

Ю. М. АНДРЕЕВ

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОМПЬЮТЕРНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Запропоновано аналітичні алгоритми для систем комп'ютерної алгебри, що вирішують завдання механіки структурно складних плоских і просторових дискретних моделей. При цьому використовується метод опису геометричних і механічних властивостей систем, прийнятий в програмі такого класу КиДиМ. Алгоритми включають аналітичну діагностику моделі, формування функцій кінетичної і потенційної енергії, лагранжіана, виразів перших інтегралів рівнянь руху.

**Ключові слова:** комп'ютерна алгебра, аналітична механіка, комп'ютерні аналітичні перетворення.

Предложены аналитические алгоритмы для систем компьютерной алгебры, решающих задачи механики структурно сложных плоских и пространственных дискретных моделей. При этом используется метод описания геометрических и механических свойств систем, принятый в программе такого класса КиДиМ. Алгоритмы включают аналитическую диагностику модели, формирование функций кинетической и потенциальной энергии, лагранжиана, выражений первых интегралов уравнений движения.

**Ключевые слова:** компьютерная алгебра, аналитическая механика, компьютерные аналитические преобразования.

Analytic algorithms for computer algebra systems solving problems of the mechanics of structurally complex plane and spatial discrete models are proposed. In this case, a method is used to describe the geometric and mechanical properties of systems adopted in a program of this class of KiDiM. The algorithms include analytical diagnostics of the model, the formation of the kinetic and potential energy functions, the Lagrangian, the expressions for the first integrals of the equations of motion. Analytical computer algorithms for diagnostics of system conservatism, presence of cyclic coordinates, Jacobi integral – generalized energy integral and Routh integrals, automatic formation of such integrals are presented. Discrete mechanical systems described in generalized coordinates and pseudo-coordinates with arbitrary constraints are considered. The description of mechanical models used here is based on the discrete elements – power, inertial, dissipative and elastic. Such elements are assigned, respectively, to active forces acting in the system, inertia forces, linear viscous friction forces and linear elastic forces. This allows one to compactly describe the model and easily change its parameters and structure. Algorithms are proposed that, based on these data, allow the automatic construction of analytical expressions for kinetic and potential energies. After the construction of the kinetic and potential energies, the Lagrange function is constructed. Further, on the basis of an analysis of its explicit dependence on time and on generalized coordinates, the presence of the first Jacobi and Routh integrals is diagnosed. After this, these integrals are constructed.

**Key words:** computer algebra, analytical mechanics, computer analytical transformations.

**Введение.** Одним из этапов исследования динамики механических систем является исследование наличия *первых интегралов*, а также содержащейся в них информации [1].

*Уравнения Лагранжа 2-го рода* (а также *уравнения Аппеля*, *канонические уравнения Гамильтона*, *уравнения КиДиМ*) это обыкновенные дифференциальные уравнения, содержащие обобщенные координаты, обобщенные скорости (вместо них могут быть псевдоскорости или обобщенные импульсы) и обобщенные ускорения (вместо них могут использоваться псевдоускорения или производные от обобщенных импульсов по времени).

Первые интегралы таких уравнений – это некоторые функции обобщенных координат и обобщенных скоростей (или псевдоскоростей, или обобщенных импульсов), равные постоянным значениям

$$\varphi_j \{q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t\} = c_j, \quad j = \overline{1, m},$$

где  $q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$  – обобщенные координаты и обобщенные скорости системы;  $c_j$  – некоторые постоянные;  $m$  – число первых интегралов.

В статье изложены алгоритмы аналитического построения первых интегралов для широкого класса механических систем, реализованные в системе компьютерной алгебры КиДиМ, разработанной для решения задач механики в НТУ «ХПИ», использующие элементы данных описания динамических моделей, принятые в этом программном комплексе. Это дает возможность получить дополнительную информацию об исследуемой системе и провести более глубокую ее диагностику. Данные алгоритмы приспособлены для моделей систем, описываемых в обобщенных координатах.

