

**О.О. ЛИТВИН**, канд. фіз.-мат. наук, доц., УПА, Харків;  
**С.І. КУЛИК**, канд. фіз.-мат. наук, доц., НТУ «ХПІ»;  
**О.В. ТКАЧЕНКО**, нач. відділу, ДП «Івченко-Прогрес», Запоріжжя;  
**С.Ю. МАТВЄЄВА**, аспірант, УПА, Харків;  
**О.О. ЧЕРНЯК**, аспірант, УПА, Харків

## ОПЕРАТОРИ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ, ЩО ЗБІГАЮТЬСЯ З НЕЮ НА ЗАДАНИХ ВІДРІЗКАХ ОБЛАСТІ НАБЛИЖЕННЯ

Запропоновано метод побудови оператора  $s(f; x)$ , що інтерполює функцію  $f(x)$  однієї змінної і збігається з нею на заданих відрізках області наближення. Він може бути використаний для відновлення поверхонь між системою перетинних смуг. Досліджено його властивості.

Предложен метод построения оператора  $s(f; x)$ , который интерполирует функцию  $f(x)$  одной переменной и совпадает с ней на заданных отрезках области приближения. Он может использоваться для восстановления поверхностей между системой пересекающихся полос. Сформулирована и доказана теорема о свойствах этого оператора.

The method of the building an operator  $s(f; x)$ , which interpolate  $f(x)$  in given points and equal given functions on given sub intervals is proposed. This method can be used to restore surfaces between a systems of intersecting bands. Formulate and prove a theorem about the properties of this operator.

**Вступ.** В працях [1] – [7] досліджувались оператори відновлення поверхні між смугами, якщо інформація про наближувану функцію задається на системі смуг (взагалі кажучи перетинних смуг). Цей метод наближення функцій двох змінних називається *методом інтерстрипації* (inter – між, stripe – смуга) і є частинним випадком *методу інтерлокації* [8] – [15]. У випадку, коли товщина смуг дорівнює нулю, тобто якщо  $\beta_k = \alpha_k$ , то смуги перетворюються в лінії. Таким чином, отримувана інформація про наближувану функцію задається її слідами на системі ліній, а між лініями потрібно відновити саму функцію.

На практиці часто виникають ситуації, коли деяка лінія задається дискретним набором точок  $(x_k, y_k)$ ,  $k = \overline{1, m}$ , і крім того відомо, що наближувача лінія на деякому відрізку повинна мати наперед задану форму (наприклад, бути частиною кола, параболи тощо), а також мати неперервні похідні до деякого порядку  $r \geq 0$ . Така ситуація виникає, наприклад, при описі ліній поверхні деяких деталей авіадвигунів (лопаток турбін тощо).

Тому актуальною є задача побудови операторів наближення функцій  $s(f; x)$ , які на заданих відрізках мають задані аналітичні вирази, а між цими відрізками інтерполюють наближувану функцію у заданій системі точок.

**Постановка задачі.** Вважаємо, що функція однієї змінної  $y = f(x)$ ,  $f(x) \in C^r [0, 1]$ ,  $r \geq 0$ , задається в точках  $x = x_i$ ,  $x = x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$   $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ , а також припустимо, що функція  $y = f(x)$  задана точно відповідними аналітичними виразами  $\varphi_p(x)$ ,  $p = \overline{1, n}$  на деяких інтервалах, що не включають вказані вузли інтерполяції. Задача полягає у побудові оператора  $s(x) = s(f; x)$  з наступними властивостями:

$$s(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (1)$$

і, крім того,  $s(x)$  збігається з функціями  $\varphi_p(x)$ ,  $p = 1, \dots, m$  на кожному з інтервалів  $[\alpha_p, \beta_p] \subset [0, 1]$ ,  $p = 1, \dots, n$ , тобто:

$$s(x) = \varphi_p(x), \quad x \in [\alpha_p, \beta_p], \quad p = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Для цього узагальнено метод інтерстрипації функцій [1–3].

