

является существенно нелинейным (рис. 4). Поэтому, теории, основанные на гипотезах типа С.П.Тимошенко (теория $\{1,0\}$), могут применяться только для расчета перемещений и величины силы. Для анализа напряжений необходимо применение теорий более высокого порядка точности, например, обобщенной теории $\{5,4\}$ или $\{7,6\}$. В дальнейшем следует более точно оценить границы применимости обобщенной теории в зависимости от размеров области нагружения и характеристик слоистой пластины.

Список литературы: 1. *Nosier A.* Low-velocity impact of laminated composites using a layerwise theory / *A. Nosier, R.P. Kapania, J. N. Reddy* // *Computational Mechanics*. – 1994. – Vol. 13. – P. 360-379. 2. *Pierson M.O.* Analytical solution for low-velocity impact response of composite plates / *M.O. Pierson, R. Vaziri* // *AIAA Journal*. – 1996. – Vol. 34, № 8. – P. 1633-1640. 3. *Tiberkak R.* Damage prediction in composite plates subjected to low velocity impact / *R. Tiberkak, M. Bachene, S. Rechak, B. Necib* // *Composite structures*. – 2008. – Vol. 83. – P. 73-82. 4. *Sun C.T.* On the impact of initially stressed composite laminates / *C.T. Sun, J.K. Chen* // *Journal of composite materials*. – 1985. – Vol. 19. – P. 490-504. 5. *Шуников А.Н.* Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация / *А.Н. Шуников, Я.П. Бузько, Н.В. Сметанкина, С.В. Угримов*. – Харьков: ХНЭУ, 2004. – 252 с. 6. *Ugrimov S.V.* Generalized theory of multilayer plates // *International Journal of Solids and Structures*. – 2002. – Vol. 39, № 4. – P. 819-839. 7. *Рассказов А.О.* Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек / *А.О. Рассказов, И.И. Соколовская, Н.А. Шульга*. – К.: Вища школа, 1986. – 191 с. 8. *Динник А.Н.* Избранные труды: В 2-х т. – Киев: Изд-во АН УССР, 1952. – Т.1. – 350 с. 9. *Динамика удара* / *Дж. А. Зукас, Т. Николас, Х.В. Свифт и др.* – М.: Мир, 1985. – 296 с.

Поступила в редколлегию 09.11.2010

УДК 625.03

В.П.ШПАЧУК, д-р техн. наук, Харківська національна академія міського господарства

Г.О.НІКІТИНА, Харківська національна академія міського господарства

ДО УМОВИ ОРТОГОНАЛЬНОСТІ ФОРМ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ «ПІДРЕСОРЕНА МАСА ВАГОНА – КОЛЕСО – РЕЙКА»

Досліджено динамічну ударну взаємодію контактуючої пари «вагон-колесо-рейка» з урахуванням конструктивної швидкості руху і завантаження вагона, а також геометричних параметрів стику шляху. Розв'язано задачу визначення умов ортогональності форм коливань з метою отримання невідомих констант загального рішення рівнянь руху механічної дискретно-континуальної системи.

Dynamic shock interaction of contacting pair «carriage-wheel-rail» is treated taking into account structural velocity of movement and load of carriage and also geometrical parameters of way joint. Estimation of orthogonality conditions of vibrations forms is pursued for the purpose of definition of unknown constants of common decision of mechanical discrete-continuum system equations.

Постановка проблеми. Залізниці України в даний час усе гостріше відчувають дефіцит у рухомому складі і матеріалах верхньої будови колії. З огля-