**Анализ последних исследований.** До сих пор поиск первых интегралов уравнений движений механических систем был предметом ручных технологий аналитической механики (например, [1], [2]). С появлением *специальных систем компьютерной алгебры* (ССКА), призванных решать задачи механики, примером которых является *система КиДиМ*, разработанная в НТУ «ХПИ», многие аналитические задачи механики достигают результата намного эффективнее. Основная задача таких программ – облегчить аналитический вывод уравнений движения многомассовых структурно сложных систем. ССКА КиДиМ способна по формальному описанию геометрических и силовых свойств формировать уравнения движения и равновесия плоских и пространственных механических систем, в том числе с нестационарными, *неголономными* связями [3], [4]. Проверить условия существования и получить выражения первых интегралов уравнений движения, например, робототехнических или сельскохозяйственных систем, является весьма непростой задачей. В связи с изложенным, автоматизация процесса получения и диагностики наличия первых интегралов в исследуемых современных моделях механических систем, представляется актуальной, имеющей научную новизну задачей.

**Постановка задачі.** Для систем, описуваних в обобщенных координатах, традиционным является поиск интеграла энергии Якоби и циклических интегралов. Это требует построения функции Лагранжа (а, значит, кинетической и потенциальной энергии), союзного выражения гамильтониана [5], содержащих обобщенные координаты и обобщенные скорости, дифференцирования математически сложных и громоздких выражений, сравнения аналитических формул. При этом требовать от пользователя таких компьютерных программ получения и вывода аналитических выражений указанных функций нецелесообразно, так как это ведет к неоправданно большим затратам человеческого труда и ограничивает дальнейшее варьирование параметров и структуры системы. Одним из самых эффективных способов описания дискретных механических моделей является метод, принятый в программном комплексе КиДиМ [4]. Он основан на использовании, в частности, понятий *инерционных* и *силовых* элементов модели. Это снимает с пользователя многие проблемы, связанные с формированием динамических функций механики, получением соответствующих уравнений, варьированием структуры и параметров модели, совершаемых в процессе исследований и расчетов. Поэтому надо получить алгоритмы, позволяющие по исходным данным КиДиМ сформировать выражения кинетической и потенциальной энергии, аналитически проверить условия существования первых интегралов и получить их окончательные выражения. Далее изложены эти алгоритмы.

**Вычисление кинетической энергии системы по инерционным элементам.** По определению *инерционным элементом* механической модели КиДиМ считается совокупность *характеристики* (формульного или числового значения) и *координаты*. Зависимость координаты элемента от обобщенных координат системы называется здесь *структурой элемента*. Он описывает действие в механической системе составляющей силы или пары сил инерции. Для каждого тела или точки механической системы задается, как правило, несколько инерционных элементов, отвечающих составляющим их движения. В качестве *характеристики* выступает соответствующий *координате* элемента *постоянный инерционный коэффициент* – *масса точки или тела* (в поступательной части движения), *момент инерции тела* (во вращательной части движения). В качестве *координаты* используется переменная, которая задает либо простое перемещение точки, либо простое перемещение тела при плоском движении (поступательное или вращательное), либо поступательное перемещение при пространственном движении тела. Для сферического движения (в том числе и как части свободного пространственного движения) координатой является переменная, которая задает проекцию угловой скорости тела на главную ось инерции тела. Под *простым движением* здесь понимается прямолинейное перемещение точки, прямолинейное поступательное перемещение тела, вращательное перемещение тела при плоских движениях. При этом плоскопараллельное движение представляется совокупностью двух или трех простых, одно из которых – вращательное. Криволинейное движение точки или поступательное движение тела – совокупностью двух (на плоскости) или трех (в пространстве) прямолинейных движений или одним движением по дуге заданной траектории. Упомянутые выше проекции угловой скорости тела выражаются через обобщенные скорости или псевдоскорости выражениями, которые называются *дифференциальными структурами*. Координатами инерционных элементов в простых движениях могут быть как перемещения (линейные и угловые), так и проекции соответствующих скоростей (линейных и угловых). В зависимости от этого они выражаются через обобщенные координаты или через обобщенные скорости и псевдоскорости, либо с помощью *структур* (*геометрических структур*), либо – *дифференциальных структур*. Таким образом, кинетическая энергия всей системы может быть вычислена по простой формуле

$$T = \sum_{j=1}^m \frac{J_j v_j^2}{2}, \quad (1)$$

где  $m$  – число инерционных элементов;  $J_j$  – характеристики инерционных элементов;  $v_j$  – скорость, которая вычисляется дифференцированием координаты элемента (в простых перемещениях) по времени через соответствующие структуры,

$$v_j = \dot{\xi}_j(q_1, q_2, \dots, q_s) = \sum_{k=1}^s \frac{\partial \xi_j}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \xi_j}{\partial t},$$

либо непосредственной подстановкой заданной дифференциальной структуры

$$v_j = \sum_{k=1}^s a_{jk} \dot{q}_k + a_j.$$

В результате получается выражение кинетической энергии через обобщенные координаты и обобщенные скорости (либо псевдоскорости).

