МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МІНІСТЕРСТВО ОХОРОНИ ЗДОРОВ'Я УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНІЙ УНІВЕРСИТЕТ
«Харківський політехнічний інститут»
НАЦІОНАЛЬНИЙ ФАРМАЦЕВТИЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

А. К. Бабіченко, І.Л. Красніков, В. І Вельма, І. Г. Лисаченко,
Ю. А. Бабіченко, С. Д. Деменкова

ЗБІРНИК ЗАДАЧ
З МЕТРОЛОГІЇ ТА ОСНОВ ВИМІРЮВАНЬ

Рекомендовано центральною методичною радою Національного фармацевтичного університету як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів

За редакцією А. К. Бабіченка

Харків
Друкарня Мадрид
2021

УДК 006.91(075.8)

З-41

Затверджено ЦМР НФаУ, протокол № 4 від 23.02.2021 р.

Авторський колектив

А. К. Бабіченко, канд. тех. наук, проф.; *І. Л. Красніков*, канд. техн. наук, проф.; *В. І. Вельма*, канд. техн. наук, доц.; *І. Г. Лисаченко*, канд. тех. наук,доц.; *Ю. А. Бабіченко*, канд. техн. наук, доц.; *С. Д. Деменкова*, асистент

Рецензенти:

В. О. Панасенко, д-р техн. наук, проф., начальник науково-технічного відділу ДУ «НІОХІМ»

В. Є. Корсун, канд. техн. наук, доц., зав. кафедри автоматизації виробничих процесів Харківського національного університету будівництва і архітектури

Збірник задач з метрології та основ вимірювань: навч. посібник / уклад.:

З-41 А. К. Бабіченко, І. Л. Красніков, В. І. Вельма та ін.; за ред.

А. К. Бабіченка.- Харків: НТУ «ХПІ», НФаУ, 2021. – 95 с.

ISBN 978-617-7988-26-6

У посібнику розглянуті основні положення та визначення у сфері метрології, а також питання застосування статистичної обробки результатів вимірювання. Наведені аналіз та методики оцінки похибок вимірювання фізичних величин, які пояснюються на конкретних прикладах. До кожного розділу представлені варіанти для самостійного розв’язання практичних задач. Посібник розрахований для студентів і викладачів вищих навчальних закладів, а також може бути корисним для спеціалістів з автоматизації виробничих процесів.

Табл 54, Іл. 1, Бібліогр.: 10 найм.

УДК 006.91(075.8)

ISBN 978-617-7988-26-6

ВСТУП

Найважливішими проблемами, що пов`язані з сучасним виробництвом, є підвищення якості продукції, ресурсо- та енергозбереження, охорона навколишнього середовища. Успішне їх розв’язання у здебільшому залежить від рівня метрології та засобів вимірювання, що застосовуються в промисловості. Інформація, яка отримана в процесі вимірювань, вже є не тільки джерелом отримання нових знань або засобом перевірки наукових гіпотез, але використовується безпосередньо в автоматизованих системах керування технологічними процесами. (АСКТП) До функцій АСКТП, де використовуються результати вимірювань, відносяться зокрема наступні: централізований контроль та вимірювання технологічних параметрів; побічне вимірювання (обчислення) параметрів процесу та техніко- економічних показників; формування сигналів на виконавчі пристрої, регулятори та системи, відображення інформації; формування даних та видача їх оперативному персоналу; підготовка інформації та передача їх до суміжних систем керування; прогнозування стану обладнання та виявлення порушень в ході технологічного процесу; розрахунок оптимальних режимів функціонування об’єктів керування.

Вимірювальні канали такої системі керування є найбільш складною частиною і вимагають певних знань в області метрології, математичної статистики та теорії випадкових процесів для отримання достовірних результатів, що і обумовлює актуальність запровадження в навчальні плани багатьох технічних спеціальностей вищих навчальних закладів дисципліни «Метрологія та основи вимірювань», зокрема, і спеціальності 151 «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології».

В посібнику наведено приклади вирішення задач, що найчастіше мають місце в практичній роботі щодо перетворень систем одиниць фізичних величин, аналізу похибок вимірювальних засобів, оцінки похибок та представлення результатів вимірювання, перевірки статистичних гіпотез.

Основна задача посібника полягає в тому (наскільки це можливо в межах програми для студентів другого курсу), щоб рекомендовані способи представлення експериментальних результатів не суперечили діючим державним стандартам та міжнародним рекомендаціям. Посібник відповідає навчальній програмі курсу «Метрологія та основи вимірювань» і призначений для студентів спеціальності «Автоматизація та комп'ютерно–інтегровані технології» та може бути використаний студентами інших спеціальностей, що вивчають цикл дисциплін з автоматизації технологічних процесів, а саме «Технології фармацевтичних препаратів», «Біотехнології», «Теплоенергетики» та ін.

РОЗДІЛ 1

ФІЗИЧНІ ВЕЛИЧИНИ. ОДИНИЦІ ВИМІРЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН. ОКРУГЛЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ОБЧИСЛЕННЯ

1.1 Загальні відомості

Фізична величина характеризує властивість об'єкта, яка може бути спільною в якісному відношенні для багатьох матеріальних об'єктів, але індивідуальна в кількісному відношенні для кожного з них. Отримання відомостей що до кількісних відношень величин, а саме їх розміру і є основною задачею вимірювань. При цьому числова оцінка цього розміру залежить від прийнятої системи одиниць фізичних величин.

Незважаючи на безумовні переваги, які надає застосування системи одиниць СІ, до теперішнього часу широко розповсюдженні різні одиниці, що не входять у цю систему. Від багатьох з них неможливо відмовитися у зв'язку з незручністю їх застосування у певних галузях, а інші були збережені в силу історичних традицій. Тому при стандартизації одиниць не тільки в нашій, але і в багатьох інших країнах було визнано доцільним збереження низки одиниць, що отримали широке практичне застосування.

При переході до одиниць СІ може відбуватись зміна коефіцієнтів у розрахункових формулах. При цьому слід мати на увазі, що існують два види рівнянь зв'язку: між фізичними величинами та між числовими значеннями. Виконання розрахунків має виконуватись з використанням формул, написаних у формі рівнянь зв'язку між фізичними величинами, тобто формул, що не містять числових коефіцієнтів, залежних від обраних одиниць. При перерахунках нове значення слід округляти таким чином, щоб за своєю точністю воно відповідало вихідному значенню. Множники і результати перерахунку слід округляти за загально прийнятими правилами округлення чисел.

Нижче наведені формули для визначення похідних фізичних величин, що найчастіше використовуються в процесі розрахунків та математичного моделювання технологічних об'єктів керування, а також приклади для перерахунку щодо переходу до тих чи інших одиниць.

Питома вага γ і густина ρ зв'язані залежністю:

$$\gamma = \rho g, \tag{1.1}$$

де g- прискорення вільного падіння, м/с^2

Тиск P стовпа рідини висотою h за густини рідини ρ дорівнює

$$P = \rho g h. \tag{1.2}$$

Кінематичний коефіцієнт в'язкості ν зв'язаний з динамічним коефіцієнтом в'язкості μ співвідношенням:

$$\nu = \mu / \rho. \tag{1.3}$$

Масова витрата потоку рідини M або газу дорівнює:

$$M = V\rho. \tag{1.4}$$

де $V=\omega f$ - об'ємна витрата; ω - середня швидкість потоку; f- площа поперечного перерізу потоку. Перерахунок об'ємної витрати V у витрату V_H за нормальних умов. P_H і Θ_H здійснюється за наступними рівняннями:

$$V_H = V \cdot \rho / \rho_H; \tag{1.5}$$

$$\rho = \rho_H P_1 \Theta_H / (P_H \Theta_1 k), \tag{1.6}$$

де ρ_H - густина газового потоку за нормальних умов, а саме температури Θ_H = 293,15K і тиску P_H = 1,0332 кгс/см^2; P_1 - абсолютний тиск газового потоку; Θ_1 – абсолютна температура газового потоку; k - коефіцієнт стисливості.

Тепловий потік *Ф* поверхневих теплообмінних апаратів визначається за формулою:

$$Ф = KF \vartriangle \Theta_{CP}, \qquad (1.7)$$

де *K* - коефіцієнт теплопередачі; $\vartriangle\Theta_{CP}$ - середня різниця температур гарячого і холодного теплоносія. *F* - площа поверхні теплопередачі.

Кількість теплоти *Ф*, що витрачається в процесі нагрівання потоку від температури Θ_1 до температури Θ_2 дорівнює:

$$Ф = Mc(\Theta_2 - \Theta_1), \qquad (1.8)$$

де *c* - середня масова теплоємкість потоку.

Згідно другого закону Ньютона вага (сила) *G* визначається рівнянням:

$$G = mg, \qquad (1.9)$$

де *m* - маса речовини.

