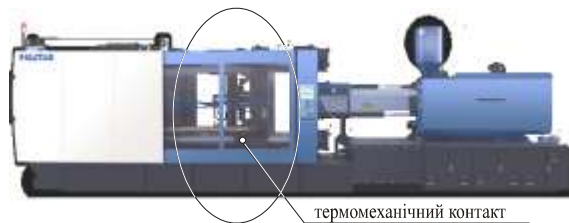


УДК 539.3

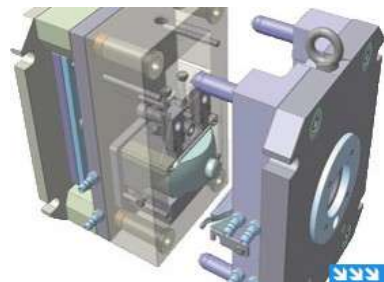
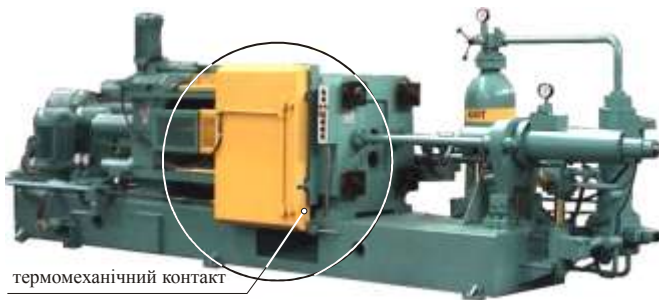
Ткачук А.М., Пеклич М.М.

АНАЛІЗ КОНСТРУКЦІЙНОЇ МІЦНОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ МАШИНОБУДІВНИХ КОНСТРУКЦІЙ ПРИ ТЕРМОМЕХАНІЧНОМУ КОНТАКТІ: МЕТОДИ, МОДЕЛІ, АЛГОРИТМИ

Вступ. Сучасні машини, обладнання, апарати (рис. 1) працюють в умовах високих механічних і температурних навантажень. У складі їх конструкцій містяться елементи, які знаходяться між собою у контактній взаємодії. Ця обставина змушує для аналізу їх конструкційної міцності визначати термопружний стан (ТПС) при термомеханічному контакті (ТМК). На відміну від класичних постановок термічних і пружних крайових задач, локальні постановки яких трансформуються до еквівалентних варіаційних рівнянь, контактні задачі вимагають розвитку нових підходів, наприклад, на основі теорії варіаційних нерівностей (ТВН). Це порівняно новий напрямок у механіці, і тому не всі типи задач з односторонніми обмеженнями одержали розв'язок, зокрема, з точки зору обґрунтування методів дискретизації.



Прес-форма для оснащення термопластавтоматів



Форма для лиття під тиском



Модель корпусу конвертора



Гідрооб'ємна передача

Рис. 1. Приклади машинобудівних конструкцій, елементи яких знаходяться у термомеханічному контакті

На даний час для дослідження різноманітних фізико-механічних полів за наявності обмежень на границях типу нерівностей найбільш ефективним є варіаційне формулювання таких задач, у т.ч. охоплююче механічний та термічний контакти. Проте у реальних умовах експлуатації елементів машин і механічне, і термічне навантаження діють у сукупності. А це призводить до необхідності розв'язання зв'язаної задачі термомеханічного контакту, для якої варіаційне формулювання відсутнє. З іншого боку, велике розповсюдження на практиці має випадок ТМК тіл з поверхнями узгодженої (конгруентної, співпадаючої) або близької форми, що часто призводить до появи кромочного контакту на границях спряжених ділянок поверхні. У цих зонах спостерігаються потенційні особливості (сингулярності) у розподілі шуканих величин навіть у розв'язках звичайних контактних пружних задач чи задач термічного контакту. Проте порядок особливостей у задачах зв'язаного термомеханічного контакту досліджено недостатньо, а потреби практики вимагають розвитку можливостей моделювання термопружного стану елементів машин з урахуванням термомеханічної контактної взаємодії.

Таким чином, виникає актуальна науково-практична задача удосконалення методів дослідження зв'язаного термомеханічного контакту і визначення особливостей термопружного стану для елементів машин з поверхнями узгодженої форми, що визначило напрямок дослідження, описаного у роботі.

Мета роботи полягає в удосконаленні методів та моделей для аналізу зв'язаних задач термомеханічного контакту елементів машинобудівних конструкцій по поверхнях узгодженої форми, а також визначення особливостей термопружного стану для оцінки їх конструкційної міцності.

Для досягнення мети поставлені та розв'язані наступні *задачі*:

- 1) на основі аналізу традиційних методів розробити узагальнений підхід до визначення термопружного стану з урахуванням термомеханічного контакту елементів машин;
- 2) розробити загальну варіаційну постановку та математичні моделі термопружного стану з урахуванням зв'язаного термомеханічного контакту;
- 3) провести числову реалізацію математичних моделей термопружного стану;
- 4) розв'язати прикладні задачі аналізу ТПС з урахуванням зв'язаного термомеханічного контакту для машинобудівних конструкцій та встановити закономірності розподілу полів механічних та температурних величин;
- 5) провести експериментальне дослідження контактної взаємодії елементів машинобудівних конструкцій.

У результаті досліджень:

- визначено характер розподілу особливостей при термомеханічному контакті двох клинів з довільними кутами та встановлена незалежність порядку особливості у розподілі контактного тиску від порядку особливості теплових потоків;
- на прикладі контакту довгої циліндричної оболонки з бандажем встановлені характерні випадки топології ділянок контакту та відставання оболонки, а також виявлено наявність трьох характерних розмірів, які визначають різко відмінні масштаби зміни компонент термопружного стану;
- створені моделі для опису ТМК тонкостінних елементів конструкцій, які удосконалені та відрізняються від раніше відомих тим, що умови контакту записані для точок на контактній поверхні з більш коректним урахуванням стискання стінки вздовж нормалі, а також введенням додаткового ступеня вільності для опису розподілу температури по товщині;
- розроблено оболонковий скінченний елемент (СЕ), який відрізняється від традиційних удосконаленим способом урахування контактних умов на лицьовій поверхні замість серединної, що дає можливість моделювати контакт без традиційного використання тривимірних елементів, причому зі збереженням фізичних особливостей розподілу змінних стану в контакті.

Аналіз стану питання в літературі дав змогу обґрунтувати шляхи розв'язання поставлених задач [1-26]. Зокрема, проаналізовані методи розв'язання контактних задач. Серед них високими потенційними можливостями володіє теорія варіаційних нерівностей (роботи Ліонса, Гловінські, Стампак'я, Кравчука, Львова [17-19]), що дає можливість природним чином переходити до формулювань задач з нелінійностями, відкриває широкі можливості дискретних варіантів, в т.ч. скінченно-елементних постановок. Проте стандартні технології МСЕ за наявності зв'язаного ТМК можуть дати суттєву похибку. Отже, виникає задача узагальнення варіаційної постановки термопружної задачі з урахуванням зв'язаного ТМК та її адаптації до дискретизації.

Проведено аналіз методів розв'язання контактних задач з особливостями на границях областей узгоджених поверхонь контактної взаємодії, наприклад, про дію плоского штампа на пружну напівплощину (роботи Галіна, Штаєрмана, Мухелішвілі) [20, 21] з кореневою особливістю на краях штампів, для яких ефективні методи комплексних потенціалів Колосова-Мухелішвілі, інтегральних перетворень Фур'є та Мелліна [20-23]. Але недостатньо досліджень, присвячених взаємному впливу сингулярності температурного поля та поля напружень, тоді як такі задачі актуальні для багатьох конструкцій.

Проаналізовано методи моделювання контактної взаємодії оболонок, для яких важливим чинником є вибір тієї чи іншої теорії оболонок. Так, застосування класичної теорії оболонок Кірхгофа-Лява призводить до появи особливостей на границі контакту з обмеженнями по поверхнях узгодженої форми (роботи Пелеха, Григолюка, Сухорольського) [24-26]. При застосуванні теорій типу Тимошенка та за урахування обтискання цих оболонок даного ефекту можна уникнути. Оглянуті формулювання і для термопружних задач оболонок. Установлено, що, попри досить розвинений математичний апарат, зв'язані задачі термопружного контакту оболонок мають відкриті актуальні проблеми: залежність топології контактних зон та особливостей розподілу контактних тиску і теплового потоку при механічному і ТМК від обраної теорії оболонок; розробка оболонкових СЕ, що більш коректно описують ТПС та умови ТМК.

Проведений аналіз дав можливість сформулювати задачі досліджень, розв'язання яких викладено нижче.

Математичної модель. Побудовано математичну модель термопружного стану з урахуванням зв'язаного термомеханічного контакту. При цьому формулюється зв'язана термопружна контактна задача в локальній та варіаційній постановках. На прикладі частинних задач для двох плоских клинів та циліндричної оболонки визначено порядок особливостей в розподілі контактного тиску і теплових потоків. У сукупності це складає математичну модель для дослідження ТПС елементів машин з урахуванням ТМК.