**Вычисление потенциальной энергии системы по силовым элементам.** По определению *силовым элементом* механической модели КиДиМ, аналогично инерционному элементу (см. выше), считается совокупность *характеристики* (формульного или числового значения) и *координаты*. Каждый силовой элемент описывает действие в механической системе составляющей активной силы или пары сил. В качестве *характеристики* выступает, чаще всего, проекция описываемой силы или проекция момента описываемой пары сил. В качестве *координаты* может быть принята *любая геометрическая или кинематическая величина*, обозначенная некоторой

переменной. Аналитическое выражение такой геометрической величины через обобщенные координаты называется, соответственно *структурой* (точнее, *геометрической структурой*), а аналитическое выражение кинематической величины через обобщенные скорости – *дифференциальной структурой*. Для любого силового элемента произведение его характеристики на вариацию его координаты есть виртуальная работа описываемого элементом соответствующего силового воздействия на систему. Отсюда следует, что характеристика силового элемента есть проекция силы или момента пары или их совокупности на виртуальное перемещение, задаваемое вариацией координаты элемента. Если выразить вариацию координаты элемента через вариации обобщенных координат (или псевдокоординат), используя для этого геометрическую или дифференциальную структуру, то коэффициенты перед вариациями обобщенных координат (или псевдокоординат) будут представлять вклад данного силового элемента в соответствующие обобщенные силы системы.

Итак, пусть задан силовой элемент

$$P \cdot \rho_i = P_i,$$

где ‘ $P$ ’ – буква, обозначающая «силовой элемент»;  $\rho_i$  – имя координаты элемента – имя некоторой переменной; ‘.’ – разделяет имя элемента (в данном случае состоящее из одной буквы, в другом случае после буквы  $P$  могут стоять любые буквы и цифры) и имя координаты; ‘=’ разделяет полное имя элемента (включающее имя координаты) и его характеристику (значение);  $P_i$  – формула, задающая характеристику (значение) элемента или имя переменная, формула для которой может быть приведена в другом месте исходных данных.

Таким образом, виртуальная работа заданных активных сил системы может быть получена по формуле

$$\delta A^a = \sum_{i=1}^p P_i \delta \rho_i, \quad (2)$$

где  $p$  – число силовых элементов в модели системы.

Для общего вывода используем геометрическую структуру  $\rho_i = \rho_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$ , выраженную через обобщенные координаты  $q_1, q_2, \dots, q_s$ , или дифференциальную структуру

$$\dot{\rho}_i = \sum_{j=1}^w r_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \dot{\pi}_j + r_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \quad (3)$$

для псевдоскоростей  $\dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2, \dots, \dot{\pi}_w$ , соответствующих псевдокоординатам  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_w$ .

При использовании псевдокоординат должны быть заданы еще уравнения, связывающие псевдоскорости с обобщенными скоростями в виде

$$\dot{\pi}_j = \sum_{k=1}^s a_{kj}(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \dot{q}_k + a_j(q_1, q_2, \dots, q_s, t), \quad (4)$$

откуда получается связь  $\delta \pi_j = \sum_{k=1}^s a_{kj} \delta q_k$  между вариациями псевдокоординат и обобщенными координатами.