1.2 Приклади розв'язання задач

Задача 1.2.1 Манометр, що встановлений у відкритій кабіні літака, показує надмірний тиск $P_{НД}$ тиск мастила на ріні 6 кгс/см^2. При цьому показання барометра $P_{АТМ}$ складає 752 мм рт.ст. Необхідно визначати абсолютний тиск $P_{АБС}$ мастила у таких одиницях як Н/м^2, МПа, кгс/м^2, мм рт.ст, мм вод.ст.

Рішення.

Абсолютний тиск $P_{АБС}$, як відомо визначається за формулою:

$$P_{АБС} = P_{НД} + P_{АТМ},$$

де $P_{НД}$, $P_{АТМ}$ – відповідно надмірний та атмосферний тиск.

Визначаємо складові цього рівняння, Н/м^2:

$$P_{АТМ} = 13600 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}752 = 1{,}00 \cdot 10^5;$$

$$P_{НД} = 6 \cdot 9{,}81 \cdot 10^4 = 5{,}89 \cdot 10^5;$$

$$P_{АБС} = (5{,}89 + 1{,}00)\, 10^5 = 6{,}89 \cdot 10^5$$

Кінцевий результат має три значущих цифри, що відповідає фізичній константі цих рівнянь.

Переходячи до інших одиниць, абсолютний тиск буде дорівнювати:

$$P_{АБС} = 6{,}89 \cdot 10^5 = 0{,}689 \text{ МПа} = 0{,}702 \cdot 10^5,$$

де $P_{АБС}$ – абсолютний тиск, кгс/м^2.

$$P_{АБС} = \frac{6{,}89 \cdot 10^5 \cdot 10^3}{13600 \cdot 9{,}81} = 51{,}6 \cdot 10^2,$$

де $P_{АБС}$ – абсолютний тиск, мм рт.ст.

$$P_{АБС} = \frac{6{,}89 \cdot 10^5 \cdot 10^3}{1000 \cdot 9{,}81} = 70{,}2 \cdot 10^3,$$

де $P_{АБС}$ – абсолютний тиск, мм вод.ст.

Слід відзначити, що при більш точних обчисленнях фізичні константи повинні містити більшу кількість знаків, а отже і значущих цифр. Наприклад, якщо g = 9,8061 м/с^2, то числові значення $P_{АБС}$, $P_{АТМ}$ і $P_{НД}$ будуть наступними:

$$P_{АТМ} = 1{,}0029 \cdot 10^5;\; P_{НД} = 5{,}8840 \cdot 10^5;\; P_{АБС} = 6{,}8869 \cdot 10^5,$$

де $P_{АБС}$, $P_{НД}$, $P_{АТМ}$ – відповідний тиск в Н/м^2.

Задача 1.2.2 У трубці вакуумметра висота стовпчика ртуті дорівнює 420 мм. Показання барометра становить 768 мм рт.ст. Визначити абсолютний тиск $P_{АБС}$ у таких одиницях як Н/м^2, МПа, кгс/м^2, атм, кгс/см^2, ат.

Рішення.

Абсолютний тиск, як відомо, визначається рівнянням:

$$P_{АБС} = P_{АТМ} - P_{ВАК}.$$

Отже абсолютний тиск, у мм рт.ст, буде складати:

$$P_{АБС} = 768 - 420 = 348.$$

Переходячи до інших одиниць абсолютний тиск буде дорівнювати:

$$P_{АБС} = 13600 \cdot 9,81 \cdot 0,348 = 4,64 \cdot 10^4 н/м^2 = 46,4 кПа =$$
$$= 0,473 \cdot 10^4 кгс/м^2 = 0,473\ кгс/см^2 = 0,458\ атм = 0,473\ ат.$$

Наведений приклад доводить, що поміж технічною (ат) і фізичною атмосферою (атм) існує розбіжність. При цьому 1 ат = 735 мм рт.ст, а 1 атм = 760 мм рт.ст.

Задача 1.2.3 Проведено зважування за допомогою пружинних ваг зливку свинцю, що має густину ρ = 11,3 г/см^3, а об’єм v= 1 дм^3. Визначити вагу свинцю у таких одиницях як Н і кгс.

Рішення.

Вага свинцю буде дорівнювати, Н:

$$m = 11,3 \cdot 10^3 \cdot 0,001 \cdot 9,81 = 111.$$

Вага свинцю в технічній системі одиниць,кгс:

$$m = 111/9,81 = 11,3.$$

Задача 1.2.4 Потік повітря з температурою 50 ^oC і тиском 2 кгс/см^2 проходить по трубопроводу діаметром 160 мм зі швидкістю 9 м/с. Барометричний тиск складає 740 мм рт.ст. Визначити масову витрату повітря, об’ємну витрату повітря за робочих та нормальних умов. При цьому густина повітря за нормальних умов складає 1,293 кг/м^3, коефіцієнт стисливості повітря дорівнює 1,01.

Рішення

Надмірний, барометричний, абсолютний тиск та тиск за нормальних умов в одиницях СІ, Па:

$$P_{НД} = 2 \cdot 9,81 \cdot 10^4 = 1,96 \cdot 10^5.$$

$$P_{АТМ} = 13600 \cdot 9,81 \cdot 0,740 = 0,997 \cdot 10^5 4;$$

$$P_{АБС} = (1,96 + 0,987)10^5 = 2,95 \cdot 10^5;$$

$$P_H = 1,0332 \cdot 9,81 \cdot 10^4 = 1,01 \cdot 10^5.$$

Густина повітря за робочих умов, кг/м^3:

$$\rho = 1,293 \frac{2,95 \cdot 10^5 \cdot 293}{1,01 \cdot 10^5 (293 + 50) 1,01} = 3,19.$$

Об'ємна витрата повітря за робочих умов, м^3/с:

$$V = 9 \cdot 0,785 \cdot 0,16^2 = 0,181.$$

Об'ємна витрата повітря за нормальних умов, м^3/с:

$$V_H = 0,181 \cdot 3,19 / 1,293 = 0,447.$$

Масова витрата повітря, кг/с:

$$M = 0,181 \cdot 3,19 = 0,577.$$

Задача 1.2.5 В паровому підігрівачі відбувається підігрів води від температури 30^{o}С. Витрата води складає 10 т/год. При цьому середня теплоємкість води має значення 4,18 кДж/(кг•К).

Визначити кількість теплоти, що витрачається на підігрів води у таких одиницях як кВт, та ккал/год.

Рішення.

Кількість теплоти складає, ккал/год:

$$\Phi = 10 \cdot 10^3 \cdot 4,18(80 - 30) / 4,19 = 49,19 \cdot 10^4.$$

Кількість теплоти у кВт:

$$\Phi = 10 \cdot 10^3 \cdot 4,18(80 - 30) / 3600 = 581.$$

Задача 1.2.6. До конденсатора надходить пара аміаку, який охолоджується водою. Середня різниця температур у конденсаторі складає 60^{o}С а коефіцієнт теплопередачі дорівнює 740 Вт/(м^{2}К). При цьому поверхня теплопередачі конденсатора 210 м^2. Визначити тепловий потік конденсатора у МВт, ккал/год та Гкал/год.

Рішення

Тепловий потік конденсатора визначається за рівнянням теплопередачі, МВт:

$$Ф = 740 \cdot 210 \cdot 60 = 9,32 \cdot 10^6 \text{ Вт} = 9,32.$$

Тепловий потік конденсатора у Гкал/год:

$$Ф = 740 \cdot \frac{3600}{4,19} \cdot 210 \cdot 60 = 8,01 \cdot 10^6 \text{ ккал/год} = 8,01.$$

1.3 Задачі для самостійної роботи

Задача 1.3.1 Визначити абсолютний тиск пари у котлоагрегаті, якщо манометр показує надмірний тиск $P_{НД}$. При цьому атмосферний тиск $P_{АТМ}$ по барометру становить 680 мм рт.ст. Навести цей тиск у Н/м^3, МПа, кгс/м^2, мм рт.ст, мм вод.ст.

Таблиця 1.1 Вихідні дані по задачі 1.3.1

Показник	Номер варіанту									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_{НД}$, кгс/см^2	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6

Задача 1.3.2 Манометр показує, що надмірний тиск в балоні, який заповнений киснем, становить $P_{НД}$. Визначити абсолютний тиск в балоні за різної величини барометричного тиску $P_{АТМ}$.

Таблиця 1.2 Вихідні дані до задачі 1.3.2

Показники	Номер варіант									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$P_{НД}$, ат	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
$P_{АТМ}$, мм рт.ст	600	620	650	680	700	710	725	730	740	750

Задача 1.3.3 Вакуумметр показує тиск в апараті на рівні $P_{ВАК}$. Барометричний тиск становить $P_{АТМ}$. Визначити абсолютний тиск в апараті.