ду на важливість проблеми, виникає необхідність зниження взаємовпливу вагона і колії, особливо в зоні стиків, удосконалення конструкції вагона і верхньої будови колії, переходу до більш надійних, довговічних і високошвидкісних засобів транспорту, а також упровадження ресурсозберігаючих технологій. Практика показує, що істотно слабким місцем в процесах динамічної взаємодії вагона з верхньою будовою колії є ізольовані стикові нерівності колії, що відносяться до рейкових стиків. При цьому найбільш інформативним показником взаємодії в системі «вагон – рейка» є осадка баластового шару в місцях стикових нерівностей під шпалами рейки, оскільки в цих місцях рейка, як правило, випробовує найбільші динамічні навантаження ударного типу. Найбільше осідання баластового шару відбувається в місцях стикових нерівностей під шпалами приймаючої рейки. Це пов'язано з тим, що в цих місцях рейка, як правило, випробує найбільші силові динамічні навантаження ударного типу. Динамічна взаємодія вагона і приймаючої рейки в зоні стику викликає додаткові дії ударів на агрегати вагона, а також призводить до дефектів колії, що обумовлюють її загальний технічний стан і ресурс. Також залишкова і пружна деформація баластового шару в цій зоні служить причиною виникаючих осідань, перекосів, виплесків, що, у свою чергу, ще більш збільшують рівень динамічного впливу з боку колії на вагон. Досвід експлуатації свідчить, що проблему взаємодії транспортного засобу і колії необхідно розв'язувати комплексно, а саме, з позицій взаємодії в системі «вагон, як багатомірна дискретна механічна система – верхня будова колії, як континуальна система».

В роботі дослідження побудовані на базі розрахункової схеми на рис. 1, що і описує нестационарні процеси ударної взаємодії колісної пари, яка включає підресорену масу вагона, із приймаючою рейкою. Рейка встановлена на баластовому шарі колії через опори, що моделюють його пружні характеристики.

Метою роботи є розв'язання задачі визначення умов ортогональності форм коливань задля отримання невідомих констант загального розв'язку руху механічної дискретно-континуальної системи, що розглядається. Прийняті наступні припущення, що не суперечать результатам робіт [1-3]: після фази балістичного руху коливання колісної пари і головки рейки відбуваються в безвідривному режимі; прогини рейки реалізуються без порушення суцільності баластового шару; демпфіруючі властивості баластового шару не враховуються, оскільки прогин рейки розглядається лише на першій за часом фазі його зростання.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, у яких започатковано розв'язання даної проблеми. У роботах [4,5], присвячених питанням взаємодії транспортного засобу і балкових конструкцій на пружній основі, показано, що дослідження процесів прогинів зазначених «нескінченних» рейок вимагає урахування декількох форм коливань. При цьому, однак, не вказується їхня кількість, а також не враховуються комплексно питання впливу на прогини приймаючої рейки жорсткості накладок стикового зазору і найважливіша характе-

ристка стикового зазору – жорсткість приймаючої рейки. Тому отримані в роботах [4,5] результати досліджень, будучи аналітичними, не можуть бути використані для розв’язання поставленої в даній роботі конкретної задачі дослідження прогинів приймаючої рейки під першою шпалою з урахуванням експлуатаційних, конструктивних і механічних параметрів транспортного засобу, рейкової колії і функціонуючих накладок в обсязі перших п’яти форм коливань приймаючої рейки.

Підресорена маса вагона представлена двомасовою дискретною механічною системою «колісна пара-вагон» на фазі балістичного руху, а ділянка рейкової колії – у вигляді стику типу «зазор-ступінь вниз». Даний тип нерівності на практиці зустрічається досить часто [1], співвідношення її параметрів (ширина стику і його висота) варіюється в широких межах, а особливості їхнього виникнення розглянуті в роботах [1,2].

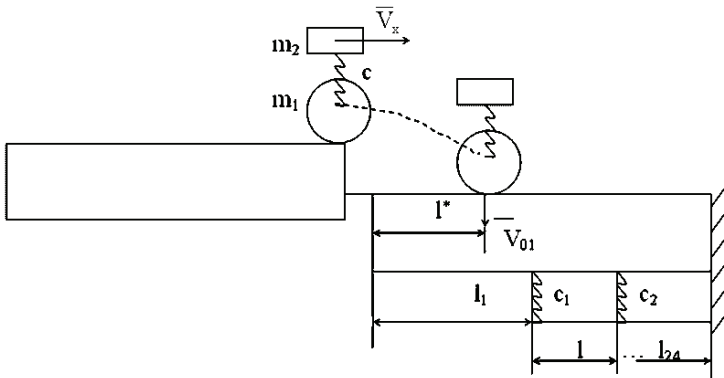


Рисунок 1 – Модель системи «підресорена маса вагона-колесо-рейка»