Тогда, в первом случае, получим  $\delta \rho_i = \sum_{k=1}^s \frac{\partial \rho_i}{\partial q_k} \delta q_k$ , а во втором, согласно *правилу Лопиталья*,

$$\delta \rho_i = \sum_{j=1}^w \frac{\partial \rho_i}{\partial \pi_j} \delta \pi_j = \sum_{j=1}^w \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j} \delta \pi_j = \sum_{j=1}^w a_{ij} \delta \pi_j.$$

Поэтому из (2) будет следовать, либо

$$\delta A^a = \sum_{i=1}^p P_i \sum_{k=1}^s \frac{\partial \rho_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^s \left( \sum_{i=1}^p P_i \frac{\partial \rho_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \sum_{k=1}^s Q_k^a \delta q_k,$$

либо

$$\delta A^a = \sum_{i=1}^p P_i \sum_{j=1}^w a_{ij} \delta \pi_j = \sum_{j=1}^w \left( \sum_{i=1}^p P_i \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j} \right) \delta \pi_j = \sum_{j=1}^w \Pi_j^a \delta \pi_j,$$

где  $k$  – я обобщенная сила ( $j$  – я «псевдосила») складывается из вкладов каждого силового элемента по формулам

$$Q_k^a = \sum_{i=1}^p P_i \frac{\partial \rho_i}{\partial q_k}, \quad \Pi_j^a = \sum_{i=1}^p P_i \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j}.$$

Если все силы системы потенциальны, то существует такая функция обобщенных координат – потенциальная энергия  $\Pi(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$ , взятая с обратным знаком вариация которой равна виртуальной работе сил системы. Тогда, согласно, формуле (2), в первом случае, должно быть

$$\delta A^a = \sum_{k=1}^s Q_k^a \delta q_k = -\delta \Pi = -\sum_{k=1}^s \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} \delta q_k,$$

а во втором –

$$\delta A^a = \sum_{j=1}^w \left( \sum_{i=1}^p P_i \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j} \right) \delta \pi_j = \sum_{j=1}^w \left[ \left( \sum_{i=1}^p P_i \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j} \right) \sum_{k=1}^s a_{jk} \delta q_k \right] = \sum_{k=1}^s \left[ \sum_{i=1}^p P_i \sum_{j=1}^w a_{jk} \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j} \right] \delta q_k = -\delta \Pi = -\sum_{k=1}^s \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} \delta q_k.$$

Следовательно, с учетом (3), получим

$$\sum_{i=1}^p P_i \frac{\partial \rho_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^p P_i \sum_{j=1}^w a_{jk} \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}. \quad (5)$$

В выражениях (5) в правых частях стоят функции обобщенных координат, поэтому каждое из этих равенств возможно, только если и характеристики силовых элементов  $P_i$  постоянны, либо зависят только от обобщенных координат. Поэтому силовые элементы с характеристиками, зависящими от обобщенных скоростей или псевдоскоростей, не могут участвовать в формировании потенциальной энергии и должны считаться, поэтому, непотенциальными.

Для того чтобы силовой элемент, характеристика которого либо постоянна, либо зависит только от обобщенных координат, описывал потенциальную силу для системы с несколькими степенями свободы, достаточно, чтобы выполнялись выражения

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_k \partial q_l} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_l \partial q_k}, \quad k, l = 1, 2, \dots, s. \quad (6)$$

Согласно формулам (5) левая часть предыдущей формулы в первом случае представится в виде

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_k \partial q_l} = -\frac{\partial}{\partial q_l} \left( \sum_{i=1}^p P_i \frac{\partial \rho_i}{\partial q_k} \right) = -\sum_{i=1}^p \left( \frac{\partial P_i}{\partial q_l} \frac{\partial \rho_i}{\partial q_k} + P_i \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial q_k \partial q_l} \right),$$

откуда для выполнения условия (6) необходимо (поскольку равенство  $\frac{\partial^2 \rho_i}{\partial q_l \partial q_k} = \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial q_k \partial q_l}$  выполняется всегда), чтобы

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_k} \frac{\partial \rho_i}{\partial q_l} = \frac{\partial P_i}{\partial q_l} \frac{\partial \rho_i}{\partial q_k}. \quad (7)$$

Заметим, что для характеристик силовых элементов, которые от координат не зависят, это равенство выполняется автоматически.