Таблиця 1.3 Вихідні дані до задачі 1.3.3

Показники	Номер варіанту									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$P_{ВАК}$, мм рт.ст.	520	505	480	550	510	480	500	525	450	490
$P_{АТМ}$, мм рт.ст.	726	740	735	750	745	720	730	740	750	760

Задача 1.3.4 Вакуумметр показує розрідження на рівні $P_{ВАК}$. Визначити абсолютний тиск димових газів, якщо показання барометра дорівнює $P_{АТМ}$.

Таблиця 1.4 Вихідні дані до задачі 1.3.4

Показники	Номер варіанту						
	31	32	33	34	35	36	37
$P_{ВАК}$, мм рт.ст.	74	78	76	75	77	80	79
$P_{АТМ}$	1ат	10,2 м вод.ст	735 мм рт.ст	1,1 кгс/м^2	1,3 атм	750 мм рт.ст.	0,95 атм

Задача 1.3.5 Виконано зважування металевого бруска за допомогою пружинних ваг, що має густину *ρ*, а об'єм v. Визначити вагу бруска у таких одиницях як Н, кгс.

Таблиця 1.5 Вихідні дані до задачі 1.3.5

Показники	Номер варіанту									
	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
ρ, кг/м^3	7850	7250	8800	8500	2700	11400	3500	2600	9200	5000
v,дм^3	1	1,5	0,8	0,6	1,4	1,2	2	1,8	1,3	2

Задача 1.3.6 Природній газ з температурою Θ_1 і надмірним тиском P_1 прямує по трубопроводу, витрата якого за нормальних умов складає V_H. Барометричний тиск 0,1 МПа. Внутрішній діаметр трубопроводу *D*. При цьому густина природного газу за нормальних умов 0,727 кг/м^3, а коефіцієнт стисливості природного газу *k*. Визначити витрату природного газу за температури Θ_1 і тиску P_1.

Таблиця 1.6 Вихідні дані до задачі 1.3.6

Показники	Номер варіанту							
	48	49	50	51	52	53	54	55
Θ_1, ^{o}C	5	10	15	25	30	35	40	0
P_1, кгс/см^2	12	10	8	10	8	6	6	10
V_H, м^3/с	27	23	20	20	18	16	18	20
D, мм	400	350	350	300	250	250	250	350
k	0,974	0,978	0,981	0,983	0,985	0,987	0,989	0,972

Задача 1.3.7. До випарника надходить рідкий аміак, що охолоджує розсол. Середня різниця температур у випарнику $\Delta\Theta_{CP}$, коефіцієнт

теплопередачі *K*, а поверхня теплопередачі *F*. Визначити тепловий потік випарника у кВт, МВт, ккал/год, Гкал/год.

Таблиця 1.7 Вихідні дані до задачі 1.3.7

Показники	Номер варіанту						
	56	57	58	59	60	61	62
$\Delta\Theta_{CP}$, °C	20	18	15	12	10	14	16
K, $\frac{ккал}{м^2 \cdot год \cdot K}$	510	490	470	450	420	440	450
F, $м^2$	300	320	340	360	380	370	350

РОЗДІЛ 2

ПОХИБКИ ЗАСОБІВ ВИМІРЮВАННЯ. КЛАСИ ТОЧНОСТІ ЗАСОБІВ ВИМІРЮВАННЯ

2.1 Загальні відомості

За будь-якого вимірювання неминучі відхилення результатів вимірювання від дійсного значення вимірюваної величини, які обумовлені різними причинами. Ці відхилення є похибками вимірювань.

Похибки класифікуються за причинами виникнення, умовами проведення вимірювань та характером проявлення. У залежності від причини виникнення розрізнюють наступні похибки вимірювання.

Похибка методу вимірювання є складовою похибки вимірювання, що виникає від недосконалості методу вимірювання (методична похибка).

Інструментальна (апаратурна) похибка – це складова похибки вимірювання, що залежить від засобу вимірювання, а саме його точності (класу приладу).

Суб'єктивна є також складовою загальної похибки вимірювання, що обумовлена недосконалістю органів почуття, а також недбалістю в процесі вимірювання і фіксації результату.

За умовами виконання вимірювання розрізнюють основну і додаткову похибку. Основна похибка засобу вимірювання обумовлена нормованими кліматичними умовами та зазначається у паспортних даних або у нормативно-технічній документації (НТД) на прилад.

Додаткова похибка - це похибка, що викликана відхиленням умов вимірювання від нормованих, та може навіть перевищувати основну похибку у декілька разів. Для обрахування цієї похибки в НТД можуть бути представлені графіки, таблиці, але найчастіше використовуються формули.

За характером прояву розрізнюють систематичну та випадкову похибки. Систематична похибка може бути результатом неправильного градуювання або калібровки приладу. Випадкова похибка - це складова загальної похибки.

вимірювання, поява якої має випадковий характер. Різновидом останньої є грубі похибки.

За формою визначення похибок засобів вимірювання розрізняють абсолютну, відносну та наведену. Різниця між реальною Y_P і номінальною Y_H характеристиками, що встановлені при заданому значенні вимірюваної величини, становить собою абсолютну похибку Δ і визначається рівнянням:

$$\Delta = Y_P - Y_H. \tag{2.1}$$

Абсолютна похибка не може служити показником точності вимірювань, оскільки точність вимірювання буде змінюватись у залежності від значення вимірюваної величини. Тому для характеристики точності результатів вимірювання використовується відносна похибка, яка обчислюється найчастіше у відсотках за формулою:

$$\delta = \frac{\Delta}{Y_H} 100\%. \tag{2.2}$$

Однак ця характеристика не завжди придатна для нормування похибки засобів вимірювання, оскільки за різних значень Y_H відносна похибка приймає різні значення аж до $\delta = \infty$ при $Y_H = 0$. Тому для нормування похибки засобів вимірювання використовується наведена похибка, яка визначається за рівнянням:

$$\gamma = \frac{\Delta}{X_K} 100\%; \; \gamma = \frac{\Delta}{Y_K} 100\%, \tag{2.3}$$

де X_K - діапазон зміни вхідної X_K або вихідної Y_K величини приладу чи перетворювача.

Для опису форми меж смуги похибок засобів вимірювання використовуються адитивні та мультиплікативні похибки. У випадку, коли абсолютна похибка засобу вимірювань у всьому діапазоні вимірювань обмежена постійною межею ± Δ_o, що незалежить від поточного значення вхідної величини *X*, то така похибка є адитивною. Це поняття притаманно як випадковим, так і систематичним похибкам. Якщо ширина смуги похибок зростає пропорційно росту вхідної величини *X*, а при *X* = 0 також дорівнює нулю, то така похибка є мультиплікативною.

Специфічним різновидом похибки, що виникає у цифрових приладах і дискретних перетворювачах, є похибка квантування. Ця похибка є інструментальною, випадковою і адтивною, яка не залежить ні від поточного значення результату вимірювання величини *X*, ні від швидкості зміни *X* у часі.

Для оцінки похибки, яку вносить певний засіб вимірювання, використовують нормовані значення похибок. Таким чином нормуються основна і додаткова похибки. При цьому саме межі основної похибки та коефіцієнти впливу для додаткової похибки заносяться до НТД кожного засобу вимірювання.

Клас точності є характеристикою, що визначає гарантовані межі значень основних і додаткових похибок, а також інші властивості засобів вимірювання, що впливають на точність. Позначення класів точності засобів вимірювання регламентовані ДГСТ 8.401.80. Основна похибка засобу вимірювання може бути нормована чотирма різними способами.

У разі чисто мультиплікативній смузі похибки засобу вимірювання абсолютна похибка Δ зростає прямо пропорційно початковому значенню вимірюваної величини. За таких обставин клас точності представляють у формі відносної похибки, а абсолютну похибку розраховують за формулою:

$$\Delta = \delta \cdot Y_H \ / 100. \qquad (2.4)$$

У випадку чисто адитивній смузі похибок, коли абсолютна похибка залишається постійною за будь-яких значень *X* чи *Y* клас точності засобу вимірювання представляють у формі наведеної похибки, а абсолютну похибку обчислюють за рівнянням:

$$\Delta = \gamma X_N \ / 100\,, \qquad (2.5)$$

де X_N – нормоване значення вимірюваної величини, яке визначається стандартом 8.401 – 80 і залежить від виду шкали чи діапазону вимірювання приладу або перетворювача.