**Основні твердження роботи.** Оператор, що розв'язує поставлену задачу, будемо шукати у вигляді

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x), x \in [0, \alpha_1], \\ \varphi_1(x), x \in [\alpha_1, \beta_1], \\ s_1(x), x \in [\beta_1, \alpha_2], \\ \dots \\ s_{k-1}(x), x \in [\beta_{k-1}, \alpha_k], \\ s(x) = \varphi_k(x), x \in [\alpha_k, \beta_k], \\ s_k(x), x \in [\beta_k, \alpha_{k+1}], \\ \dots \\ s(x) = \varphi_n(x), x \in [\alpha_n, \beta_n], \\ s_n(x), x \in (\beta_n, 1], \end{cases} \quad (3)$$

де функції  $s_p(x)$ ,  $p = \overline{0, n}$ , – поліноми або сплайни, які визначаються з наступних умов.

Якщо  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{i_0} < \alpha_1$  то  $s_0(x)$  повинен бути інтерполяційним поліномом (або сплайном) з властивостями:

$$\begin{aligned} s_0(x_i) &= f(x_i), \quad i = \overline{0, i_0}; \\ s_0^{(p)}(\alpha_1) &= \varphi_1^{(p)}(\alpha_1), \quad p = \overline{0, r}. \end{aligned} \quad (4)$$

Якщо  $\beta_1 < x_{i_0+1} < x_{i_0+2} < \dots < x_{i_1} < \alpha_2$  то  $s_1(x)$  повинен бути інтерполя-

ційним поліномом (або сплайном) з властивостями

$$\begin{aligned} s_1^{(p)}(\beta_1) &= \varphi_1^{(p)}(\beta_1), p = \overline{0, r}, \\ s_1(x_i) &= f(x_i), i = \overline{i_0 + 1, i_1}, \\ s_1^{(p)}(\alpha_2) &= \varphi_1^{(p)}(\alpha_2), p = \overline{0, r}. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогічним чином можна записати умови для побудови відповідних поліномів (або сплайнів) на інтервалах  $[\beta_2, \alpha_3]$ ,  $[\beta_3, \alpha_4]$ , ...,  $[\beta_{n-1}, \alpha_n]$ .

Якщо  $\beta_{k-1} < x_{i_{k-1}+1} < x_{i_{k-1}+2} < \dots < x_{i_k} < \alpha_{i_k}$ , поліном  $S_k(x)$   $x \in [\beta_k, \alpha_{k+1}]$  буде визначатися з умов

$$\begin{aligned} s_k(x_i) &= f(x_i), i = \overline{i_k + 1, i_{k+1}}, \\ s_k^{(p)}(\beta_k) &= \varphi_k^{(p)}(\beta_k), p = \overline{0, r}, \\ s_k^{(p)}(\alpha_{k+1}) &= \varphi_k^{(p)}(\alpha_{k+1}), p = \overline{0, r}. \end{aligned} \quad (6)$$

На кінець запишемо відповідну формулу на інтервалі  $[\beta_n, 1]$ .

Якщо  $x_{i_n} < x_{i_n+1} < \dots < x_m = 1$ , то  $s_n(x)$  повинен бути інтерполяційним поліномом (або сплайном) з властивостями

$$\begin{aligned} s_n^{(p)}(\beta_n) &= \varphi_1^{(p)}(\beta_n), p = \overline{0, r}; \\ s_n(x_i) &= f(x_i), i = \overline{i_n, m}. \end{aligned} \quad (7)$$

**Теорема.** Для кожної  $f(x) \in C^r[0, 1]$  функція  $s(x)$ , що визначена у вигляді формули (3), в якій  $s_0(x), s_1(x), \dots, s_n(x)$  визначаються формулами (4) – (7), задовольняє властивостям (1), (2) і є  $r$  раз диференційовною функцією:  $s(x) \in C^r[0, 1]$ .

*Доведення.* Згідно з означенням сплайну (3) доведення властивостей (1) та (2) витікає з алгоритму побудови функцій  $s_0(x), s_1(x), \dots, s_n(x)$ . Тому доведемо лише те, що  $s(x) \in C^r[0, 1]$ . Для доведення цієї властивості слід довести, що

$$\begin{aligned} s^{(p)}(\alpha_j - 0) &= s^{(p)}(\alpha_j + 0) = s^{(p)}(\alpha_j), p = \overline{0, r}, j = \overline{1, n}, \\ s^{(p)}(\beta_j - 0) &= s^{(p)}(\beta_j + 0) = s^{(p)}(\beta_j), p = \overline{0, r}, j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (8)$$

Якщо врахувати, що

$$\begin{aligned} s^{(p)}(\alpha_j - 0) &= s_{j-1}^{(p)}(\alpha_j), \quad s^{(p)}(\alpha_j + 0) = s^{(p)}(\alpha_j) = f^{(p)}(\alpha_j), \quad p = \overline{0, r}, \quad j = \overline{1, n}, \\ s^{(p)}(\beta_j - 0) &= s_{j+1}^{(p)}(\beta_j) = f^{(p)}(\beta_j), \quad s^{(p)}(\beta_j + 0) = s_j^{(p)}(\beta_j), \quad p = \overline{0, r}, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

то рівності (8) стають очевидними.