Наведена локальна постановка зв'язаної термопружної контактної задачі. На прикладі контакту двох тіл 1 і 2, що займають у просторі області V_1 , V_2 (рис. 2), записані основні співвідношення:

- геометричні (Коші) –

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}; \quad (1)$$

- фізичні (Дюамеля-Неймана та Фур'є) –

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl}(T - T_{ref})), \quad (2)$$

$$q_i = -\lambda_{ij}(T) \cdot T_{,j}; \quad (3)$$

- рівняння рівноваги та балансу енергії –

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0; \quad (4)$$

$$-q_{i,i} + w = c\rho\dot{T} + 3K\alpha T\dot{\theta}; \quad (5)$$

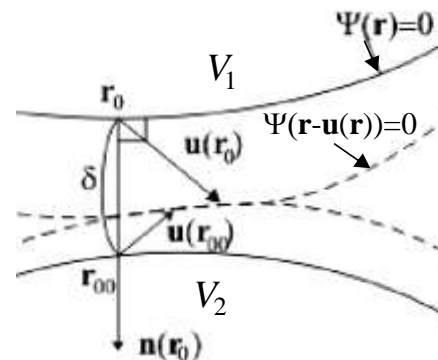


Рис. 2. Кінематика контакту двох тіл

- граничні умови для механічних величин –

$$u|_{S_u} = u^*; \quad (6) \quad \sigma_{ij}n_j|_{S_F} = X_{vi}; \quad (7)$$

$$u_i^{(1)}n_i - u_j^{(2)}n_j \leq \delta; \quad (8) \quad \tau^{(1,2)} = 0; \quad (9)$$

- температурні граничні умови (можуть бути 3-х типів) –

$$T|_{S_T} = T^*; \quad (10) \quad q_i n_i|_{S_q} = q^*; \quad (11) \quad \beta(T - T_{bulk})|_{S_{conv}} = q_i n_i; \quad (12)$$

- умови неідеального термомеханічного контакту –

$$(T^{(1)} - T^{(2)})|_{S_\sigma} = h_c(\sigma_N)q_i n_i; \quad q_i^{(1)}n_i = -q_j^{(2)}n_j. \quad (13)$$

Тут $u_i, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ ($i, j = \overline{1,3}$) – компоненти вектора переміщень та тензорів напружень і деформацій, $3\theta = u_{i,i}$ – об’ємна деформація; T – температура в точках тіла; σ_N, τ – нормальні та дотичні напруження; $E, \nu, \alpha, \rho, c, \lambda_{ij}$ – модуль пружності, коефіцієнт Пуассона, коефіцієнт лінійного розширення, густина, теплоємність та теплопровідність відповідно; X_{iv} – поверхневе навантаження; β – коефіцієнт тепловіддачі; S_u, S_F – частини поверхні тіла, де задані кінематичні, силові та контактні умови; S_T, S_q, S_{conv} – частини поверхні тіла, де задані температури, теплові потоки і конвекція відповідно; S_σ – поверхня неідеального температурного контакту.

Система співвідношень (1)-(13) задає повну систему рівнянь, початкових і граничних умов, контактних обмежень для нестационарної зв’язаної термопружної контактної задачі. Вона містить співвідношення типу рівності та нерівності. Нерівності зумовлюють основну складність даної задачі, оскільки роблять невідомими також самі області контакту. Слід зауважити, що співвідношення типу (13) зв’язують температуру (або тепловий потік) і контактний тиск на частині поверхні S_c , тому зв’язаними є компоненти ТМК, а, значить, і опосередковано – ТПС усіх взаємодіючих тіл. У цьому контексті дану задачу можна розглядати як зв’язану.

Для розв’язання таких задач застосовано методи теорії варіаційних нерівностей. Для цього вводиться у розгляд простір Соболева функцій $v = \{v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(N)}\}$ (N – число тіл у контакті), які мають узагальнені похідні, що сумуються з квадратом, і задовольняють граничним умовам типу рівності, та підмножину K^\wedge в цьому просторі, причому

$$\|v^{(\alpha)}\| = \left[\int_{V_\alpha} v_i v_i dV + \int_{V_\alpha} v_{i,k} v_{i,k} dV \right]^{1/2}; \quad (14)$$

$$K^\wedge = \{v^\alpha \mid v^\alpha \in V; (v_i^\alpha - v_i^\beta)n_i^{(\alpha)} \leq \delta^{(\alpha\beta)}\}.$$

Для пружної задачі (λ, μ – параметри Ляме) справедлива варіаційна нерівність

$$A(u, v - u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in K^\wedge, u \in K^\wedge, \quad (15)$$

$$A(u, v) = \int_V [2\mu \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) + \lambda\theta(u)\theta(v)] dV;$$

$$L(v) = \int_V [X_i v_i + \alpha T(\lambda + \frac{2}{3}\mu)\varepsilon_{ii}(v)] dV + \int_{S_F} X_{vi} v_i dS,$$

що еквівалентна проблемі пошуку аргументу з умови мінімізації функціоналу

$$J(u) = 1/2 A(u, u) - L(u), u \in K^{\wedge}. \quad (16)$$

Для термопружної задачі (для системи двох тіл):

$$\sum_{e=1}^2 \left\{ \int_{V^e} (-q_i^e \delta T_{,i}^e + w^e \delta T^e) dV + \int_{S_q^e} q^{*e} \delta T^e dS + \right. \\ \left. + \int_{S_{conv}^e} [(1/\beta)(T^e - T_{bulk}) \delta T^e] dS \right\} + \int_{S_c} [1/h_c (\sigma_N)] (T^1 - T^2) (\delta T^1 - \delta T^2) dS = 0, \quad (17)$$

$$\sum_{e=1}^2 \left\{ \int_{V^e} \{ [E_{ijkl}^e u_{i,j}^e \delta u_{k,l}^e - (E_{ijkl}^e \alpha_{kl}^e T^e)_{,j}] \delta u_i^e \} dV - \right. \\ \left. - \int_{V^e} X_i^e \delta u_i^e dV + \int_{S_F^e} X_{V_i}^e \delta u_i^e dS \right\} + \delta I_c^u = 0; \quad (18)$$

$$I_c^u = \int_{S_c} \sigma_N [(u_i(r_0) - u_i(r_{00})) n_i - \delta] dS. \quad (19)$$

Таким чином, співвідношення (1)-(19) складають локальні та слабкі форми рівнянь для термопружної задачі з ТМК.

Як один із важливих частинних випадків досліджено термопружний контакт двох клинів (рис. 3) довільних кутів розхилу, з'єднаних вздовж однієї з граней. Кліни виготовлені з двох різних матеріалів, а по спільній грані реалізується умова ідеального теплового контакту. На вільних гранях відомі теплові потоки, нормальні і дотичні навантаження. Напруження τ і температура T задовольняють умовам регулярності: $T, \tau_{rr}, \tau_{\theta\theta}, \tau_{r\theta} = O(r^{-1-\delta})$ при $r \rightarrow \infty$ для будь-якого $\delta > 0$. Потрібно визначити вплив температурних деформацій на порядок сингулярності напружень у вершині клинів, що здійснюється у наступній послідовності.

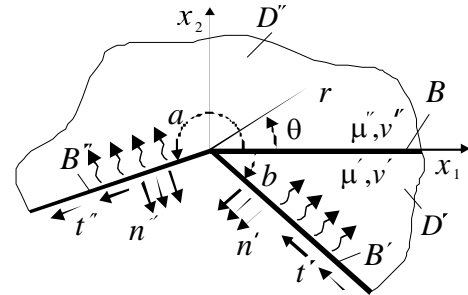


Рис. 3. Система двох клинів

Спочатку розв'язана задача теплопровідності. До рівняння теплопровідності $\nabla^2 T = 0$ застосовано перетворення Мелліна (трансформанта (образ) Мелліна від деякої функції $f(r)$ визначається як $\mathfrak{Z}\{f; s\} = \int_0^\infty f(r) r^{s-1} dr \equiv \hat{f}$). Тоді вихідне рівняння перетвориться на звичайне диференціальне з розв'язком:

$$(s^2 + d^2 / d\theta^2) \hat{T} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{T}(s, \theta) = a(s) \sin(s\theta) + b(s) \cos(s\theta). \quad (20)$$

Підстановка (20) у граничні умови дає систему рівнянь з визначником D :

$$D(a, b, \gamma, s) = \sin s(a + b) + \gamma \sin s(a - b), \quad \gamma = (\lambda' - \lambda'') / (\lambda' + \lambda''), \quad (21)$$

де співвідношення коефіцієнтів теплопровідності $\gamma \in (-1; 1)$.

Корені рівняння $D(a, b, \gamma, s) = 0$ є дійсними. Асимптотика теплового потоку

може мати форму ρ^{-1-p} , якщо у $D(a, b, \gamma, s)$ на проміжку $-1 < s < 0$ є корені, та бути скінченною в протилежному випадку.