За одночасної присутності адитивної та мультиплікативної складових у передбачені практично лінійної зміни абсолютної похибки клас точності представляють у формі відносної похибки, визначення якої здійснюється за формулами:

$$\Delta = a + bY_H; \tag{2.6}$$

$$\delta = \frac{\Delta}{Y_H} = [c + d(\left|\frac{Y_K}{Y_H}\right| - 1)], \tag{2.7}$$

де Δ – межі припустимої абсолютної основної похибки, що визначена в одиницях вимірюваної величини на вході X (виході Y) чи умовно у поділках шкали; X_H або Y_H - значення вимірюваної величини відповідно на вході чи виході засобів вимірювання або число поділок, відрахованих по шкалі; a і b - позитивні числа незалежні від X_H чи Y_H, q – деяке число, що обирається зі стандартного ряду, наведеного нижче; c і d – позитивні числа, що обираються з наступного ряду – (1; 1,5; 1,6; 2; 2,5; 3; 4; 5; 6) $\cdot 10^n$ де n = 1; 0; -1; -2; і.т.д; $c = b + d$; $d = a / |Y_K|$ чи a/X_K.

Позначення класу точності засобу вимірювання маркується на його шкалі або на спеціальному ярлику, якщо це перетворювач. При цьому використовуються наступні умовні позначення.

У випадку представлення класу точності у формі відносної похибки і смуга похибки має чисто мультиплікативний характер, то позначення класу точності буде обведено кругом, наприклад 0.5

У більшості приладів смуга похибки прийнята адитивною і прилад нормується наведеною похибкою. При цьому клас точності позначається без будь-яких підкреслень, наприклад 1,5.

На приладах з нерівномірною шкалою клас точності позначається у долях від довжини шкали і має позначення у вигляді $\underset{\vee}{1,5}$.

Позначення класу точності у вигляді, наприклад 0,02 / 0,01 свідчить, що похибка приладу нормована у формі відносної похибки за наявності як адитивної, так і мультиплікативної складових.

Таким чином, позначення класу точності приладу надає достатньо повну інформацію для обчислення необхідної оцінки похибок результатів вимірювання.

2.2. Приклади розв'язання задач

Задача 2.2.1. Температура у масляному термостаті вимірюється зразковим скляним термометром і манометричним термометром, що проходить повірку. Перший показав значення 114 ^{o}C, а другий 111 ^{o}C. Необхідно визначити дійсне значення температури, абсолютну похибку манометричного термометра, поправку до його показань та оцінити відносну похибку цього термометра.

Рішення.

Дійсне значення – це показання зразкового термометра, тобто 114 ^{o}C.

Похибка абсолютна манометричного термометра, ^{o}C:

$$\Delta = 111 - 114 = -3.$$

Поправка до показань манометричного термометра обирається із зворотнім знаком, тобто 3^{o}C. Відносна похибка у повіряємій точці 114 ^{o}C складає:

$$\delta = \frac{|111 - 114|}{114} \cdot 100\% = 2{,}63\%.$$

Задача 2.2.2 Для вимірювання сили струму в діапазоні 0,1–0,5 мА необхідно визначити клас точності у формі наведеної похибки γ

міліамперметра з верхньою межею вимірювання однобічної шкали 0,5 мА за умови, щоб відносна похибка δ вимірювання струму не перевищила 1%.

Рішення.

На початку шкали приладу відносна похибка вимірювання δ більше у зв'язку з приблизно постійною абсолютною похибкою по всій шкалі приладу. Тому визначається абсолютна похибка Δ на початку шкали з урахуванням умови δ = 1%, мА:

$$\Delta = \frac{1 \cdot 0,1}{100} = 1 \cdot 10^{-3}.$$

Тоді клас точності за основною наведеною похибкою буде дорівнювати:

$$\gamma = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{0,5} \cdot 100 = 0,2\%.$$

Згідно стандартного ряду клас точності приладу складе 0,2.

Задача 2.2.3 Для технічного манометра зі шкалою 0–250 кПа класу точності 1,5 нормована температура навколишнього середовища 20 ^{o}С, а робоча температура за НТД лежить у межах 5÷50 ^{o}С. Необхідно визначити похибки показань приладу за температур навколишнього середовища на рівні Θ_1 =24 ^{o}С, Θ_2 =10 ^{o}С, Θ_3 =55^{o}С, якщо інші зовнішні показники відповідають нормативним значенням. При цьому за даними НТД на прилад відомо, що зміна похибки приладу у відсотках від нормованого значення на кожні 10^{o}С зміни температури навколишнього середовища складає 0,1%.

Рішення.

Основна похибка манометра буде дорівнювати, кПа:

$$\Delta = \frac{1,5 \cdot 250}{100} = 3,75.$$

Згідно паспортних даних додаткова похибка Δ_{∂} від зміни температури навколишнього середовища визначається рівнянням, кПа:

$$\Delta_{\partial} = \frac{0,1\Delta \cdot \Delta\Theta}{10}.$$

Отже при Θ_2=24 ^{o}C додаткова похибка складає, кПа:

$$\Delta_{\partial} = (0,1 \cdot 3,75 \cdot 4)\ /\ 10 = 0,15.$$

За температури Θ_2=10 ^{o}C додаткова похибка буде дорівнювати, кПа:

$$\Delta_{\partial} = (0,1 \cdot 3,75 \cdot 10)\ /\ 10 = 0,375.$$

За температури Θ_2=55 ^{o}C додаткова похибка не нормується, бо вона виходить за межі робочих умов експлуатації приладу.

Задача 2.2.4 Двома пружинними манометрами з однобічною шкалою і верхньою межею 250 кПа проведено вимірювання тиску на виході компресора. Перший манометр має клас точності 0,5, а другий 2,5. Перший показав тиск 250 кПа, другий 240 кПа. Необхідно визначити дійсне значення тиску, оцінити можливе істинне значення тиску, а також похибку вимірювання тиску другим манометром.

Рішення.

Дійсне значення дорівнює 250 кПа.

Абсолютна похибка вимірювання тиску першим манометром, кПа:

$$\Delta_1 = 0,5 \cdot 250\ /\ 100 = \pm 1,25.$$

Істинне значення тиску лежить у межах, кПа:

$$x_{icm} = (250 \pm 1,25).$$

Абсолютна похибка вимірювання тиску другим манометром, кПа:

$$\Delta_2 = 240 - 250 = -10.$$

Відносна похибка вимірювання тиску другим манометром:

$$\delta_2 = 10 \cdot 100 / 250 = \pm 4\%.$$

Задача 2.2.5 Необхідно оцінити придатність механічного термометра класу точності 1 із шкалою 0–60 ^{o}C, якщо при його повірці методом порівняння із зразковим термометром класу точності 0,2 у точці 50 ^{o}C при підвищенні температури було зафіксовано 49,5 ^{o}C, а при пониженні – 50,2 ^{o}C. При цьому слід враховувати, що варіація показань не повинна перевищувати основної похибки.

Рішення.

У нашому випадку механічний термометр класу точності 1 має абсолютну похибку наступну, ^{o}C:

$$\Delta = (1 \cdot 60) / 100 = 0,6.$$

Варіація показань В для нашого механічного термометра буде дорівнювати, ^{o}C:

$$B = \left|50,2 - 49,5\right| = 0,7,$$

де $\Delta_Б$ = 50,2 – 50 = 0,2 ^{o}C; $\Delta_М$ = 49,5 – 50 = – 0,5 ^{o}C.

Отже В = 0,7 ^{o}C > Δ = 0,6 ^{o}C, що свідчить про невідповідність манометра своєму класу точності, незважаючи на не перевищені похибок $\Delta_Б$ і $\Delta_М$ у точці 50 ^{o}C величини 0,6 ^{o}C.

Задача 2.2.6 Було проведено однократне вимірювання термоопору автоматичним мостом класу точності 0,5 з НСХ 100П зі шкалою 0 – 200 ^{o}C. Покажчик зупинився на позначці 100 ^{o}C. Необхідно оцінити максимальну відносну похибку вимірювання термоопору на позначці 100 ^{o}C. При цьому відомо, що термометр опору за температури 200 ^{o}C має опір 177,03 Ом, а за температури 100 ^{o}C – 139,11 Ом. Чи залежить відносна похибка від показань приладу?

Рішення.

Межа припустимої похибки визначається класом точності приладу і дорівнює, Ом:

$$\Delta = \frac{177,03 - 100}{100} \cdot 0,5 = 0,38.$$

Відносна похибка на позначці 100°С складе:

$$\delta_{100} = \frac{0,38}{139,11} \cdot 100 = 0,27\%.$$

Відносна похибка залежить від показань, наприклад на позначці 50°С вона буде дорівнювати

$$\delta_{50} = \frac{0,38}{119,71} \cdot 100 = 0,32\%,$$

де 119,71 – опір термометра за температури 50 °С, Ом.

Отже відносна похибка збільшується до початку шкали приладу.

2.3. Задачі для самостійної роботи

Задача 2.3.1 Рівень води у резервуарі вимірюється візуальним методом за допомогою показуючого скла і гідростатичним методом з використанням манометра, що градуйований у одиницях рівня. Перший показав рівень H_1, а другий H_2. Необхідно визначити дійсне значення рівня, абсолютну похибку гідростатичного рівнеміра, поправку до його показань та оцінити відносну похибку цього рівнеміра.

