quad \xi-x=z;\quad d\xi=dz\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+z)\left[\int_0^{\infty}e^{-\beta^2}\cos\frac{\beta z}{a\sqrt{t}}\frac{d\beta}{a\sqrt{t}}\right]dz=\frac{1}{\pi a\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+z)\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{z^2}{4a^2t}}\right]dz=$$

$$=\left|\begin{matrix}\dfrac{z^2}{4a^2t}=\beta^2; & \begin{matrix}z=2a\sqrt{t}\beta\\ dz=2a\sqrt{t}\,d\beta\end{matrix}\end{matrix}\right|=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(x+2a\sqrt{t}\,\beta\right)e^{-\beta^2}d\beta.$$

Цей розв'язок задачі (3.1), (3.2) можна записати також у формі

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}\right]d\xi \tag{3.16}$$

Вище ми використали формулу

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta^2} \cos\frac{\beta z}{a\sqrt{t}}\, d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(-\frac{z^2}{4a^2t}\right). \qquad (3.17)$$

Доведемо її. Введемо позначення $k(\eta) = \int_0^{\infty} e^{-\beta^2}\cos\beta\,\eta\, d\beta; \quad \eta = \frac{z}{a\sqrt{t}}$.

Враховуючи що, $k(0) = \int_0^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, диференціюючи, одержуємо:

$$k'(\eta) = -\int_0^{\infty} e^{-\beta^2}\beta\sin\beta\,\eta\, d\beta = \begin{vmatrix} u = \sin\beta\,\eta, & du = \eta\cos\beta\,\eta\, d\beta \\ dv = e^{-\beta^2}, & v = -\frac{1}{2}e^{-\beta^2} \end{vmatrix} =$$

$$= -\left[-\frac{\sin\beta\,\eta}{2} e^{-\beta^2}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\eta\int_0^{\infty} e^{-\beta^2}\cos\beta\,\eta \right] = -\frac{1}{2}\eta\, k(\eta);$$

$$\sin\frac{\beta\,\eta}{2} e^{-\beta^2}\Big|_0^{+\infty} = 0.$$

Тобто нам треба розв’язати задачу Коші для звичайного диференціального рівняння:

$$k'(\eta) = -\frac{1}{2}\eta\, k(\eta), \quad k(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \quad \frac{dk}{k} = -\frac{1}{2}\eta\, d\eta \;\Rightarrow \quad \ln k = -\frac{\eta^2}{4} + \ln c \Rightarrow \quad k(\eta) = ce^{-\frac{\eta^2}{4}}$$

$$k(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \quad c = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \quad k(\eta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\eta^2}{4}}$$

$$k(\eta) = k\left(\frac{z}{a\sqrt{t}}\right) = k\left(\frac{\xi - x}{a\sqrt{t}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2t}\right].$$

Формула (3.17) доведена.

Зауваження. При доведенні ми одержали також іншу формулу:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi\, t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2t}\right] d\xi \,,$$

яка часто зустрічається в підручниках.

3.2. Розповсюдження тепла в стержні довжини l, якщо його кінці не пропускають тепла

Математична постановка задачі: знайти $u(x,t)$, яка задовольняє рівняння

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad (0 < x < l, \quad t > 0); \qquad (3.18)$$

граничні умови

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0 \qquad (3.19)$$

і початкову умову

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad (0 < x < l). \qquad (3.20)$$

Розв’язок цієї задачі знаходимо методом Фур’є (розділу змінних) у вигляді:

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty} C_k \exp\left[-a^2\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 t\right]\cos\frac{k\pi x}{l}, \qquad (3.21)$$

де сталі C_k визначаються формулами

$$C_0=\frac{1}{l}\int_0^l \varphi(\xi)d\xi, \quad C_k=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}d\xi, \quad k\in N. \qquad (3.22)$$

3.3. Розподіл тепла в стержні довжини l, якщо один кінець має теплову ізоляцію, а на другому задана постійна температура

Ця задача полягає в знаходженні функції $u(x,t)$ із властивостями:

$$u'_t=a^2u''_{xx} \quad (0<x<l,\ \ t>0) \qquad (3.23)$$

$$u'_x(0,t)=0, \quad u(l,t)=u_l \qquad (3.24)$$

$$u(x,0)=\varphi(x) \quad (0<x<l) \qquad (3.25)$$

Для її розв'язання спочатку знайдемо $v(x,t)$, якщо

$$v'_t=a^2V''_{xx} \quad (0<x<l,\ t>0) \qquad (3.26)$$

$$v'_x(0,t)=0, \quad u(l,t)=0 \qquad (3.27)$$

$$v(x,o)=\varphi(x) \quad (0<x<l) \qquad (3.28)$$

Задача (3.26)-(3.28) розв'язується методом розділу змінних:

$$v(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k \exp\left[-a^2\lambda_k^2 t\right]\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2l} \qquad (3.29)$$

$$\lambda_k=\frac{(2k+1)\pi}{2l}, \quad k\in\mathring{N} \qquad (3.30)$$

$$C_k=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\cos\frac{(2k+1)\pi\xi}{2l}d\xi\ ; \quad k\in\mathring{N} \qquad (3.31)$$

Формули (3.29)-(3.31) дають розв'язок задачі (3.26)-(3.28).
Розв'язок задачі (3.23)-(3.25) шукаємо у вигляді:

$$u(x,t)=v(x,t)+\beta_0+\beta_1 x$$

і вибираємо сталі β_0, β_1 з умов (3.24)

$u'_x\big|_{x=0}=0 \ \Rightarrow\ v'_x\big|_{x=0}+\beta_1=0 \ \Rightarrow\ \beta_1=0$

$u\big|_{x=l}=u_l \ \Rightarrow\ \beta_0+\beta_1=u_l \ \Rightarrow\ \beta_0=u_l$.

Тобто задача має такий розв'язок: $\lambda_k=\dfrac{(2k+1)\pi}{2l}$;

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-a^2\lambda_k^2 t}\cos\lambda_k x+u_e; \qquad C_k=\frac{2}{l}\int_0^l[\varphi(\xi)-u_l]\cos\lambda_k\xi\,d\xi \qquad (3.32)$$

Аналогічно знаходиться розв'язок задачі і для неоднорідних умов вигляду:

$$u\big|_{x=0}=u_0; \qquad u'_x\big|_{x=l}=0.$$

3.4. Неоднорідне рівняння теплопровідності з неоднорідними початковими та однорідними граничними умовами

Математична постановка задачі: знайти $u(x,t)$

$$u'_t(x,t)=a^2u''_{xx}(x,t)+\frac{1}{c\rho}F(x,t); \qquad (0<x<l, \quad t>0) \tag{3.33}$$

$$u(x,0)=\varphi(x); \qquad (0<x<l) \tag{3.34}$$

$$u(0,t)=0; \quad u(l,t)=0 \qquad (t>0) \tag{3.35}$$

Розв'язок цієї задачі шукаємо у вигляді ряду Фур'є, який задовольняє умови (3.35)

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k(t)\sin\frac{k\pi\,x}{l} \tag{3.36}$$

Розкладемо функцію $F(x,t)$ у ряд Фур'є

$$F(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}F_k(t)\sin\frac{k\pi\,x}{l}; \tag{3.36}$$

$$F_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l F(\xi,t)\sin\frac{k\pi\,\xi}{l}\,d\xi, \quad k\in N \tag{3.38}$$

Підставляючи (3.36), (3.37), в (3.33), одержуємо: $\left(C_k(t)=\frac{d_{C_k}}{dt}\right)$.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[C_k(t)+a^2C_k(t)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2-\frac{1}{c\rho}F_k(t)\right]\sin\frac{k\pi\,x}{l}=0. \tag{3.39}$$

Ця сума повинна дорівнювати нулю $\forall x\in(0,l)$. Тому всі коефіцієнти при $\sin\frac{k\pi\,x}{l}$ дорівнюють нулю $(k=1,2,\ldots)$.

$$C_k(t)+\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2C_k(t)-\frac{1}{c\rho}F_k(t)=0, \qquad C_k(0)=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{k\pi\,\xi}{l}\,d\xi \tag{3.40}$$

Значення для $C_k(0)$ одержані з рівності $u(x,0)=\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k(0)\sin\frac{k\pi\,x}{l}$.

Розв'язуючи ці задачі, одержуємо:

$$C_k(t)=C_k(0)\exp\left(-\lambda_k^2\,t\right)+\int_0^t\exp\left(-\lambda_k^2(t-\tau)\right)F_k(\tau)d\tau, \qquad \lambda_k^2=\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 \tag{3.41}$$

Підставляючи ці формули у ряд (3.36), одержуємо $u(x,t)$.

Зауваження. Тут використано відомий метод розв'язку рівняння:

$y''(t)+ky(t)-f(t)=0, \qquad y(0)=y_0 \quad\Rightarrow\quad y=uv \quad\Rightarrow\quad u'v+uv'+kuv-f=0$

$v'+kv=0 \quad\Rightarrow\quad v=e^{-kt}f(t) \quad\Rightarrow\quad u=\int_0^t e^{k\tau}f(\tau)d\tau+C_1$

$y=e^{-kt}\left[\int_0^t e^{k\tau}f(\tau)d\tau+C_1\right]$

$y(0)=y_0 \quad\Rightarrow\quad C_1=y_0.$

3.5. Загальна задача теплопровідності для стержня довжини l

Нехай на кінцях стержня довжини l задано закон зміни температури. Крім того, відомі закон розподілу температури вздовж стержня в початковий момент часу, закон розподілу густини джерел тепла. Треба знайти закон розподілу температури в точках $x \in (0,l)$, $t > 0$.

Математична постановка цієї задачі зводиться до розв'язання диференціального рівняння нестаціонарної теплопровідності

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{c\rho} F(x,t) \qquad (0 < x < l, \quad t < 0) \tag{3.42}$$

при граничних умовах

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u(l,t) = \mu_2(t) \tag{3.43}$$

і початковій умові

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad (0 < x < l) \tag{3.44}$$

Розв'язок. Замість невідомої функції $u(x,t)$ введемо функцію $v(x,t)$ за такою рівністю:

$$u(x,t) = v(x,t) + \mu_1(t) + \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)] \tag{3.45}$$

Підставляючи у формулу (3.45) $x = 0$, враховуючи першу умову (3.43), одержуємо

$$u(0,t) = \mu_1(t) \Rightarrow \mu_1(t) = v(0,t) + \mu_1(t) \Rightarrow v(0,t) = 0. \tag{3.46}$$

Підставляючи $x = l$ у формулу (3.45), одержуємо:

$$u(l,t) = \mu_2(t) \Rightarrow \mu_2(t) = v(l,t) + \mu_1(t) + \frac{l}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)] \Rightarrow v(l,t) = 0. \tag{3.47}$$

Далі, підставляючи $t = 0$ у формулу (3.45) і враховуючи початкову умову (3.44), одержуємо:

$$\begin{gathered} u(x,0) = \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) = v(x,0) + \mu_1(0) - \frac{x}{l}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] \Rightarrow \\ \Rightarrow v(x,0) = \vec{\varphi}(x),\ \vec{\varphi}(x) = \varphi(x) - \mu_1(0) - \frac{x}{l}[\mu_2(0) - \mu_1(0)]. \end{gathered} \tag{3.48}$$

Якщо підставимо формулу (3.45) у диференціальне рівняння (3.42), то одержимо:

$$x'_t(x,t) + \mu_1(t) + \frac{x}{l}[\mu'_2(t) - \mu'_1(t)] = a^2 v''_{xx}(x,t) + \frac{1}{c\rho} F(x,t).$$

Це рівняння можна переписати у вигляді:

$$\begin{gathered} v'_t(x,t) = a^2 v''_{xx}(x,t) + \vec{F}(x,t); \\ \vec{F}(x,t) = \frac{1}{c\rho} F(x,t) - \mu'_1(t) - \frac{x}{l}[\mu'_2(t) - \mu'_1(t)]. \end{gathered} \tag{3.49}$$

Таким чином, для знаходження невідомої функції $v(x,t)$ треба розв'язати диференціальне рівняння (3.49) при $0 < x < l$, $t > 0$ і при таких умовах:

граничних

$$v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0 \tag{3.50}$$

і початкових

$$v(x,0) = \vec{\varphi}(x), \quad (0 < x < l) \tag{3.51}$$

Таку задачу ми вже розв’язували в підрозд. 3.5. Знайшовши функцію $v(x,t)$ викладеним методом, одержимо функцію $u(x,t)$ у вигляді формули (3.45).

3.6. Розподіл температури в напівнескіченному стержні з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо на кінці стержня температура дорівнює нулю і відомий початковий розподіл температури

Математична постановка задачі: знайти $u(x,t)$, якщо

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad (0<x<\infty, \quad t>0) \tag{3.52}$$

$$u(0,t)=0 \qquad (t>0) \tag{3.53}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad \varphi(0)=0 \tag{3.54}$$

Введемо до розгляду непарну функцію

$$\vec{\varphi}(x)=\begin{cases}-\varphi(-x); & -\infty<x<0\\ \varphi(x), & 0\le x<\infty\end{cases} \tag{3.55}$$

і розглянемо задачу Коші про знаходження $v(x,t)$:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \qquad (-\infty<x<\infty, \ t>0) \tag{3.56}$$

$$v(x,0)=\vec{\varphi}(x) \qquad (-\infty<x<+\infty) \tag{3.57}$$

Таку задачу Коші для нескінченного стержня ми вже розв’язували. Нагадаємо, що для функції $v(x,t)$ справедлива така формула (3.16):

$$v(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\vec{\varphi}(\xi)\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}\right]d\xi \tag{3.58}$$

Враховуючи формулу (3.55), одержуємо

$$\mathrm{v}(\mathrm{x},\mathrm{t})=\frac{1}{2\mathrm{a}\sqrt{\pi \mathrm{t}}}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{\varphi}(-\xi)\exp\left[-\frac{(\xi-\mathrm{x})^2}{4\mathrm{a}^2\mathrm{t}}\right]d\xi+\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(\xi)\exp\left[-\frac{(\xi-\mathrm{x})^2}{4\mathrm{a}^2\mathrm{t}}\right]d\xi\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{a}\sqrt{\pi \mathrm{t}}}\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(\xi)\left\{-\exp\left[-\frac{(\xi+\mathrm{x})^2}{4\mathrm{a}^2\mathrm{t}}\right]+\exp\left[-\frac{(\xi-\mathrm{x})^2}{4\mathrm{a}^2\mathrm{t}}\right]\right\}d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{a}\sqrt{\pi \mathrm{t}}}\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(\xi)\left[e^{-\frac{(\xi-\mathrm{x})^2}{4\mathrm{a}^2\mathrm{t}}}-e^{-\frac{(\xi+\mathrm{x}^2)}{4\mathrm{a}^2\mathrm{t}}}\right]d\xi=\mathrm{v}(\mathrm{x},\mathrm{t}). \tag{3.59}$$

Формула (3.59) дає функцію $\mathrm{v}(\mathrm{x},\mathrm{t})$, яка задовольняє рівняння теплопровідності (3.56) і умову (3.57). Але це означає, що формула (3.59) дає також розв’язок поставленої задачі (3.52) – (3.54).

3.7. Розподіл тепла в напівскінченному стержні з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо кінець стержня теплоізольований (потік тепла дорівнює нулю) і відомий початковий розподіл температури.

Математична постановка задачі: знайти $u(x,t)$, якщо

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (o < x < \infty,\ t > 0) \tag{3.60}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \quad (t > 0) \tag{3.61}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad (0 < x < \infty), \quad \varphi'(0) = 0. \tag{3.62}$$

Розв'язок. Введемо до розгляду парну функцію

$$\overline{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(-x), & -\infty < x < 0, \\ \varphi(x), & 0 \le x < \infty \end{cases} \tag{3.63}$$

Очевидно, $\overline{\varphi}'(0) = 0$. Знайдемо функцію $v(x,t)$, яка є розв'язком наступної задачі Коші:

$$v_t' = a^2 v_{xx}'' \quad (x \in R,\ t > 0) \tag{3.64}$$

$$v(x,0) = \overline{\varphi}(x) \quad (x \in R) \tag{3.65}$$

Ця функція $v(x,t)$ має вигляд (3.16):

$$v(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi}(\xi) \exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}\right] d\xi =$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(-\xi) \exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}\right] d\xi + \int_{0}^{\infty} \varphi(\xi) \exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}\right] d\xi \right\} =$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{\infty} \varphi(\xi) \left[e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(\xi + x)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi = v(x,t) \tag{3.66}$$

Формула (3.66) дає розв'язок задачі Коші (3.64), (3.65). Тому, очевидно, для $x \in [0, +\infty)\, u(x,t) \equiv v(x,t)$. Тобто ця формула дає розв'язок задачі (3.60) – (3.62).

3.8. Охолодження рівномірно нагрітого напівнескінченного стержня

Знайти $u(x,t)$, якщо

$$u(0,t) = 0 \quad (t > 0) \tag{3.67}$$

$$u(x,0) = T \quad (x > 0) \tag{3.68}$$

$$u_t'(x,t) = a^2 u_{xx}''(x,t) \quad (x > 0,\ t > 0) \tag{3.69}$$

Введемо функцію

$$\overline{\varphi}(x) = \begin{cases} -T, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ T, & x > 0 \end{cases}$$

Тоді функція $v(x,t)$

$$v_t' = a^2 v_{xx}'' \quad (x \in R,\ t > 0) \tag{3.70}$$

$$v(x,0) = \overline{\varphi}(x) \quad (x \in R)$$

Може бути представлена (див. підрозд. 3.1) у вигляді:

$$v(x,t)-\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\varphi}(\xi)\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}\right]d\xi=$$

$$=\frac{T}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{-\int_{-\infty}^{0}\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}\right]d\xi+\int_{0}^{\infty}\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}\right]d\xi\right\}=$$

$$=\frac{T}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{-\int_{0}^{\infty}\exp\left[-\frac{(z+x)^2}{4a^2t}\right]dz+\int_{0}^{\infty}\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}\right]d\xi\right\}=\left|\begin{array}{ll}\frac{z+x}{2a\sqrt{t}}=\beta\Rightarrow & dz=2a\sqrt{t}\,d\beta\\ \frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}=\beta\Rightarrow & d\xi=2a\sqrt{t}\,d\beta\end{array}\right|=$$

$$=\frac{T}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{-\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-\beta^2}\left(2a\sqrt{t}\right)d\beta+\int_{\frac{-x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-\beta^2}\left(2a\sqrt{t}\right)d\beta\right\}=$$

$$=\left|-\int_{\gamma}^{\infty}e^{-\beta^2}d\beta+\int_{-\gamma}^{\infty}e^{-\beta^2}d\beta=\int_{-\gamma}^{\gamma}e^{-\beta^2}d\beta=2\int_{0}^{\gamma}e^{-\beta^2}d\beta\right|=\frac{T}{\sqrt{\pi}}2\int_{0}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}e^{-\beta^2}d\beta=$$

$$=T\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right),\quad \Phi(\gamma)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\gamma}e^{-\beta^2}d\beta.$$

Таким чином, функція $v(x,t)=T\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$ має властивості $v(x,0)=T\,(x>0)$, $v(0,t)=0,$ тобто дає закон охолодження рівномірно нагрітого стержня

$$u(x,t)=T\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \tag{3.71}$$

3.9. Розподіл температури в напівнескінченному стержні, якщо на одному кінці задана стала температура

Математична постановка задачі: знайти $u(x,t)$, якщо

$$u(0,t)=T_c\,(t>0) \tag{3.72}$$

$$u(x,0)=0\,(x>0) \tag{3.73}$$

$$u'_t(x,t)=a^2u''_{xx}(x,t)\qquad (x>0,\ t>0) \tag{3.74}$$

Розв'язок. У підрозд. 3.8 ми встановили, що функція

$$v(x,t)=\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

дає розв'язок задачі

$$v'_t=a^2v''_{xx}\qquad (x>0,\ t>0) \tag{3.75}$$

$$v(0,t)=0\qquad (t>0) \tag{3.76}$$

$$v(x,0)=1\qquad (x>0) \tag{3.77}$$

Тому, враховуючи, що функція $v(x,t)$ задовольняє (3.75), одержимо, що функція

$$u(x,t) = T_c\left[1-\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right] \qquad (3.78)$$

буде задовольняти рівняння (3.74) і

$$u(0,t) = T_c \qquad (t>0)$$

$$u(x,0) = 0 \qquad (x>0).$$

Тобто ця функція дає розв’язок задачі (3.72) – (3.74).