Для задачі термопружності для тих же двох клинів (див. рис. 3), використовуючи функції напружень Ері ϕ' і ϕ'' , для кожної з них одержано:

$$\nabla^4 \phi + [(\alpha E)/(1 - 2\nu)] \nabla^2 T = 0, \quad \nabla^2 T = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^4 \phi = 0. \quad (22)$$

На основі перетворення Мелліна із (22) –

$$\begin{aligned} (s^2 + d^2/d\theta^2)[(s+2)^2 + d^2/d\theta^2] \hat{\phi} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \phi(s, \theta) &= a(s) \sin(s\theta) + b(s) \cos(s\theta) + \\ &+ c(s) \sin(s\theta + 2\theta) + d(s) \cos(s\theta + 2\theta). \end{aligned} \quad (23)$$

Задоволення граничним умовам приводить до визначення невідомих констант інтегрування, і тоді напруження аналітичні всюди, за виключенням полюсів визначника D системи з граничних умов, який (що важливо!) *не залежить* від температури. Порядок сингулярності напружень при $r \rightarrow 0$ визначається залежно від величини кутів клинів a , b та 2-х комбінацій 4-х пружних констант матеріалів. Залежно від кореня s_1 асимптотика компонент напружень як функція ρ поблизу вершини клина може приймати одну із наступних форм: $a - \rho^{s_1-1}$, якщо s_1 дійсне і $0 < s_1 < 1$; $b - \rho^{\xi-1} \cos(\eta \ln \rho)$ або $\rho^{\xi-1} \sin(\eta \ln \rho)$, якщо $s_1 = \xi + i\eta$ комплексне та $0 < \xi < 1$; $v - \ln \rho$; $\gamma - \text{const}$ (включаючи нуль).

Частинні випадки. При $\gamma = 0$ визначник $D = \sin(s(a+b))$, коренями якого є послідовність $s_i = i(a+b)/\pi, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Максимальний корінь $s = (a+b)/\pi$, і відповідно з установленими раніше умовами регулярності розв'язку теплові потоки залишаються скінченними при $a+b \leq \pi$. Якщо $a+b > \pi$, то порядок особливості σ визначається за формулою $\sigma = (a+b)/\pi - 1$. Для всіх інших випадків існування особливості розв'язку можна встановити за знаком $D(a, b, \gamma, s)$ на лівій границі смуги $s = -1$. Щоби тепловий потік залишався скінченим, необхідна і достатня умова:

$$\sin s(a+b) + \gamma \sin s(a-b) \Big|_{s=-1} \geq 0. \quad (24)$$

Важливий випадок: $a = \pi, b = \pi/2$. Порядок особливості залежно від γ – на рис. 4. Відносно a і b залежність σ при різних γ представима у вигляді ліній рівня поверхні (рис. 5).

Схема розв'язання термопружної контактної задачі для тонкостінних елементів машинобудівних конструкцій враховує наступні особливі чинники:

- 1) застосування того чи іншого типу кінематичних гіпотез деформації;
- 2) форма умов спряження на поверхні контакту, в першу чергу – спосіб урахування податливості тонкостінної конструкції у напрямі нормалі;
- 3) спосіб урахування зв'язаних умов термомеханічного контакту.

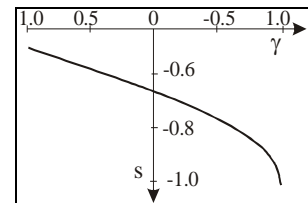


Рис. 4. Порядок особливості залежно від γ

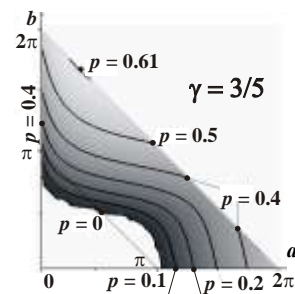


Рис. 5. Порядок особливості залежно від кутів a, b

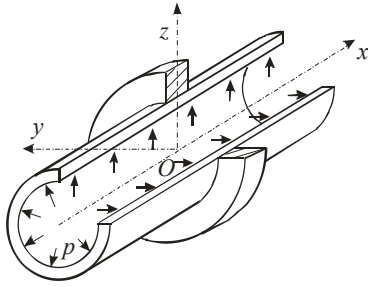


Рис. 6. Циліндрична оболонка з бандажем

У роботі на прикладі циліндричної оболонки спочатку досліджується вплив перших двох чинників на її поведінку в механічному контакті, а потім – вплив третього. Об’єкт дослідження – осесиметричний контакт жорсткого бандажа шириною $2a$, насадженого без зазору, натягу і тертя на нескінченну оболонку радіусом R і товщиною h , навантажену тиском p (рис. 6).

Ставиться задача виявлення можливих конфігурацій зон контакту та визначення параметрів, за яких вони реалізуються. Для розв’язання залучено декілька теорій оболонок. Основні співвідношення при цьому: диференціальні рівняння вигину в

області контакту і вільній від контакту; фізичні співвідношення; граничні умови і спряження розв’язків на сусідніх ділянках. На проміжку, вільному від контакту, прогин оболонки w задовольняє рівнянню

$$Lw = p + Y(d^2 p / dx^2). \quad (25)$$

Тут $L = D(d^4 / dx^4) + P(d^2 / dx^2) + K$ – оператор задачі, параметри D, P, K, Y – в табл. 1. Загальний розв’язок однорідного рівняння (25)

$$w = e^{-sx}(c_1 \cos rx + c_2 \sin rx) + e^{sx}(c_3 \cos rx + c_4 \sin rx),$$

де s, r – дійсна та уявна частина коренів характеристичного рівняння $D\lambda^4 + P\lambda^2 + K = 0$. Частинний розв’язок для $p = \text{const} - w_p = p / K$. Границі зон контакту a_i та константи інтегрування визначаються із граничних умов при $x = 0; x = \infty$ та спряження при $x = a_i$. Топології контакту – на рис. 7. На рис. 8 – одержана загальна діаграма їх варіантів залежно від параметрів оболонки та бандажу.

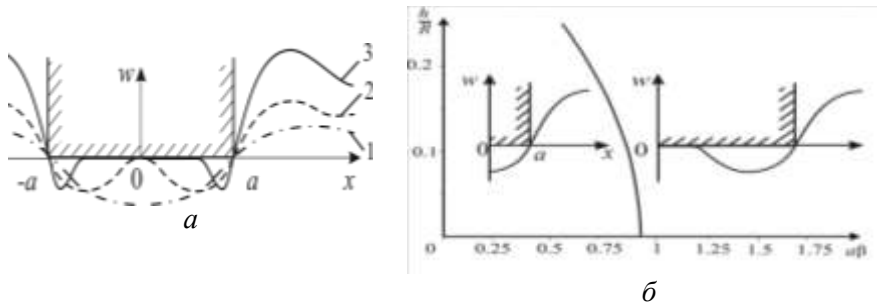


Рис.7. Топології контакту для класичної теорії та типу Тимошенка (а) і типу Рейснера-Власова (б)

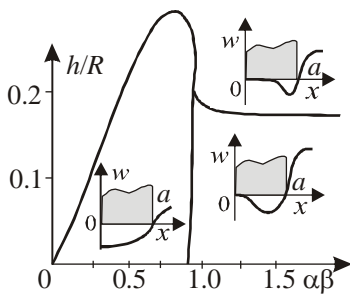


Рис. 8. Діаграма типів контактів

Побудовано аналітичний розв’язок *термопружної* контактної задачі про взаємодію циліндричної оболонки з бандажем. Враховано 2 чинники: вплив гіпотез розподілу шуканих величин за товщиною; спосіб урахування умов контакту. Розрахункова схема – на рис. 9 (T_K – температура бандажу, T_0 – торцевих поверхонь оболонки). Запропоновано лінійну апроксимацію деформацій та квадратичну – температури:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_{x0} + z\kappa_1; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_{y0} + z\kappa_2; \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy0} + z\kappa_{12}; \\ T &= T_1 + zT_2 + \{[z^2 - (h/2)^2]/(2hk)\}(q^+ - q^-). \quad (26) \end{aligned}$$

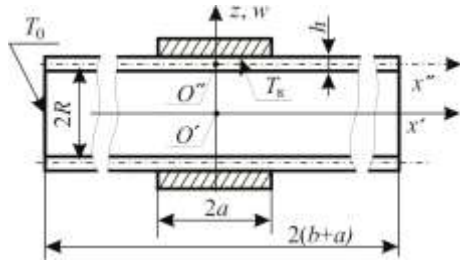


Рис. 9. Термопружний контакт оболонки з бандажем

Дані апроксимації задовольняють 3-вимірні рівняння термопружності інтегрально до 4-го ступеня по z . Тоді при коефіцієнті лінійного розширення α визначальне рівняння:

$$Dw^{IV} + Kw = p - D\alpha(1-\nu)(T_2)'' + K\alpha T_1 R. \quad (27)$$

В зоні контакту переміщення на зовнішній поверхні повинні відповідати зазору в контакті: $w^+ = w_k$. Після інтегрування ε_z по товщині

$$w^+ = w + \frac{\nu h^2}{8} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha T_2 \right) - \frac{13hp^+}{32E} + \alpha \left(\frac{3hT_1}{8} + \frac{23h^2 T_2}{96} \right), \quad (28)$$

де p^+ – контактний тиск на зовнішній поверхні.