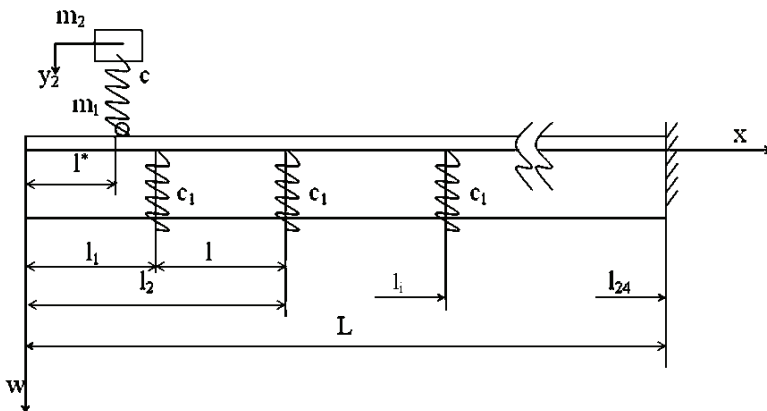


Рисунок 2 – Система «вагон – рейка на проміжних пружних опорах»

У роботі [6] досліджується умова ортогональності форм коливань для ба-

гатопрогінних балок та її застосування для вимушених механічних коливань двопрогінної балки.

Виклад основного матеріалу дослідження. У момент зіткнення колеса з рейкою на відстані l^* від краю рейки колесо має вертикальну швидкість V_{01} . Тут уведені наступні позначення: m_1, m_2 – приведені маси колеса і вагона відповідно; c – жорсткість ресорної підвіски, c_1, c_2, \dots, c_n – жорсткість баластового шару під шпалами, приймаємо $c_1 = c_2 = \dots = c_n$, l_1, l_2, \dots, l_n – відстані від краю рейки до першої і останньої шпали, l – відстань між шпалами.

Схема механічної дискретно-континуальної системи для дослідження процесів післяударних прогинів системи «вагон-колесо-рейка» в координатах $x-w$, з урахуванням граничних умов закріплення приймаючої рейки, приведена на рис. 2. Тут y_2 – переміщення приведені маси вагона m_2 ; c – жорсткість ресори; c_1 – жорсткості баластового шару з урахуванням геометричних параметрів шпали; l_i – координати пружних елементів рейки.

Диференціальні рівняння руху даної механічної системи [1,3]:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^{IV} w(t, x)}{\partial x^4} + \frac{\rho F}{EJ} \cdot \frac{\partial^{II} w(t, x)}{\partial t^2} &= \frac{c(y_2 - w(t, l^*))\delta(x - l^*)}{EJ} - \\ &- \sum_{i=1}^j \frac{c_1 w(t, l_i)\delta(x - l_i)}{EJ} - \frac{m_1}{EJ} \frac{\partial^{II} w(t, l^*)\delta(x - l^*)}{\partial t^2}, \quad j = 1 \div 23; \\ m_2 \ddot{y}_2 + c(y_2 - w(t, l^*)) &= 0, \end{aligned} \right. \quad (1)$$

де w – прогин рейки;

l^* – відстань від краю рейки до колеса в момент зіткнення;

ρ, E – щільність і модуль пружності матеріалу рейки;

J – момент інерції перерізу рейки відносно нейтральної осі;

$\delta(x - x_0)$ – імпульсна функція.

Рішення системи (1) знайдемо з застосуванням методу Фур'є поділу перемінних, а також методів теорії операційного числення Лапласа-Карсона [1,3]:

$$\begin{cases} w(t, x) = z(x)\sin(\omega t + \alpha); \\ y(x) = \lambda_2 \sin(\omega t + \alpha), \end{cases}$$

де ω – власна частота системи;

$z(x)$ – власна форма прогину рейки;

λ_2 – власна форма для координати y_2 .

Задача про коливання механічної системи, що розглядається, зводиться до суперпозиції власних форм. Для перших п'яти форм коливань рішення одержимо у вигляді:

$$W(t, x) = \sum_{j=1}^5 z^j(x)(D_j \sin \omega_j t + M_j \cos \omega_j t);$$

$$\begin{aligned}
y_1(t, 1^*) &= W(t, x = 1^*) = \sum_{j=1}^5 z^j(l^*) (D_j \sin \omega_j t + M_j \cos \omega_j t) = \\
&= \sum_{j=1}^5 (\lambda_1^j D_j \sin \omega_j t + \lambda_1^j M_j \cos \omega_j t); \\
y_2(t) &= \sum_{j=1}^5 (\lambda_2^j D_j \sin \omega_j t + \lambda_2^j M_j \cos \omega_j t),
\end{aligned} \tag{2}$$

де $\lambda_1 = z(l^*)$.