Таблиця 2.1. Вихідні дані до задачі 2.3.1

Показники	Номер варіанту									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H_1, м	1	1,5	2	1,8	2,4	2,5	2,2	1,4	3	2,8
H_2, м	0,8	1,2	2,2	2,0	2,1	2,8	1,8	1,0	2,6	2,4

Задача 2.3.2 Для вимірювання постійної напруги в діапазоні D необхідно визначити клас точності у формі наведеної похибки γ мілівольтметра з верхньою межею вимірювання його однобічної шкали U_{max} за умови, щоб відносна похибка вимірювання не перевищувала величини δ.

Таблиця 2.2 Вихідні дані до задачі 2.3.2

Показники	Номер варіанту						
	11	12	13	14	15	16	17
D, мВ	0,2÷10	0,5÷10	0,2÷20	10÷20	5÷20	5÷10	10÷20
U_{max}, мВ	10	10	20	20	20	10	20
δ, %	1	0,5	1	0,25	0,5	0,5	1,5

Задача 2.3.3 Електромагнітний витратомір складається з первинного перетворювача і вимірювального блоку. Діапазон вимірювання лежить у межах D, а клас точності у формі відносної похибки дорівнює δ. Діапазон зміни робочої температури навколишнього середовища за НТД для первинного перетворювача складає 5 – 40°C, а для вимірювального блоку (–25) – 55 °С. Нормована температура складає 20 °С для обох пристроїв.

Необхідно визначити похибки показань витратоміра при відхиленні температури навколишнього середовища до величини Θ°С за умови, що інші показники відповідають нормативним значенням. При цьому за даними НТД на прилад відомо, що зміна похибки перетворювача і вимірювального блоку дорівнюють $0{,}3\delta$ на кожні 10 °С зміни температури.

Таблиця 2.3 Вихідні дані до задачі 2.3.3

Показники	Номер варіанту									
	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
δ, %	0,5	1	1,5	0,25	1,5	1	0,5	1,5	1	0,5
D, $м^3$/год	0÷6	0÷7	0÷9	0÷6	0÷11	0÷14	0÷18	0÷23	0÷27	0÷36
Θ, °С	5	10	15	25	30	35	30	40	10	5

Задача 2.3.4 Якого класу точності у формі наведеної похибки треба обрати вимірювальний прилад, щоб у середині його шкали похибка вимірювання не перевищувала δ.

Таблиця 2.4 Вихідні дані до задачі 2.3.4

Показники	Номер варіанту									
	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
δ, %	0,25	0,5	1	1,5	2	2,5	0,4	0,6	0,2	4

Задача 2.3.5 Основна наведена похибка амперметра з однобічною шкалою складає γ. Верхня межа вимірювання дорівнює X_{max}. Необхідно визначити можливу абсолютну похибку на позначці $X_П$ на шкалі приладу.

Таблиця 2.5 Вихідні дані до задачі 2.3.5

Показники	Номер варіанту									
	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
X_{max}, А	10	5	20	15	5	20	20	10	15	10
γ, %	2,5	2	1,5	1	1	2	0,5	0,25	0,5	2
$X_П$, А	1	2	3	4	3	10	5	5	5	2

Задача 2.3.6 Двома міліамперметрами зі шкалою 0–20 мА проведено вимірювання сигналу на виході перетворювача Сафір. Перший має клас точності γ_1, а другий γ_2. Перший показав величину I_1, а другий – I_2. Необхідно визначити дійсне значення постійного струму на виході перетворювача, оцінити можливе істинне значення струму, а також похибку вимірювання струму другим міліамперметром.

Таблиця 2. 6. Вихідні дані до задачі 2.3.6.

Показники	Номер варіанту									
	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57
γ_1, %	0,2	0,25	0,5	1	1,5	0,5	2	1,5	0,2	0,5
γ_2, %	0,5	0,5	1	1,5	2	2	2,5	2,5	1	2,5
I_1, мА	15	16	14,5	15	17,2	18	17	18	15,4	19,2
I_2, мА	14,8	15,6	15	14,6	16,8	17,5	16,7	16,9	15	18,8

Задача 2.3.7. Проведено вимірювання напруги двома паралельно включеними вольтметрами. Перший має клас точності γ_1 і однобічну шкалу вимірювання з верхньою межею $П_1$. Клас точності другого становить γ_2, а однобічна шкала має верхню межу $П_2$. Показання якого вольтметра точніше та у кілька разів, якщо перший показав значення напруги U_1, а другий U_2 ?

Таблиця 2.7. Вихідні дані до задачі 2.3.7.

Показники	Номер варіанту							
	58	59	60	61	62	63	64	65
γ_1, %	2,5	0,2	0,5	2,5	0,5	1,5	0,25	1
γ_2, %	1	0,5	0,2	0,5	0,25	0,2	0,5	2,5
$П_1$, В	30	50	30	50	100	50	20	30
$П_2$, В	150	100	150	100	150	100	100	100
U_1, В	29,2	48	30	42	61,4	36,2	18,6	28,6
U_2, В	30	52	32	43,5	60,5	36,5	18,8	28,4

Задача 2.3.8 Електричне коло з опором R живиться від джерела постійного струму. Для вимірювання сили струму у це коло був включений амперметр з внутрішнім опором R_0. Яка була сила струму у колі до включення амперметра, якщо амперметр показав струм I. Яку відносну похибку у вимірювання вніс амперметр.

Таблиця 2.8. Вихідні дані до задачі 2.3.8.

Показання	Номер варіанту							
	66	67	68	69	70	71	72	73
R, Ом	100	50	150	100	150	200	200	50
R_0, Ом	10	10	5	20	10	20	10	5
I, А	5	2	5	10	10	20	15	5

Задача 2.3.9. Необхідно оцінити придатність пружинного манометра класу K_1 із верхньою межею вимірювання однобічної шкали X_{max}, якщо при його повірці методом порівняння із зразковим манометром класу точності K_2 у точці X при підвищенні тиску було зафіксовано тискX_1, а при пониженні – тиск X_2. При цьому слід враховувати, що варіація показань не повинна перевищувати основної похибки.

Таблиця 2.3.9. Вихідні дані до задачі 2.3.9.

Показання	Номер варіанту								
	74	75	76	77	78	79	80	81	82
K_1	1,5	1,5	1	2	1,5	1,5	2	2	1,5
K_2	0,5	0,25	0,2	1	0,2	0,5	0,5	1	0,5
X_{max}, кПа	100	60	40	160	250	40	250	160	60
X_1, кПа	90,5	40,2	35,5	121	209,5	29,4	182,5	99,4	49,5
X_2, кПа	88,6	38,6	34,8	122,2	210,4	28,6	181,7	100,2	50,2
X, кПа	90	40	35	120	210	30	180	100	50

Задача 2.3.10. Було проведено однократне вимірювання термоелектрорушійної сили (ТЕРС) термопари автоматичним потенціометром класу точності K з НСХ типу ХК зі шкалою X_{min}–X_{max}. Показчик зупинився на позначці X. Необхідно оцінити максимальну відносну похибку вимірювання ТЕРС на позначці X. При цьому відомо, що ТЕРС за температури X_{min}

дорівнює E_1, а за температури X_{max} – E_2. Характеристика $E = f(\Theta)$ в діапазоні зміни температури Θ лінійна. Довести, що відносна похибка залежить від рівня вимірюванної ТЕРС.

Таблиця 2.10. Вихідні дані до задачі 2.3.10.

Показання	Номер варіанту							
	83	84	85	86	87	88	89	90
K	0,5	0,2	1	1,5	2	2,5	0,25	1,5
X_{min}, °C	200	0	100	0	200	0	300	0
X_{max}, °C	600	600	500	200	500	300	600	400
X, °C	550	500	400	150	300	180	500	350
E_1, мВ	14,57	0	6,89	0	14,57	0	22,88	0
E_2, мВ	49,09	49,09	40,27	14,57	40,27	22,88	49,09	31,48

Задача 2.3.11 Необхідно визначити величину опору, який вимірюється омметром. При цьому відомо, що відносна похибка в процесі вимірювання склала δ, а абсолютна Δ. Прилад має клас точності у формі наведеної похибки.

Таблиця 2. 11. Вихідні дані до задачі 2.3.11.