Зауваження. Якщо умова (3.72) має вигляд $u(0,t)=\begin{cases}0, & t<t_0\\ T_c, & t>t_0\end{cases}$, то розв’язок буде мати вигляд:

$$u(x,t)=\begin{cases}0, & t<t_0\\ T_c\left[1-\Phi\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t-t_0}}\right)\right], & t\ge t_0\end{cases}.$$

3.10. Розподіл температури в напівнескінченному стержні, якщо на одному кінці задана змінна температура

Знайдемо $u(x,t)$, якщо

$$u(0,t)=\mu(t) \qquad (t>0) \qquad (3.79)$$

$$u(x,0)=0 \qquad (x>0) \qquad (3.80)$$

$$u'_t = a^2 u''_{xx} \qquad (x>0,\ t>0) \qquad (3.81)$$

У підрозд. 3.9 ми встановили, що функція

$$G(x,t-t_0)=\begin{cases}1-\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int\limits_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t-t_0}}} e^{-\beta^2}d\beta; & t\ge t_0\\ 0, & t<t_0\end{cases} \qquad (3.82)$$

є розв’язком рівняння теплопровідності при умовах:

$$G\big|_{x=0}=\begin{cases}0, & t<t_0\\ 1, & t\ge t_0\end{cases}$$

$$G\big|_{t=t_0}\equiv 0\,(x>0)$$

Тому розв’язок $v(x,t)$ задачі $v'_t=a^2v''_{xx}$

$$v(0,t)=\begin{cases}\mu_0, & t_0<t<t_1\\ 0, & t>t_1\end{cases} \qquad v(x,t_0)=0,$$

очевидно, можна представити у вигляді:

$$v_1(x,t)=\mu_0\left[G(x,t-t_0)-G(x,t-t_1)\right] \qquad (3.83)$$

Аналогічно розв’язок задачі теплопровідності з початковою умовою $v(x,t_0)=0$ і граничною умовою

$$v_n(0,t)=\mu_k\left(t_k<t<t_{k+1};\quad k=\overline{0,n-1}\right) \qquad (3.84)$$

можна представити у вигляді:

$$v_n(x,t)=\sum_{k=0}^{n-1}\mu_k\left[G(x,t-t_k)-G(x,t-t_{k+1})\right] \tag{3.85}$$

Користуючись теоремою про середнє по змінній τ, одержимо:

$$v_n(x,t)=\sum_{k=0}^{n-1}\mu_n\left.\frac{\partial G(x,t-\tau)}{\partial t}\right|_{\tau-\tau_k}\bullet\Delta\tau_k$$

$$\Delta\tau_k=t_{k+1}-t_k,\quad t_k\le\tau_k\le t_{k+1},\qquad k=\overline{0,n-1} \tag{3.86}$$

Повернемось тепер до задачі (3.79) – (3.81), коли гранична умова задана кусково-неперервною функцією $\mu(t)=u(0,t)(t>0)$. Наближений розв'язок цієї задачі легко одержати у вигляді (3.86), якщо $\mu(t)$ замінити кусково-постійною функцією вигляду (3.84). Тоді, переходячи до границі при $\max\Delta\tau_k\to 0,\ n\to\infty$, одержимо розв'язок задачі (3.79) – (3.81) у вигляді:

$$u(x,t)=\int_0^t\mu(\tau)\frac{\partial G(x,t-\tau)}{\partial\tau}d\tau=\lim_{n\to\infty}v_n(x,t). \tag{3.87}$$

Знайдемо частинну похідну, враховуючи формулу (3.82),

$$\frac{\partial}{\partial z}\int_0^{\gamma(z,t)}f(\xi)d\xi=\frac{\partial\gamma(z,t)}{\partial z}f(\gamma(z,t))\Rightarrow$$

$$\frac{\partial G(x;t-t_0)}{\partial t}=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{-x}{2a(t-t_0)^{\frac{3}{2}}}e^{-\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-t_0}}\right)}\right]=\frac{x}{a\sqrt{\pi}(t-t_0)^{\frac{3}{2}}}e^{-\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-t_0}}\right)^2}$$

Тому шукану функцію $u(x,t)$ одержимо у вигляді:

$$u(x,t)=\int_0^t\mu(t)\frac{x}{a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau\ \Rightarrow u(x,t)=\frac{x}{a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau.$$

Таким чином, ця формула дає розв'язок задачі:

$$u_t'=a^2u_{xx}''\qquad (x>0,\ t>0)$$

$$u(x,0)=0\qquad (x>0)$$

$$u(0,t)=\mu(t)\qquad (t>0).$$

Зауваження 1. При $\tau\to t$ підінтегральна функція має знаменник, який прямує до нуля. Тому цей інтеграл є невласним. Тобто його не можна обчислювати прямою підстановкою значення $x=0$ в цю формулу, а треба тільки поступати так:

$$u(x,t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{t-\varepsilon}\mu(\tau)\frac{x}{a\sqrt{\pi}(t-r)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau$$

$$u(0,t)=\lim_{x\to 0}u(x,t).$$

Зауваження 2. $u(x,t)=\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)\frac{\partial G(x,t-\tau)}{\partial t}d\tau,$

де $G(x,t,-\tau)$ - розв'язок аналогічної задачі при $G|_{x=0}=\mu(t)\equiv 1$. Це принцип Дюамеля.

Розв'язок задачі

$$u'_t(x,t) = a^2 u''_{xx}(x,t) + f(x,t) \qquad (x \in R, \quad t > 0) \tag{3.88}$$

$$u(0,t) = 0(t > 0); \quad u(x,0) = 0 \qquad (x \in R) \tag{3.89}$$

має вигляд:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \left\{ \int_0^\infty \frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \left[e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] d\xi \right\} d\tau \tag{3.90}$$

Таким чином, розв'язок задачі

$$u'_t(x,t) = a^2 u''_{xx}(x,t) + f(x,t); \qquad (x > 0, \ t > 0) \tag{3.91}$$

$$u(0,t) = \mu(t) \qquad (t > 0) \tag{3.92}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (x > 0) \tag{3.93}$$

буде сумою трьох розв'язків $u(x,t) = u_1 + u_2 + u_3$;

$$u_1(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \varphi(\xi) \left[e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi;$$

$$u_2(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau;$$

$$u_3(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \left\{ \int_0^\infty \frac{f(\xi,t)}{\sqrt{t-\tau}} \left[e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] d\xi \right\} d\tau.$$

4. РОЗПОДІЛ ТЕПЛА В ПЛАСТИНІ, ЦИЛІНДРІ ТА КУЛІ.

4.1. Розподіл тепла в прямокутній пластині

Нехай контур тонкої однорідної пластинки підтримується при $t^o = 0^o$ C. Нехай обміну тепла між бічною поверхнею і навколишнім середовищем нема. Задано початковий розподіл температури. Знайти розподіл температури у довільний момент часу t>0. Математична постановка задачі: знайти *U(x,y,t),* якщо

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right); \quad (0 < x < b; \ 0 < y < c; \quad t > 0) \tag{4.1}$$

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y); \qquad (0 < x < b; \quad 0 < y < c) \tag{4.2}$$

$$U\big|_{x=0} = U\big|_{x=b} = 0; \qquad U\big|_{y=0} = U\big|_{y=c} = 0, \tag{4.3}$$

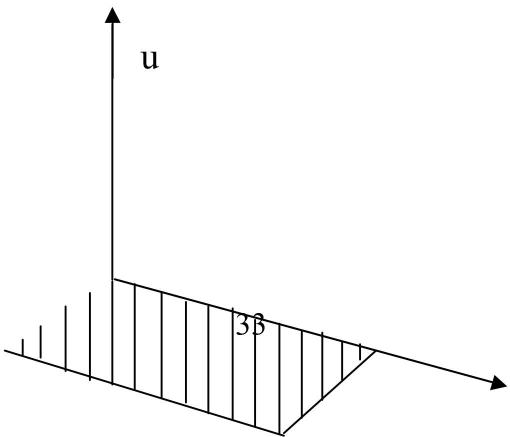

Рис. 4.1.

Розв'язок. Шукаємо $u(x,y,t)$ у вигляді:

$$u = X(x)Y(y)T(t) \tag{4.4}$$

Підставляючи цю формулу в рівняння (4.1), одержимо:

$$XYT' = a^2\left[X''YT + XY''T\right].$$

Ділимо обидві частини на a^2XYT

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)},$$

З цієї рівності витікає, що

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2, \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\mu^2 \Rightarrow X'' + \lambda^2 X = 0 \Rightarrow X = C_\lambda \sin \lambda x \Rightarrow \lambda b = m\pi \Rightarrow \lambda + \frac{m\pi}{b}, m \in \mathrm{N}$$

$$Y'' + \mu^2 Y = 0 \Rightarrow Y = D_\mu \sin \mu y \Rightarrow \mu c \Rightarrow n\pi \Rightarrow \mu = \frac{n\pi}{c}, n \in N$$

$$T' = -a^2(\lambda^2 + \mu^2)T \Rightarrow T = \exp\left[-a^2\left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right)\pi^2 t\right].$$

Підставляючи ці вирази у рівність (4.4) і підсумовуючи по m та n, одержимо:

$$U(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{m\pi x}{b}\sin\frac{n\pi y}{c}\exp\left(-a^2\left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right)\pi^2 t\right). \tag{4.5}$$

Цей ряд при довільних A_{mn} задовольняє диференціальне рівняння (4.1) і граничні умови (4.3). Для виконання початкової умови (4.2) покладемо у формуі (4.5) $t = 0$. Тоді одержимо:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{m\pi x}{b}\sin\frac{n\pi y}{c} = \varphi(x,y) \qquad \left(0 < x < b,\ 0 < y < c\right)$$

З цієї рівності витікає, що функція $\varphi(x,y)$ представлена подвійним рядом із синусів. Тому числа A_{mn} є коефіцієнтами Фур'є:

$$A_{mn} = \frac{4}{bc}\int_0^b\int_0^c \varphi(\xi,\eta)\sin\frac{m\pi\xi}{b}\sin\frac{n\pi\eta}{c}\,d\xi\,d\eta, \qquad m,n \in N.$$

Підставляючи ці коефіцієнти у ряд (4.5), одержимо шуканий розв'язок задачі (4.1) – (4.3).

4.2. Рівняння Бесселя

Це рівняння має вигляд:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{4.6}$$

$$y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \tag{4.7}$$

Якщо $\nu \neq 0,\ \pm 1,\ \pm 2$, ..., ..., то загальний розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$y(x) = c_1\gamma_\nu(x) + c_2\gamma_{-\nu}(x) \tag{4.8}$$

де $\gamma_\nu(x)$ - функція Бесселя І-го роду:

$$\gamma_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa (x/2)^{2k+\nu}}{\Gamma(\kappa+1)\Gamma(\kappa+\nu+1)},$$

$$\gamma_{-\nu}(x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (-1)^\kappa \frac{(x/2)^{2k-\nu}}{\Gamma(\kappa+1)\Gamma(\kappa-\nu+1)}, \quad \Gamma(s) =: \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt,$$

Якщо ж $n \in N$, то $\gamma_{-n}(x)=(-1)^n\ \gamma_n(x)$, тобто ці два розв'язки будуть лінійно залежними. У цьому випадку замість розв'язку $\gamma_{-n}(x)$ беруть функції Неймана (функції Еесселя 2-го роду):

$$Y_\nu(x) = \frac{\gamma_\nu(x)\cos\nu\pi - \gamma_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}; \qquad \nu \text{ - не ціле;}$$

$$Y_n(x) = \lim_{\nu\to n}\ Y_\nu(x); \quad n \in N$$

і загальний розв'язок рівняння (4.6) має вигляд:

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x) \tag{4.9}$$

Слід відзначити, що

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\gamma_0(x)\left[\ln\frac{x}{2} + C\right] - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(\kappa!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m};$$

$C \approx 0,577....$- стала Ейлера

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi}\gamma_n(x)\ln\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{\kappa=0}^{\infty} a_\kappa x^k,$$

Тобто $Y_n(x)$, $n = 0,1,2,\ldots$ необмежені навколо точки $x = 0$. Тому кожний розв'язок рівняння (4.6), обмежений в точці $x = 0$, має вигляд ($C_2 = 0$):

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) \tag{4.10}$$

Функції Бесселя $J_0(\mu_k r)$, де $J_0(\mu_k) = 0,\ k \in N$ мають властивості, подібні до властивостей тригонометричних функцій $\sin\lambda_k x,\ \cos\lambda_k x$ (рис. 4.2). Так, якщо $f(r) \in kc^1$ [0.1] – кусковогладка на [0.1], то ряд

$$f(r) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa \gamma_0(\mu_\kappa r), a_\kappa = \frac{\int_0^1 f(x) x \gamma_0(\mu_\kappa x) dx}{\int_0^1 x[\gamma_0(\mu_\kappa x)]^2 dx}, \kappa\epsilon N \tag{4.11}$$

збігається до $f(r)$ у середньоквадратичному сенсі. Вирази для коефіцієнтів a_κ одержуються, якщо врахувати, що функції $\gamma_0(\mu_\kappa x)$ ортогональні на [0.1] з ваговою функцією x

$$\int_0^1 x\gamma_0(\mu_k x)\gamma_0(\mu_e x) dx = 0 \qquad k \neq e, \qquad k, e \in N.$$

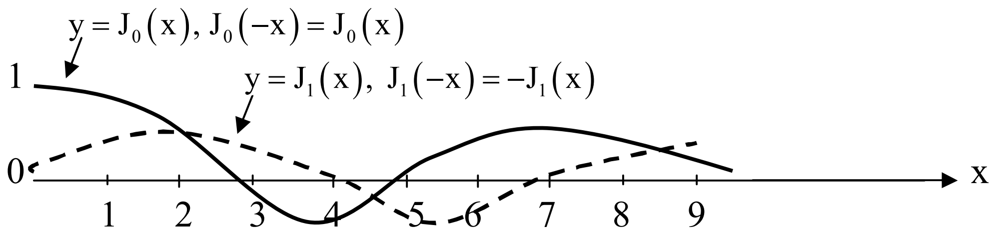

Рис. 4.2.

4.3. Розподіл тепла в нескінченному циліндрі (охолодження циліндра)

Знайдемо радіальне розповсюдження тепла в нескінченному круговому циліндрі радіуса R, якщо його бічна температура дорівнює нулю. У математичному плані задача зводиться до розв'язання рівняння нестаціонарної теплопровідності

$$\frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 U(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U(x,y,z,t)}{\partial z^2}\right), \quad (0 \le x^2 + y^2 < R^2, z \in R, t > 0) \qquad (4.12.)$$

при умовах:

граничній

$$U(x,y,z,t)\Big|_{x^2+y^2=R^2} = 0, \qquad (z \in R, t > 0) \qquad (4.13)$$

Початковій

$$U(x,y,z,0) = \varphi(\sqrt{x^2+y^2}) \qquad (0 \le x^2 + y^2 < R^2) \qquad (4.14)$$

Розв'язок. Перейдемо до циліндричних координат *r,0,z.*

$$r = \sqrt{x^2+y^2}; x = r\cdot\cos\varphi; y = r\cdot\sin\varphi;$$

$$z = z; \ tg\varphi = \frac{y}{x}, \quad u(z,y,z) = w(z,\varphi,z)$$

Таким чином, оператор Лапласа в циліндричних координатах має вигляд:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\Delta U \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} = a^2\left[w''_{rr} + \frac{1}{r}w'_r + \frac{1}{r^2}w''_{\varphi\varphi} + w''_{zz}\right],$$

Це рівняння часто записують у такій формі:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right] + F(r,\varphi,z).$$

З умов (4.12)-(4.14) витікає, що шукана температура буде функцією тільки *r* і *t* (не залежить від z,0):

$$u(x,y,z,t) \equiv w(r,t) \qquad (4.15)$$

Тому $\frac{\partial u}{\partial z} = 0;$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r}\cdot\frac{x}{r};$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial r}\frac{r-\frac{x^2}{r}}{r^2} = w''_{rr}\frac{x^2}{r^2} + w'_r\frac{y^2}{r^3};$$

Аналогічно

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = w''_{rr}\frac{y^2}{r^2} + w'_r\frac{x^2}{r^3}.$$

Тому

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial^2 y} = w''_{rr}\frac{x^2+y^2}{r^2} + \frac{x^2+y^2}{r^3}w'_r = w''_{rr} + \frac{1}{r}w'_r.$$

Таким чином, для нової функції *w(r,t)* задача (4.12)-(4.14) може бути записана так:

$$\frac{\partial w(r,t)}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 w(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w(r,t)}{\partial r}\right) \qquad (0 < r < R, t > 0) \tag{4.16}$$

$$\mathrm{w}(\mathrm{k},\mathrm{t}) = 0 \qquad (\mathrm{t} > 0) \tag{4.17}$$

$$\mathrm{w}(\mathrm{r},0) = \varphi(\mathrm{r}) \qquad (0 \le \mathrm{r} < \mathrm{R}) \tag{4.18}$$

Шукаємо розв'язок задачі (4.16)-(4.18)

$$\mathrm{w}(\mathrm{r},\mathrm{t}) = \mathrm{F}(\mathrm{r})\mathrm{T}(\mathrm{t}) \tag{4.19}$$

Підставляючи цей вираз у рівняння (4.16), одержимо

$$FT' = a^2(F''T + \frac{1}{2}F'T),$$

Поділимо обідві частини цього рівняння на FTa^2

$$\frac{\mathrm{T}'(\mathrm{t})}{\mathrm{a}^2\mathrm{T}(\mathrm{t})} = \frac{\mathrm{F}''(\mathrm{r}) + \frac{1}{2}\mathrm{F}'(\mathrm{r})}{\mathrm{F}(\mathrm{r})} = -\lambda^2.$$

Звідси одержимо:

$$T' = -a^2\lambda^2 T \Rightarrow T(t) = c\exp(-a^2\lambda^2 t), \quad c = const \tag{4.20}$$

$$F''(r) + \frac{1}{2}F'(r) + \lambda^2 F(r) = 0. \tag{4.21}$$

Введемо в цьому рівнянні нову функцію $\mathrm{v}(\lambda\,\mathrm{r}) = \mathrm{F}(\mathrm{r}).$ Тоді $\mathrm{F}'_2(\mathrm{r}) = \lambda\,\mathrm{v}'(\lambda\,\mathrm{r}), \mathrm{F}''_{\mathrm{rr}}(\mathrm{r}) = \lambda^2\mathrm{v}''(\lambda\,\mathrm{r})$ і рівняння (4.21) можна записати у вигляді:

$$\lambda^2\mathrm{v}''(\lambda\,\mathrm{r}) + \frac{\lambda}{\mathrm{r}}\mathrm{v}'(\lambda\,\mathrm{r}) + \lambda^2\mathrm{v}(\lambda\,\mathrm{r}) = 0 \Rightarrow \mathrm{v}''(\lambda\,\mathrm{r}) + \frac{1}{\lambda\,\mathrm{r}}\mathrm{v}'(\lambda\,\mathrm{r}) + \mathrm{v}(\lambda\,\mathrm{r}) = 0. \tag{4.22}$$

Це є рівнянням Бесселя при $v = 0.$ Тому

$$-\mathrm{v}(\lambda\,\mathrm{r}) = \mathrm{C}_1\gamma_0(\lambda\,\mathrm{r}) = \mathrm{C}_1\sum_{\hat{e}=0}^{\infty}(-1)^{\hat{e}}\frac{\left(\frac{\lambda\,\mathrm{r}}{2}\right)^{2\hat{e}}}{\tilde{A}(\hat{e}+1)\tilde{A}(\hat{e}+1)}; \qquad C_1 = const, \tag{4.23}$$

Для того, щоб функція $\mathrm{w}(\mathrm{r},\mathrm{t})$ у формулі (4.19) задовольняла граничну умову (4.17), очевидно треба покласти $\mathrm{F}(\mathrm{R}) = 0$, тобто

$$\nu(\lambda\,\mathrm{R}) = 0 \Rightarrow \mathrm{C}_1\mathrm{J}_0(\lambda\,\mathrm{R}) = 0. \tag{4.24}$$

Звідси витікає, що

$\lambda\,\mathrm{R} = \mu_{\mathrm{n}}^{(0)},\ \mathrm{n} \in \mathrm{N}$, де $\mathrm{J}_0(\mu_{\mathrm{n}}^{(0)}) = 0$, тобто $\lambda_{\mathrm{n}} = \mu_{\mathrm{n}}^{(0)}/\mathrm{R}.$

Таким чином, підставляючи знайдені значення для λ_n у (4.19), (4.20), (4.23) і знайшовши суму по n, одержимо:

$$W(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_nJ_0(\frac{\mu_n^{(0)}}{R}r)\exp(-(a\mu_n^{(0)})^2\frac{t}{R^2} \qquad (4.25)$$

Задовольняючи початкову умову (4.18), одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_nJ_0(\frac{\mu_n^{(0)}}{R}r)=\varphi(r) \qquad (0\le r\le R).$$

Звідси витікає, що функція $\varphi(r)$ розкладена в ряд за функціями Бесселя. Це означає, що

$$C_n=\frac{\int_0^R x\varphi(x)J_0(\frac{\mu_n^{(0)}}{R}x)dx}{\int_0^R xJ_0^2(\frac{\mu_n^{(0)}}{R}x)dx}\ ; \qquad n\in N. \qquad (4.26)$$

Підставляючи числа C_n, знайдені за формулами (4.26), у рівність (4.25), одержуємо шукану функцію $W(r,t)$.