Аналогично, для второго равенства (5), получим

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_k \partial q_l} = \frac{\partial}{\partial q_l} \left( \sum_{i=1}^p P_i \sum_{j=1}^w a_{jk} \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j} \right) = \sum_{i=1}^p \left[ P_i \sum_{j=1}^w \left( \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l} \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j} + a_{jk} \frac{\partial^2 \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j \partial q_l} \right) + \frac{\partial P_i}{\partial q_l} \sum_{j=1}^w a_{jk} \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j} \right].$$

Откуда для выполнения условия (6) требуется, чтобы

$$\sum_{j=1}^w \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j} \frac{\partial^2 \dot{\pi}_j}{\partial \dot{q}_l \partial q_k} = \sum_{j=1}^w \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j} \frac{\partial^2 \dot{\pi}_j}{\partial \dot{q}_k \partial q_l}; \quad \sum_{j=1}^w \frac{\partial \dot{\pi}_j}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial^2 \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j \partial q_k} = \sum_{j=1}^w \frac{\partial \dot{\pi}_j}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial^2 \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j \partial q_l}; \quad \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \sum_{j=1}^w \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j} \frac{\partial \dot{\pi}_j}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial P_i}{\partial q_l} \sum_{j=1}^w \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j} \frac{\partial \dot{\pi}_j}{\partial \dot{q}_k}. \quad (8)$$

Первое равенство (8), очевидно, будет иметь место, если для всех  $j$  выполнено

$$\frac{\partial^2 \dot{\pi}_j}{\partial \dot{q}_l \partial q_k} = \frac{\partial^2 \dot{\pi}_j}{\partial \dot{q}_k \partial q_l}, \quad \text{то есть,} \quad \frac{\partial a_{jl}}{\partial q_k} = \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_l},$$

а это есть достаточный признак того, чтобы выражения (4) были интегрируемы [1], а все псевдокоординаты были истинными координатами.

Второе равенство обеспечится в случае, когда все коэффициенты  $r_{ij}$  в выражении (3) будут постоянными (это достаточное условие).

Наконец, третье равенство условий (8) обеспечится, если для  $j$ , для которых выполняется

$$\frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{\pi}_j} \neq 0, \quad \text{будет} \quad \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \frac{\partial \dot{\pi}_j}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial P_i}{\partial q_l} \frac{\partial \dot{\pi}_j}{\partial \dot{q}_k},$$

что, очевидно, будет иметь место для силовых элементов с постоянными характеристиками (также достаточное условие).

Итак, алгоритм построения потенциальной энергии по силовым элементам состоит в следующем:

1. Для каждого силового элемента делаем проверки:

- а) если его характеристика зависит от обобщенных скоростей или псевдоскоростей, то элемент непотенциален, и его пропускаем;
- б) если его координата зависит от двух и более обобщенных координат, то проверяем условие (7), при его невыполнении – элемент непотенциален, и его пропускаем;
- в) если его координата зависит от псевдоскоростей и псевдокоординаты не являются истинными

ми координатами (что диагностируется в ССКА КиДиМ раньше), то первое равенство в (8) не выполняется, следовательно, элемент непотенциален. Если же псевдокоординаты являются истинными координатами, то выражения (4) интегрируются, и механическую систему можно описать в обобщенных координатах; тогда данная проверка будет не нужна.

2. По тем силовым элементам, для которых проверки п. 1 оказались положительными, построим по-

тенциальную энергию по формуле, которая следует из формулы  $d\Pi = -dA = -\sum_{i=1}^p P_i d\rho_i$

$$\Pi = -\sum_{i=1}^{p_1} P_i \rho_i - \sum_{i=1}^{p_2} \int P_i(\rho_i) d\rho_i - \sum_{i=1}^{p_3} \int P_i \sum_{k=1}^s \frac{d\rho_i}{dq_k} dq_k, \quad (9)$$

где  $p_1$  – число элементов с постоянными характеристиками;  $p_2$  – число элементов с характеристиками, которые зависят только от координаты элемента;  $p_3$  – число элементов с характеристиками, которые зависят от обобщенных координат.

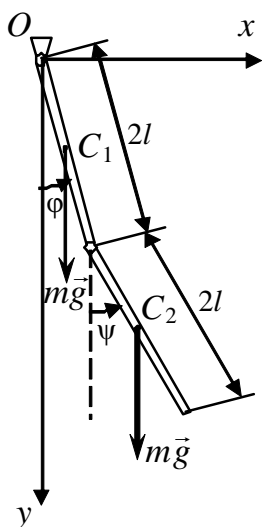


Рис. 1 – Двойной маятник.