Звідси

$$Dw^{IV} + Bw'' + (K + C)w = C\{w_k - \alpha h[3T_1/8 + (23/96 + \nu/8)hT_2]\} - D\alpha(1-\nu)(T_2)'' + K\alpha T_1 R.$$

Тут $C = 32E/13h$; $B = 4Eh\nu/13$. Рівняння для температурного поля:

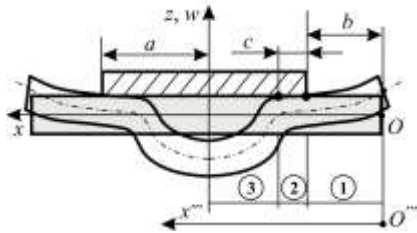


Рис. 10. Характерна картина розподілу прогинів оболонки і контактних зон на фіксованій конфігурації контакту з однією зоною відриву

$$\begin{cases} kh(T_1)'' + q^+ + q^- = 0; \\ kh^2(T_2)''/12 - kT_2 + (q^+ - q^-)/2 = 0, \end{cases} \quad (29)$$

q^+ , q^- – теплові потоки на верхній та нижній поверхнях відповідно. Умови $T^+ = T_1 + (h/2)T_2 = T_k$ або $(h_c)^{-1}q^+ = T_k - [T_1 + (h/2)T_2]$ діють для ідеального та неідеального теплового контакту. Топологія контактних зон визначаються граничними та умовами спряження розв'язків на окремих ділянках. Для ідеального ТМК при конфігурації, що на рис. 10 (тут 1 – вільна ділянка; 2 – зона контакту; 3 – зона відриву):

$$T_1^{(1)} = C_1 + C_2 x; \quad T_2^{(1)} = C_3 \text{sh} \beta_{t_0} x + C_4 \text{ch} \beta_{t_0} x;$$

$$w^{(1)} = C_5 \text{ch} \beta x \cos \beta x + C_6 \text{ch} \beta x \sin \beta x + C_7 \text{sh} \beta x \cos \beta x + C_8 \text{sh} \beta x \sin \beta x + w_{t_1}^{(1)} + w_{t_2}^{(1)};$$

$$w_{t_1}^{(1)} = \alpha R(C_1 + C_2 x), \quad \beta_{t_0} = (2\sqrt{3})/h; \quad \beta = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)/R^2 h^2};$$

$$w_{t_2}^{(1)} = -[(C_3 \text{sh} \beta_{t_0} x + C_4 \text{ch} \beta_{t_0} x) \alpha(1-\nu)](\beta_{t_0})^2 / [(\beta_{t_0})^4 + 4\beta^4].$$

Остання компонента дає швидко згасаючий розв'язок виду $e^{-\beta_{t_0} x}$ з характерним розміром h ; $w_{t_1}^{(1)}$ змінюється з характерним розміром b ; а загальний розв'язок має характерний розмір осциляції \sqrt{Rh} . Таким чином, на першому інтервалі поєднується три доданки з різко відмінними масштабами $b \gg \sqrt{Rh} \gg h$, що затрудняє числове моделювання розв'язків подібних задач. На другому інтервалі характерний розмір осциляції $1/r \sim h$, а на ділянці 3 – аналогічно першій. Одержані співвідношення, виявлені якісні ефекти та установлені кількісні оцінки дають змогу, по-перше, перейти напряму до дискретизації задачі, по-друге, є тестами для

оцінки дискретних моделей, а по-третє, визначають раціональний характер дискретизації.

У комплексі всі описані вище підходи, методи та моделі складають теоретичну основу для розв'язання зв'язаних задач ТМК.

Числове моделювання термопружного стану машинобудівних конструкцій. Запропоновано чисельно-аналітичний спосіб вичленення сингулярностей шляхом представлення розв'язку у вигляді суми „регулярної” та „сингулярної” частини, поведінка якої визначається із аналітичного розв'язку задачі (див. вище) та на основі аналізу послідовності числових розв'язків на згущуваних сітках СЕ [11, 12].

Розроблена просторова і часова дискретизація зв'язаної контактної задачі за допомогою МСЕ на прикладі модифікованих двовимірних чотирикутних білінійних СЕ у переміщеннях. Віртуальний контактний тепловий потік дискретизується без використання додаткових ступенів вільності і враховується безпосередньо в матриці ефективної теплопровідності. Інтегрування за часом – модифікованим варіантом β -методу Ньюмарка зі стабілізацією осцилюючого контактного тиску і теплових потоків, яка досягається інтегруванням контактних величин тільки в неявному вигляді. Умови додатності контактного тиску записуються в половинні кроки часу:

$$\begin{bmatrix} M_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \dot{\mathbf{r}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ D_{Tu} & D_{TT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uT} \\ 0 & \tilde{K}_{TT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_u + f_c \\ f_T \end{bmatrix}, \quad (30)$$

$$\mathbf{z} \leq \mathbf{0}; \quad \mathbf{M}^T \mathbf{d} - \mathbf{g}_N \geq \mathbf{0}; \quad \mathbf{z}^T (\mathbf{M}^T \mathbf{d} - \mathbf{g}_N) = 0. \quad (31)$$

Тут $M_{uu} = \int_V \rho \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u dV$ – матриця мас, $\tilde{K}_{TT} = K_{TT} + K_{TT}^c$ – матриця теплопровідності з урахуванням контакту; а $f_c = \mathbf{Mz}$ – вектор вузлових контактних навантажень. Покрокове інтегрування методом трапецій з використанням неявного вигляду для контактних величин узгоджується з умовами Каруша-Куна-Таккера в половинному кроці:

$$\mathbf{z}_{n+1/2} \leq \mathbf{0}; \quad \mathbf{M}^T \mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{g}_N \geq \mathbf{0}; \quad \mathbf{z}_{n+1/2}^T (\mathbf{M}^T \mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{g}_N) = 0. \quad (32)$$

У запропонованому алгоритмі „механічні” та „теплові” нелінійності розпадаються, надаючи певні вигоди при ітераційному задоволенні розв'язувальних рівнянь.

Представлене зв'язане формулювання має переваги: сумісна апроксимація системи рівнянь, числова стійкість і ефективність порівняно з існуючими пакетами МСЕ.

Для моделювання термопружної контактної взаємодії циліндричних оболонок запропоновано осесиметричний оболонковий СЕ з більш коректним записом контактних умов та усуненням поганої обумовленості задачі (т.з. „локінг”). Враховуються поперечні деформації (через контактний тиск) і розподіл температури по товщині (2 параметри – (26)), застосування методу Гальоркіна до рівнянь (27) і (29) дає:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (w'' D \cdot \delta w'' + w K \cdot \delta w) dx = \int_{\Omega} [(p - D\alpha(1-\nu)(T_2)'' + K\alpha T_1 R) \cdot \delta w] dx; \\ \int_{\Omega} kh(T_1)' \cdot \delta(T_1) dx = \int_{\Omega} (q^+ + q^-) \cdot \delta(T_1) dx; \\ \int_{\Omega} [(kh^2/6)(T_2)' \cdot \delta(T_2)' + kT_2 \cdot \delta(T_2)] dx = \int_{\Omega} (q^- - q^+) \cdot \delta(T_2) dx, \end{cases} \quad (33)$$

або в матричному вигляді

$$\mathbf{w} = \mathbf{d}^{(T)} \mathbf{N}^{(d)}; \quad \mathbf{T}_1 = \mathbf{N}^{(\theta)} \boldsymbol{\theta}; \quad \mathbf{T}_2 = \mathbf{N}^{(r)} \mathbf{r}, \quad (34)$$

$$\mathbf{K}^e [\mathbf{d} \quad \boldsymbol{\theta} \quad \mathbf{r}]^T = [\mathbf{f}_d \quad \mathbf{f}_\theta \quad \mathbf{f}_r]^T, \quad (35)$$

де \mathbf{N} – функції форми, \mathbf{K}^e – матриця жорсткості СЕ.

Для дискретизації створено СЕ, наведений на рис. 11 (d_1, d_3 – вузлові прогини; d_2, d_4 – кути повороту; θ_1, θ_2 – вузлові значення середньої

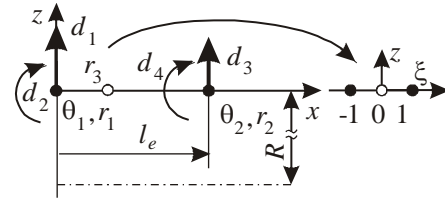


Рис. 11. Геометрія пропонованого СЕ в природних і власних координатах

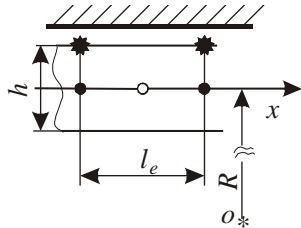


Рис. 12. Точки ідентифікації контакту на зовнішній поверхні:

- – вузол зі змінною $w(x)$;
- – додатковий вузол із температурною змінною;
- ★ – місце ідентифікації контакту

температури; r_1, r_2, r_3 – вузлові значення для градієнту температури по товщині). Урахування контактних умов проводиться в даному СЕ в точках лицьової поверхні. У контакті задовольняються температурні та механічні контактні умови (рис. 12), записані відносно своїх дискретних значень (аналогічно (28)). Звідси виводиться матриця контактної жорсткості \mathbf{K}_i^T , яка є несиметричною і містить зв'язані термопружні компоненти, і контактна сила – вектор \mathbf{f}_i^T . Додавання цих матриці та вектору до відповідних компонент у системі (35) завершує формування розв'язувальних співвідношень. Звідси – більш коректне моделювання без втрати якісних фізичних особливостей ТПС з урахуванням ТМК саме цими СЕ, а не 2D або 3D, що різко скорочує обчислювальні витрати (при збереженні точності розв'язку). Проведене тестування продемонструвало високу точність та ефективність запропонованого СЕ.