Показання	Номер варіанту								
	91	92	93	94	95	96	97	98	99
δ, %	10	5	10	5	6	4	2	20	12
Δ, Ом	10	5	5	10	2	8	1	5	4

РОЗДІЛ 3

ВИБІР ЗАСОБІВ ДЛЯ ВИМІРЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ОБ’ЄКТІВ КЕРУВАННЯ ЗА ВИМОГАМИ ТЕХНОЛОГІЧНОГО РЕГЛАМЕНТУ

3.1. Загальні відомості

Вимірювання технологічних параметрів об’єктів керування найчастіше здійснюється за допомогою комплекту, до складу якого можуть входити датчик (первинний перетворювач), вторинний прилад або проміжний вимірювальний перетворювач. Тому похибка вимірювання технологічного параметра такого комплекту буде визначатися похибкою усіх складових засобів, що утворюють такий вимірювальний комплект. При цьому сумарна похибка визначається величиною середньоквадратичного відхилення σ за формулою:

$$\sigma = \pm 1{,}1\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \Delta_i^2}, \tag{3.1}$$

де 1,1 – коефіцієнт, визначаємий довірчою ймовірністю Р = 0,95 попадання похибки у заданий довірчй інтервал; Δ_i - основна, додаткова похибка та інші можливі похибки складових вимірювального комплекту; m – кількість складових похибок засобів вимірювання.

У випадку, коли відомі тільки основні похибки засобів вимірювання такого комплекту, а по іншим похибкам інформація відсутня, то загальна похибка розраховується за рівнянням:

$$\sigma = \pm 1{,}3\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \Delta_{oi}^2}, \tag{3.2}$$

де Δ_{oi} – величина основної похибки і-го засобу, що входить до вимірювального комплекту.

Як правило припустиме відхилення показань від номінального в процесі вимірювання задається виразом у вигляді:

$$(X \pm \Delta), \tag{3.3}$$

де X – номінальне значення згідно технологічного регламенту; Δ - абсолютна похибка вимірювального комплекту (довірчій інтервал згідно регламенту).

Згідно правила трьох сигм (3б) абсолютна похибка не може перевищувати її величини. Тому після визначення величини середньоквадратичної похибки вимірювального комплекту перевіряється умова:

$$\sigma < \Delta / 3. \tag{3.4}$$

Виконання цієї умови свідчить, що обрані засоби вимірювального комплекту з їх нормованими метрологічними показниками відповідають вимогам технологічного регламенту. У протилежному випадку необхідно розробити заходи щодо підвищення точності вимірювання параметра X, а саме обрати засоби вимірювання з більш високим класом точності, зменшити діапазон шкали вимірювання або усунути умови, що впливають на підвищення додаткових похибок.

3.2. Приклади розв'язання задач

*Задача 3.2.*1 Необхідно оцінити похибку результату однократного вимірювання температури комплекту що складається з термопари типу ТХА з абсолютною похибкою Δ = 0,004Θ (клас допуску 1) та вторинного приладу Диск - 250 (модифікація 3111) класу точності 0,5 зі шкалою 400–1000^{o}C. Припустиме відхилення показань приладу від номінального значення згідно регламенту складає (700±12) ^{o}C. При цьому згідно НТД на вторинний прилад похибка, що викликана зміною температури навколишнього середовища Θ_p від 20^{o}C до верхнього (нижнього) робочого значення, не перевищує величини γ_Θ = 0,015(Θ_p – 20). Температура навколишнього середовища для вторинного приладу складає 30^{o}C. Похибка вторинного приладу, що викликана зміною напруги живлення від номінальної не перевищує половини абсолютного значення меж припустимої похибки, а похибка, що викликана впливом зовнішнього магнітного поля за самих несприятливих умов не перевищує абсолютного значення межі основної похибки. Зробити висновок щодо правильного вибору вимірювального комплекту з вищенаведеним довірчим інтервалом згідно регламенту. У випадку невідповідності розробити заходи для підвищення точності вимірювання.

Рішення.

Межа основної похибки вторинного приладу, ^{o}C:

$$\Delta_1 = \frac{0,5 \cdot 600}{100} = \pm 3.$$

Межа додаткової похибки Δ_2 , що викликана впливом температури навколишнього середовища на вторинний прилад, ^{o}C:

$$\gamma_{\Theta} = 0,015(30 - 20) = 0,15\%;$$

$$\Delta_2 = \frac{0,15 \cdot 600}{100} = \pm\ 0,9.$$

Межа додаткової похибки Δ_3 за рахунок впливу зовнішнього магнітного поля, ^{o}C:

$$\Delta_3 = \pm\ 3.$$

Межа додаткової похибки Δ_4 внаслідок коливання напруги живлення, ^{o}C:

$$\Delta_4 = 3 / 2 = \pm\ 1,5.$$

Межа основної похибки Δ_5 термоелектричного перетворювача, ^{o}C:

$$\Delta_5 = 0,004 \cdot 700 = \pm\ 2,8.$$

Загальна похибка вимірювального комплекту за відсутності методичних похибок, ^{o}C:

$$\sigma = 1{,}1\sqrt{3^2 + 0{,}9^2 + 3^2 + 1{,}5^2 + 2{,}8^2} = \pm\ 5{,}9.$$

Перевіряється умова технологічного регламенту, ^{o}C:

$$\sigma = 5{,}9^{o}C > 12/3 = 4{,}0.$$

Отже умова технологічного регламенту не виконується, що вимагає розробки заходів що до підвищення точності вимірювання. Серед цих заходів обираємо наступні. Обираємо термопару класу 1 типу ТПП, яка має межу основної похибки $\Delta_5 = \pm\ 1\ ^{o}$C, а вторинний прилад зі шкалою 600–1000 ^{o}C. За таких заходів межі основної і додаткових похибок вторинного приладу будуть складати: $\Delta_1 = \pm\ 2^{o}$C, $\Delta_2 = \pm\ 0{,}6^{o}$C, $\Delta_3 = \pm\ 1^{o}$C, $\Delta_4 = \pm\ 1^{o}$C. При цьому загальна похибка буде дорівнювати, ^{o}C:

$$\sigma = 1{,}1\sqrt{2^2 + 0{,}6^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2} = \pm\ 3{,}5.$$

Умова технологічного регламенту виконується, ^{o}C:

$$\sigma = 3{,}5^{o}C < 12/3 = 4.$$

Отже остаточно приймаємо комплект з термопарою типу ТПП класу 1, а вторинний прилад Диск - 250 зі шкалою 600 – 1000^{o}C класу точності 0,5.

Задача 3.2.2 Необхідно оцінити похибку результату однократного вимірювання рівня води комплектом, що містить буйковий рівномір типу «Сапфір - 22ДУ» моделі 2650 з припустимою основною похибкою γ = 0,5 у відсотках від верхньої межі вимірювання та вторинного приладу типу КСУ 2 класу точності 0,5 із шкалою 0 – 2м. Зміна похибки КСУ 2, що викликана зміною температури навколишнього повітря від 20^{o}C до 50^{o}C, не перевищує значення $\gamma_{\Theta 1} = 0{,}01(\Theta_в - 20)$. Похибка, що викликана зміною напруги живлення складає 0,5 абсолютного значення межі припустимої основної похибки. Температура навколишнього повітря 30°С. Згідно НТД на Сапфир -22ДУ похибка вимірювання в умовах зміни температури навколишнього повітря не перевищує на кожні 10°С величини $\gamma_{\Theta 2}$ = (0,35 + 0,15 ρ_{max}/ρ_i). При цьому для цієї моделі рівноміра ρ_{max} = 2000 кг/м^3, а ρ_i = 1000 кг/м^3 для води, рівень якої підлягає вимірюванню.

Рішення.

Межа основної похибки Δ_1 вторинного приладу, м:

$$\Delta_1 = \frac{0,5 \cdot 2}{100} = \pm 0,01 \ .$$

Межа додаткової похибки Δ_2 , що викликана впливом температури навколишнього повітря на КСУ-2, м:

$$\gamma_{\Theta 1} = 0,01(30-20) = 0,1\%;$$

$$\Delta_2 = 0,1 \cdot 2 / 100 = \pm 0,002 \ .$$

Межа додаткової похибки Δ_3 внаслідок коливання напруги живлення для вторинного приладу, м:

$$\Delta_3 = 0,5 \cdot 0,01 = \pm 0,005 \ .$$

Межа основної похибки Δ_4 перетворювача рівня, м:

$$\Delta_4 = 0,5 \cdot 2 / 100 = \pm 0,01 \ .$$

Межа додаткової похибки Δ_5 внаслідок відхилення температури повітря від номінальної, м:

$$\gamma_{\Theta 2} = (0,35 + 0,15 \cdot 2000 / 1000) = 0,65\%;$$

$$\Delta_5 = \frac{0,65 \cdot 2}{100} \cdot \frac{30-20}{10} = \pm 0,013 .$$

Загальна похибка вимірювального комплекту за відсутності методичних похибок, м:

$$\sigma = 1,1\sqrt{0,01^2 + 0,002^2 + 0,005^2 + 0,01^2 + 0,013^2} = \pm 0,022 .$$

3.3. Задачі для самостійної роботи

Задача 3.3.1. Необхідно оцінити похибку результату однократного вимірювання температури комплекту, що складається з термометра опору типу ТСМУ – 0288 класу точності γ і діапазоном вимірювання D_1 та вторинного приладу РП160 класу точності 0,5 зі шкалою D_2. Згідно технологічного регламенту припустиме відхилення показань приладу від номінального значення складає ($\Theta_н \pm \Delta$). Згідно НТД на вторинний прилад відхилення наведеної похибки, що викликана зміною температури навколишнього повітря від 20°С не перевищує величини $\gamma_\Theta = 0,025(\Theta_р - 20)$. Температура повітря, де розташований РП160 складає $\Theta_р$. Зміна похибки, що викликана впливом зовнішнього магнітного поля не перевищує 0,5% від нормованого значення приладу. Зробити висновок щодо правильного обрання вимірювального комплекту з вищенаведеним довірчим інтервалом згідно регламенту. У випадку невідповідності розробити заходи для підвищення точності вимірювання.