**Пример.** Плоский двойной маятник, звенья которого имеют длину  $2l$  (рис. 1). В качестве обобщенных координат выберем два угла отклонения от вертикали:  $\varphi$  – верхнего звена и  $\psi$  – нижнего звена. Очевидно, что потенциальная энергия этой системы даётся выражением

$$\Pi = -mgl \cos \varphi - mg(2l \cos \varphi + l \cos \psi) = -mgl(3 \cos \varphi + \cos \psi).$$

При описании этой механической модели средствами КиДиМ, очевидно, будут записаны силовые элементы:

$$P.y_{C1} = mg; \quad y_{C1} = l \cos \varphi; \quad P.y_{C2} = mg; \quad y_{C2} = 2l \cos \varphi.$$

Используя полученную формулу (9), запишем

$$\Pi = -\sum_{i=1}^2 P_i \rho_i = -mgy_{C1} - mgy_{C2} = -mgl(3 \cos \varphi + \cos \psi).$$

Запишем первый силовой элемент по-другому  $P.\varphi = -mgl \sin \varphi$ .

Тогда формула (9) дает тот же результат:

$$\begin{aligned} \Pi &= -\sum_{i=1}^{p_1} P_i \rho_i - \sum_{i=1}^{p_2} \int P_i(\rho_i) d\rho_i = -mgy_{C2} - \int -mgl \sin \varphi d\varphi = \\ &= -mg(2l \cos \varphi + l \cos \psi) - mgl \cos \varphi = -mgl(3 \cos \varphi + \cos \psi). \end{aligned}$$

**Вычисление потенциальной энергии системы по упругим элементам.** По определению *упругим элементом* механической модели КиДиМ считается совокупность *характеристики* (формульного или числового значения), *координаты* и *структуры*. Он описывает действие в механической системе составляющей упругой силы или пары. В качестве *характеристики* выступает соответствующий *координате* элемента *постоянный коэффициент жесткости*. В качестве *координаты* используется параметр, который задает *деформацию упругого тела* – линейное или угловое перемещение, вариация которого будучи умноженной на произведение коэффициента жесткости на саму координату элемента дает с обратным знаком виртуальную работу описываемой составляющей упругой силы или пары. Таким образом, для  $i$ -го упругого элемента, записанного в виде  $C.x_i = C_i$ ; виртуальная работа получит выражение  $\delta A_i^{\text{упр}} = -C_i x_i \delta x_i$ . Соответственно, элементарную работу, а, значит, и дифференциал потенциальной энергии такого элемента можно вычислить по формуле  $dA_i^{\text{упр}} = -C_i x_i dx_i = -d\Pi_i$ .

Поэтому вся потенциальная энергия упругих элементов может быть посчитана так:

$$\Pi = \sum_{i=1}^u \int C_i x_i dx_i = \sum_{i=1}^u \frac{C_i [x_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t)]^2}{2}, \quad (10)$$

где  $u$  – число упругих элементов в механической модели;  $C_i$  – их характеристики.

**Компьютерное построение первых интегралов.** Для так называемых *лагранжевых систем* обычно имеет смысл искать обобщенный интеграл энергии (*интеграл Якоби*) и *интегралы Рауса* [1], [2], [5]. Условием существования интеграла Якоби является консервативность системы и независимость (явная) её функции Лагранжа от времени. С точки зрения программы диагностики исходных данных КиДиМ, первое требование означает потенциальность всех силовых элементов и отсутствие диссипативных элементов, отражающих наличие сил вязкого трения в системе. Второе требование для ядра комплекса КиДиМ становится тривиальным после построения самой функции Лагранжа путем формирования кинетической и потенциальной энергии по инерционным, силовым и упругим элементам модели по выше приведенным алгоритмам. Вид интеграла существенно зависит

от наличия нестационарных связей в системе, что приводит к наличию явных зависимостей геометрических и дифференциальных структур от времени, что также тривиально проверяется. Итак, в случае присутствия таких связей интеграл имеет вид

$$T_2 - T_0 + \Pi = h,$$

где  $T_2, T_0$  – квадратичная форма обобщенных скоростей и члены, не содержащие их в кинетической энергии системы;  $\Pi$  – потенциальная энергия системы;  $h$  – постоянная энергии, вычисляемая по начальным условиям движения системы. В случае отсутствия нестационарных (реономных) связей интеграл Якоби имеет вид обычного закона сохранения механической энергии

$$T + \Pi = h.$$

Условием существования интегралов Рауса является наличие в системе циклических координат – обобщенных координат, не входящих явно в функцию Лагранжа, для которых обобщенные силы равны нулю. В этом случае имеет место  $m$  таких интегралов вида [1], [2], [5]

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \beta_j, \quad j = \overline{1, m},$$

где  $m$  – число циклических координат  $q_1, q_2, \dots, q_m$ ;  $\beta_j$  – постоянные, вычисляемые по начальным условиям движения системы.