Розв'язання прикладних задач про моделювання термопружного стану елементів прес-форм і гільз циліндрів гідропередачі.

При дослідженні ПФ розв'язувалося 3 задачі: стаціонарна (3D) задача (кольорове лиття); нестационарна 2D-задача (кольорове лиття); термопружна контактна 3D задача (лиття термопластів).

Перша задача розв'язана для ПФ (рис. 13), на яку діють механічні і температурні навантаження. Важлива послідовність їх прикладання: зусилля замикання, заповнення у форму, витримка деталі (зусилля підпресовування), охолодження виливка, охолодження. Розглянуто блок прес-форми для лиття деталі типу „кришечка”. Деталь – із силуміну товщиною стінки 3 мм і габаритами 100x170 мм. Деталі ПФ – із сталі 4Х5МФС та 20Л. Зусилля запирання ПФ – 1,6 МН, а пресування – 160 кН, температура заливки – 650°C, цикл діє 60 с. Були одержані результати СЕ моделювання ТПС протягом усієї історії навантаження (рис. 14). Це дає змогу на основі багатоваріантного аналізу установити конструктивні та технологічні параметри ПФ за критеріями міцності, відсутності локального розкриття на площині рознімання (може призвести до появи облою), габаритів тощо.

Друга задача – нестационарна осесиметрична для ПФ (рис. 15). Розраховано її темпера-

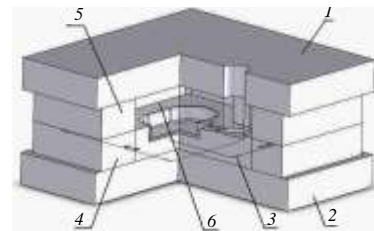


Рис. 13. Схема ПФ:
1, 2 – рухома і нерухома плити; 3 – гніздо;
4, 5 – нерухома і рухома півматриці; 6 – площина рознімання

турний режим, а також враховані температурні деформації. Геометрична модель складається з виливки 1, вкладишів 2, 3, обойм 4, 5, а також рухомої і нерухомої плит 6, 7. Матеріал ПФ – сталь 4Х5МФС, виливка – Ал2. Перед початком першого циклу форма вважалася холодною ($T_{\phi} = 20^{\circ}\text{C}$). У ході розрахунків були отримані розподіли компонент ТПС в різні моменти часу (рис. 16-18).

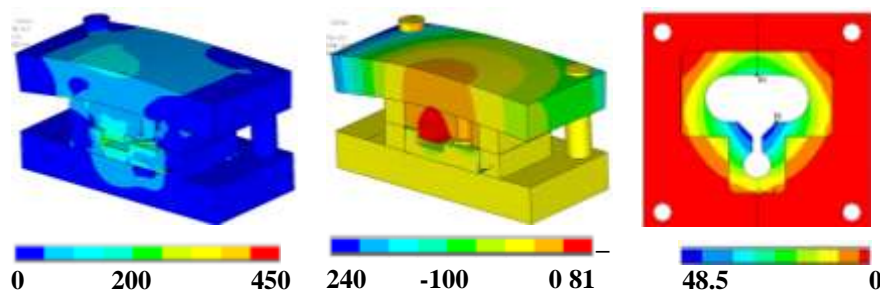


Рис. 14. – Еквівалентні напруження за Мізесом (МПа), осьові переміщення (мкм), зазор у контактному sprzęженні (мкм) по площині рознімання ПФ

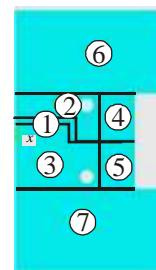


Рис.15. Геометрична модель ПФ

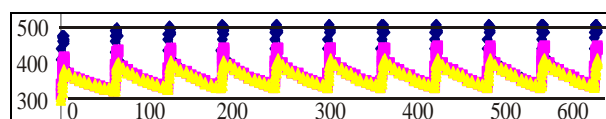


Рис. 16. Температура різних точок ПФ протягом перших 10-ти технологічних циклів

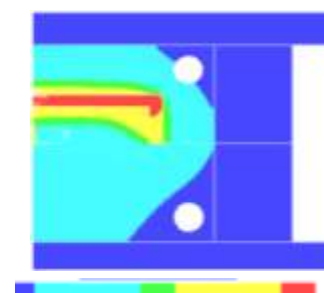


Рис. 17. Температурне поле (К) в ПФ

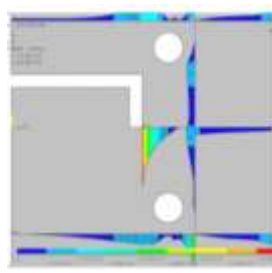


Рис. 18. Контактний тиск (МПа) у sprzęженнях ПФ

З аналізу результатів можна зробити наступні висновки:

1) температурний режим усталюється після 5-10 циклів;

2) температурні деформації істотно підвищують контактний тиск навколо ливарної порожнини і покращують зімкнення форми;

3) на ливарній поверхні ПФ діють підвищені температури, і питання її міцності необхідно досліджувати з урахуванням зміни властивостей при підвищених температурах.

Завершує дослідження ПФ приклад реалізації, адаптованої до використання у промисловості в умовах проектування ПФ для термопластавтоматів: автоматизований препроцесінг, багатоваріантність розрахунків ТПС, постпроцесінг та синтез структури і параметрів ПФ, і разом з тим – зі збереженням усіх можливостей моделювання ТМК. Для цього на прикладі ПФ для термопластів розроблено комплекс програм і моделей, що інтегруються в систему ANSYS, управляються через мову APDL, мають інтерфейс через Delphi-програму та обробляють дані через Excel.

Основними силовими чинниками, що впливають на ПФ (рис. 19), є зусилля обтискання півматриць гвинтами, закріпленими в обоймі (зусилля T); зусилля закриття ПФ P_3 ; тиск упорскування розплаву (p) і нагрів елементів ПФ. Через невисокий рівень температурних деформацій (нагрів – у межах 120°C - 180°C) основна увага була зосереджена на перших трьох чинниках. Від-

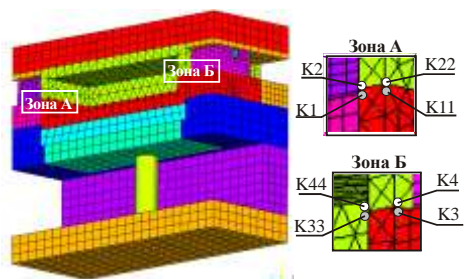


Рис. 19. Схема розташування контрольованих точок ПФ та її СЕМ

повідно, досліджуються 3 етапи прикладання навантаження у діапазонах: $T = 0 \div 30$ кН, $P_3 = 0 \div 1$ МПа і $p = 0 \div 10$ МПа. Як контрольовані параметри виступають переміщення деяких точок у спряженні півматриць.

На рис. 20, 21 представлені результати розрахунків.

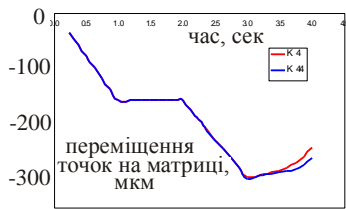


Рис. 20. Розкриття зазору між точками К4 і К44 в ПФ (див. рис.18)

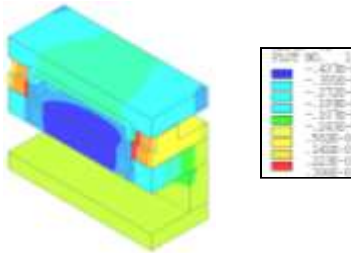


Рис.21. Осьові переміщення в ПФ



Рис.22. Гідропередача ГОП-900

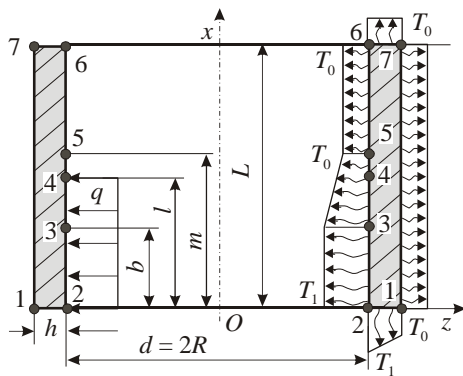


Рис.23. Розрахункова схема гільзи

Особливості НДС ПФ:

1) осьові (нормальні) переміщення точок півматриць, з одного боку, і плит, з іншого, є узгодженими по поверхнях їх спряження, тобто між ними не виникає зазорів;

2) бічні (тангенціальні) переміщення точок півматриць терплять розриви уздовж площини рознімання;

3) по площині роз'єму півматриць у середній частині між бічними опорами виникають зони відриву (відбувається локальне розкриття стику), що може призводити до утворення облою. Вертикальні переміщення всіх точок півматриць поводяться ідентично:

осідання приблизно на 300 мкм від дії зусиль обтискання і закриття ПФ, а потім тільки незначні зміни переміщень (до 50 мкм) від дії тиску уприскування матеріалу з утворенням локальних зазорів (до 50 мкм).