Таблиця 3.1. Вихідні дані до задачі 3.3.1.

Показники	Номер варіанту						
	1	2	3	4	5	6	7
D_1, °С	0÷200	0÷100	50÷100	100÷150	-50÷50	-25÷25	0÷50
D_2, °С	0÷100	0÷100	50÷100	100÷150	0÷50	-25÷25	0÷50
$(\Theta_н \pm \Delta)$°С	50±5	80±3	70±2	120±2	40±2	10±1	30±2
$\Theta_р$,°С	28	25	30	30	29	25	28
γ,%	1	0,5	1,5	1	0,5	1	1,5

Задача 3.3.2. Визначити похибку результату однократного вимірювання рівня етилового спирту за допомогою комплекту, що містить перетворювач «Сапфир-22ДУ» моделі 2640 з припустимою основною похибкою γ у відсотках від верхньої межі вимірювання та вторинного приладу типу ДИСК - 250 класу точності 1, однобічна шкала якого має верхню межу вимірювання L_{max}. Температура навколишнього повітря для перетворювача складає Θ_1, а для вторинного приладу Θ_2. Припустиме відхилення показань приладу від номінального значення на вимогу регламенту складає ($L \pm \Delta$). При цьому згідно НТД на вторинний прилад наведенна похибка, що викликана зміною температури повітря Θ_2 від 20°С до верхнього (нижнього) робочого значення, не перевищує величини $\gamma_\Theta = 0{,}03(\Theta_2 - 20)$. Похибка вторинного приладу, що викликана знімною напруги живлення від номінальної не перевищує половини абсолютного значення межі припустимої основної похибки, а похибка від впливу зовнішнього магнітного поля не перевищує абсолютного значення межі основної похибки. Згідно НТД на «Сапфир-22ДУ» похибка вимірювання в умовах зміни температури навколишнього повітря не перевищує не кожні 10°С величини $\gamma_\Theta = (0{,}42 + 0{,}18\ \rho_{max}/\rho_i)$. При цьому для цієї моделі перетворювача $\rho_{max} = 2000$ кг/м^3, а $\rho_i = 843$ кг/ м^3 для спирту, рівень якого підлягає вимірюванню. На підставі розрахунків зробити висновок щодо правильного вибору вимірювального комплекту з вищенаведеним довірчим інтервалом Δ згідно регламенту.

Таблиця 3.2. Вихідні дані до задачі 3.3.2.

Показники	Номер варіанту								
	8	9	10	11	12	13	14	15	16
L_{max}, м	2	2,5	3	4	6	8	10	4	2,5
Θ_1, °C	28	30	22	40	35	24	45	30	28
Θ_2, °C	30	25	25	28	24	25	32	25	26
L, м	1,6	2	2,5	3	5	6	7	2,5	1,8
Δ, м	0,02	0,015	0,02	0,012	0,025	0,02	0,018	0,03	0,01

Задача 3.3.3. Вимірювання витрати води здійснюється комплектом, що містить електромагнітний витратомір ПРЄМ – 1 та показуючий прилад М1830, однобічна шкала якого має верхню межу вимірювання V_{max}. Електромагнітний витратомір складається з первинного перетворювача ПР і вимірювального блоку БИ. Діапазон вимірювання ПРЄМ – 1 відповідає діапазону шкали приладу М1830, а клас точності електромагнітного витратоміра у формі відносної похибка дорівнює δ, а показуючого приладу у формі наведеної складає 0,5. Діапазон зміни робочої температури навколишнього повітря за НТД для ПР складає від 5°С до 40°С, для блоку БИ – від -25 до 55°С, а для М1830 – від -30°С до 50°С. Нормована температура для усіх складових комплекту 20°С. Експлуатація перетворювача ПР, блоку БИ, та приладу М1830 здійснюється відповідно за температур Θ_1, Θ_2, Θ_3. Згідно НТД на ПРЄМ - 1 відомо, що зміни похибки як ПР, так і БИ дорівнюють 0,3δ на кожні 10 °С зміни температури навколишнього повітря. Зміна показань М1830, що викликана зміною температури навколишнього повітря не перевищує 0,4% на кожні 10°С, а зміна показань від впливу зовнішніх магнітних полів не перевищує 0,5%. Визначити похибку результату однократного вимірювання витрати води за допомогою запропонованого комплекту.

Таблиця 3.3. Вихідні дані до задача 3.3.3.

Показники	Номер варіанту							
	17	18	19	20	21	22	23	24
δ , %	1,5	1	1,5	1	1,5	1	1,5	1
V_{max}, м^3/год	6	7	9	11	14	18	23	27
Θ_1, °С	5	15	25	40	28	35	27	40
Θ_2, °С	30	25	30	25	25	25	25	30
Θ_3, °С	25	25	30	25	25	30	25	30

Задача 3.3.4. Необхідно оцінити похибку результату однократного вимірювання концентрації кисню у газовому потоці за допомогою комплекту, утвореного аналізатором типу АКВТ - 01 з абсолютною похибкою Δ_1 і діапазоном вимірювання D та вторинного приладу типу Альфалог - 100 класу точності 0,25, однобічна шкала якого має верхню межу вимірювання X_{max}. Згідно НТД межа припустимої додаткової похибки від зміни температури навколишнього повітря від нормативної на кожні 10°С та від зміни напруги живлення не перевищує межі основної похибки. Температура навколишнього повітря для вторинного приладу складає Θ, а нормативна температура 20°С.

Таблиця 3.4. Вихідні дані до задача 3.3.4.

Показники	Номер варіанту						
	25	26	27	28	29	30	31
Δ_1, % об.	0,08	0,2	0,4	0,08	0,2	0,4	0,08
D, % об.	0,1÷2	0,1÷5	0,1÷10	0,1÷2	0,1÷5	0,1÷10	0,1÷2
X_{max}, % об.	2	5	10	2	5	10	2
Θ, °С	10	15	25	30	40	45	50

Задача 3.3.5 Необхідно оцінити похибку результату однократного вимірювання надмірного тиску комплектом, що складається з перетворювача САФИР моделі 2130, основна припустима похибка якого дорівнює γ, та вторинного приладу РП - 160 класу точності 0,5. Діапазон вимірювання, обох приладів комплекту складає D. За технологічним регламентом припустиме відхилення показань від номінального значення тиску повинно відповідати умові ($P_H \pm \Delta$). Додаткова похибка зміщення нуля ΔX_0 перетворювача, що може бути викликано зміною температури навколишнього повітря Θ_1 від нормативної температури 23°С у робочому діапазоні температур на кожні 10°С не перевищує величини $\Delta X_o = \Delta X_{o1}(1 + 0{,}5\ P_в / P_{вд})$. У цій формулі $P_в$

становить максимальну верхню межу вимірювань тиску для конкретної моделі, а $P_{вд}$ - дійсне значення верхньої межі, що вимірюється в об'єкті. Додаткова похибка перетворювача, що викликана зміною температури навколишнього повітря до будь-якої у робочому діапазоні температур на кожні 10 ^oC зміни температури не перевищує межі основної похибки $\Delta X_д$. Згідно НТД на РП - 160 додаткова похибка приладу від зміни температури навколишнього повітря Θ_2 не перевищує величини $\gamma_\Theta = 0{,}025(\Theta_2 - 20)$. Зміна похибки вторинного приладу, що обумовлена впливом зовнішніх магнітних полів не перевищує 0,5% від нормативного значення. Зробити висновок щодо правильного обрання вимірювального комплекту з вищенаведеним довірчим інтервалом згідно регламенту. У разі невідповідності розробити заходи для підвищення точності вимірювання тиску.

Таблиця 3.5. Вихідні дані до задача 3.3.5.