При реализации приведенных здесь алгоритмов наибольшую трудность представляет проверка совпадения формул в правых и левых частях соответствующих равенств, например, в (7). Это связано с тем, что даже одинаковые формулы могут выглядеть совсем не похожими друг на друга из-за перестановки слагаемых, объединения слагаемых в скобки или, наоборот, раскрытия их. Для решения этой проблемы в ССКА КиДиМ применены специальные процедуры, осуществляющие нормализацию формул. Эта нормализация заключается в следующем.

1. В формуле раскрываются все скобки, формируется список слагаемых, представляющих собой константы, переменные, унарные, бинарные и тернарные операции.
2. Далее этот список слагаемых упорядочивается в соответствии с приоритетами слагаемых, представляющих собой принятые отношения порядка:
  - две константы, больший приоритет будет иметь константа, большая по величине;
  - две переменные, больший приоритет будет иметь переменная, название которой начинается на старшую букву в алфавите (аналогично для именованных констант);
  - константу и переменную, больший приоритет будет иметь константа;
  - константу и унарную (бинарную или тернарную) операцию, больший приоритет будет иметь константа;
  - переменную и унарную (бинарную или тернарную) операцию, больший приоритет будет иметь переменная;
  - унарную и бинарную (или тернарную) операцию, больший приоритет будет иметь унарная операция;
  - бинарную и тернарную операцию, больший приоритет будет иметь унарная операция.

Такая нормализация преобразует формулы правой и левой части в однотипные выражения, что дает возможность безошибочно диагностировать совпадение исходных формул.

**Результаты работы программы.** Для проверки работы блоков программного комплекса КиДиМ, реализующие приведенные выше алгоритмы, были рассмотрены модели двойного маятника (рис. 1) и сферического движения твердого тела в случае Эйлера и в случае Лагранжа. В результате работы программы получены следующие первые интегралы (приведены фрагменты листингов отчета работы программы).

Для двойного маятника – один интеграл Якоби:

$$T + \Pi = 0.5 * (J1 * \varphi'^2 + m * xD'^2 + m * yD'^2 + J2 * \psi'^2) - m * g * (y + yD) = h = -39.2239.$$

Для сферически движущегося твердого тела – 3 интеграла + (один – интеграл Якоби и два – Рауса):

– для случая Эйлера  $T + \Pi = 0.5 * (Jx * (\omega x^2 + \omega y^2) + Jz * \omega z^2) = h = 295.489.$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi'} = Jz * \omega z = \beta_1 = 5.43301.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi'} = Jx * (\omega x * \omega x' \psi' + \omega y * \omega y' \psi') + Jz * \omega z * \omega z' \psi' = \beta_2 = 4.76763.$$

– для случая Лагранжа  $T + \Pi = 0.5 * (Jx * (\omega x^2 + \omega y^2) + Jz * \omega z^2) + m * g * a * \cos \theta = h = 305.231.$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi'} = Jz * \omega z = \beta_1 = 5.43301.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi'} = Jx * (\omega x * \omega x' \psi' + \omega y * \omega y' \psi') + Jz * \omega z * \omega z' \psi' = \beta_2 = 5.01763.$$

Как видно, эти результаты совпадают с формулами этих интегралов, приведенных в [7].

**Перспективы дальнейших исследований.** Перспективными исследованиями и реализациями в ССКА КиДиМ нам представляются генерация первых интегралов на основе *скобок Пуассона*, а также использование функции Рауса для получения эффективных уравнений движения механических систем с циклическими координатами.