Розв'язана також задача контактної взаємодії втулки (гільзи) з циліндром високонавантаженої гідропередачі ГОП-900 конструкції ХКБМ (рис. 22). Справа в тому, що для зменшення тертя та підвищення міцності циліндри гільзуються, тобто в їх тілі розміщуються з попереднім натягом тонкі оболонки-вставки з високоміцного матеріалу. Виникає складна задача визначення їх ТПС (рис. 23 – між характерними точками 1-7 задані розподіли натягу Δ , температури T і тиску p).

Моделювання ТМК втулки ГОП з бандажем здійснюється з використанням параметричної моделі, яка дає змогу варіювати компоненти навантаження та визначати ТПС. Один із розв'язків проводився за наступних значень параметрів: $R = 32$ мм; $p = 35$ МПа; $m = 35$ мм; $b = 30$ мм; $l = 40$ мм; $L = 72$ мм; $h = 3$ мм; $T_0 = 20^\circ\text{C}$; $T_1 = 100^\circ\text{C}$; матеріал втулки – Сталь 40ХГС. На рис. 24 – порівняльні результати, одержані в середовищі ANSYS (I) та за допомогою розробленої програми, яка використовує авторський оболонковий CE (II).

Аналіз результатів дає підставу для таких висновків:

- 1) найбільший контактний тиск спостерігається у зоні дії високого тиску p ;
- 2) відрив від бандажа відбувається в районі точок 4, 5; 3) спостерігається якісна і кількісна відповідність результатів, одержаних на моделях I і II (відмінність – не більше 5-10%).

Таким чином, розв'язання прикладних задач продемонстрували працездатність, точність, оперативність, ефективність та практичність запропонованих моделей.

Експериментальне дослідження. Проведено розрахунково-експериментальні дослідження НДС моделі прес-форми методами голографічної інтерферометрії та тензометрування. Навантаження здійснювалися на пресі П-125 зусиллями $P_3 = 1\text{ МН}$ (рис. 25). Внутрішній тиск рідини $P_{\text{рід}}$, що імітує матеріал деталі, яка виготовляється, – від 0 МПа до 9,8 МПа. Типова інтерферограма – на рис. 26 (перепад притискної сили $1000 \div 875\text{ кН}$, $P_{\text{рід}} = 9,8\text{ МПа}$).

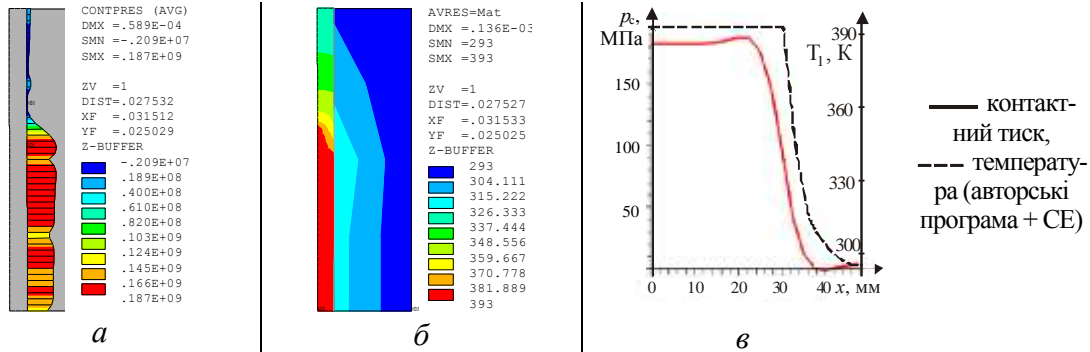


Рис. 24. Порівняльні розподіли контактного тиску (а) і температури (б), одержані в середовищі ANSYS при моделюванні ТПС з використанням осесиметричних CE (I) та авторськими (II) засобами (в)



Рис. 25. Дослідження ПФ на столі преса П-125

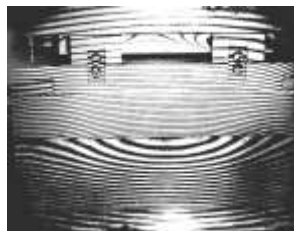


Рис. 26. Голографічна інтерферограма ПФ

Порівняльний аналіз результатів числових і експериментальних досліджень елементів ПФ (рис. 27) продемонстрував задовільну їх відповідність: відмінність – до 15-20%.

Також проведені дослідження контактної взаємодії стержня з жорсткою вставкою. На рис. 28, 29 наведені схема дослідної установки, робочі моменти експерименту та одержані контактні відбитки. Видно, що якісно підтверджена

поведінка контактних зон та контактного тиску у спряженні тонкостінного елемента з жорстким тілом: з ростом жорсткості по нормалі контактні зони зменшуються, а максимальний тиск – росте.

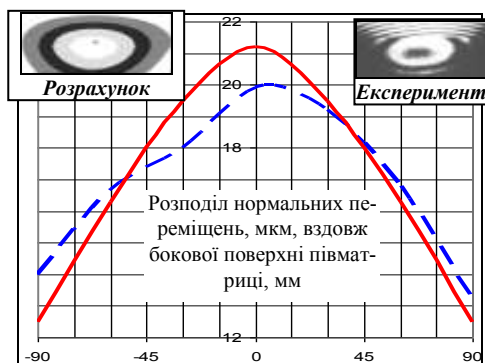


Рис. 27 – Порівняльні картини нормальних переміщень бокової поверхні ПФ; картини розподілу нормальних переміщень бокової поверхні ПФ уздовж горизонтальної осі

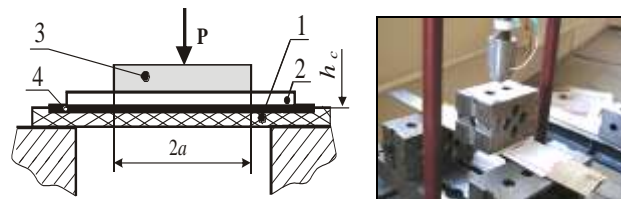


Рис. 28. Вимірювання контактного тиску між бандажом та стержнем: 1 – стержень; 2 – прокладка; 3 – призма; 4 – плівка



Рис. 29. Приклади контактних відбитків при зменшенні жорсткості пружного шару в 2 і 4 рази (від базової зліва направо)

Наведені результати розрахунково-експериментальних досліджень у цілому підтверджують достовірність і точність одержаних у роботі числових результатів.

Висновки. У роботі поставлена та розв'язана термопружна контактна задача в локальній і варіаційній формах, розроблені аналітичні та числові методи і моделі для аналізу термомеханічного контакту елементів машин з урахуванням особливостей на границях контакту, а також досліджено термопружний стан окремих машинобудівних конструкцій для оцінки їх конструкційної міцності.

Аналіз одержаних результатів дозволяє зробити наступні висновки.

1. Аналіз стану питання виявив недостатній розвиток методів дослідження ТМК елементів машин по поверхнях узгодженої форми. Для усунення сформованого протиріччя у роботі окреслено і розв'язано комплекс нових завдань.

2. У роботі запропоновано варіаційне формулювання термопружної контактної задачі, яке відрізняється тим, що в функціоналах присутні і механічні, і температурні змінні, а зв'язок полів здійснено в записі зв'язаних умов термомеханічного контакту на границі спряження елементів машинобудівних конструкцій. Розроблена комплексна математична модель містить також частинні напрями. По-перше, поставлена і розв'язана нова задача про ТМК плоских клинів. Від традиційних постановок її відрізняє те, що контакт розглядається для випадку довільних кутових розхилів клинів з різними властивостями контактуючих тіл, а також застосуванням інтегрального перетворення Мелліна для визначення характеру особливостей у кутових точках контакту. Встановлено, що порядок особливості розподілу контактного тиску у вершині клинів не залежить від порядку особливості теплового потоку. По-друге, на прикладі циліндричних оболонок поставлена і розв'язана задача про особливості ТМК тонкостінних елементів машинобудівних конструкцій. Виявлено характерні, якісно різні картини ТПС, що характеризуються топологічно різними видами розподілу зон контакту і відриву. Установлено, що для даних задач у випадку довгих оболонок можна виділити три різко відмінні характерні масштаби зміни механічних і температурних полів: 1-й – порядку h (товщина оболонки), 2-й – порядку \sqrt{Rh} (R – її радіус) і 3-й – порядку $b \gg \sqrt{Rh} \gg h$ (b – довжина оболонки).

3. При числовій реалізації математичної моделі запропоновано адаптований двовимірний скінченний елемент та модифікований варіант β -методу Ньюмарка для інтегрування розв'язувальних співвідношень нестационарної термопружної контактної задачі. Вони відрізняються від традиційних алгоритмів більшою числовою стійкістю. Крім того, розроблено оболонковий SE для моделювання ТПС з урахуванням ТМК, в якому, на відміну від традиційних підходів, умови контакту формуються не у вузлових точках серединної поверхні, а в спеціально підібраних на лицьовій поверхні. Також на основі більш коректних фізично адекватних моделей враховується поперечне обтискання тонкостінних елементів у зоні контакту. Вводиться додатковий ступінь вільності, який відповідає градієнту температури вздовж нормалі до серединної поверхні. Такий підхід дозволяє адекватно проводити числове моделювання контакту із застосуванням оболонкових скінченних елементів замість тривимірних, істотно знижуючи при цьому розмірність задачі та зберігаючи точність розв'язку.