Зауважимо, що $\int_0^R xy_0^2(\frac{\mu_n}{R}x)dx=\frac{R^2}{2}J_0'^2/\mu_n)=\frac{R^2}{2}J_1^2(\mu_n)$.

Напишемо вираз для оператора Лапласа:

$$\Delta U=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}$$

в циліндричних координатах

$x=r\cos\varphi;\quad y=r\sin\varphi;\quad$ z=z.

$r=\sqrt{x^2+y^2};\quad tg\varphi=y/x;\quad 0\le r<\infty,\quad 0\le\varphi<2\pi$

Введемо функцію $w(r,\varphi,z,t)=U(x,y,z,t)$.

Тоді

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}+\frac{\partial w}{\partial\varphi}(-\frac{y}{x^2+y^2})=w_r'\frac{x}{r}-w_\varphi'\frac{\sin^2\varphi}{y};$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=w_{rr}''\frac{x^2}{r^2}+w_r'\frac{r-\frac{x}{r}}{r^2}-w_{\varphi r}''\frac{x}{r}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{y}-w_\varphi'\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{y}(-\frac{\sin^2\varphi}{y})+w_{\varphi\varphi}''\frac{\sin^4\varphi}{y^2}\Rightarrow U_{xx}''=$$

$$w_{rr}''\frac{x^2}{r^2}+w_r'\frac{y^2}{r^3}-w_{\varphi r}''\frac{tg\varphi\sin^2\varphi}{r}+w_\varphi'\frac{\sin2\varphi\sin^2\varphi}{y^2}+w_{\varphi r}''\frac{\sin^2\varphi}{r^2};$$

$$U_y'=w_r'\frac{y}{r}+w_\varphi'\frac{x}{x^2+y^2}=w_r'\frac{y}{r}+w_\varphi'\frac{\cos^2\varphi}{x};$$

$$U_{yy}''=w_{rr}''\frac{y^2}{r^2}+w_r'\frac{x^2}{r^3}+w_{\varphi r}''\frac{y}{r}\frac{\cos^2\varphi}{x}+w_{\varphi\varphi}''\frac{\cos^4\varphi}{x^2}-w_\varphi'\frac{\sin2\varphi}{x}\frac{x}{r^2};$$

$$U_z'=w_z';U_{zz}''=w_{zz}'';$$

$$\Delta U=U_{xx}''+U_{yy}''+U_{zz}''=w_{rr}''\frac{x^2+y^2}{r^2}+w_r'\frac{x^2+y^2}{r^2}+w_{\varphi\varphi}''(\frac{\sin^2\varphi}{r^2}+\frac{\cos^2\varphi}{r^2})+$$

$$+w_{\varphi r}''(-\frac{ctg\varphi\sin^2\varphi}{r}+\frac{tg\varphi\cos^2\varphi}{r})+w_\varphi'\left[\frac{\sin2\varphi}{r^2}-\frac{\sin2\varphi}{r^2}\right]+w_{zz}''=w_{rr}''+\frac{1}{r}w_r'+\frac{1}{r^2}w_{\varphi\varphi}''+w_{zz}''.$$

4.4. Рівняння теплопровідності в сферичних координатах

Знайдемо вираз оператора Лапласа

$$\Delta\bar{u}(x,y,z)=\frac{\partial^2\bar{u}(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{u}(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\bar{u}(x,y,z)}{\partial z^2}$$

в сферичній системі координат (r,φ,θ).

Як відомо (рис. 4.3), декартові координати x, y, z зв'язані із сферичними координатами формулами:

$$x=r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi,\ y=r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi,\ z=r\cdot\cos\theta,\quad \begin{array}{l}0\le r<\infty\\ 0\le\varphi<2\pi\\ 0\le\theta\le\pi\end{array} \qquad (4.26)$$

$$z=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \sin\theta=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Rightarrow\theta=\arcsin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{y}{x}\Rightarrow\varphi=\mathrm{arctg}\frac{y}{x}+\left\{\begin{array}{l}0,\ x>0,\ y>0\\ \pi,\ x<0,\ y>0\\ \pi,\ x<0,\ y<0\\ 2\pi,\ x>0,\ y<0\end{array}\right\} \qquad (4.27)$$

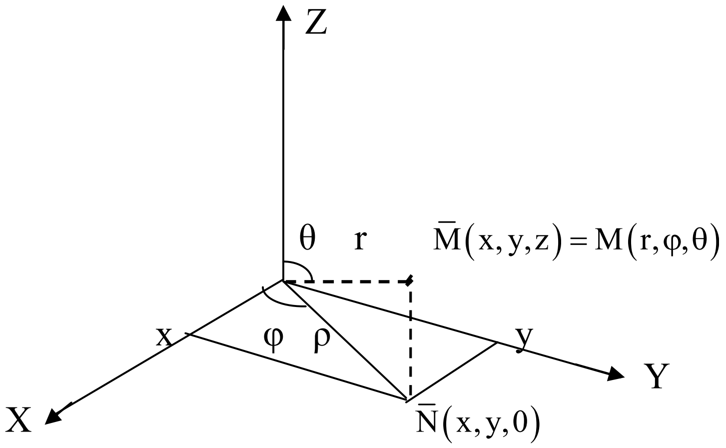

Рис.4.3.

З цих формул одержуємо:

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\ \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\ \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{y^2+z^2}{r^3},\ \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{x^2+z^2}{r^3},\ \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{x^2+y^2}{r^3},\ \Delta r=\frac{2}{r} \qquad (4.28)$$

$$\theta'_x=\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}r^2}=\frac{\cos\varphi\cos\theta}{r},\ \theta'_y=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}r^2}=\frac{\sin\varphi\cos\theta}{r},$$

$$\theta'_z=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r^2}=-\frac{\sin\theta}{r},\ \Delta\theta=\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta} \qquad (4.29)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta},\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}=0, \qquad (4.30)$$

Якщо ввести позначення $\bar{u}(x,y,z)=\bar{u}(x(r,\varphi,\theta),\quad y(r,\varphi,\theta),$

$z(r,\varphi,\theta)) = u(r,\varphi,\theta) = u(r(x,y,z),\varphi(x,y,z),\theta(x,y,z))$, то з допомогою формул (4.28)-(4.30) одержимо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{x}{r} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\left(-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\right) + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\cos\varphi\cos\theta}{r};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{y}{r} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\theta}{r};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{z}{r} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot 0 + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right) = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{z}{r} - \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\sin\theta}{r};$$

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\left[\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\left[\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\left[\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial z}\right] =$$

$$= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}\right]\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\left[\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\right] +$$

$$+\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi\,\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi\,\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}\right]\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right] +$$

$$+\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \theta\,\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta\,\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}\right]\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\right] +$$

$$+\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}\right]\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\left[\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right] +$$

$$+\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi\,\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi\,\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}\right]\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right] +$$

$$+\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \theta\,\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta\,\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}\right]\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right] +$$

$$+\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial z}\right]\cdot\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\left[\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\right] +$$

$$+\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi\,\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi\,\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial z}\right]\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right] +$$

$$+\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \theta\,\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta\,\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial z}\right]\cdot\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\right] =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cdot\left[\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\Delta r + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\cdot\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] +$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\cdot\left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)^2\right] + 2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial \varphi}\right]\cdot\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial r}{\partial z}\right] +$$

$$+2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial \theta}\right]\cdot\left[\frac{\partial \theta}{\partial x}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial z}\cdot\frac{\partial r}{\partial z}\right] + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi\,\partial \theta}\cdot\left[\frac{\partial \theta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial z}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right] +$$

$$+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\Delta\varphi + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\Delta\theta = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{2}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi}\cdot\frac{1}{r^2\sin^2\theta} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Таким чином, оператор Лапласа в сферичних координатах має вигляд:

$$\Delta u(r,\varphi,\theta)=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta} \tag{4.31}$$

При одержанні формули (4.31) нами використані формули (4.26)-(4.30), а також формули:

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2=1 \tag{4.32}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2=\frac{1}{r^2\sin^2\theta}$$

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2=\frac{1}{r^2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial r}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial z}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial z}=0 \tag{4.33}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial z}=0$$

Зауважимо, що формулу (4.31) для оператора Лапласа часто записують у такій формі:

$$\Delta u(r,\varphi,\theta)=\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) \tag{4.34}$$

Тому рівняння нестаціонарної теплопровідності в сферичних координатах має вигляд:

$$\frac{\partial u(r,\varphi,\theta,t)}{\partial z}=a^2\Delta u(r,\varphi,\theta,t)+F(r,\varphi,\theta,t) \tag{4.35}$$

або

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left[\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right]+F \tag{4.36}$$

4.5. Розподіл температури в кулі, якщо температура поверхні дорівнює нулю

Треба знайти $u(x,t)$, якщо

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u \qquad (0\le x^2+y^2+z^2<R^2,\ t>0) \tag{4.37}$$

$$u(x,y,z,o)=f(r),\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad 0\le r<R \tag{4.38}$$

$$\left|u(x,y,z,t)\right|_{\sqrt{x^2+y^2+z^2}=R}=0,\quad t>0 \tag{4.39}$$

Розв'язок. Перейдемо до сферичних координат (r,φ,θ)
$x = r\cos\theta\cos\varphi, \quad y = r\cos\theta\sin\varphi, \quad z = r\sin\theta.$
У сферичних координатах рівняння (4.37) має вигляд (див. підрозд. 4.4):

$$W(r,\varphi,\theta,t) = u(x,y,z,t) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = a^2\left[\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial W}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial W}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}\right],\ 0 \le r < R, \qquad (4.40)$$

$$0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi$$

$$W(r,\varphi,\theta,0) = f(r) \qquad \left(0 \le r < R,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right) \qquad (4.41)$$

$$W(r,\varphi,\theta,t) = 0 \qquad \left(0 \le \varphi < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ t > 0\right) \qquad (4.42)$$

$$\left|W(r,\varphi,\theta,t)\right| < \infty \qquad \left(0 \le \varphi < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ t > 0\right). \qquad (4.43)$$

Із математичної постановки задачі (4.40)-(4.43) видно, що $W(r,\varphi,\theta,t) = \overline{W}(r,t)$. Тобто задача зводиться до знаходження функції $\overline{W}$, яка задовольняє умови:

$$\frac{\partial\overline{W}}{\partial t} = a^2\left[\frac{\partial^2\overline{W}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{\partial\overline{W}}{\partial r}\right] \qquad (0 \le r < R,\ t > 0) \qquad (4.44)$$

$$\overline{W}(r,0) = f(r) \qquad (0 \le r < R) \qquad (4.45)$$

$$W(R,t) = 0 \qquad (t > 0) \qquad (4.46)$$

$$\left|\overline{W}(0,t)\right| < \infty \qquad (t > 0) \qquad (4.47)$$

Покладемо $V = r\overline{W} \Rightarrow \overline{W} = \dfrac{V}{r}$. Тоді

$$\overline{W}_t' = \frac{1}{r}V_t'; \qquad \overline{W}_r' = \frac{V_r'\cdot r - V}{r^2};$$

$$\overline{W}_{rr}'' = \frac{\left(V_{rr}''\cdot r + V_r' - V_r'\right)r^2 - 2r(V_r'\cdot r - V)}{r^4} = \frac{rV_{rr}'' - 2V_r'}{r^2} + \frac{2V}{r^3}$$

Підставляючи ці вирази у рівняння (4.44), одержимо:

$$\frac{V_t'}{r} = a^2\left[\frac{rV_{rr}'' - 2V_r'}{r^2} + \frac{2V}{r^3} + \frac{2}{r}\cdot\frac{V_r'\cdot r - V}{r^2}\right] \equiv a^2\frac{V_{rr}''}{r} \Rightarrow \qquad (4.48)$$

$$\Rightarrow V_t'(r,t) = a^2 V_{rr}''(r,t) \qquad (0 \le r < R,\ t > 0)$$

$$V(r,0) = rf(r) \qquad (0 \le r < R) \qquad (4.49)$$

$$V(R,t) = 0 \qquad (t > 0) \qquad (4.50)$$

$$V(0,t) = 0 \qquad (t > 0) \qquad (4.51)$$

Таку задачу ми вже розв’язували для стержня довжини $l = R$. Розділяємо змінні у рівнянні (4.48)

$$V(r,t) = \Re(r)T(t).$$

Тоді

$$\Re T' = a^2\Re'' T.$$

Ділимо обидві частини цього рівняння на $\Re T$:

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{\Re''}{\Re}$$

і одержуємо:

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = -\lambda^2 \qquad \frac{\Re''(r)}{\Re(r)} = -\lambda^2.$$

Тобто

$$T(t) = c\exp(-a^2\lambda^2 t)$$
$$\Re(r) = A\cos\lambda r + B\sin\lambda r.$$

Функція $\Re(r)$ повинна задовольняти граничні умови $\Re(0) = \Re(\Re) = 0$. Тому

$$\Re(0) = 0 \Rightarrow A\cos\lambda_0 + \beta\sin\lambda_0 = 0 \Rightarrow A = 0,$$
$$\Re(\Re) = 0 \Rightarrow B\sin\lambda R = 0 \Rightarrow \lambda R = \kappa\pi,$$
$$\lambda_\kappa = \frac{\kappa\pi}{R}, \quad \kappa\in N \Rightarrow \Re(r) = B_\kappa\sin\frac{\kappa\pi}{R}r, \quad B_\kappa - \text{const.} \tag{4.54}$$

Таким чином, функція

$$V_\kappa(r,t) = c_\kappa\sin\frac{\kappa\pi r}{R}\exp\left(-a^2\frac{\kappa^2\pi^2}{R^2}t\right) \tag{4.55}$$

буде задовольняти диференціальне рівняння (4.48) і граничні умови (4.50), (4.51). Ці властивості буде мати також і ряд

$$V(r,t) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} c_\kappa\sin\frac{\kappa\pi r}{R}\exp\left(-\frac{a^2\kappa^2\pi^2}{R^2}t\right). \tag{4.56}$$

Для знаходження c_κ покладемо в (4.56*) t=0*

$$V(r,0) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} c_\kappa\sin\frac{\kappa\pi r}{R} = rf(r) \qquad (0\le r\le R),$$

звідси витікає

$$c_\kappa = \frac{2}{R}\int_0^R rf(r)\sin\frac{\kappa\pi r}{R}dr, \qquad \kappa\in N \tag{4.59}$$

Таким чином, згадуючи, що $V = r\overline{W}$, одержуємо

$$\begin{aligned}\overline{W}(r,t) &= \frac{V}{r} = \frac{1}{r}\sum_{\kappa=1}^{\infty} c_\kappa\sin\frac{\kappa\pi r}{R}\exp\left(-a^2\frac{\kappa^2\pi^2}{R^2}t\right) = \\ &\frac{2}{Rr}\sum_{\kappa=1}^{\infty} e^{\left(\frac{a\kappa\pi}{R}\right)^2 t}\sin\frac{\kappa\pi r}{R}\cdot\int_0^R rf(r)\sin\frac{\kappa\pi r}{R}dr\end{aligned} \tag{4.60}$$

Це і є розв’язок задачі (4.37)-(4.39). Розглянемо частинний випадок, коли $f(r) = 1$. Тоді

$$\int_0^R rf(r)\sin\frac{\kappa\pi r}{R}dr = \int_0^R r\sin\frac{\kappa\pi r}{R}dr = R^2\int_0^1 \xi\sin\kappa\pi\xi d\xi =$$
$$= R^2\left[\left|-\xi\frac{\cos\kappa\pi\xi}{\kappa\pi}\right|_0^1 + \left|\frac{\sin\kappa\pi\xi}{(\kappa\pi)^2}\right|_0^1\right] = -\frac{R^2\cos\kappa\pi}{\kappa\pi} = \frac{R^2(-1)^{\kappa+1}}{\kappa\pi}.$$

Тому

$$\overline{W}(r,t) = \frac{2R}{\pi r}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\kappa+1}}{\kappa}e^{\left(\frac{a\kappa\pi}{R}\right)^2 t}\sin\frac{\kappa\pi r}{R}.$$

Розділ 5. НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

5.1. Метод сіток (метод скінченних різниць) для розв'язання рівняння нестаціонарної теплопровідності

Застосуємо метод сіток до розв'язання задачі: знайти *u(x,t)*, якщо

$$c\rho u_t^1(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + f(x,t)(0 < x < l; 0 < t \le T) \quad (5.1)$$

$$u(0,t) = \nu_1(t),\ u(l,t) = \nu_2(t)\ (0 < t \le T) \quad (5.2)$$

$$u(x,0) = \varphi(x)\ (0 < x < l) \quad (5.3)$$

Введемо в прямокутнику $\Omega = \{(x,t) | 0 \le x \le l, 0 \le t \le T|\}$ сітку $\omega_{h\tau} = \{x_i, t_j\}_{i=\overline{0,N}}^{j=\overline{0,M}}$, $x_i = ih$, $i = \overline{0,N}$; $t_j = j\tau$, $j = \overline{0,M}$, $h = \frac{l}{N}$, $\tau = \frac{T}{M}$.