Невідомі константи в (2) визначимо з початкових умов: $w(0, x) = 0$; $\dot{w}(0, x) = 0|_{x \neq 1^*}$; $\dot{w}(0, 1^*) = V_1$; $y_2(0) = 0$; $\dot{y}_2(0) = V_{02}$, де початкові швидкості V_1 , V_{02} мас m_1 , m_2 визначаються з загального рішення руху двовимірної дискретної системи на фазі балістичного руху.

Для j -тої частоти диференціальні рівняння власних форм коливань системи мають вид:

$$\begin{cases}
z^{jIV}(x) - \kappa_1^{j4} z^j(x) - [\kappa_2^{j4} z^j(l^*) + \frac{c}{EJ} (\lambda_2^j - \lambda_1^j)] \delta(x - l^*) + \\
+ \frac{c_1}{EJ} \sum_{i=1}^{23} z^j(l_i) \delta(x - l_i) = 0, \quad j = 1 \div 5; \\
-m_2 \lambda_2^j \omega_j^2 + c (\lambda_2^j - \lambda_1^j) = 0,
\end{cases} \tag{3}$$

де $\kappa_1^4 = \frac{\rho F}{EI} \omega^2$, $\kappa_2^4 = \frac{m_1}{EJ} \omega^2$.

Необхідною умовою розв'язання систем рівнянь (1), (3) є умови ортогональності власних форм коливань [1,3]. Отримаємо його.

Візьмемо тому перше рівняння системи (3) для j -тої частоти і помножимо його на s -ту форму коливань. Далі це ж рівняння системи для s -тої частоти помножимо на j -ту форму коливань. Необхідною умовою ортогональності є нульове значення інтеграла по довжині рейки для отриманих добутоків:

$$\begin{cases}
\int_0^L z^{jIV}(x) z^s(x) dx - \kappa_1^{j4} \int_0^L z^j(x) z^s(x) dx - [\kappa_2^{j4} z^j(l^*) + \frac{c}{EJ} (\lambda_2^j - \lambda_1^j)] z^s(l^*) \\
+ \frac{c_1}{EJ} \sum_{i=1}^{23} z^s(l_i) z^j(l_j) = 0; \\
\int_0^L z^{sIV}(x) z^j(x) dx - \kappa_1^{s4} \int_0^L z^s(x) z^j(x) dx - [\kappa_2^{s4} z^s(l^*) + \frac{c}{EJ} (\lambda_2^s - \lambda_1^s)] z^j(l^*) \\
+ \frac{c_1}{EJ} \sum_{i=1}^{23} z^j(l_i) z^s(l_j) = 0.
\end{cases} \tag{4}$$

Зробимо перетворення і введемо наступні позначення:

$$\int_0^L z^{jIV} z^s dx = z^{j''''} z^s \Big|_0^L - \int_0^L z^{j''''} z^{s'} dx = [z^{j''''} z^s]_0^L - \int_0^L z^{j''''} z^{s''} dx = \int_0^L z^{j''''} z^{s''} dx;$$

$$\int_0^L z^{sIV} z^j dx = \int_0^L z^{s''} z^{j''} dx,$$

$$1_1^j = z^j(1^*); \quad 1_1^s = z^s(1^*).$$

Віднявши з другого рівняння системи (4) перше, одержимо умову ортогональності у виді:

$$\rho F(\omega_j^2 - \omega_s^2) \int_0^L z^s(x) z^j(x) dx + m_1(\omega_j^2 - \omega_s^2) \lambda_1^j \lambda_1^s + c(\lambda_2^j \lambda_1^s - \lambda_2^s \lambda_1^j) = 0. \quad (5)$$

Аналогічним чином зробимо з другим рівнянням системи (4):

$$m_2 \lambda_2^j \lambda_2^s (\omega_j^2 - \omega_s^2) + c(\lambda_1^j \lambda_2^s - \lambda_1^s \lambda_2^j) = 0. \quad (6)$$