**Выводы.** Таким образом, по данным КиДиМ вполне возможно корректно построить выражения потенциальной и кинетической энергии, а, значит, и выражения функции Лагранжа. Для этого следует воспользоваться формулами (1), (9), (10). Это позволяет автоматически получить аналитические выражения первых интегралов – интеграла энергии (интеграла Якоби) и циклических интегралов (интегралов Рауса) по заданным в исходных данных ССКА КиДиМ силовым, упругим и инерционным элементам. Относительно более сложно при этом получить выражения потенциальной энергии по силовым элементам, особенно если характеристики их зависят от координат элементов или обобщенных координат системы, так как это связано с неопределенным интегрированием. Поэтому для целей автоматического формирования аналитических выражений для потенциальной энергии по силовым элементам их следует стремиться записывать с постоянной характеристикой (значением). Разработанные и представленные в статье аналитические компьютерные алгоритмы позволяют существенно поднять уровень диагностики и исследовательские возможности ССКАКиДиМ.

#### Список литературы

1. Айзерман М. А. Классическая механика. 2-е изд. – М. : Наука, 1980. – 367 с.
2. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. – М. : Физматгиз, 1966. – 300 с.
3. Андреев Ю. М., Морачковский О. К. О динамике голономных систем твердых тел // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 7. – С. 130 – 138.
4. Андреев Ю. М., Морачковский О. К. Компьютерное моделирование неголономных систем твердых тел на основе принципа Даламбера-Лагранжа // Прикладная механика. – 2006. – Т. 42, № 9. – С. 106 – 115.
5. Лурье А. И. Аналитическая механика. – М. : Гл. ред. физмат. лит., 1961. – 824 с.
6. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. – М. : Наука, Гл. ред. физмат. лит., 1967. – 520 с.
7. Бабаков И. М. Теория колебаний : учеб. пособие – 4-е изд., испр. – М. : Дрофа, 2004. – 591 с.

#### References (transliterated)

1. Ayzerman M. A. *Klassicheskaya mekhanika. 2-e izd.* [Classical Mechanics. 2nd ed.]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 367 p.
2. Gantmakher F. R. *Leksii po analiticheskoy mekhanike* [Lectures on Analytical Mechanics]. Moscow, FizMatGiz Publ., 1966. 300 p.
3. Andreev Yu. M., Morachkovskiy O. K. O dinamike golonomnykh system tverdykh tel [On the Dynamics of Holonomic Systems of Solids]. *Prikladnaya mekhanika* [Applied Mechanics]. 2005. vol. 41, no. 7, pp. 130–138.
4. Andreev Yu. M., Morachkovskiy O. K. Comp'uternoe modelirovanie negolonomnykh system tverdykh tel na osnove prinzipa d'Alamberta-Lagrange [Computer modeling of non-holonomic systems of solids based on the d'Alembert-Lagrange principle]. *Prikladnaya mekhanika* [Applied Mechanics]. 2006, vol. 42, no. 9, pp. 106–115.
5. Lurie A. I. *Analiticheskaya mekhanika* [Analytical Mechanics]. Moscow, Gl. red. fizmat. lit. Publ., 1961. 824 p.
6. Neymark Yu. I., Fufaev N. A. *Dinamika negolonomnykh system* [Dynamics of non-holonomic systems]. Moscow, Nauka, Gl. red. fizmat. lit. Publ., 1967. 520 p.
7. Babakov I. M. *Teoriya kolebaniy : ucheb. posobie – 4-e izd., ispr.* [Oscillation Theory: training manual – 4th ed.]. Moscow, Drofa Publ., 2004. 591 p.

Поступила (received) 06.11.2017

#### Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

**Аналітична комп'ютерна побудова перших інтегралів рівнянь руху дискретних механічних систем / Ю. М. Андреев // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 5 – 11. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.**

**Аналитическое компьютерное построение первых интегралов уравнений движения дискретных механических систем / Ю. М. Андреев // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 5 – 11. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.**

**Analytical computer construction of the first integrals of the equations of motion of discrete mechanical systems / Y. M. Andreev // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 30 (1252). – pp. 5 – 11. Bibliog.: 7 titles. – ISSN 2222-0631.**

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Андреев Юрій Михайлович** – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (067) 110-16-72; e-mail: andrjejev@gmail.com.

**Андреев Юрий Михайлович** – доктор технических наук, профессор, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (067) 110-16-72; e-mail: andrjejev@gmail.com.

**Andreev Yuriy Mikhaylovich** – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (067) 110-16-72; e-mail: andrjejev@gmail.com.