Введемо позначення $u_{ij} = u(x_i, t_j)$; u – сіткова функція, яка задана лише у вузлах сітки $\omega_{h\tau}$. Ця сіткова функція відповідає неперервній функції *u(x,t).*

Запишемо формулу Тейлора $(\tau \to 0, h \to 0)$:

$$u(x_i, t_j + \tau) = u(x_i, t_j) + \tau u_t^{/}(x_i, t_j) + \frac{\tau^2}{2}u_{tt}^{//}(x_i, t_j) + 0(\tau^3) \quad (5.4)$$

$$u(x_i + h, t_j) = u(x_i, t_j) + hu_x^{/}(x_i, t_j) + \frac{h^2}{2}u_{xx}^{//}(x_i, t_j) + \frac{h^3}{6}u_{xxx}^{///}(x_i, t_j) + 0(h^{//}) \quad (5.5)$$

$$u(x_i + h, t_j) = u(x_i, t_j) - hu_x^{/}(x_i, t_j) + \frac{h^2}{2}u_{xx}^{//}(x_i, t_j) - \frac{h^3}{6}u_{xxx}^{///}(x_i, t_j) + 0(h^{//}) \quad (5.6)$$

З цих формул одержимо такі різницеві формули для похідних:

$$u_t^{/}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j + \tau) - u(x_i, t_j)}{\tau} + 0(\tau) = \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{\tau} + 0(\tau) \quad (5.7)$$

$$u_{xx}^{//}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i - h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i + h, t_j)}{h^2} + 0(h^2) = \quad (5.8)$$

$$= \frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h^2} + 0(h^2)$$

Тут використовується позначення $O(\varepsilon)$(читається “О велике від епсилон”), тобто така функція $R(\varepsilon)$, що $|R(\varepsilon)| \le M\varepsilon,\ M > 0$.

Розглянемо для простоти випадок $f(x,t) \equiv 0; k(x,t) \equiv k = \text{const}$. Покладемо в рівнянні (5.1) $a = \frac{k}{c\rho}$. Тоді, відкидаючи члени $0(t)$ *і* $0(h^2)$ при $\tau \to 0, h \to 0$, одержимо скінченно-різницеве рівняння:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{\tau} = a\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2},\quad 1 \le i \le N-1,\ 1 \le j \le M \quad (5.9)$$

Граничні умови (5.2) запишемо у вигляді:

$$u_{0,j} = \nu_1(t_j);\quad u_{N,j} = \nu_2(t_j)\ ;\quad j = 0,1,\ldots,M, \quad (5.10)$$

а початкову (5.3) у вигляді:

$$u_{i,0} = \varphi(x_i), \quad i = \overline{1, N-1} \qquad (5.11)$$

рівняння (5.9) можна переписати:

$$u_{i,j+1} = \gamma u_{i-1,j} + (1-2\gamma)u_{ij} + \gamma u_{i+1,j}; \quad i = \overline{1, N-1}; \quad j = \overline{1, M} \qquad (5.12)$$

де введено позначення: $\gamma = a\tau / h^2$. Формула (5.11) у випадку, коли значення $u_{i-1,j}, u_{ij}, u_{i+1,j}$ відомі, дозволяє знаходити значення $u_{i,j+1}$ для всіх $i = \overline{1, N-1}$. Враховуючи, що при j=1 числа u_{i0} дані з початкової умови (5.11), то на шарі $\mathrm{j} = 1$ знаходимо $u_{i,1}$; $i = \overline{1, N-1}$; так шар за шаром визначаємо $u_{i,j+1}$ для значень $j = \overline{1, M} - 1$; при цьому значення $u_{00}, u_{N0}, u_{01}, u_{N1}, ...$ знаходяться з рівностей (5.10). схема (5.12) називається **явною.**

Таким чином, щоб розв'язати задачу (5.1)-(5.3) необхідно:

1) обчислити всі $\mathrm{N}-1$ значень $u_{i,1}$; $i = \overline{1, N-1}$, з допомогою формули (5.12) за відомими u_{i0}; при цьому значення $u_{00}, u_{01}, u_{N0}, u_{N-1}, ...$ знаходимо за формулами (5.10);
2) обчислити $u_{i,2}$ $(i = \overline{1, N-1})$ з допомогою тільки що знайдених значень $u_{i,1}$ $(i = \overline{1, N-1})$ і граничних значень u_{01}, u_{N1}. Аналогічно на k-му кроці $(k = \overline{3, M})$ знаходяться $u_{ik} (i = \overline{0, N})$.

Цей процес називається розв'язкою по "кроках". Простота, з якою крок за кроком вдається обчислювати всі значення шуканого розв'язку *u*, має такі недоліки: одержаний розв'язок дуже чутливий до стійкості обчислень. При

$$\gamma \le 0{,}5 \Rightarrow \frac{\alpha\tau}{h^2} \le 0{,}5 \qquad (5.13)$$

малі похибки округлення чисел (а розрахунки завжди проходять із невеликим числом значучих цифр) при $h \to 0, \tau \to 0$ не приводять до сильних змін розв'язку. Якщо ж $\gamma > 0{,}5$, то малі помилки округлення, які допускаються на проміжних кроках, за схемою (5.12) можуть приводити до великих змін розв'язку при $\tau \to 0, h \to 0$.

3) в умові (5.13) для підвищення точності вибирається значення h достатньо малим. Тоді τ буде таким малим, що для досягнення значення t=T потрібна буде велика кількість кроків.

Цих недоліків немає неявна схема розв'язання рівняння (5.1)-(5.3). Вона одержується так: похідна $u_t^{/}(x_i, t_j)$ замінюється з тою ж похибкою $0(\tau)$ не формулою (5.7), а формулою

$$u_t^{/}(x_i t_j) = \frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{\tau} + 0(\tau) \qquad (5.14)$$

Тоді рівняння (5.1) приймає вигляд:

$$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\tau} = \alpha \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} \qquad (5.15)$$

або, замінюючи індекс *j* на *j+1*,

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} = \alpha \frac{u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}}{h^2} \qquad (5.16)$$

Це рівняння треба розв'язувати для

$$J \le i \le N-1, \; 0 \le j \le M-1.$$

Перепишемо рівняння (5.16) у вигляді:

$$\gamma u_{i-1,j+1} - (1+2\gamma)u_{i,j+1} + \gamma u_{i+1,j+1} = -u_{ij}, \gamma = \frac{\alpha\tau}{h^2} \tag{5.17}$$

Тобто для знаходження $u_{i,j+1}$ на новому кроці треба розв'язувати систему рівнянь (5.17). Звичайно, значення $u_{0,j}, u_{N,j}$ знаходимо за формулами (5.10). Така схема розв'язку називається неявною.

Система (5.17) стійка при всіх γ, тобто при довільному співвідношенні між h і τ похибки округлення не впливають на кінцевий результат при $\tau \to 0, h \to 0$.

Зауваження. У випадку, коли граничні умови мають такий вигляд:

$$-\mathrm{k}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} = \beta_1(\mathrm{t})\mathrm{u} - \mu_1(\mathrm{t}), \ \mathrm{x} = 0 \tag{5.18}$$

$$-\mathrm{k}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} = \beta_2(\mathrm{t})\mathrm{u} - \mu_2(\mathrm{t}), \quad \mathrm{x} = 1 \tag{5.19}$$

то відповідні їм різницеві рівняння (5.10) можна представити у вигляді:

$$u_{0,j} = \chi_1 u_{1j} + v_{1,j}, u_{N,1} = \chi_2 u_{N-1,j} + v_{2j} \tag{5.20}$$

де $v_{1j}, v_{2j}, \chi_1, \chi_2$ - деякі числа.

Для розв'язання системи алгебраїчних рівнянь (5.17) сумісно з граничними умовами (5.20) можна використати відомі методи: метод Гаусса або метод прогонки.

5.2. Метод скінченних елементів розв'язання нестаціонарної задачі теплопровідності для стержня.

Математична постановка задачі: знайти функцію $u(x,t)$ наближено методом скінченних елементів (МСЕ), якщо

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad (0 < x < l, t > 0) \tag{5.21}$$

$$\mathrm{u}(\mathrm{x},0) = \varphi(\mathrm{x}) \qquad \left(0 < \mathrm{x} < 1\right) \tag{5.22}$$

$$u(0,t) = \psi_1(t), u(l,t) = \psi_2(t), \varphi(0) = \psi_1(0), \varphi(l) = \psi_2(0) \tag{5.23}$$

Розв'язок. Введемо функцію

$$\mathrm{X}(t) = \frac{1}{2}\left[\left|t-1\right| - 2\left|t\right| + \left|t+1\right|\right] \tag{5.24}$$

яка може бути представлена у вигляді:

$$\mathrm{X}(t) = \begin{cases} 0, t \le -1, \\ 1+t, -1 < t \le 0, \\ 1-t, 0 < t < 1, \\ 0, t \ge 1 \end{cases}$$

і має графік, приведений на рис.5.1.

Легко бачити, що функція

$$\chi\left(\frac{t-\frac{j}{n}}{1/n}\right)=\chi(nt-j)=\begin{cases}0, t\le \frac{j-1}{n}, \\ 1+nt-j, \frac{j-1}{n}<t\le \frac{j}{n} \\ 1-nt+j, \frac{j}{n}<t<\frac{j+1}{n} \\ 0, t\ge \frac{j+1}{n}\end{cases}$$

має графік, приведений на рис.5.2.

Розіб'ємо інтервал [0,1] на *n* частин точками $x_j = j/n, j=\overline{0,n}$.

Тоді функція

$$\varphi_\pi(x)=\sum_{j=0}^{n}\varphi(\frac{j}{n})\chi(nx-j)=\sum_{j=1}^{n-1}\varphi(\frac{j}{n})\chi(nx-j); \varphi(0)=\varphi(1)=0 \quad (5.25)$$

буде сплайном 1-го степеня (ломаною, тобто Кусково-лінійною функцією), який інтерполює функцію $\varphi(x)$ в точках $x=x_j$,

$$\varphi_\pi(x_j)=\varphi(\frac{j}{n})=\varphi(x_j), j=\overline{0,n} \quad (5.26)$$

Покладемо для спрощення викладу $\varphi_1(t)\equiv 0, \varphi_2(t)\equiv 0$.

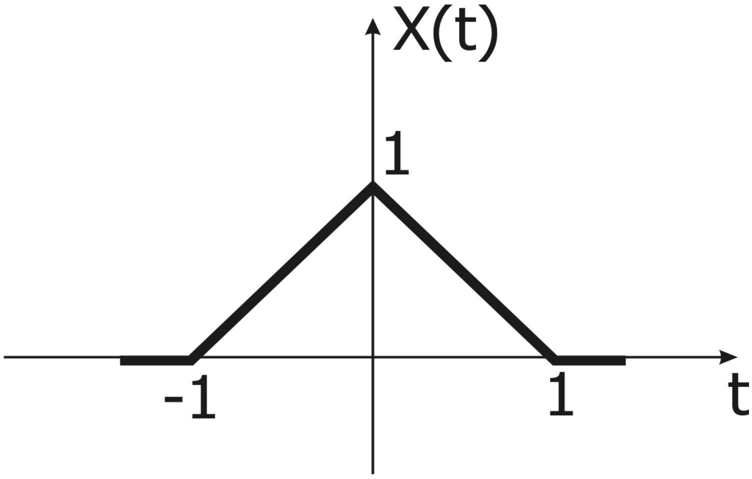

Рис.5.1.

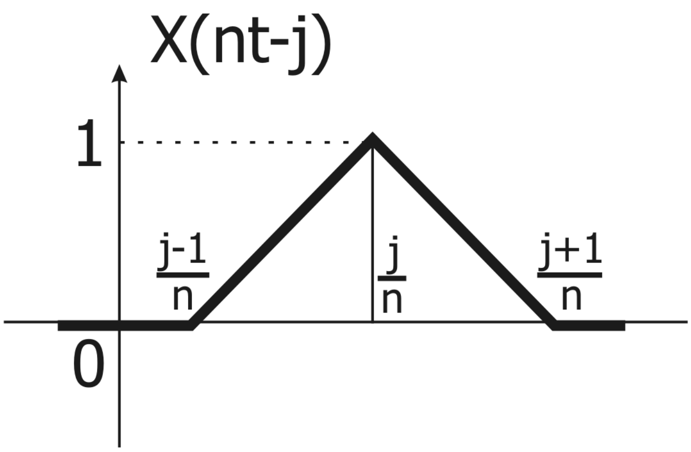

Рис.5.2

Наближений розв'язок задачі (5.21)-(5.23) шукаємо у вигляді:

$$\mu_\pi(x,t)=\sum_{j=0}^{n}C_j(t)\chi(nx-j)=\sum_{j=1}^{n-1}C_j(t)\chi(nx-j), C_0(t)\equiv\psi_1(t)\equiv 0, C_n(t)\equiv\psi_2(t)\equiv 0 \quad (5.27)$$

де $C_j(t)$ - невідомі функції змінної, які повинні задовольняти такі початкові умови:

$$C_j(0) = \varphi(j/n) =: \varphi_{\wedge j}; j = \overline{1, n-1} \qquad (5.28)$$

Це невідомі функції $C_j(t)$ знаходимо методом Гальоркіна:

$$\int_0^e \left[\frac{\partial u_\pi(x,t)}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u_\pi(x,t)}{\partial x^2} - f(x,t) \right] \chi(nx-k)dx = 0, k = \overline{1, n-1} \qquad (5.29)$$

Інтегруючи частинами і враховуючи, що $\chi(nx-k)\,\big|_{x=0} = 0$,
$\chi(nx-k)\,\big|_{x=l} = 0$, одержимо

$$\alpha^2 \int_0^e \frac{\partial^2 u_\pi(x,t)}{\partial x^2} \chi(nx-k)dx = \alpha^2 \left[\frac{\partial u_\pi(x,t)}{\partial x} \chi(nx-k) \Big|_{x=0}^{x=e} - \int_0^e \frac{\partial u_\pi(x,t)}{\partial x} \chi_x^/(nx-k)dx \right] =$$

$$= -\alpha^2 \int_0^e \frac{\partial u_\pi(x,t)}{\partial x} \chi_x^/(nx-k)dx$$

Тому систему (5.29) можна переписати у вигляді:

$$\int_0^e \frac{\partial u_\pi(x,t)}{\partial t} \chi(nx-k)dx + \alpha^2 \int_0^e \frac{\partial x_\pi(x,t)}{\partial x} \chi_x^/(nx-k)dx = \int_0^e f(x,t)\chi(nx-k)dx$$

$$k = \overline{1, n-1} \qquad (5.30)$$

Якщо врахувати формулу (5.27), то систему (5.30) перепишемо:

$$\int_0^e \left[\sum_{j=1}^{n-1} C_j^/(t)\chi(nx-j)\chi(nx-k) \right] dx + \alpha^2 \int_0^e \left[\sum_{i=1}^{n-1} C_j(t)\chi_x^/(nx-j)\chi_x^/(nx-k) \right] dx =$$

$$= \int_0^e f(x,t)\chi(nx-k)dx; \qquad k = \overline{1, n-1} \qquad (5.31)$$

Або

$$\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{kj} C_j^/(t) + \alpha^2 \sum_{j=1}^{n-1} b_{kj} C_j(t) = \beta_k(t) \quad k = \overline{1, n-1} \qquad (5.32)$$

де введено позначення ($k, j = \overline{1, n-1}$):

$$\alpha_{kj} = \int_0^e h(nx-k)h(nx-j)dx, \; b_{kj} = \int_0^e \chi_x^/(nx-k)\chi_x^/(nx-j)dx;$$

$$\beta_k(t) = \int_0^e f(x,t)\chi(nx-k)dx.$$

Система (5.32) є системою диференціальних рівнянь ($n-1$ рівнянь), яку треба розв’язувати при початкових даних (5.28) $C_j(0) = \varphi(x_j), j = \overline{0, n}$. У матричній формі задача Коші (5.28), (5.32) може бути представлена у вигляді:

$$A\vec{C}(t) + B\vec{C}(t) = \vec{F}(t); \vec{C}(0) = \vec{C}_0 = [C_1(0), ..., C_{n-1}(0)]^\tau \qquad (5.33)$$

де $\vec{C}(t) = [C_1(t), ..., C_{n-1}(t)]^\tau$

$j = \overline{1, n-1}$

$$A = [\alpha_{ij}]_{i=\overline{1,n-1}}; \quad B = [B_{ij}]_{i=\overline{1,n-1}}^{j=\overline{1,n-1}}; \quad \vec{F} = [\beta_1(t), ..., \beta_{n+1}(t)]^\tau.$$

Задачу Коші (5.33) можна розв’язати на ЕОМ методом Рунге-Кутта, користуючись стандартними програмами (СП) з бібліотеки СП.

5.3 Метод скінченних елементів розв'язання задачі Діріхле для рівняння Пуассона в прямокутнику

Математична постановка задачі: знайти функцію $u(x,y)$ наближено методом МСЕ, якщо

$$-\Delta u(x,y) = f(x,y); (x,y) \in G = \{0 < x < a, 0 < y < b\} \tag{5.34}$$

$$u(x,y) = 0; \quad (x,y) \in \partial G,$$

∂G - границя області G,

$$\partial G = \{x = 0,\ 0 \le y \le b;\ \ x = a,\ 0 \le y \le b;\ y = 0,\ o < x < a;\ \ y = b,\ 0 < x < a\}.$$

Згідно з методом Рітця розв'язок задачі дає мінімум функціоналу

$$J(u) = \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2f(x,y)u \right] dxdy \to \min_u \tag{5.36}$$

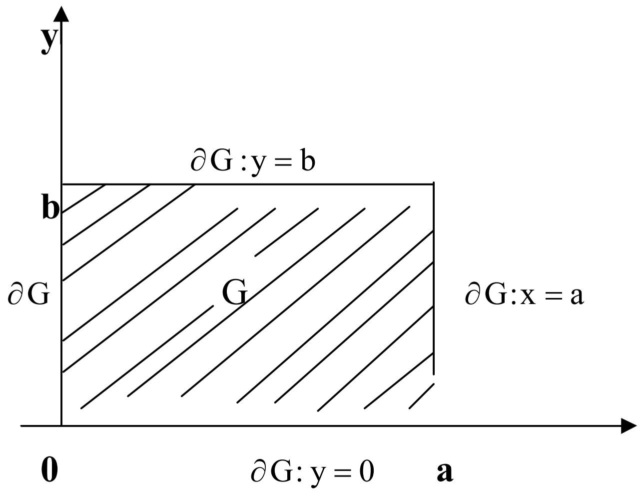

Рис. 5.3.

Серед усіх функцій, для яких $J(u) < \infty$ і які задовольняють граничну умову (5.35). Тому мінімум функціоналу $J(u)$ можна шукати не серед функцій $u(x,y) \in C^2(\overline{G})$, які мають неперервні частинні похідні 2-го порядку, а серед функцій, похідні яких $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ навіть мають розриви 1-го роду на деяких лініях.