4. Установлено фізичні закономірності картини ТПС при термомеханічному контакті на прикладі елементів ПФ і гільз циліндрів гідропередачі: перерозподіл контактного тиску при врахуванні термічних деформацій (наприклад, зі 100 МПа до 360 МПа при температурі в ПФ 520° С); вихід на квазіусталений режим при термоциклічному контактному навантаженні (наприклад, за 10 циклів напруження в прес-формі перерозподіляються, усталюються і зменшуються з 775 МПа до 695 МПа); зміна напружень у гільзі циліндра гідропередачі при урахуванні термомеханічного контакту на 10% порівняно з традиційною постановкою.

5. При розрахунково-експериментальному дослідженні контактної взаємодії елементів

прес-форм, а також стержня з призмою, встановлено якісна і кількісна відповідність результатів числового моделювання та експериментально вимічених компонент напружено-деформованого стану. Відповідають один одному не тільки чисельно й експериментально отримані розподіли компонент НДС, але й тенденції їх зміни при варіюванні тих чи інших чинників (технологічних, конструктивних, експлуатаційних). Виявлена похибка моделювання напружень і переміщень не перевищує 20%.

Розроблені підходи, методи, моделі і алгоритми у подальшому будуть застосовані для дослідження термопружного стану різноманітних машинобудівних конструкцій: прес-форм, форм для лиття металів та сплавів, конверторів, елементів двигунів та трансмісій транспортних засобів, обладнання металургійного виробництва тощо.

Литература: 1. Специализированная система анализа и синтеза и расчетно-экспериментальное исследование элементов пресс-форм / И.Я. Храмова, А.Н. Ткачук, Н.А. Ткачук и др. // *Вісник Національного технічного університету „Харківський політехнічний інститут“*. – Харків: НТУ „ХПІ”, 2005. – № 60. – С.151-178. 2. Расчетно-экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния пространственных крупногабаритных конструкций / В.И. Головченко, Е.Н. Барчан, М.М. Пеклич и др. // *Вісник Національного технічного університету „Харківський політехнічний інститут“*. – Харків: НТУ „ХПІ”, 2006. – № 3. – С.49-57. 3. Ткачук А.Н. О влиянии кинематических гипотез на характер контактного взаимодействия цилиндрической оболочки с бандажом / Г.И. Львов, А.Н. Ткачук // *Вісник Національного технічного університету „Харківський політехнічний інститут“*. – Харків: НТУ „ХПІ”, 2006. – № 32. – С.98-104. 4. Ткачук А.Н. Исследования термоупругих контактных задач элементов пресс-форм для литья под давлением с учетом фазовых превращений в отливке / А.Н. Ткачук // *Вісник Національного технічного університету „Харківський політехнічний інститут“*. – Харків: НТУ „ХПІ”, 2008. – № 2. – С.144-158. 5. Ткачук А.Н. Численное решение тестовых термоупругих контактных задач для элементов пресс-форм / А.Н. Ткачук // *Вісник Національного технічного університету „Харківський політехнічний інститут“*. – Харків: НТУ „ХПІ”, 2008. – № 9. – С.118-124. 6. Ткачук А.Н. Методы, алгоритмы и модели для исследования физико-механических процессов при изготовлении деталей литьем / Н.А.Ткачук, А.Н.Ткачук, В.А. Заболотских, А.А. Капустин // *Вісник Національного технічного університету „Харківський політехнічний інститут“*. – Харків: НТУ „ХПІ”, 2009. – № 12. – С.129-148. 7. Ткачук А.Н. Элементы разделительных штампов: методы и модели для исследования напряженно-деформированного состояния / Н.А. Ткачук, А.Я. Мовшиович, Ткачук А.Н. // *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка металлов давлением*. – М.: ООО „Тисо Принт”, 2009. – № 2. – С. 16-25. 8. Ткачук А.Н. Моделирование контактного взаимодействия системы тел при сложном нагружении / А.Н. Ткачук // *Вісник Національного технічного університету „Харківський політехнічний інститут“*. – Харків: НТУ „ХПІ”, 2009. – № 28. – С.128-132. 9. Ткачук А.Н. Термоупругий осесимметричный конечный элемент для решения контактных задач цилиндрических оболочек / А.Н. Ткачук // *Механіка та машинобудування*. – Харків: НТУ „ХПІ”, 2009. – № 1. – С.157-163. 10. Ткачук А.Н. Об аналитическом решении термоупругой контактной задачи о взаимодействии цилиндрической оболочки с бандажом / Г.И. Львов, А.Н. Ткачук // *Вісник Національного технічного університету „Харківський політехнічний інститут“*. – Харків: НТУ „ХПІ”, 2009. – № 30. – С.88-95. 11. Ткачук А.Н. Термоупругие контактные задачи для элементов штампов и пресс-форм / А.Н.Ткачук, И.Я.Мовшиович, Н.А.Ткачук // *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка металлов давлением*. – М.: ООО „Тисо Принт”, 2009. – № 12. – С. 25-32. 12. Ткачук А.Н. Термоупругие контактные задачи для элементов штампов и пресс-форм (продолжение) / А.Н.Ткачук, И.Я.Мовшиович, Н.А.Ткачук // *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка металлов давлением*. – М.: ООО „Тисо Принт”, 2010. – № 1. – С. 19-28. 13. Ткачук А.Н. К вопросу о контактном взаимодействии плоского штампа с полупространством / Н.Н. Ткачук, А.Н. Ткачук // *Східно-європейський журнал передових технологій*. – Харків: УДАЗТ, 2010. – № 3/9 (45). – С.50-53. 14. Моделирование контактного взаимодействия элементов штамповой оснастки / Н.А. Ткачук, Н.А. Демина, Ю.Д. Сердюк и др. // *Обработка материалов давлением: збірник наукових праць*. – Краматорськ: ДДМА, 2010. – № 2 (23). – С. 240-248. 15. Tkachuk A. A contact-stabilized Newmark method for coupled dynamical thermo-elastic problem / A. Tkachuk // *Proceedings of the 3d International Conference on Nonlinear Dynamics*. – 2010. – Kharkov – P. 497-500. 16. Signorini A. Sopra alcune questioni di elastostatica / A. Signorini // *Atti della Societa Italiana per il Progresso delle Scienze*. – 1933. – P. 513-533. 17. Гловински Р. Численное исследование вариационных

неравенств. перев. с фр. А.С. Кравчука под ред. Б.Е. Победри. / Р. Гловински, Ж.Л. Лионс, Р. Трёмольер. – М.: Мир, 1979 – 574с. 18. Дюво Г. Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 384 с. 19. Кравчук А.С. К задаче Герца для линейно- и нелинейноупругих тел конечных размеров / А.С. Кравчук // Прикладная математика и механика. – 1977. – Т. № 41. – С.329-337. 20. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости / И.Я. Штаерман. – М.–Л.: Гостехиздат, 1949. – 270 с. 21. Муххелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Муххелишвили. – М.: Изд-во АН СССР, 1954. – 648 с. 22. Боджи Д.Б. Действие поверхностных нагрузок на систему двух соединенных вдоль одной из граней клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы раствора / Д.Б. Боджи // Прикладная механика. Тр. америк. общ-ва инж.-механиков. Серия "Е". Том 38. – 1971. – № 2. – С. 87-96. 23. Боджи Д.Б. Действие касательных и нормальных нагрузок на прямоугольные упругие клинья, выполненных из различных материалов и соединенных по граням / Д.Б. Боджи // Прикладная механика. Тр. америк. общ-ва инж.-механиков. Серия "Е". Том 35. – 1968. – № 3. – С. 29-37. 24. Пелех Б.Л. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек / Б.Л. Пелех, Н.А. Сухорольский. – Киев: Наукова думка, 1980. – 216 с. 25. Григолюк Э.И. Контактные задачи теории пластин и оболочек / Э.И. Григолюк, В.М. Толкачев. – М.: Машиностроение, 1980. – 411с. 26. Григолюк Э.И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин / Э.И. Григолюк, Я.С. Подстригач, Я.И.Бурак. – Киев: Наукова думка, 1979. – 364 с.