Теорема доведена.

**Перспективи подальших досліджень.** У подальшому планується виконати узагальнення запропонованого методу на випадок наближення функцій багатьох змінних.

**Висновки.** Запропоновано метод побудови операторів  $s(f;x)$ , що інтерполюють функції  $f(x) \in C[a,b]$  у заданій системі точок і збігаються з  $f(x)$  на заданій системі підінтервалів інтервалу  $[a,b]$ . Такі оператори можуть бути використані для наближення поверхонь в методі інтерстрипації функцій, заданих на системі паралельних або перетинних смуг, при описі поверхонь деяких лопаток авіадвигунів тощо. Досліджено їх властивості.

**Список літератури 1.** *Литвин О.М.* Методи обчислень. Додаткові розділи. – Київ: Наук. думка, 2005. – 333 с. **2.** *Литвин О.М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544с. **3.** *Литвин О.М. Матвєєва С.Ю.* Метод восстановления поверхности между полосами при помощи информации о поверхности на взаимно перпендикулярных полосах //Международный научный журнал Управляющие системы и машины информационные технологии. № 1 – 2011 с. 33-40. **4.** *Литвин О.М., Матвєєва С.Ю.* Інтерлінація та інтерфлетація функцій багатьох змінних та її застосування у картографії // Національне картографування: стан, проблеми та перспективи розвитку: 36. наук. пр. – К.: ДНВП «Картографія», 2005. – 2. – С. 22-24. **5.** *Литвин О.М., Матвєєва С.Ю., Межуєв В.І.* Метамодель для математичного моделювання поверхні тіла на основі даних радіолокації // УСМ. – 2010. – №3. – С. 33-47. **6.** *Матвєєва С.Ю.* Метод побудови цифрових карт за допомогою інтерлінації та інтерфлетації функцій // Питання оптимізації обчислень, 2005. – 145 с. **7.** *Литвин О.М.* Інтерлінація та інтерфлетація функцій і структурний метод В.Л. Рвачова // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2007. – № 4. – С. 61-82. **8.** *Рвачев В.Л., Толоч А.В., Уваров Р.А., Шейко Т.И.* Новые подходы к построению уравнений трехмерных locusов с помощью R-функций // Вісн. Запоріж. д. ун-ту. – Запоріжжя, 2000. – №2. – С. 119-130. **9.** *Рвачев В.Л., Уваров Р.А., Шейко Т.И.* Построение уравнений locusов в 3D с помощью R-функций //Радиоэлектроника и информатика. – 2001. – №2. – С. 158-164. **10.** *Рвачев В.Л., Уваров Р.А., Шейко Т.И.* Интерлокационные формулы при моделировании задач Плато и Софи Жермен // Радиоэлектроника и информатика. – 2002. – №3. – С. 126-128. **11.** *Рвачев В.Л., Шейко Т.И., Шапиро В.* Метод R-функций (RFM) в краевых задачах с геометрической и физической симметрий // Мат. методы и физ.-мех.поля. – 1988. – 41, №1. – С 146-159. **12.** *Рвачев В.Л., Шейко Т.И., Шапиро В.* Обобщенные интерполяционные формулы Лагранжа - Эрмита на произвольных locusах (интерлокационные операторы теории R-функций) // Пробл. машиностроения. – 1998. – т. 1, №3-4. – С. 150-166. **13.** *Рвачев В.Л., Шапиро В., Шейко Т.И.* Применение метода R-функций к построению уравнений locusов, обладающих симметрией // Электромагниты, волны и электронные системы. – 1999. – т.4, № 4. – С. 4-20. **14.** *Рвачев В.Л., Шейко Т.И.* Введение в теорию R-функций // Пробл. машиностроения. – 2001. – т.4, №1-2. – С. 46-58. **15.** *Максименко-Шейко К.В.* R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей // монография. – Харьков, ИПМаш НАН Украины, 2009. – 306 с.

Надійшла до редколегії 27.03.2012