До таких функцій належать, зокрема, функції:

$$u_{MN}(x,y) = \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} C_{ij}\, \chi\left(\frac{Mx}{a} - i \right) \chi\left(\frac{Ny}{b} - j \right) \tag{5.37}$$

де $\chi(t) = 0,5\left[|t-1| - 2(t) + |t+1| \right]$ або

$$\chi(t) = \begin{cases} 0, & t \le -1 \\ 1+t, & -1 < t \le 0. \\ 1-t, & 0 < t < 1 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases}$$

Враховуючи, що функція $\chi(t)$ має такі властивості:

$$\chi(0) = 1; \quad \chi(t) = 0; \quad \forall t : |t| \ge 1,$$

легко довести, що формула (5.37) задовольняє такі інтерполяційні умови $u_{MN}(x,y)=0, \quad (x,y)\in\partial G;$

$$u_{MN}(x_i,y_j)=C_{ij},\ 1\le i\le M-1;\ 1\le j\le N-1;\ x_j=\frac{ia}{M};\ y_j=\frac{jb}{N} \tag{5.38}$$

Далі , враховуючи формулу для $\chi(t)$, легко довести, що

$$J(u_{MN})<\infty\forall\left|C_{ij}\right|<\infty,\quad i=\overline{1,M-1},\quad j=\overline{1,N-1}$$

Якщо підставити формулу (5.37) у функціонал (5.36), то одержимо, що $J(u_{MN})=F(c_{11},c_{12},\ldots,c_{M-1,N-1})$. Тобто $J(u_{MN})$ буде функцією $(M-1)(N-1)$ змінних c_{ij}. Як відомо, функція $(M-1)(N-1)$ змінних c_{ij} досягає свого мінімуму серед таких значень c_{ij}, які задовольняють необхідні умови екстремуму

$$\frac{\partial J(u_{MN})}{\partial c_{\mu\upsilon}}=0,\quad \mu=\overline{1,M-1},\quad \upsilon=\overline{1,N-1} \tag{5.39}$$

Ця система рівнянь у детальному записі має такий вигляд:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J(u_{MN})}{\partial c_{\mu\upsilon}}&=\frac{\partial}{\partial c_{\mu\upsilon}}\int_0^a\int_0^b\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{i=1}^{M-1}\sum_{j=1}^{N-1}c_{ij}\chi\left(\frac{Mx}{a}-i\right)\chi\left(\frac{Ny}{b}-j\right)\right)\right]^2+\right.\\
&+\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_{i=1}^{M-1}\sum_{j=1}^{N-1}c_{ij}\chi\left(\frac{Mx}{a}-i\right)\chi\left(\frac{Ny}{b}-j\right)\right)\right]^2-2f(x,y)\times\\
&\left.\times\sum_{i=1}^{M-1}\sum_{j=1}^{N-1}c_{ij}\chi\left(\frac{Mx}{a}-i\right)\chi\left(\frac{Ny}{b}-j\right)\right\}dx\,dy=\\
&=2\int_0^a\int_0^b\left\{\sum_{i=1}^{M-1}\sum_{j=1}^{N-1}c_{ij}\left[\chi\left(\frac{Mx}{a}-i\right)\chi\left(\frac{Ny}{b}-j\right)\right]'_x\left[\chi\left(\frac{Mx}{a}-\mu\right)\chi\left(\frac{Ny}{b}-\upsilon\right)\right]'_x+\right.\\
&+\sum_{i=1}^{M-1}\sum_{j=1}^{N-1}c_{ij}\left[\chi\left(\frac{Mx}{a}-i\right)\chi\left(\frac{Ny}{b}-j\right)\right]'_y\left[\chi\left(\frac{Mx}{a}-\mu\right)\chi\left(\frac{Ny}{b}-\upsilon\right)\right]'_y-\\
&\left.-f(x,y)\chi\left(\frac{Mx}{a}-\mu\right)\chi\left(\frac{Ny}{b}-\upsilon\right)\right\}dx\,dy=0,\\
&\mu=\overline{1,M-1};\qquad \upsilon=\overline{1,N-1}
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Скоротимо на 2 і введемо такі позначення:

$$\begin{aligned}
a_{\mu\upsilon ij}&=\int_0^a\int_0^b\left\{\left[\chi\left(\frac{Mx}{a}-i\right)\chi\left(\frac{Ny}{b}-j\right)\right]'_x\left[\chi\left(\frac{Mx}{a}-\mu\right)\chi\left(\frac{Ny}{b}-\upsilon\right)\right]'_x+\right.\\
&\left.+\left[\chi\left(\frac{Mx}{a}-i\right)\chi\left(\frac{Ny}{b}-j\right)\right]'_y\left[\chi\left(\frac{Mx}{a}-\mu\right)\chi\left(\frac{Ny}{b}-\upsilon\right)\right]'_y\right\}dx\,dy,
\end{aligned}$$

$$\beta_{M\upsilon}=\int_0^a\int_0^b f(x,y)\chi\left(\frac{Mx}{a}-\mu\right)\chi\left(\frac{Ny}{b}-\upsilon\right)dx\,dy;\quad i,\mu=\overline{1,M-1};\quad j,\upsilon=\overline{1,N-1}$$

Тоді систему (5.40) можна записати:

$$\sum_{i=1}^{M-1}\sum_{j=1}^{N-1}a_{\mu\upsilon ij}c_{ij}=\beta_{\mu\upsilon},\quad \mu=\overline{1,M-1},\quad \upsilon=\overline{1,N-1} \tag{5.41}$$

Числа $a_{\mu\upsilon i j}$ та $\beta_{\mu\upsilon}$ можна обчислити наперед і потім розв'язати систему (5.41)методом Гаусса або методом прогонки. Тут треба врахувати, що матриця систем

$$A = \left[a_{\mu\upsilon i j} \right]_{\mu, i=\overline{1,M-1}}^{\upsilon, j=\overline{1,N-1}}$$

є матрицею, у якої числа $a_{\mu\upsilon i j} = 0$, якщо $|\mu - i| > 1$ або $|\upsilon - j| > 1$, або $|\mu - i| > 1$ та $|\upsilon - j| > 1$ одночасно.

Для розв'язання системи (5.41) на ЕОМ з допомогою стандартних програм замість подвійної нумерації для правих частин, а також рації для елементів матриці системи (5.41) $a_{\mu\upsilon i j}$ з чотирма індексами необхідно ввести звичайну нумерацію, яка використовується для векторів і матриць. Наведемо один із можливих варіантів такої нумерації. Нехай

$k = (\mu - 1)M + \upsilon,\ l = (j-1)M + i,\ i = \overline{1, M-1},\ j = \overline{1, N-1},\ \mu = \overline{1, M-1},\ \upsilon = \overline{1, N-1}$

(рис. 5.4.).

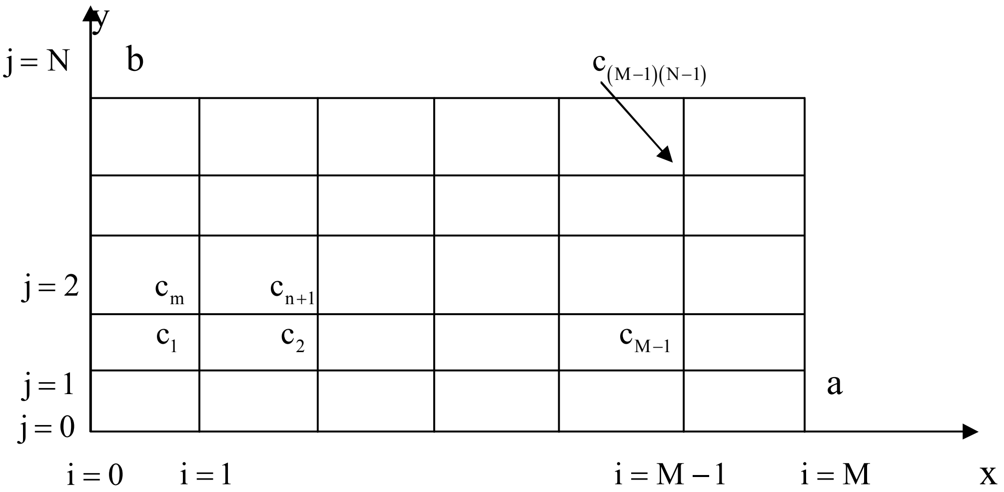

Рис. 5.4.

Введемо позначення :

$$a_{\mu\upsilon i j} =: a_{kl},\ c_{ij} =: c_l,\ \beta_{\mu\upsilon} =: \beta_k$$

Тоді система (5.2) може бути записана:

$$\sum_{l=1}^{(M-1)(N-1)} a_{kl} c_l = \beta_k, \quad k = \overline{1, (M-1)(N-1)} \tag{5.42}$$

Приклад: Нехай $f(x,y) = 1,\ a = 1,\ b = 1$. Це означає, що в квадраті $G = [0,1] \times [0,1] = [0,1]^2$ рівномірно розміщені джерела тепла інтенсивністю $f(x,y) = 1$, а на границі квадрату підтримується постійна температура , яка дорівнює нулю.

Візьмемо $M = 2,\ N = 2$, тобто розглянемо випадок, коли квадрат $G = [0,1]^2$ розбивається на 4 елементи. Тоді будемо шукати розв'язок задачі

$$-\Delta u(x,y) = 1, \quad (x,y) \in G = \{0 < x,\ y < 1\} \tag{5.43}$$

$$u(x,y)=0,\ (x,y)\in\partial G \tag{5.44}$$

у вигляді:

$$u_{22}(x,y)=c_{11}\quad \chi(2x-1)\chi(2y-1) \tag{5.45}$$

де c_{11}–невідома стала. Для знаходження цієї сталої величини одержимо згідно з (5.41) одне рівняння:

$$a_{IIII}c_{11}=\beta_{11} \tag{5.46}$$

де

$$a_{IIII}=\int_0^1\int_0^1\Big\{\big[\chi(2x-1)\chi(2y-1)\big]'_x\big[\chi(2x-1)\chi(2y-1)\big]'_x+\big[\chi(2x-1)\chi(2y-1)\big]'_y\times$$

$$\times\big[\chi(2x-1)\chi(2y-1)\big]'_y\Big\}dx\,dy=2\int_0^1\big[\chi^1_x(2x-1)\big]^2dx\int_0^1\chi^2(2y-1)dy=\frac{8}{3}$$

$$\beta_{11}=\int_0^1\int_0^1\chi(2x-1)\chi(2y-1)dx\,dy=\frac{1}{4}.$$

Використані такі формули:

$$\int_0^1\chi^2(2x-1)dx=\int_0^{\frac12}[2x]^2dx+\int_{\frac12}^1\big[2(1-x)\big]^2dx=\frac{4x^3}{3}\Bigg|_0^{\frac12}-\frac{4(1-x)^3}{3}\Bigg|_{\frac{1}{12}}^1=\frac{1}{3}$$

$$\int_0^1\big[\chi'_x(2x-1)\big]^2dx=\int_0^{\frac12}(2)^2dx+\int_{\frac12}^1[-2]^2dx=4.$$

Тобто $a_{IIII}=2\bullet4\bullet\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$.

Аналогічно для сталої β_{11} одержуємо:

$$\beta_{11}=\int_0^1\chi(2x-1)dx\int_0^1\chi(2y-1)dy=\left[\int_0^1\chi(2x-1)dx\right]^2=$$

$$=\left[\int_0^{\frac12}2x\,dx\int_{\frac12}^1 2(1-x)dx\right]^2=\left[x^2\Big|_0^{\frac12}-(1-x)^2\Big|_{\frac12}^0\right]^2=\left[\frac14+\frac14\right]^2=\frac14.$$

Таким чином, рівняння (5.46) має вигляд:

$$\frac{8}{3}c_{11}=\frac{1}{4}.$$

звідки $c_{11}=\frac{3}{32}\approx0{,}09375.$

Наближений розв'язок матиме вигляд:

$$u_{22}(x,y)=0{,}09375\chi(2x-1)\chi(2y-1).$$

Зауваження. На відміну від метода сіток метод МСЕ дає не тільки значення наближеного розв'язку у вузлах сітки, але й аналітичний вираз-формулу для обчислення наближеного розв'язку в точках (x,y), які не співпадають з вузлами .

Зауважимо також, що в даному прикладі аналогічним методом легко можна знайти коефіцієнти матриці $a_{i\,jk\,l}$ для випадку $M>2,\ N>2$. Наведемо їх:

$$a_{ijij}=\frac{8}{3};\ a_{ij,i\pm1,j}=-\frac{1}{3};\ a_{ij,i,j\pm1}=-\frac{1}{3};\ a_{ij,i+1,j+1}=-\frac{1}{3};\ a_{ij,kl}=0\ \forall_{k,l}:|k-i|>1,\ |l-j|>1$$

Тобто система (5.41) може бути записана:

$$C_{i-1,j-1}\bullet\left(-\frac{1}{3}\right)+C_{i+1,j}\left(-\frac{1}{3}\right)+C_{i-1,j+1}\left(-\frac{1}{3}\right)+C_{i,j-1}\left(-\frac{1}{3}\right)+C_{ij}\frac{8}{3}+C_{i,j+1}\left(-\frac{1}{3}\right)+C_{i+1,j-1}\left(-\frac{1}{3}\right)+$$
$$+C_{i+1,j}\left(-\frac{1}{3}\right)+C_{i+1,j+1}\left(-\frac{1}{3}\right)=\beta_{ij};$$
$$1\le i\le M-1,\qquad 1\le j\le N-1.$$

Розв'язавши цю систему методом Гаусса, знайдені значення C_{ij} підставляємо в формулу (5.37), яка і дасть наближений розв'язок задачі (5.34)-(5.36).

Розділ 6. ДОВІДНИКИ

6.1 Довідник. Ряди Фур'є

Нехай $f(x)$ - періодична функція з періодом $2l$ $f(x+2l)=f(x)\forall\in R$. Тоді, якщо $f(x)\in kc^1[-l,l]$ (тобто $f(x)$ є кусково-неперервною і має кусково-неперервну похідну $f'(x)$, то її можна розкласти в ряд Фур'є

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=l}^{\infty}\left[a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right],\quad -l\le x\le l, \tag{6.1}$$

коефіцієнти якого визначаються за формулами:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)=dx,\ a_k=\frac{1}{l}\int_{l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx,\ b_k=\frac{1}{l}\int_{l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\ k\in N \tag{6.2}$$

При цьому рівність (6.1) має місце в точках x, де $f(x)$–неперервна. Якщо ж в точці x функція $f(x)$ має розрив 1-го роду, то замість рівності (6.1) маємо рівність

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right],\ -l\le x\le l \tag{6.3}$$

Зокрема, якщо $f(x+2\pi)=f(x)\ \forall x\in R$, то ряд Фур'є має вигляд :

$$f(x)=\frac{a_o}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos kx+b_k\sin kx],\quad -\pi\le x\le\pi \tag{6.4}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx \tag{6.5}$$

Якщо на відрізку $[0,l]$ виконується рівність

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{l},\quad 0\le x\le l, \tag{6.6}$$

то коефіцієнти Фур'є знаходяться за формулами:

$$b_k=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\quad k\in N \tag{6.7}$$

З рівності

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{l}dx,\ \ 0\le x\le l \tag{6.8}$$

Коефіцієнти Фур'є визначаються за формулами:

$$a_o=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx;\ \ a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx;\ \ k\in N \tag{6.9}$$

Зокрема, якщо $l=\pi$, то одержимо розклад функції $f(x)$ в ряд Фур'є за синусами:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx,\ \ 0\le x\le \pi \tag{6.10}$$

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx,\ \ \ k\in N \tag{6.11}$$

або в ряд Фур'є за косинусами

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx,\ \ \ \ 0\le x\le \pi \tag{6.12}$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx,\ \ \ \ d_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,\ \ \ \ k\in N \tag{6.13}$$

Зауваження. У даному підручнику зустрічається така фраза: "враховуючи ортогональність системи функцій $\left\{\sin\frac{k\pi x}{l}\right\}$", яка означає, що

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx=0,\qquad k\ne m$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}dx=l\ne 0,\quad k,m\in\mathbb{N}$$

Аналогічно слід розуміти інші фрази щодо ортогональності систем функцій .

6.2 Довідник. Інтеграл Фур'є

Нехай функція $f(x)$ означена на нескінченному інтервалі $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ і абсолютно інтегрована на нім, тобто існує інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=Q<\infty\,.$$

Крім того, будемо вважати, що функція $f(x)$ належить до класу кусково-гладких функцій на $\mathbb{R}: f(x)\in kc^1(\mathbb{R})$. Тобто $f(x)$ неперервна і має неперервна і має неперервну похідну у всіх точках $x\in\mathbb{R}$ за виключенням скінченного числа точок, де функція f або її похідна f' мають розрив. Але в точках розриву існують права $f(x+0)$, $f'(x+0)$ і ліва $f(x-0)$, $f'(x-0)$ границі і при цьому виконується рівність

$$f(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \tag{6.14}$$

Сукупність усіх таких функцій позначимо $L^*(\mathbb{R})$. Для таких функцій справедлива рівність

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt\right)d\alpha \qquad (6.15)$$

у точках неперервності функції $f(x)$ і рівність

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt\right)d\alpha \qquad (6.16)$$

у точках розриву функції $f(x)$.

Вираз, який знаходиться справа у формулах (6.15), (6.16), називається інтегралом Фур'є функції $f(x)$ (або повторним інтегралом Фур'є функції $f(x)$).

Із формули

$\cos\alpha(t-x)=\cos\alpha t\cos\alpha x+\sin\alpha t\sin\alpha x$

витікає також інше представлення інтегралу Фур'є:

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left[A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\sin\alpha x\right]d\alpha \qquad (6.17)$$

де

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt,\qquad B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt \qquad (6.18)$$

При цьому кажуть, що формула (6.17)дає розклад функції $f(x)$ на гармоніки із неперервно змінною (від 0 до + ∞) частотою. Закон розподілу амплітуд і початкових фаз в залежності від частоти α описують функції $A(\alpha)$ та $B(\alpha)$.

Частинними випадками рівностей (6.17), (6.18) є косинус - і синус-перетворення Фур'є, які задаються відповідно такими прямими і оберненими перетвореннями:

$$F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt \qquad (6.19)$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} F(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha \qquad (6.20)$$

Функція $F(\alpha)$ називається косинус-перетворенням Фур'є для функції $f(x)$.

Аналогічно

$$\Phi(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt \qquad (6.21)$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \Phi(\alpha)\sin\alpha\chi\,d\alpha \qquad (6.22)$$

Функція $\Phi(\alpha)$ називається синус-перетворенням Фур'є для функції $f(x)$.

Інколи формулу (6.15) записують у комплексній формі:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} c(\alpha)e^{2\pi i\alpha x}d\alpha \qquad (6.23)$$

$$c(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\alpha}dx \qquad (6.24)$$

Функція $c(\alpha)$ називається перетворенням Фур'є функції $f(x)$, формула (6.23) дає обернене перетворення Фур'є функції $c(\alpha)$.

6.3. Довідник. Задача Штурма – Ліувіля

Задача знаходження функції $y(x)$ і числа λ, якщо

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+\left[\lambda r(x)-q(x)\right]y(x)=0, \quad 0<x<l, \tag{6.25}$$

$$y(0)=0, \qquad y(l)=0, \tag{6.26}$$

називається задачею Штурма–Ліувіля. Тут $p(x)$ - неперервно диференційована на відрізку $[0,l]$ функція, а $r(x), q(x)$ - неперервні на цьому відрізку функції. При цьому $p(x)>0$, $r(x)>0,$ $q(x)\geq 0,$ $\forall x\in[0,l];$ λ - стала. Очевидно, рівнянню (6.25) і граничним умовам (6.26) задовольняє тривіальний (тобто очевидний) розв'язок $y(x)=0 \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$. Всі числа λ, для яких існує нетривіальний (тобто не рівний тотожньо нулю) розв'язок $y(x)$, називаються власними значеннями, а $y_\lambda(x)$ - власними функціями, відповідними λ.

У випадку, коли $p, q\ r=const$, одержуємо

$$py''-(q-r\lambda)y=0 \tag{6.27}$$

Це звичайне диференціальне рівняння 2-го порядку з постійними коефіцієнтами. Для того щоб написати його загальний розв'язок, треба знайти корені $k_1,\ k_2$ характеристичного рівняння

$$pk^2-(q-r\lambda)=0$$

або

$$k^2+\frac{r\lambda-q}{p}=0. \tag{6.28}$$

Тут можливі три випадки.

1. $$\frac{q-r\lambda}{p}>0\Rightarrow k_{1,2}=t\sqrt{\frac{q-r\lambda}{p}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=c_1\exp\left(\sqrt{\frac{q-r\lambda}{p}}x\right)+c_2\exp\left(-\sqrt{\frac{q-r\lambda}{p}}x\right) \tag{6.29}$$

очевидно, з умов $y(0)=y(l)=0$ витікає $c_1=c_2=0\Rightarrow\ y=0$.