Склавши рівняння (5) і (6), одержимо умову ортогональності у виді

$$(\omega_j^2 - \omega_s^2) [\rho F \int_0^L z^s(x) z^j(x) dx + m_1 \lambda_1^s \lambda_1^j + m_2 \cdot \lambda_2^j \cdot \lambda_2^s] = 0$$

чи остаточно:

$$\rho F \int_0^L z^s(x) z^j(x) dx + m_1 \lambda_1^s \lambda_1^j + m_2 \lambda_2^j \lambda_2^s = \delta^{js} \left(\rho F \int_0^L z^{s^2}(x) dx + m_1 \lambda_1^{s^2} + m_2 \lambda_2^{s^2} \right),$$

де $\delta^{js} = 0 \Big|_{j \neq s}$, $\delta^{js} = 0 \Big|_{j=s}$.

Визначимо далі початкові умови системи з урахуванням розв'язку (2):

$$w(0, x) = \Phi_1(x) = \sum_{j=1}^5 z^j(x) M_j; \quad \rho F z^s(x) \Big|_0^L; \quad y_1(0, 1^*) = \Phi_1(1^*) = \sum_{j=1}^5 M_j \lambda_1^j; \quad m_1 \lambda_1^s;$$

$$w(0, x) = \Phi_2(x) = \sum_{j=1}^5 z^j(x) D_j \omega_j; \quad \rho F z^s(x) \Big|_0^L; \quad \dot{y}(0, 1^*) = \Phi_2(1^*) = \sum_{j=1}^5 D_j \omega_j \lambda_1^j; \quad m_1 \lambda_1^s;$$

$$y_2(0) = y_{20} = \sum_{j=1}^5 M_j \lambda_2^j; \quad m_2 \lambda_2^s; \quad \dot{y}_2(0) = \dot{y}_{20} = \sum_{j=1}^5 D_j \omega_j \lambda_2^j; \quad m_2 \lambda_2^s;$$

$$\Phi_2(x) = V_1 \delta(x - 1^*); \quad \dot{y}_{10} = V_1; \quad y_{20} = 0; \quad \dot{y}_{20} = V_{01}.$$

Або:

$$\left[\begin{array}{l} \rho F \int_0^L \Phi_1(x) z^s(x) dx = \sum_{j=1}^5 M_j \left[\rho F \int_0^L z^j(x) z^s(x) dx \right]; \\ \rho F \int_0^L \Phi_2(x) z^s(x) dx = \sum_{j=1}^5 D_j \omega_j \left[\rho F \int_0^L z^j(x) z^s(x) dx \right]; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \lambda_1^s y_{10} = \sum_{j=1}^5 M_j m_1 \lambda_1^j \lambda_1^s; \\ m_1 \lambda_1^s \dot{y}_{10} = \sum_{j=1}^5 D_j \omega_j m_1 \lambda_1^j \lambda_1^s; \\ m_2 \lambda_2^s y_{20} = \sum_{j=1}^5 M_j m_2 \lambda_2^j \lambda_2^s; \\ m_2 \lambda_2^s \dot{y}_{20} = \sum_{j=1}^5 D_j \omega_j m_2 \lambda_2^j \lambda_2^s. \end{array} \right. \quad (7)$$

Склавши в (7) рівняння перше, третє і п'яте, потім друге, четверте і шосте одержимо наступні формули для визначення невідомих констант:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho F \int_0^L \Phi_1(x) z^s(x) dx + m_1 \lambda_1^s y_{10} + m_2 \lambda_2^s y_{20} = \sum_{j=1}^5 M_j \left[\rho F \int_0^L z^j(x) z^s(x) dx + \right. \\ \left. + m_1 \lambda_1^j \lambda_2^s + m_2 \lambda_2^j \lambda_2^s \right]; \\ \rho F \int_0^L \Phi_2(x) z^s(x) dx + m_1 \lambda_1^s \dot{y}_{10} + m_2 \lambda_2^s \dot{y}_{20} = \sum_{j=1}^5 D_j \omega_j \left[\rho F \int_0^L z^j(x) z^s(x) dx + \right. \\ \left. + m_1 \lambda_1^j \lambda_2^s + m_2 \lambda_2^j \lambda_2^s \right], \end{array} \right.$$