Bibliography (transliterated): 1. Specializirovannaja sistema analiza i sinteza i raschetno-jeksperimental'noe issledovanie jelementov press-form / I.Ja. Hramcova, A.N. Tkachuk, N.A. Tkachuk i dr. // Visnik Nacional'nogo tehničnogo universitetu „Harkivs'kij politehničnij institut”. – Harkiv: NTU „HPI”, 2005. – № 60. – S.151-178. 2. Raschetno-jeksperimental'noe issledovanie naprjazhenno-deformirovannogo sostojanija prostranstvennyh krupnogabaritnyh konstrukcij / V.I. Golovchenko, E.N. Barchan, M.M. Peklich i dr. // Visnik Nacional'nogo tehničnogo universitetu „Harkivs'kij politehničnij institut”. – Harkiv: NTU „HPI”, 2006. – № 3. – S.49-57. 3. Tkachuk A.N. O vlijanii kinematičeskikh gipotez na harakter kontaktnogo vzaimodejstvija cilindričeskoj obolochki s bandazhom / G.I. L'vov, A.N. Tkachuk // Visnik Nacional'nogo tehničnogo universitetu „Harkivs'kij politehničnij institut”. – Harkiv: NTU „HPI”, 2006. – № 32. – С.98-104. 4. Tkachuk A.N. Issledovanija termouprugih kontaktnyh zadach jelementov press-form dlja lit'ja pod davleniem s učetom fazovyh prevrachenij v otlivke / A.N. Tkachuk // Visnik Nacional'nogo tehničnogo universitetu „Harkivs'kij politehničnij institut”. – Harkiv: NTU „HPI”, 2008. – № 2. – S.144-158. 5. Tkachuk A.N. Chislennoe reshenie testovyh termouprugih kontaktnyh zadach dlja jelementov press-form / A.N. Tkachuk // Visnik Nacional'nogo tehničnogo universitetu „Harkivs'kij politehničnij institut”. – Harkiv: NTU „HPI”, 2008. – № 9. – S.118-124. 6. Tkachuk A.N. Metody, algoritmy i modeli dlja issledovanija fiziko-mehanicheskih processov pri izgotovlenii detalej lit'em / N.A. Tkachuk, A.N. Tkachuk, V.A. Zabolotskih, A.A. Kapustin // Visnik Nacional'nogo tehničnogo universitetu „Harkivs'kij politehničnij institut”. – Harkiv: NTU „HPI”, 2009. – № 12. – S.129-148. 7. Tkachuk A.N. Jelementy razdelitel'nyh shtampov: metody i modeli dlja issledovanija naprjazhenno-deformirovannogo sostojanija / N.A. Tkachuk, A.Ja. Movshovich, Tkachuk A.N. // Kuznečno-shtampovočnoe proizvodstvo. Obrabotka metallov davleniem. – М.: ООО „Tiso Print”, 2009. – № 2. – S. 16-25. 8. Tkachuk A.N. Modelirovanie kontaktnogo vzaimodejstvija sistemy tel pri sloznom nagruženii / A.N. Tkachuk // Visnik Nacional'nogo tehničnogo universitetu „Harkivs'kij politehničnij institut”. – Harkiv: NTU „HPI”, 2009. – № 28. – S.128-132. 9. Tkachuk A.N. Termouprugij osesimmetričnyj konečnyj jelement dlja reshenija kontaktnyh zadach cilindričeskikh obolochek / A.N. Tkachuk // Mehanika ta mashinobuduvannja. – Harkiv: NTU „HPI”, 2009. – № 1. – S.157-163. 10. Tkachuk A.N. Ob analitičeskom reshenii termouprugoj kontaktnoj zadachi o vzaimodejstvii cilindričeskoj obolochki s bandazhom / G.I. L'vov, A.N. Tkachuk // Visnik Nacional'nogo tehničnogo universitetu „Harkivs'kij politehničnij institut”. – Harkiv: NTU „HPI”, 2009. – № 30. – С.88-95. 11. Tkachuk A.N. Termouprugie kontaktnye zadachi dlja jelementov shtampov i press-form / A.N. Tkachuk, I.Ja. Movshovich, N.A. Tkachuk // Kuznečno-shtampovočnoe proizvodstvo. Obrabotka metallov davleniem. – М.: ООО „Tiso Print”, 2009. – № 12. – S. 25-32. 12. Tkachuk A.N. Termouprugie kontaktnye zadachi dlja jelementov shtampov i press-form (prodolzhenie) / A.N. Tkachuk, I.Ja. Movshovich, N.A. Tkachuk // Kuznečno-shtampovočnoe proizvodstvo. Obrabotka metallov davleniem. – М.: ООО „Tiso Print”, 2010. – № 1. – S. 19-28. 13. Tkachuk A.N. K voprosu o kontaktnom vzaimodejstvii ploskogo shtampa s poluprostranstvom / N.N. Tkachuk, A.N. Tkachuk // Shidno-evropejs'kij zhurnal peredovyh tehnologij. – Harkiv: UDAZT, 2010. – № 3/9 (45). – S.50-53. 14. Modelirovanie kontaktnogo vzaimodejstvija jelementov shtampovoj osnastki / N.A. Tkachuk, N.A. Demina, Ju.D. Serdjuk i dr. // Obrabotka materialov davleniem: zbirnik naukovih prac'. – Kramators'k: DDMA, 2010. – № 2

(23). – S. 240-248. 15. Tkachuk A. A contact-stabilized Newmark method for coupled dynamical thermo-elastic problem / A. Tkachuk // *Proceedings of the 3d International Conference on Nonlinear Dynamics*. – 2010. – Kharkov – R. 497-500. 16. Signorini A. Sopra alcune questioni di elastostatica / A. Signorini // *Atti della Societa Italiana per il Progresso delle Scienze*. – 1933. – R. 513-533. 17. Glovinski R. Chislennoe issledovanie variacionnyh neravenstv. perev. s fr. A.S. Kravchuka pod red. B.E. Pobedri. / R. Glovinski, Zh.L. Lions, R. Tremol'er. – M.: Mir, 1979 – 574s. 18. Djuvo G. Neravenstva v mehanike i fizike / G. Djuvo, Zh.-L. Lions. – M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1980. – 384 s. 19. Kravchuk A.S. K zadache Gerca dlja linejno- i nelinejnouprugih tel konechnykh razmerov / A.S. Kravchuk // *Prikladnaja matematika i mehanika*. – 1977. – T. № 41. – S.329-337. 20. Shtaerman I.Ja. Kontaktnaja zadacha teorii uprugosti / I.Ja. Shtaerman. – M.–L.: Gostehizdat, 1949. – 270 s. 21. Mushelishvili N. I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoj teorii uprugosti / N.I. Mushelishvili. – M.: Izd-vo AN SSSR, 1954. – 648 s. 22. Bodzhi D.B. Dejstvie poverhnostnykh nagruzok na sistemu dvuh soedinennykh vdol' odnoj iz granej klin'ev, izgotovlennykh iz razlichnykh materialov i imejuvix proizvol'nye ugly rastvora / D.B. Bodzhi // *Prikladnaja mehanika. Tr. amerik. obw-va inzh.-mehaniikov. Serija "E"*. Tom 38. – 1971. – № 2. – S. 87-96. 23. Bodzhi D.B. Dejstvie kasatel'nykh i normal'nykh nagruzok na prjamougol'nye uprugie klin'ja, vypolnennykh iz razlichnykh materialov i soedinennykh po granjam / D.B. Bodzhi // *Prikladnaja mehanika. Tr. amerik. obw-va inzh.-mehaniikov. Serija "E"*. Tom 35. – 1968. – № 3. – S. 29-37. 24. Peleh B.L. Kontaktnye zadachi teorii uprugih anizotropnykh oboloček / B.L. Peleh, N.A. Suhorol'skij. – Kiev: Naukova dumka, 1980. – 216 s. 25. Grigoljuk Je.I. Kontaktnye zadachi teorii plastin i oboloček / Je.I. Grigoljuk, V.M. Tolkachev. – M.: Mashinostroenie, 1980. – 411s. 26. Grigoljuk Je.I. Optimizacija nagreva oboloček i plastin / Je.I. Grigoljuk, Ja.S. Podstrigach, Ja.I. Burak. – Kiev: Naukova dumka, 1979. – 364 s.

Ткачук А.М., Пеклич М.М.

АНАЛІЗ КОНСТРУКЦІЙНОЇ МІЦНОСТІ
ЕЛЕМЕНТІВ МАШИНОБУДІВНИХ КОНСТРУКЦІЙ ПРИ
ТЕРМОМЕХАНІЧНОМУ КОНТАКТІ: МЕТОДИ, МОДЕЛІ, АЛГОРИТМИ

У роботі розв'язана задача аналізу термопружного стану елементів (ТПС) машинобудівних конструкцій з урахуванням зв'язаного термомеханічного контакту (ТМК) їх елементів по поверхнях узгодженої формулювання. Запропоновано їй нові зв'язані термопружні локальні та варіаційні форми. Окремо досліджено питання наявності особливостей розподілу компонент ТПС на границі області контакту тонкостінних елементів та тіл з кутовими точками. На основі отриманих варіаційних форм побудовано загальний зв'язаний елемент та запропоновано модифікацію методу Ньюмарка, пристосовану для зв'язаних задач ТМК.

Tkachuk A.M., Peklich M.M.

ANALYSIS OF CONSTRUCTIVE STRENGTH OF MASHINEBUILDING CONSTRUCTIONS ELEMENTS IN THERMOMECHANICAL CONTACT:
METHODS, MODELS, ALGORHYTHMS

A solution of coupled problem of thermal and stress-stain analysis of structures with contact over adjacent surfaces is given in the paper. A special attention is given to study of singularities of contact stress and heat flux distribution close to boundaries of contact zone for thin-walled structures and bodies with corners. New weak and local formulation for general coupled thermomechanical contact problem are derived. Based on the proposed weak forms, a new plane element is built and a modification of Newmark method for coupled contact problem is proposed.