2. $$\frac{q-r\lambda}{p}=0\ \Rightarrow\ k_1=k_2=0\ \Rightarrow\ y=c_1=c_2x \tag{6.30}$$

У цьому випадку також із граничних умов $y(0)=y(l)=0$ витікають рівності $c_1=c_2=0,$тобто теж одержуємо тривіальний розв'язок задачі (6.26), (6.27) $y(x)\equiv 0$.

3. $$\frac{q-r\lambda}{p}<0\ \Rightarrow\quad k_{1,2}=\pm i\sqrt{\left|\frac{q-r\lambda}{p}\right|},\qquad i=\sqrt{-1}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 \cos\sqrt{\left|\frac{q - r\lambda}{p}\right|}\,x + c_2 \sin\sqrt{\left|\frac{q - r\lambda}{p}\right|}\,x \tag{6.31}$$

Задовольняючи умови (6.26), одержимо:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow & \left\{ c_1 \cos\left(\sqrt{\left|\frac{q - r\lambda}{p}\right|} \bullet 0\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\left|\frac{q - r\lambda}{p}\right|} \bullet 0\right) = 0 \right. \\ y(l) = 0 \Rightarrow & \left| \; c_1 \cos\left(\sqrt{\left|\frac{q - r\lambda}{p}\right|}\, l\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\left|\frac{q - r\lambda}{p}\right|}\, l\right) = 0 \right. \end{cases}.$$

Враховуючи, що $\cos 0 = 1,\ \sin 0 = 0$, перше з цих двох рівнянь перетворюється в рівність $c_1 = 0$. Тому друге рівняння можна записати у вигляді:

$$c_2 \sin\left(\sqrt{\left|\frac{q - r\lambda}{p}\right|}\, l\right) = 0 \tag{6.32}$$

Очевидно, що $c_2 \neq 0$, бо $y(x) \neq 0$. Тому, щоб виконувалась рівність (6.32), треба покласти

$$\sin\left(\sqrt{\left|\frac{q - r\lambda}{p}\right|}\, l\right) = 0.$$

Звідси витікає, що

$$\sqrt{\left|\frac{q - r\lambda}{p}\right|}\, l = k\pi, \quad k \in \mathbb{N} \tag{6.33}$$

Тобто власні числа λ_k знаходимо у вигляді

$$\lambda_k = \frac{\left[\mp\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 p + q\right]}{r}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lambda_k > 0 \tag{6.34}$$

а відповідні їм власні функції - у вигляді:

$$y_k = c_k \sin \lambda_k x, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{6.35}$$

6.4. Недоліки класичного рівняння нестаціонарної теплопровідності

В основу класичного рівняння теплопровідності покладена гіпотеза про лінійну залежність енергії тіла від температури $E = \alpha T$ і вектора теплового потоку від градієнта температурного поля

$$\vec{I} = -k\, grad\, T = -k\left(\vec{i}\frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial T}{\partial z}\right); \quad \alpha - const, \tag{6.36}$$

де k - коефіцієнт пропорційності, який називається коефіцієнтом теплопровідності. Ця гіпотеза дає адекватний опис розповсюдження температури в достатньо стійких температурних полях з "помірними" градієнтами. При дослідженні теплових збурень в плазмі, в рідкому гелії, в деяких діелектриках і полімерах при низьких температурах ця гіпотеза не дозволяє одержати результати, які з достатньою для практики точністю описували б розповсюдження температури. У цих випадках використовуються нелінійні рівняння нестаціонарної теплопровідності, у яких коефіцієнти теплопровідності, а також функції, що описують джерела енергії в середовищі, залежать від температури, а не тільки від координат точки середовища [12]. Крім того, ряд металів, пластиків, суспензій при нагріванні зберігають пам'ять про теплову історію (спадковість процесу), що виражається в тому, що фізичні і термодинамічні характеристики середовищ залежать ще й від часу.

Указані теплові процеси інколи в науковій літературі називаються тепловими режимами із загостренням. При їх дослідженні важливу роль відіграють процеси із скінченною швидкістю розповсюдження теплового збурення.

Нижче покажемо, що з розв'язку класичної задачі Коші для рівняння нестаціонарної теплопровідності для нескінченного стержня, яка розглядалась в підрозд. 3.1.,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2};\quad (-\infty<x<\infty,\quad t>0) \tag{6.37}$$

$$u(x,0)=\varphi(x);\quad (-\infty<x<\infty) \tag{6.38}$$

можна зробити висновок: з гіпотези (6.29) витікає, що теплові збурення розповсюджуються миттєво (з нескінченною швидкістю).

Нехай

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & x<x_1\\ u_0, & x_1<x<x_2\\ 0, & x>x_2;\ u>0\end{cases} \tag{6.39}$$

Розв'язок задачі (6.37) – (6.39) можна записати у вигляді інтеграла Пуассона (підрозд. 3.1.)

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\exp\left(\frac{-(\xi-x)^2}{4a^2t}\right)d\xi=$$

$$=\frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x_1}^{x_2}\exp\left(\frac{-(\xi-x)^2}{4a^2t}\right)d\xi. \tag{6.40}$$

Враховуючи, що функція $e^z>0,\ \forall z\in\mathbb{R}$ в одержаній формулі $\int_{x_1}^{x_2}\exp\left(-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}\right)d\xi>0$. Тому, яким би не було малим значення часу $t>0$, одержимо $u(x,t)>0\ \forall x\in(-\infty,\infty)$. Тобто згідно з формулою (6.39) в початковий момент часу температура $u_0>0$ була задана тільки на деякому скінченному проміжку $[x_1,x_2]$ стержня. З формули (6.40) витікає, що $u(x,t)>0,\quad \forall x\in(-\infty,\infty),\ t>0$. Тобто це означає, що в кожну точку $x\notin[x_1,x_2]$ тепло приходить миттєво (з нескінченною швидкістю). Таким чином, бачимо, що з рівняння (6.37), яке одержано з використанням гіпотези (6.36), витікає висновок: тепло розповсюджується вздовж стержня миттєво (кожний із життєвого досвіду знає, що таких стержнів на практиці немає). Але якщо врахувати припущення, що рівняння(6.37) описує розподіл температури в стержні з теплоізольованою бічною поверхнею, а також те, що одержувані за формулою (6.40) чисельні значення температури $u(x,t)$ досить близько співпадають із експериментальними даними, в класичних задачах теплопровідності, розглянутих в даному підручнику, рівняння (6.37) дає результати, які цілком задовольняють.

ДОДАТОК 1

Розв'язання типових прикладів

П р и к л а д 1. Знайти в указаній області відмінні від тотожного нуля функції y=y(x), які є розв'язками диференціального рівняння і задовольняють заданим граничним умовам (задача Штурма-Ліувіля).

$y + \lambda y = 0$, $\qquad x \in (1;2)$ $\qquad$ /Д.1.1./

$y(1) = 0$; $\qquad y'(2) = 0$ $\qquad$ /Д.1.2./

Треба знати такі значення параметра λ, при яких гранична задача має відмінні від тотожного нуля розв'язки.

Розглянемо три випадки:

1. λ<0.

Характеристичне рівняння має вигляд:

$\mu^2 + \lambda = 0$

Його корені $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{|\lambda|}$.

Загальний вигляд розв'язку диференціального рівняння:

$y(x) = c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}(x-1)} + c_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}(x-1)}$.

Сталі c_1 та c_2 знаходяться з граничних умов:

$$\begin{aligned} y(1) = 0 \Rightarrow \\ y(2) = 0 \Rightarrow \end{aligned} \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ \sqrt{|\lambda|}e^{\sqrt{|e|}}c_1 - \sqrt{|\lambda|}e^{-\sqrt{|\lambda|}}c_2 = 0 \end{cases}$$

З першого рівняння витікає, що сталі c_1 та c_2 мусять бути різних знаків або дорівнювати нулю. З другого рівняння, враховуючи, що функція $e^x > 0$ додатна на вій області визначення, виникає, що $c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow y = 0$. Але треба знати функцію $y = y(x)$, яка відмінна від тотожного нуля. Отже, λ<0 не може бути.

2. λ=0. тоді задача має вигляд:

$$y'' = 0; \quad y(1) = 0, \quad y'(2) = 0.$$

Загальний вигляд розв'язку диференціального рівняння:

$$y(x) = c_1 x + c_2$$

Сталі c_1 та c_2 знаходяться з граничних умов:

$$\begin{matrix} y(1) = c_1 + c_2 = 0 \\ y'(2) = c_1 = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y(x) = 0.$$

Треба знайти функцію $y = y(x)$, яка відмінна від тотожного нуля. Отже, λ=0 не може бути.

3. λ>0

Характеристичне рівняння має вигляд:

$$\mu^2 + \lambda = 0.$$

Його корені: $\mu_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$.

Загальний вигляд розв'язку диференціального рівняння:

$y(x) = c_1 \sin\sqrt{\lambda}x + c_2 \cos\sqrt{\lambda}x$.

Сталі c_1 та c_2 знаходяться з граничних умов:

$$y(1) = c_1 \sin\sqrt{\lambda} + c_2 \cos\sqrt{\lambda} = 0$$

$$y'(2) = \sqrt{\lambda}c_1 \cos 2\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}c_2 \sin 2\sqrt{\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = -c_2 ctg\sqrt{\lambda} \Rightarrow -c_2\sqrt{\lambda}\left[ctg\sqrt{\lambda}\cos 2\sqrt{\lambda} + \sin 2\sqrt{\lambda}\right] = 0$$

Якщо $c_2 = 0$, то $y(x) = 0$, що суперечить умові відмінності $y(x)$ від тотожного нуля; $\sqrt{\lambda} \neq 0$, бо λ>0. Виберемо параметр λ так, щоб $\cos\sqrt{\lambda} = 0$. Це ціле сімейство значень:

$$\cos\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2, \quad \text{n=0,1,2,...} \ .$$

Отже, знаходимо сімейство функцій $y_n(x)$, відповідних до λ_n. При кожному значенні λ_n шуканий розв'язок :

$$y_n(x) = \left[-\sin\left(x\left(\frac{\pi}{2} + \pi\lambda\right)\right)ctg\sqrt{\lambda_n} + \cos\left(x\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)\right)\right]C_n \quad ,$$

Числа λ_n називаються власними числами, а $y_n(x)$ - власними функціями задачі /Д.1.1/ , /Д.1.2/.

Приклад 2. Розв'язати задачу Діріхле для рівняння Лапласа у крузі

$$\Delta u = 0 \quad , \quad 0 \le r < 1,$$

$$u\big|_{r=1} = \varphi^2 + \varphi + 1, \qquad u = u(r,\varphi) \quad . \qquad /Д1.3/$$

Перейдемо до полярних координат. У полярних координатах (r,φ) рівняння Лапласа має вигляд:

$$\Delta u(r,\varphi) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0 \qquad /Д.1.4/$$

Розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді:

$$u(r,\varphi) = R(r)\phi(\varphi). \qquad /Д.1.5/$$

Підставляючи /Д.1.5/ у /Д.1.4/, одержимо:

$$\frac{1}{r}\left(rR''(r)\phi(\varphi)+R'(r)\phi(\varphi)\right)+\frac{1}{r^2}R(r)\phi''(\varphi)=0,$$

або

$$\left(r^2R''(r)+rR'(r)\right)\phi(\varphi)=-R(r)\phi''(\varphi).$$

Поділимо обидві частини на $R\phi$. Одержимо:

$$\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=-\frac{\phi''(\varphi)}{\phi(\varphi)},$$

Права частина не залежить від r, ліва – від φ і вони тотожньо дорівнюють одне одному. Отже, вони дорівнюють сталій, яку позначимо λ. Тоді

$$\begin{cases}\varphi''(\varphi)+\lambda\varphi(\varphi)=0\\ \phi(\varphi+2\pi)=\phi(\varphi)\end{cases} \qquad /Д.1.6/$$

$$\begin{cases}r^2R''(r)+rR'(r)-\lambda R(r)=0\\ R(0)<\infty\end{cases} \qquad /Д1.7./$$

Маємо дві задачі. Для задачі /Д.1.6./ з умови періодичності одержимо $\lambda=n^2$ і тоді $\phi_n(\varphi)=A_n\cos(n\varphi)+B_n\sin(n\varphi), n=0,1,2,....$ загальний розв'язок задачі /Д.1.7./ має вигляд:

$R_0(r)=C_0+D_0\ln r,$ при n=0

$R_n(r)=C_nr^n+D_nr^{-n}\quad R$ при n>0.

З умови обмеженості розв'язку в середині круга одержуємо $D_0=0$ і $D_n=0, n>0$. Таким чином $R_0(r)=C_nr^n$. Розв'язок задачі /Д.1.3./ шукаємо у вигляді розкладу за власними функціями:

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}R_n(r)\phi_n(\varphi)$$

або

$$u(r,\varphi)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin\varphi)r^n. \qquad /Д.1.8./$$

Знайдемо $A_{0,}A_{n,}B_n$ з умови $u(1,\varphi)=\varphi^2+\varphi+1$:

$$A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)=\varphi^2+\varphi+1. \qquad /Д.1.9./$$

Проінтегруємо праву і ліву частини /Д.1.9./ по φ від 0 до 2π.

$$\int_0^{2\pi}A_0d\varphi+\sum_{n=1}^{2\pi}A_n\int_0^{2\pi}\cos n\varphi d\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\int_0^{2\pi}\sin n\varphi d\varphi=\int_0^{2\pi}(\varphi^2+\varphi+1)d\varphi.$$

Враховуючи, що інтеграли від періодичних функцій по періоду дорівнюють нулю, маємо:

$$\int_0^{2\pi} A_0 d\varphi = \int_0^{2\pi} (\varphi^2 + \varphi + 1) d\varphi$$

або

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\varphi^2 + \varphi + 1) d\varphi = \frac{4\pi^2 + 3\pi + 3}{3}. \quad /Д1.10./$$

Помножимо ліву та праву частини рівності /Д.1.8./ на $\sin k\varphi$ і проінтегруємо по φ від 0 до 2π:

$$\int_0^{2\pi} A_0 \sin k\varphi d\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^{2\pi} \cos n\varphi \sin k\varphi d\varphi + \sum_0 B_n \int_0^{2\pi} \sin n\varphi \sin k\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} (\varphi^2 + \varphi + 1) \sin k\varphi d\varphi$$

Враховуючи, що функції $1, \sin\varphi, \cos\varphi, \sin 2\varphi, \cos 2\varphi, ...$ взаємно ортогональні, маємо

$$B_k \int_0^{2\pi} \sin^2 k\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} (\varphi^2 + \varphi + 1) \sin k\varphi d\varphi$$

або

$$B_k \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\varphi^2 + \varphi + 1) \sin k\varphi d\varphi = -\frac{2 + 4\pi}{k}, k \in N. \qquad /Д.1.11./$$

Аналогічно, помножуючи обидві частини /Д.1.8./ на $\cos k\varphi$ і інтегруючи по φ від 0 до 2π, одержуємо:

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\varphi^2 + \varphi + 1) \cos k\varphi d\varphi = \frac{4}{k^2}, k \in N. \qquad /Д.1.12./$$

Задача буде розв'язана, якщо ці інтеграли /Д.1.11./, /Д.1.12./ будуть обчислені і підставлені в ряд Фур'є /Д.1.8./ числа $A_0, A_n, B_n, n \in N$:

$$u(r, \varphi) = \frac{4\pi^2 + 3\pi + 3}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cos n\varphi - \frac{2 + 4\pi}{n} \sin n\varphi\right) r^n.$$

П р и к л а д 3.

Розв'язати граничну задачу для рівняння Пуассона в кільці

$$u''_{xx}(x, y) + u''_{yy}(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad 1<r<2, \qquad /Д.1.13./$$

$$u(x, y) \Big|_{r=1} = 2, \qquad /Д.1.14./$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=2} = 0, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad /Д.1.15./$$

Перейдемо до полярних координат. Цей перехід здійснюється з допомогою заміни змінних

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi .$$

У полярних координатах (r,φ) задача має вигляд $(u(x,y) = \overline{u}(r,\varphi))$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial \overline{u}}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \varphi^2} = r\cos 2\varphi,\ 1<\mathrm{r}<2,\ 0 \le \varphi < 2\pi$$

$$\overline{u}(r,\varphi)\ \Big|_{r=1} = 2, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi , \qquad /Д.1.16./$$

$$\frac{\partial \overline{u}(r,\varphi)}{\partial r}\ \Big|_{r=2} = 0, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi . \qquad /Д.1.17./$$

Розв’язок цієї задачі будемо шукати у вигляді суми

$\overline{u}(r,\varphi) = u_0(r,\varphi) + u_i\,(r,\varphi),$

де $u_0(r,\varphi)$ - загальний розв’язок рівняння /Д.1.18./;

$u_i\,(r,\varphi)$ - частинний розв’язок рівняння /Д.1.19./.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u_0}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial \varphi^2} = 0 \qquad /Д.1.18./$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u_i}{\partial_r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial \varphi^2} = r\cos 2\varphi \qquad /Д.1.19./$$

і

$$(u_0 + u_i\,)\ \Big|_{r=1} = 2, \qquad /Д.1.20./$$

$$(\frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{\partial u_i}{\partial r})\ \Big|_{r=2} = 0. \qquad /Д.1.21./$$

Тоді функція $\overline{u}(r,\varphi)$ буде розв’язком задачі /Д.1.2./.