які з урахуванням умови ортогональності приймуть вид:

$$\rho F \int_0^L \Phi_1(x) z^s(x) dx + m_1 \lambda_1^s y_{10} + m_2 \lambda_2^s y_{20} = \delta^{js} \sum_{s=1}^5 M_s \left[\rho F \int_0^L z^{s^2}(x) dx + m_1 \lambda_1^{s^2} + m_2 \lambda_2^{s^2} \right];$$

$$\rho F \int_0^L \Phi_2(x) z^s(x) dx + m_1 \lambda_1^s \dot{y}_{10} + m_2 \lambda_2^s \dot{y}_{20} = \delta^{js} \sum_{s=1}^5 D_s \omega_s \left[\rho F \int_0^L z^{s^2}(x) dx + m_1 \lambda_1^{s^2} + m_2 \lambda_2^{s^2} \right].$$

З урахуванням початкових умов при $x \neq l^*$ і $j = s$ перетворимо останні рівняння до виду

$$M_s \left[\rho F \int_0^L z^{s^2}(x) dx + m_1 \lambda_1^{s^2} + m_2 \lambda_2^{s^2} \right] = 0;$$

$$D_s \omega_s \left[\rho F \int_0^L z^{s^2}(x) dx + m_1 \lambda_1^{s^2} + m_2 \lambda_2^{s^2} \right] = m_1 \lambda_1^s V_1 + m_2 \lambda_2^s V_{01}.$$

При $x = l^*$ і $j = s$ виконується

$$D_s \omega_s \left[\rho F \int_0^L z^{s^2}(x) dx + m_1 \lambda_1^{s^2} + m_2 \lambda_2^{s^2} \right] = \rho F \int_0^L \Phi_2(l^*) z^s(x) dx + m_1 \lambda_1^s V_1 + m_2 \lambda_2^s V_{01}.$$

Звідси отримаємо

$$M_s = 0;$$

$$D_s = \frac{m_1 \lambda_1^s V_1 + m_2 \lambda_2^s V_{01}}{\omega_s \left[\rho F \int_0^L z^{s^2}(x) dx + m_1 \lambda_1^{s^2} + m_2 \lambda_2^{s^2} \right]}, \text{ при } x \neq l^*;$$

$$D_s = \frac{\rho F V_1 z^s(l^*) + m_1 \lambda_1^s V_1 + m_2 \lambda_2^s V_{01}}{\omega_s [\rho F z^{s^2}(l^*) + m_1 \lambda_1^{s^2} + m_2 \lambda_2^{s^2}]}, \text{ при } x = l^*.$$

У результаті прогин рейки з урахуванням підресореної маси вагона і нульових початкових умов визначається вираженням:

$$w(t, x) = \sum_{s=1}^5 z^s(x) D_s \sin \omega_s t.$$

Висновки з даного дослідження. Результати досліджень використовуються на практиці при дослідженні параметрів динамічної ударної взаємодії контактуючої пари «вагон-колесо-рейка» з урахуванням конструктивної швидкості руху і завантаження вагона, а також геометричних параметрів стику. На їхній основі розв'язується задача впливу механічних і конструктивних параметрів транспортного засобу на прогини віддаючої і приймаючої рейок. Також використовуються при дослідженні і аналізі залежності пружного осідання першої шпали приймаючої рейки для різних типів взаємодії і граничних умов її закріплення.

Список літератури: 1. Сتيكوва динамика трамвая / Шпачук В.П., Далека В.Х., Коваленко А.В. – Харків: ХНАМГ, 2008. – 205 с. 2. Вериго М.Ф., Коган А.Я. Взаимодействие пути и подвижного состава / Под ред. М.Ф. Вериго. – М.: Транспорт, 1986. – 559 с. 3. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1968. – 691 с. 4. Дмитриев А.С. Вопросы взаимодействия балочных конструкций с движущейся сосредоточенной нагрузкой // Проблемы машиностроения. – 1986. – № 25. – С. 43-50. 5. Филиппов А.П., Кохманюк С.С., Воробьев Ю.С. Воздействие динамических нагрузок на элементы конструкций. – К.: Наукова думка, 1978. – 176 с. 6. Yozo Mikata Orthogonality condition for a multi-span beam, and its application to transient vibration of a two-span beam // Journal of Sound and Vibration. – 2008. – Vol. 314, issues 3-5. – P. 851-866.

Поступила в редколлегию 08.11.2010