Розглянемо розв’язок рівняння /Д.1.18./. Рішення цього рівняння будемо шукати у вигляді:

$$u_0(r,\varphi) = R(r)\phi(\varphi). \qquad /Д.1.22./$$

Підставляючи /Д.1.22./ у /Д.1.18./, одержимо:

$$\frac{1}{r}(rR''(r) + R'(r))\phi(\varphi)) + \frac{1}{r^2}R(r)\phi''(\varphi) = 0$$

або

$$(r^2 R''(r) + rR'(r))\phi(\varphi)) = -R(r)\phi''(\varphi) .$$

Поділимо обидві частини на $R\phi$. Одержимо:

$$\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\phi''(\varphi)}{\phi(\varphi)} = \lambda .$$

Права частина не залежить від r, ліва – від φ і вони тотожно дорівнюють одне одному. Отже, вони дорівнюють сталій, яку позначимо λ. Тоді:

$$\begin{cases} \phi''(\varphi) + \lambda\phi(\varphi) = 0 \\ \phi(\varphi + 2\pi) = \phi(\varphi) \end{cases} \qquad /Д.1.23./$$

$$r^2 R''(r) + rR' - \lambda R(r) = 0 . \qquad /Д.1.24./$$

Маємо дві задачі. Для задачі /.Д.1.23./ з умови періодичності одержимо $\lambda = n^2$ і тоді $\phi_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi, n = 0,1,2,...$

Загальний розв'язок задачі /Д.1.24./ має вигляд:

$$R_0(r) = C_0 + D_0 \ln r \qquad \text{при n=0;}$$

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n} \qquad \text{при n>0.}$$

Розв'язок рівняння /Д.1.18./ шукаємо у вигляді розкладу за власними функціями:

$$u_0(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(r)\phi_n(\varphi)$$

або

$$u_0(r,\varphi) = C_0 + D_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(A_n r^n + \frac{c_n}{r^n})\cos n\varphi + (B_n r^n + \frac{Dn}{r^n})\sin n\varphi \right].$$

Частинний розв'язок рівняння /Д.1.25./ будемо шукати у вигляді:

$$u_i\,(r,\varphi) = (Ar^3 + Br^2 + Cr + D)\cos 2\varphi\,. \qquad \text{/Д.1.25./}$$

Підставляючи вираз /Д.1.25./ у /Д.1.19./, одержимо:

$$(5Ar - \frac{3c}{r} - \frac{4D}{r^2})\cos 2\varphi = r\cos 2\varphi\,. \qquad \text{/Д.1.26./}$$

Розглянемо рівність /Д.1.26./ як розклад функції по ортонормованій системі функцій 1, $\cos\varphi, \sin\varphi, \cos 2\varphi, \sin 2\varphi, ...$ і прирівняємо коефіцієнти розкладу по цих функціях в лівій і правій частинах рівності. Маємо:

$$-3c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$-4D = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$5A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{5.}$$

Отже,

$$u_i\,(r,\varphi) = \frac{1}{5} r^3 \cos 2\varphi\,.$$

Тоді загальний розв'язок рівняння /Д.1.19./ має вигляд:

$$\overline{u} = u_н + u_0 \Rightarrow \overline{u}(r,\varphi) = \frac{r^3}{5}\cos 2\varphi + C_0 + D_0 \ln r +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left[(A_n r^n + \frac{C_n}{r^n})\cos n\varphi + (B_n r^n + \frac{D_n}{r^n})\sin n\varphi \right]$$

Знайдемо сталі $C_0, D_0, A_n, C_n, B_n, D_n,$ n=1,2,… .

$$\frac{1}{5}\cos 2\varphi + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(A_n + C_n)\cos n\varphi + (B_n + D_n)\sin n\varphi \right] = 2\,.$$

Тобто

$$C_0 = 2; \qquad A^2 + C^2 + \frac{1}{5} = 0$$

$$A_n + C_n = 0; \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{2\} \qquad \text{/Д.1.27./}$$

$$B_n + D_n = 0; \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

З умови /Д.1.21./ маємо:

$$\frac{D_0}{2}+\frac{12}{5}\cos 2\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n n 2^{n-1}-n\frac{C_n}{2^{n+1}})\cos n\varphi+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(nB_n 2^{n-1}-n\frac{D_n}{2^{n+1}})\sin n\varphi=0.$$

Тобто:

$$D_0=0$$

$$4A_2-\frac{C_2}{4}+\tfrac{12}{5}=0$$

$$nA_n 2^{n-1}-\frac{nC_n}{2^{n+1}}=0 \qquad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{2\}; \qquad /Д.1.28./$$

$$nB_n 2^{n-1}-n\frac{D_n}{2^{n+1}}=0 \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

З /Д.1.28./ виникає, що:

$C_0=2, \quad D_0=0;$

$A_n=C_n=0 \quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{2\};$

$B_n=D_n=0 \quad \forall n\in\mathbb{N}.$

Для коефіцієнтів A_2, C_2 маємо систему:

$$\begin{cases} A_2+C_2+\dfrac{1}{5}=0 \\ 4A_2-\dfrac{C_2}{4}+\dfrac{12}{5}=0, \end{cases}$$

розв'язок якої $A_2=-49/85$ та $C_2=32/85$. Отже, розв'язок задачі /Д.1.2./ має вигляд:

$$u(r,\varphi)=2+\left(-\frac{49}{85}r^2+\frac{32}{85}\cdot\frac{1}{r^2}+\frac{1}{5}r^3\right)\cos 2\varphi.$$

Задача розв'язана.

П р и к л а д 4. Розв'язати першу задачу для рівняння теплопровідності на відрізку $[0;2]$

$$u'_t(x,t)=u''_{xx}(x,t), \qquad 0<x<2, \qquad t>0$$

$$u(x,t)=\begin{cases} x^2, 0\le x<1, \\ 2-x, 1\le x\le 2, \end{cases} \quad t>0 \qquad /Д.1.29./$$

$$u(0,t)=0, \qquad u(2,t)=0, \qquad t>0.$$

Розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді:

$$u(x,t)=X(x)T(t). \qquad /Д.1.30./$$

Підставляючи /Д.1.30./ у /Д.1.29./, одержимо:

$$X(x)T'(t)=x''(x)T(t).$$

Поділимо обидві частини на TX . Одержимо:

$$\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Права частина не залежить від t, ліва – від x і вони тотожно дорівнюють. Отже, вони дорівнюють сталій, позначимо її λ . Тоді:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0;$$

$$X(0)=0, \quad X(2)=0. \qquad /Д.1.31./$$

$$T'(t)+\lambda T(t)=0. \qquad /Д.1.32./$$

Маємо дві задачі. Розв’язок задачі /Д.1.31./ - сімейство власних чисел $\lambda_n=\left(\pi n/2\right)^2, n\in\mathbb{N}$ та відповідних їм власних функцій $X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{2}$.

Загальний вигляд розв’язку задачі /Д.1.32./:

$$T_n(t)=A_n e^{-\lambda_n t}=A_n\exp(-(\frac{\pi n}{2})^2 t).$$

Загальний розв’язок задачі /Д.1.29./ шукаємо у вигляді розкладу за власними функціями:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x),$$

або

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\exp(-(\frac{\pi n}{2})^2 t)\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Знайдемо сталі A_n з початкової умови:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{2}=\begin{cases} x^2, & 0\le x,<1,\\ 2-x, & 1<x\le 2.\end{cases} \qquad /Д.1.33./$$

Помножимо ліву частину рівності /Д.1.33./ на $\sin\frac{k\pi x}{2}$ і проінтегруємо по x по кожній частині відрізка $\left[0,2\right]$

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\int_0^2\sin\frac{\pi nx}{2}\sin\frac{\pi kx}{2}dx=\int_0^1 x^2\sin\frac{\pi kx}{2}dx+\int_1^2\left(2-x\right)\sin\frac{\pi kx}{2}dx, k\in\mathbb{N}$$

Враховуючи ортогональність функцій $\left\{\sin\frac{\pi kx}{2}\right\}$, маємо :

$$A_k\int_0^2\sin^2\frac{k\pi x}{2}dx=\int_0^1 x^2\sin\frac{\pi kx}{2}dx+\int_1^2\left(2-x\right)\sin\frac{\pi kx}{2}dx, k\in\mathbb{N}$$

або , інтегруючи частинами праву частину рівності,

$$A_k=\frac{12}{\left(k\pi\right)^2}\sin\frac{k\pi}{2}+\frac{16}{\left(k\pi\right)^3}\left(\cos\frac{k\pi}{2}-1\right), k\in\mathbb{N}$$

Тому

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{12}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}+\frac{16}{k^3\pi^3}\left(\cos\frac{k\pi}{2}-1\right)\right]*$$

$$*\exp\left(-\left(\frac{\pi k}{2}\right)^2 t\right)\sin\frac{k\pi x}{2} \quad .$$

Задача розв’язана.

Приклад 5. Знайти функцію $u(x,t)$ розподілу температури в стержні довжини $l=4$ з тепло ізольованою бічною поверхнею, якщо температура на кінцях дорівнює нулю, а початкова температура задана функцією $f(x)$; $f(x)=u_0x$, якщо $0<x\le 2$, $f(x)=u_0(4-x)$, якщо $2<x<4$.

Розв’язок. Математична постановка цієї задачі має такий вигляд. Знайти функцію $u(x,t)$, якщо

$$u_t'=a^2u_{xx}'' \qquad (0<x<4;t>0),$$

$$u(a,t)=0, \quad u(4,t)=0 \qquad (t>0)$$

$$u(x,0)=f(x)=\begin{cases} u_0x, 0<x\le 2 \\ u_0(4-x), 2<x\le 4\end{cases}$$

Ця задача удержується з /3.33/-/3.35/, якщо в останній покласти $F(x,t)\equiv 0$. Тому розв’язок цієї задачі шукаємо у вигляді ряду /3.36/

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k(t)\sin\frac{k\pi x}{4}$$

Де невідомі функції $C_k(t)$, $k\in\mathbb{N}$ знаходиться за формулами /3.14/, тут треба покласти $l=4$, $F(x,t)\equiv 0$, тобто $F_k(t)\equiv 0$, $k\in\mathbb{N}$:

$$C_k(t)=C_k(0)\exp(-\lambda_k^2 t), \lambda_k=\frac{ak\pi}{4}, \qquad k\in\mathbb{N}$$

$$C_k(0)=\frac{2}{4}\int_0^4\varphi(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{4}d\xi=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^2 u_0\xi\sin\frac{k\pi\xi}{4}+\int_0^2 u_0(4-\xi)\xi\sin\frac{k\pi\xi}{4}d\xi\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{u_0 8}{k\pi}\left[-\cos\frac{k\pi}{2}+\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}\right]+\frac{u_0 8}{k\pi}\left[\cos\frac{k\pi}{2}+\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}\right]\right\}=$$

$$=\frac{16u_0}{(k\pi)^2}\sin\frac{k\pi}{2}=\begin{cases} 0, k=2m, & m\in\mathbb{N} \\ \dfrac{(-1)^{m+1}16u_0}{(2m-1)^2\pi^2} & k=2m-1, m\in\mathbb{N}\end{cases}$$

Використані такі формули:

$$\int_0^2 u_0\xi \sin\frac{k\pi\xi}{4}d\xi = u_0\int_0^2 \xi\sin\frac{k\pi\xi}{4}d\xi = \left| \begin{matrix} u=\xi, & du=d\xi \\ dv=\sin\frac{k\pi\xi}{4}d\xi, & \end{matrix} \right.$$

$$V=\int\sin\frac{k\pi\xi}{4}d\xi=-\frac{4}{k\pi}\cos\frac{k\pi\xi}{4}\Big| = u_0\left[\xi(-\frac{4}{k\pi}\cos\frac{k\pi\xi}{4})\ \Big|_0^2 -\right.$$

$$\left.-\int_0^2(-\frac{4}{k\pi}\cos\frac{k\pi\xi}{4})d\xi\ \right]=u_0\left[-\frac{8}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}+\frac{4}{k\pi}\int_0^2\cos\frac{k\pi\xi}{4}d\xi\ \right]=$$

$$=u_0\left[-\frac{8}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}+(\frac{4}{k\pi})^2\sin\frac{k\pi\xi}{4}\Big|_0^2\ \right]=$$

$$=\frac{u_0 8}{k\pi}[-\cos\frac{k\pi}{2}+\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}\ ];$$

$$\int_2^4 u_0(4-\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{4}d\xi=u_0\int_2^4(4-\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{4}d\xi=$$

$$=\left| \begin{matrix} u=4-\xi, du=(4-\xi)'_\xi\, d\xi=-d\xi \\ dv=\sin\frac{k\pi\xi}{4}d\xi, v=\int\sin\frac{k\pi\xi}{4}d\xi=-\frac{4}{k\pi}\cos\frac{k\pi\xi}{4} \end{matrix} \right| =$$

$$=u_0\left[(4-\xi)\left(-\frac{4}{k\pi}\cos\frac{k\pi\xi}{4}\right)\Big|_2^4-\int_2^4\left(-\frac{4}{k\pi}\cos\frac{k\pi\xi}{4}(-d\xi)\right)\right]=$$

$$=u_0\left[\frac{8}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}-\left(\frac{4}{k\pi}\right)^2\sin\frac{k\pi\xi}{4}\Big|_2^4\right]=$$

$$=u_0\left[\frac{8}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}+\left(\frac{4}{k\pi}\right)^2\sin\frac{k\pi}{2}\right]=\frac{8u_0}{k\pi}\left[\cos\frac{k\pi}{2}+\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}\right].$$

Таким чином, для $C_k(t)$ одержимо:

$C_{2m}(0)=0, m\in\mathbb{N}$

$$C_{2n-1}(0)=\frac{(-1)^{m+1}16u_0}{(2m-1)^2\pi^2}, m\in\mathbb{N}.$$

Тому

$C_{2m}(t)=0, m\in\mathbb{N}$

$$C_{2m-1}(t)=\frac{(-1)^{m+1}16u_0}{(2m-1)^2\pi^2}\exp\left(-\left(\frac{a(2m-1)\pi}{4}\right)^2 t\right)$$

$$u(x,t)==\sum_{m=1}^{\infty}C_{2m}(t)\sin\frac{(2m)\pi x}{4}+\sum_{m=1}^{\infty}C_{2m-1}(t)\sin\frac{(2m-1)\pi x}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}16u_0}{(2m-1)^2\pi^2}\exp\left(-\left(\frac{a(2m-1)\pi}{4}\right)^2 t\right)\sin\frac{(2m-1)\pi x}{4}\Rightarrow.$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\frac{16u_0}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^2}\exp\left(-\left(\frac{a(2m-1)\pi}{4}\right)^2 t\right)\sin\frac{(2m-1)\pi x}{4}$$

Це і є відповідь до прикладу 5.

П р и к л а д 6. розв'язати задачу для рівняння Пуассона у кулі з радіусом r=11.

$$u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}=xz, 0\le r\le 11 \qquad \text{/Дю1.34./}$$

$$u\big|_{r=11}=0.$$

Перейдемо до сферичної системи координат:

$$\begin{cases} x=r\cdot\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\cdot\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cdot\cos\theta. \end{cases}$$

Тоді задача /Д.1.34./ має вигляд $(u(x,y,z)=\overline{u}(r,\varphi,\theta)$:

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\overline{u}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=r^2\sin\theta\cos\varphi\cos\theta \\ u\big|_{r=11}=0 \end{cases}$$

/Д.1.35./

Розв'язок задачі шукаємо у вигляді $\overline{u}(r,\varphi,\theta)=v(r,\varphi,\theta)+w(r,\varphi,\theta)$, де $v(r,\varphi,\theta)=\frac{1}{6}r^4\sin^3\theta\cos^3\varphi\cos\theta.$

Для функції $w(r,\varphi,\theta)$ маємо задачу:

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)=0 \\ w\big|_{r=11}=-\frac{11^4}{6}\sin^3\theta\cdot\cos^3\varphi\cdot\cos\theta. \end{cases}$$

/Д.1.36./

Розв'язок /Д.1.38/ будемо шукати у вигляді $w(r,\varphi,\theta)=R(r)\cdot x(\varphi,\theta)$. Підставляючи цю функціюу /Д.1.36./, маємо:

$$r^2R^4+2rR'-\lambda R=0 \qquad \text{/Д.1.37./}$$

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{d^2x}{d\varphi^2}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[(\sin\theta)\frac{dx}{d\theta}\right]+\lambda x=0 \qquad /Д.1.38/$$

Розв'язок /Д.1.38./ шукаємо у вигляді $x(\varphi,\theta)=\phi(\varphi)\cdot\psi(\theta)$. Функція $x(\varphi,\theta)$ повинна бути 2π періодичною по змінній φ, тобто $x'(\varphi+2\pi,\theta)=x(\varphi,\theta)$. Підставляючи вигляд функції $x(\varphi,\theta)$ в /Д.1.38./ та враховуючи останнє зауваження, маємо:

$$\begin{cases}\phi''+\mu\phi=0\\ \phi(\varphi+2\pi)=\phi(\varphi)\end{cases} \qquad /Д.1.39./$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\psi}{d\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)\psi=0 \qquad /Д.1.40./$$

З /Д.1.39./ маємо $\mu_k=k^2,\phi_k=A_k\cdot\cos k\varphi+B\cdot\sin k\varphi, k=0,1,2,...$

Покладемо у /Д.1.40./ $\xi=\cos\theta$ та позначимо $\psi(\theta)=y(\cos\theta)=y(\xi)$. Тоді

$$\frac{d}{d\xi}\left[\left(1-\xi^2\right)\frac{dY}{d\xi}\right]+\left(\lambda-\frac{k^2}{1-\xi^2}\right)Y=0 \qquad /Д.1.41/$$

Рівняння /Д.1.41/ має обмежені на відрізку $[-1,1]$ розв'язки тоді і тільки тоді, коли $\lambda=n(n+1)$, і цілими розв'язками є функції

$$P_n^k(\xi)=\left(1-\xi^2\right)^{\frac{k}{2}}\frac{d^kP_{n(\xi)}}{d\xi^k},$$

де $P_n(\xi)$, $n=0,1,2....$- поліном Лежандра

$$P_n(\xi)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\xi^n}\left[\left(\xi^2-1\right)^n\right]\int_{-1}^{1}P_n(\xi)P_m(\xi)d\xi=\begin{cases}0, m\neq n\\ \dfrac{2}{2n+1}, m=n\end{cases}$$ Таким чином,

$$x_n(\varphi,\theta)=n_0P_n(\cos\theta)+\sum_{k=1}^{n}\left(A_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi\right)P_n^k(\cos\theta);$$

$$R_n(r)=\left(C_nr^n+\frac{D_n}{r^{n+1}}\right)X_n(\varphi,\theta).$$

Розв'язок задачі /Д.1.36./ треба шукати у вигляді:

$$w(r,\varphi,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}r^n\left[A_{0n}P_n(\cos\theta)+\sum_{k=1}^{n}\left(A_{kn}\cos_{k\varphi}+B_{kn}\sin k\varphi\right)P_n^k(\cos\theta)\right]$$

Сталі A_{0n}, A_{kn}, B_{kn} знаходимо з піввідношення:

$$w(11,\varphi,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}11^n\left[A_{0n}P_n(\cos\theta)+\sum_{k=1}^{n}\left(A_{kn}\cos k\varphi+B_{kn}\sin k\varphi\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot P_n^k(\cos\theta)\right]=-\frac{1}{6}\cdot 11^4\cdot\sin^3\theta\cdot\cos^3\varphi\cdot\cos\theta$$

Тоді розв'язок задачі /Д.1.35./ має вигляд:

$$u(r,\varphi,\theta)=\frac{1}{6}r^4\cdot\sin^3\theta\cos^3\varphi\cos\theta+w(r,\varphi,\theta).$$

Задача розв'язана.

ДОДАТОК 2.

Варіанти задач для контрольних робіт

1. Знайти в указаній області відмінні від тотожного нуля функції $y=y(x)$, які є розв'язком диференціального рівняння і задовольняють заданим граничним умовам.

1. $y''+\lambda y=0,\quad 0<x<2$
   $y(0)=y'(2)=0$
2. $y''+\lambda y=0,\quad 1/2<x<2$
   $y(1/2)=y'(2)=0$
3. $y''+\lambda y=0,\quad 0<x<\pi$
   $y(0)=y'(\pi)=0$
4. $y''+\lambda y=0, \pi/5<x<\pi/2$
   $y(\pi/5)=y'\quad(\pi/2)=0$
5. $y''+\lambda y=0,\quad 0<x<1$
   $y(0)=y'(1)=0$
6. $y''+\lambda y=0,\quad 1/4<x<1$
   $y(1/4)=y'(1)=0$
7. $y''+\lambda y=0,\quad 0<x<2\pi$
   $y(0)=y'(2\pi)=0$
8. $y''+\lambda y=0,\quad \dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{4}$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=y'\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0$$

9. $y''+\lambda y=0, \qquad 1/2<x<1$

$$y\left(1/2\right)=y'(1)=0$$

10. $y''+\lambda y=0, \qquad 1/10<x<1$

$$y\left(1/10\right)=y'(1)=0$$

11. $y''+\lambda y=0, \qquad \pi/3<x<\pi$

$$y\left(\pi/3\right)=y'(\pi)=0$$

12. $y''+\lambda y=0, \qquad \frac{1}{12}<x<2$

$$y\left(\frac{1}{12}\right)=y'(2)=0$$

13. $y''+\lambda y=0, \qquad 1/3<x<3$

$$y\left(1/3\right)=y'(3)=0$$

14. $y''+\lambda y=0, \qquad \frac{\pi}{4}<x<3\pi$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=y'(3\pi)=0$$

15. $y''+\lambda y=0, \qquad 0,3<x<2$

$$y(0,3)=y'(2)=0$$

16. $y''+\lambda y=0, \qquad \pi/4<x<5\pi/4$

$$y\left(\pi/4\right)=y'\left(5\pi/4\right)=0$$

17. $y''+\lambda y=0, \qquad 2<x<3$

$$y(2)=y'(3)=0$$

18. $y''+\lambda y=0, \qquad 5/2<x<7/2$

$$y\left(5/2\right)=y'\left(7/2\right)=0$$

19. $y''+\lambda y=0, \qquad \frac{3\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$

$$y\left(\frac{3\pi}{4}\right)=y'\left(\frac{5\pi}{4}\right)=0$$

20. $y''+\lambda y=0, \quad 0<x<2$

$y'(0)=y(2)=0$

2.Розв'язати задачу Діріхле для рівняння Лапласа в крузі:

1. $\Delta u=0, \quad 0\le r<1; \quad u\big|_{r=1}=\varphi^2+\varphi-1;$
2. $\Delta u=0, \quad 0\le r<2; \quad u\big|_{r=2}=\varphi^2+\varphi;$
3. $\Delta u=0, \quad 0\le r<3; \quad u\big|_{r=3}=\varphi^2-\varphi+1;$
4. $\Delta u=0, \quad 0\le r<4; \quad u\big|_{r=4}=\varphi^2-7;$
5. $\Delta u=0, \quad 0\le r<5; \quad u\big|_{r=5}=\varphi^2-5\varphi;$
6. $\Delta u=0, \quad 0\le r<6; \quad u\big|_{r=6}=3\varphi^2-2;$
7. $\Delta u=0, \quad 0\le r<7; \quad u\big|_{r=7}=\varphi^2+7;$
8. $\Delta u=0, \quad 0\le r<8; \quad u\big|_{r=8}=4\varphi^2+5;$
9. $\Delta u=0, \quad 0\le r<9; \quad u\big|_{r=1}=5\varphi^2-3;$
10. $\Delta u=0, \quad 0\le r<10; \quad u\big|_{r=10}=3\varphi^2+5\varphi;$
11. $\Delta u=0, \quad 0\le r<10; \quad u\big|_{r=10}=\varphi^2-\varphi+1;$
12. $\Delta u=0, \quad 0\le r<9; \quad u\big|_{r=9}=\varphi^2+\varphi-3;$
13. $\Delta u=0, \quad 0\le r<8; \quad u\big|_{r=8}=\varphi^2+3\varphi-5;$
14. $\Delta u=0, \quad 0\le r<7; \quad u\big|_{r=7}=\varphi^2-4\varphi+5;$
15. $\Delta u=0, \quad 0\le r<6; \quad u\big|_{r=6}=\varphi^2+4\varphi-5;$
16. $\Delta u=0, \quad 0\le r<5; \quad u\big|_{r=5}=4\varphi^2-7\varphi;$
17. $\Delta u=0, \quad 0\le r<4; \quad u\big|_{r=4}=5\varphi^2+6\varphi;$
18. $\Delta u=0, \quad 0\le r<3; \quad u\big|_{r=3}=6\varphi^2-5\varphi+1;$
19. $\Delta u=0, \quad 0\le r<2; \quad u\big|_{r=2}=5\varphi^2-6\varphi+3;$
20. $\Delta u=0, \quad 0\le r<1; \quad u\big|_{r=1}=4\varphi^2+5\varphi+4;$

3. Розв'язати граничну задачу для рівняння Пуассона в кільці:

$$1. u''_{xx}+u''_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}};\frac{1}{3}<r<1, u\Big|_{r=\frac{1}{3}}=0, \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1}=0;$$

$$2. .u''_{xx}+u''_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}};\frac{1}{4}<r<1, u\Big|_{r=\frac{1}{4}}=0, \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1}=0;$$

$$3. .u''_{xx}+u''_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}};\frac{1}{5}<r<1, u\Big|_{r=\frac{1}{5}}=0, \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1}=0;$$

$$4. .u''_{xx}+u''_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}};\frac{1}{6}<r<1, u\Big|_{r=\frac{1}{6}}=0, \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1}=0;$$

$$5. .u''_{xx}+u''_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2y^2}};\frac{1}{7}<r<1, u\Big|_{r=\frac{1}{7}}=0, \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1}=0;$$

$$6. .u''_{xx}+u''_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}};\frac{1}{8}<r<1, u\Big|_{r=\frac{1}{8}}=0, \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1}=0;$$

$$7. .u''_{xx}+u''_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}};\frac{1}{9}<r<1, u\Big|_{r=\frac{1}{9}}=0, \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1}=0;$$

$$8. u''_{xx}+u''_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}};\frac{1}{10}<r<1, u\Big|_{r=\frac{1}{10}}=0, \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1}=0;$$

$$9. u''_{xx}+u''_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}};\frac{1}{2}<r<1, u\Big|_{r=\frac{1}{2}}=0, \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1}=0;$$

$$10. u''_{xx}+u''_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}};1<r<2, u\Big|_{r=1}=0, \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=2}=0;$$

$$11. u''_{xx}+u''_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}};1<r<2, u\Big|_{r=1}=0, \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=2}=1;$$

$$12. u''_{xx}+u''_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}};1<r<2, u\Big|_{r=1}=2, \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=2}=3;$$

$$13.\ u''_{xx}+u''_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}};1<r<2,u\Big|_{r=1}=2,1;\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=2}=1,2;$$

$$14.\ u''_{xx}+u''_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}};\frac{1}{2}<r<1,u\Big|_{r=\frac{1}{2}}=4,\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1}=1;$$

$$15.\ u''_{xx}+u''_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}};\frac{1}{2}<r<1,u\Big|_{r=\frac{1}{2}}=5,\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1}=1;$$

$$16.\ u''_{xx}+u''_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}};\frac{1}{2}<r<1,u\Big|_{r=\frac{1}{2}}=6,\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=1}=1;$$

$$17.\ u''_{xx}+u''_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}};1<r<2,u\Big|_{r=2}=7,\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=2}=1;$$

$$18.\ u''_{xx}+u''_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}};1<r<2,u\Big|_{r=1}=8,\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=2}=1;$$

$$19.\ u''_{xx}+u''_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}};1<r<2,u\Big|_{r=1}=9,\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=2}=1;$$

$$20.\ u''_{xx}+u''_{yy}=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}};1<r<2,u\Big|_{r=1}=2,\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=2}=1.$$

4.Розв’язати задачу для рівняння Пуассона в кулі:

$1.\ u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}=xz, \quad 0\le r<1, \quad u\Big|_{r=1}=0$

$2.\ u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}=xz, \quad 0\le r<2, \quad u\Big|_{r=2}=0$

$3.\ u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}=xz, \quad 0\le r<3, \quad u\Big|_{r=3}=0$

$4.\ u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}=xz, \quad 0\le r<4, \quad u\Big|_{r=4}=0$

$5.\ u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}=xz, \quad 0\le r<5, \quad u\Big|_{r=5}=0$

$6.\ u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}=xz, \quad 0\le r<6, \quad u\Big|_{r=6}=0$

$7.\ u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}=xz, \quad 0\le r<7, \quad u\Big|_{r=7}=0$

$8.\ u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}=xz, \quad 0\le r<8, \quad u\Big|_{r=8}=0$

9. $u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}=xz, \quad 0\le r<9, \quad u\big|_{r=9}=0$

10. $u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}=xz, \quad 0\le r<10, \quad u\big|_{r=10}=0$

11. $u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}=xz, \quad 0\le r<11, \quad u\big|_{r=11}=0$

12. $u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}=xz, \quad 0\le r<12, \quad u\big|_{r=12}=0$

13. $u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}=xz, \quad 0\le r<13, \quad u\big|_{r=13}=0$

14. $u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}=xz, \quad 0\le r<14, \quad u\big|_{r=14}=0$

15. $u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}=xz, \quad 0\le r<15, \quad u\big|_{r=15}=0$

16. $u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}=xz, \quad 0\le r<16, \quad u\big|_{r=16}=0$

17. $u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}=xz, \quad 0\le r<17, \quad u\big|_{r=17}=0$

18. $u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}=xz, \quad 0\le r<18, \quad u\big|_{r=18}=0$

19. $u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}=xz, \quad 0\le r<19, \quad u\big|_{r=19}=0$

20. $u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz}=xz, \quad 0\le r<20, \quad u\big|_{r=20}=0$

Розв’язати початково-граничну задачу для рівняння теплопровідності на відрізку:

1. $u'_t=u''_{xx,}\,0<x<1,t>0;u(x,0)=\begin{cases} x^2, 0<x\le\frac{1}{2,} \\ \frac{1-x}{2},\frac{1}{2}<x<1 \end{cases} u(0,t)=u(1,t)=0$

2. $u'_t=4u''_{xx,}\,0<x<2,t>0;u(x,0)=\begin{cases} x^2, 0<x\le 1, \\ 1-x,\frac{1}{2}<x<2 \end{cases} u(0,t)=u(2,t)=0$

3. $u'_t=9u''_{xx,}\,0<x<3,t>0;u(x,0)=\begin{cases} x^2, 0<x\le {}^{3}\!/_{2}, \\ (3-x)\frac{3}{2},{}^{3}\!/_{r}<x<2 \end{cases} u(0,t)=u(3,t)=0$

4. $u'_t=16u''_{xx,}\,0<x<4,t>0;u(x,0)=\begin{cases} x\,{}^{2}\!/_{2}, 0<x\le 2, \\ 4-x,2<x<4 \end{cases} u(0,t)=u(4,t)=0$

5. $u'_t=25u''_{xx,}\,0<x<5,t>0;u(x,0)=\begin{cases} 2x\,{}^{2}\!/_{5}, 0<x\le {}^{5}\!/_{2}, \\ 5-x,{}^{5}\!/_{2}<x<5 \end{cases} u(0,t)=u(5,t)=0$

6. $u'_t = 36u''_{xx,}\ 0 < x < 6, t > 0; u(x,0) = \begin{cases} x^2/3, 0 < x \le 3, \\ 6 - x, 3 < x < 6 \end{cases} u(0,t) = u(6,t) = 0$

7. $u'_t = 49u''_{xx,}\ 0 < x < 7, t > 0; u(x,0) = u(7,t) = 0, u(x,0) = \begin{cases} 2x^2/7, 0 < x \le 7/2, \\ 7 - x, 7/2 < x < 7 \end{cases}$

8. $u'_t = 64u''_{xx,}\ 0 < x < 8, t > 0; u(x,0) = \begin{cases} x^2/4, 0 < x \le 4, \\ 8 - x, 4 < x < 8 \end{cases} u(0,t) = u(8,t) = 0$

9. $u'_t = 81u''_{xx,}\ 0 < x < 9, t > 0; u(x,0) = u(9,t) = 0, u(x,0) = \begin{cases} 2x^2/9, 0 < x \le 9/2, \\ 9 - x, 9/2 < x < 9 \end{cases}$

10. $u'_t = 100u''_{xx,}\ 0 < x < 10, t > 0; u(x,0) = \begin{cases} x^2/5, 0 < x \le 5, \\ 10 - x, 5 < x < 10, \end{cases} u(0,t) = u(10,t) = 0$

11. $u'_t = u''_{xx,}\ 0 < x < 1, t > 0; u(0,t) = u(1,t) = 0, u(x,0) = \begin{cases} 2x^2, 0 < x \le 1/2, \\ 1 - x, 1/2 < x < 1 \end{cases}$

12. $u'_t = 4u''_{xx,}\ 0 < x < 2, t > 0; u(0,t) = u(2,t) = 0, u(x,0) = \begin{cases} x, 0 < x \le 1, \\ 2 - x, 1 < x < 2 \end{cases}$

13. $u'_t = 9u''_{xx,}\ 0 < x < 3, t > 0; u(x,0) = \begin{cases} x, 0 < x \le 3/2, \\ 3 - x, 3/2 < x < 3, \end{cases} u(0,t) = u(3,t) = 0$

14. $u'_t = 16u''_{xx,}\ 0 < x < 4, t > 0; u(0,t) = u(4,t) = 0, u(x,0) = \begin{cases} x, 0 < x \le 2, \\ 4 - x, 2 < x < 4 \end{cases}$

15. $u'_t = 25u''_{xx,}\ 0 < x < 5, t > 0; u(x,0) = \begin{cases} x, 0 < x \le 5/2, \\ 5 - x, 5/2 < x < 5, \end{cases} u(0,t) = u(5,t) = 0$

16. $u'_t = 36u''_{xx,}\ 0 < x < 6, t > 0; u(0,t) = u(6,t) = 0, u(x,0) = \begin{cases} x, 0 < x \le 3, \\ 6 - x, 3 < x < 6 \end{cases}$

17. $u'_t = 49u''_{xx,}\ 0 < x < 7, t > 0; u(x,0) = \begin{cases} x, 0 < x \le 7/2, \\ 7 - x, 7/2 < x < 7, \end{cases} u(0,t) = u(7,t) = 0$

18. $u'_t = 64u''_{xx,}\ 0 < x < 8, t > 0; u(0,t) = u(8,t) = 0, u(x,0) = \begin{cases} x, 0 < x \le 4, \\ 8 - x, 4 < x < 8 \end{cases}$

19. $u'_t = 81u''_{xx,}\ 0 < x < 9, t > 0; u(x,0) = \begin{cases} x, 0 < x \le 9/2, \\ 9 - x, 9/2 < x < 9, \end{cases} u(0,t) = u(9,t) = 0$

20. $u'_t = 100u''_{xx,}\ 0 < x < 10, t > 0; u(0,t) = u(10,t) = 0, u(x,0) = \begin{cases} x, 0 < x \le 5, \\ 10 - x, 5 < x < 10 \end{cases}$

ДОДАТОК 3

Предметний вказівник

1.Стаціонарний розподіл тепла в стержні довжини:

а/ в стержні довжини e /див. формулу /2.5//

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = f(x); \quad 0 < x < e$$

$$u(0) = u_0$$

$$u(e) = u_1$$

б/ в стержні довжини e, коли стержень має конвертний обмін із зовнішнім середовищем /див. формулу /2.6//

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = f(x); \quad 0 < x < e$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha(u - u_c)\right]\Big|_{x=0} = 0$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha(u - u_c)\right]\Big|_{x=e} = 0$$

2.Стаціонарний розподіл тепла:

а/ в циліндрі з постійними значеннями температури на поверхнях /див. формулу /2.14//

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial z^2} = 0$$

$$\left(R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2; \quad z \in \mathbb{R}\right)$$

$$u(x,y,z)\Big|_{x^2+y^2=R_1^2} = u_1$$

$$u(x,y,z)\Big|_{x^2+y^2=R_2^2} = u_2$$

б/ у круговій шайбі /див. формулу /2.31//

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0, (x,y) \in \Omega = \left\{0 \le x^2 + y^2 < R^2\right\}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

3. Нестаціонарний розподіл тепла в стержнях:

а/ нескінченному /див. формулу /3.16//

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}; \qquad x\in\mathbb{R}, t>0$$

$$u(x,0)=\varphi(x), x\in\mathbb{R}$$

б/ напівнескінченному /див. формулу /3.16//

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad (0<x<\infty, t>0)$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad (x>0), \varphi(0)=0,$$

$$u(0,t)=0 \qquad (t>0)$$

в/ напівнескінченному /див. формулу /3.78//

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}; (x>0, t>0)$$

$$u(x,0)=0 \qquad (x>0)$$

$$u(0,t)=T \qquad (t>0)$$

г/ напівнескінченну /див. формулу /3.91/-/3.93//

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}; (0<x<\infty, t>0)$$

$$u(0,t)=0; \qquad (t>0)$$

$$u(x,0)=\varphi(x) \qquad (x>0)$$

д/ напівнескінченному /див. формулу /3.66//

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}; \qquad (0<x<\infty, t>0)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0}=0 \qquad (t>0)$$

$$u(x,0)=\varphi(x); (0<x<\infty), \varphi'(0)=0$$

е/ у стержні довжини e , якщо його кінці не пропускають тепла /див. формулу /3.21//

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}; (0<x<e, t>0)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0}=0; \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=e}=0$$

$$u(x,0)=\varphi(x); \qquad (0<x<e)$$

ж/ у стержні довжини e, якщо один кінець має теплову ізоляцію, а на другому задана постійна температура /див. формулу /3.32//

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}; (0<x<e; t<0)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0}=0; u(e,t)=u_e;$$

$$u(x,0)=\varphi(x)$$

з/ у прямокутній пластині /див. формулу /4.5//

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right)$$

$$(0<x<b;0<y<c;t>0)$$

$$u(x,y,t)=\varphi(x,y);(0<x<b;0<y<c)$$

$$u\Big|_{x=0}=u\Big|_{x=b}=0;u\Big|_{y=0}=u\Big|_{y=c}=0$$

і/ у кулі /див. формулу /4.58//

$$\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t}=a^2\Delta u(x,y,z,t);(0\le x^2+y^2+z^2+R^2,t>0)$$

$$u(x,y,z,0)=f(r);r=\sqrt{x^2+y^2+z^2};$$

$$u(x,y,z,t)\Big|_{\sqrt{x^2+y^2+z^2}=R}=0$$

4. Неоднорідне рівняння теплопровідності /див. формули /3.38//

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+\frac{1}{c\rho}F(x,t);(0<x<e,t>0)$$

$$u(x,0)=\varphi(x);(0<x<e)$$

$$u(0,t)=0;u(e,t)=0$$

5. Загальна задача теплопровідності для стержня довжини e

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+\frac{1}{c\rho}F(x,t);(0<x<e,t>0)$$

$$u(0,t)=\mu_1(t);u(e,t)=\mu_2(t)$$ /див. формули /3.45/,

$$u(x,0)=\varphi(x);(0<x<e)$$

/3.50/, /3.51//.

6.Охолодження рівномірно нагрітого напівнескінченного стержня /див. формулу /4.25/, /4.26//

$$\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial z^2}\right)$$

$$(0\le x^2+y^2<R^2;z\subset\mathbb{R},t<0)$$

$$u(x,y,z,t)\Big|_{x^2+y^2=R^2}=0 \qquad (z\in R,t>0)$$

$$u(x,y,z,0)=\varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \qquad (0\le x^2+y^2<R^2)$$

8.Рівняння Бесселя /див. формулу /4.9/, /4.10//

$$x^2y''(x)+xy'(x)+(x^2-\nu)y(x)=0$$

або

$$y''(x) + \frac{y'(x)}{x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y(x) = 0$$

Література

1. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Наука, 1970. – 710 с.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: - Высш. шк., 1967. – 599 с.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления (для втузов). Т.2. – М.: Наука, 1985. – 560с.
5. Бугров Я.С., Никольский С. М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
6. Милославский А.И., Михайлов В.В. Математические основы теплопроводности: Учеб. пособие. – Харьков: УЗПИ, 1984. – 70 с.
7. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты). – М.: Высш. шк., 1983. – 112 с.
8. Вуколов Э. А., Ефимов А.В. и др. Сборник задач по математике (для втузов). Специальные курсы. – М.: Наука, 1984. – 607 с.
9. Владимиров В.С., Михайлов В.П. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1974. – 271 с.
10. Высшая математика. Ч. 2. Программа, методические указания и контрольные задания. – Харьков: ХИПИ, 1992. – 212 с.
11. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в уравнениях и задачах. Ч.3. – М.: Высш. шк., 1971. – 287 с.
12. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для нелинейных параболических уравнений. – М.: Наука, 1987. – 470 с.

Навчальне видання

ЛИТВИН Олег Миколайович
ПЕРШИНА Юлія Ігорівна
ЛИТВИН Олег Олегович
НЕЧУЙВІТЕР Олеся Петрівна

ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Навчально-методичний посібник

Формат 60x84/16. Гарнітура Times New Romen
Папір для цифрового друку. Друк ризографічний.
Ум. друк. арк. ____.
Тираж 100 пр.
Українська інженерно-педагогічна академія
61003, м. Харків, вул. Університетська, 16.