Показники	Номер варіанту					
	32	33	34	35	36	37
γ, %	0,2	0,25	0,5	0,2	0,25	0,5
D, кПа	0÷6,3	0÷10	0÷16	0÷40	0÷63	0÷100
$(P_н \pm \Delta)$, кПа	5±0,2	8±0,4	10±0,5	25±0,5	50±1	75±1
Θ_1, ^oC	10	15	25	30	40	50
Θ_2, ^oC	30	15	25	30	25	40
$P_{вд}$, кПа	5,5	8	12	30	60	80
X_{o1}	0,6	0,08	0,15	0,6	0,08	0,15
$\Delta X_д$, %	0,1	0,12	0,2	0,1	0,12	0,2

РОЗДІЛ 4

ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ ТА СТАТИСТИЧНА ОЦІНКА ЧИСЛОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК РОЗПОДІЛУ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАННЯ. ГРУБІ ПОХИБКИ

4.1. Загальні відомості

Результати одиничних вимірювань - це випадкові величини. Однак за великої їх кількості вони закономірно розташовані навколо істинного значення.

Числа, що свідчать про основні особливості розподілу результатів вимірювання (похибок вимірювання), називають числовими характеристиками. Теорія вимірювань (похибок) базується на постулаті К. Гауса, згідно якого за великої кількості вимірювань ймовірність появи випадкових похибок $\overset{o}{\Delta}$ за відсутності домінування декількох похибок над іншими у більшості випадків підкоряється нормальному закону. Густина ймовірності значень f(x) значень випадкової величини (результат X чи випадкова похибка $\overset{o}{\Delta}$ вимірювання), що розподілена за нормальним законом, має вигляд:

$$f(\mathrm{x}) = \frac{1}{\mathrm{S}\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-(\mathrm{X}-\overline{\mathrm{X}})^2}{2\mathrm{S}^2}}; \tag{4.1}$$

$$f(\overset{o}{\Delta}) = \frac{1}{\mathrm{S}\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}\frac{-\overset{o}{\Delta}{}^2}{2\mathrm{S}^2}. \tag{4.2}$$

Згідно рівняння (4.1) величина $\overline{\mathrm{x}}(\overset{o}{\Delta})$ характеризує центр групування результатів (похибок) вимірювання, а середньоквадратичне відхилення S - міру розсіювання результатів (похибок) вимірювання та має ту саму розмірність, що і результати (похибки) вимірювання. Якщо X_1, X_2, .. , X_n - результати n незалежних одиничних вимірювань, то оцінки центру групування

$\overline{X}$ (математичного очікування) та середньоквадратичного відхилення S (стандарту) визначаються за формулами:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \,; \qquad (4.3)$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}\,; \qquad (4.4)$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2 / n\right]}. \qquad (4.5)$$

Значення $\overline{X}$, отримане в одній із серій вимірювань, є випадковим наближенням до істинного значення величини $X_{іст}$. Щоб мати уяву про можливі відхилення $\overline{X}$ від $X_{іст}$, а саме математичного очікування M(x), необхідно визначити середньоквадратичне відхилення середньоарифметичного. Оцінка середньоквадратичного відхилення $\overline{X}$, тобто результату вимірювання обчислюється за формулою:

$$S_x = S / \sqrt{n}. \qquad (4.6)$$

Для характеристики асиметричності розподілу застосовується коефіцієнт асиметрії, оцінка якого визначається рівнянням:

$$\overline{\gamma}_\alpha = \frac{1}{nS^3}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^3. \qquad (4.7)$$

Крутизну (гостровершинність) розподілу характеризують коефіцієнтом ексцесу, оцінка якого розраховується за формулою:

$$\overline{\gamma}_e = \frac{1}{nS^4}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^4 - 3. \qquad (4.8)$$

За великої кількості спостережень за результатами вимірювання ($n > 20$) розрахунки числових характеристик за наведеними вище формулами достатньо громоздкі. У таких випадках застосовується метод групування, що передбачає розділення низки експериментальних значень від X_{min} до X_{max} на інтервали. Кількість інтервалів K найчастіше визначається за формулою Старджеса:

$$K = 1 + 3{,}3\lg n. \tag{4.9}$$

Визначення ширини інтервалу h здійснюється за рівнянням:

$$h = (X_{max} - X_{min}) / K. \tag{4.10}$$

При цьому числові характеристики, що визначають розподіл результатів вимірювання, можуть бути розраховані за наступними формулами:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K} n_i X_i; \tag{4.11}$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{K} n_i X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{K} n_i X_i)^2}{n}\right] - \frac{h^2}{12}}; \tag{4.12}$$

$$\overline{\gamma}_a = \frac{1}{S^3}\left[\frac{\sum_{i=1}^{K} n_i X_i^3}{n} - \frac{3\sum_{i=1}^{K} n_i X_i^2}{n^2} - \frac{2(\sum_{i=1}^{K} n_i X_i)^2}{n^3}\right]; \tag{4.13}$$

$$\overline{\gamma}_e = \frac{1}{S^4}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\sum_{i=1}^{K} n_i X_i^4}{n} - \dfrac{4\sum_{i=1}^{K} n_i X_i^3 \sum_{i=1}^{K} n_i X_i}{n^2} + \\ + \dfrac{6\sum_{i=1}^{K} n_i X_i^2 (\sum_{i=1}^{K} n_i X_i)^2}{n^3} - \dfrac{3\sum_{i=1}^{K} n_i X_i^4}{n^4}\end{array}\right] - 3, \tag{4.14}$$

де $h^2/12$ – поправка Шепарда, що обумовлена зміщенням дисперсії в процесі групування, причиною якої є перевищення довжини інтервалу h' над точністю отриманих даних.

Однак за природним групуванням даних поправкою Шепарда можна зневажити.

Закон нормального розподілу результатів (похибок) вимірювання забезпечує можливість визначення ймовірності P(X) того, що істинне значення знаходиться у інтервалі від X_1 до X_2. Отже, інтегруючи функцію густини розподілу у цих межах, отримаємо наступне рівняння:

$$P(x) = \int_{X_1}^{X_2} f(X)dX. \tag{4.15}$$

Функція P(X) – це інтегральна функція розподілу, яка найчастіше позначається як F(X). Згідно розрахунків за формулою (4.15) ймовірність появи результатів вимірювань, що відхиляються від свого істинного значення не більше, ніж на ± S, дорівнює P = 0,6827, а ймовірність того, що результати не вийдуть за межі ± 2S і ± 3S, складатимуть відповідно 0,9544 (правило двох сігм - 2б) і 0,9973 (правило трьох сігм - 3б)

Частота відхилень на 3S та більше дуже мала і складає менше 0,27% від числа всіх спостережень. Такі відхилення прийнятно називати промахами (грубі похибки). Звідси випливає правило виявлення промахів, тобто результати, що поза межами інтервалу ± 3S слід вважати промахами.

Виключення грубих похибок (помилок) здійснюється найчастіше в практичних умовах за допомогою τ - критерію. Це пов'язано з тим, що в процесі обробки результатів (похибок) вимірювання невідомі як правило обидва параметри розподілу, а саме ні математичне очікування, ні середньоквадратичне відхилення. Якщо результат X_i (похибка $\overset{o}{\Delta}$) вимірювання є крайнім елементом з усіх результатів, то для нього обчислюється випадкова величина τ за рівнянням:

$$\tau = \left| X_i - \overline{X} \right| / S. \qquad (4.16)$$

Максимальне відносне відхилення τ_α має спеціальний розподіл, що залежить тільки від об'єму вимірювань n і рівня значимості α = 1 - P (P - довірча ймовірність). Основні значення для τ_α за рівня значимості α та числа вимірювань n, наведені в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1. Значення τ_α за рівня значимості α та числа вимірювань n.

Число n	Рівень значимості α				
	0,001	0,005	0,01	0,05	0,1
3	1,414	1,414	1,414	1,414	1,412
5	1,994	1,982	1,972	1,917	1,869
7	2,395	2,344	2,310	2,182	2,093
9	2,677	2,586	2,532	2,349	2,238
11	2,864	2,760	2,689	2,470	2,343
13	3,044	2,892	2,809	2,563	2,426
15	3,171	2,997	2,905	2,638	2,494
17	3,274	3,083	2,983	2,701	2,551
20	3,400	3,187	3,079	2,779	2,623

Згідно τ - критерію крайнє значення X_i відкидається як грубо помилкове (на рівні значимості α), якщо має місце нерівність:

$$\varepsilon = \left| X_i - \overline{X} \right| / S > \tau_\alpha. \qquad (4.17)$$

4.2. Приклади розв'язання задач

Задача 4.2.1. Провести оцінку математичного очікування, середньоквадратичного відхилення, коефіцієнтів ексцесу та асиметрії за результатами вимірювання тиску X (кПа): 7, 3, 4, 8, 4, 6, 3.

Рішення.

Оцінки математичного очікування $\overline{X}$ та середньоквадратичного відхилення S будуть дорівнювати, кПа:

$$\overline{X} = \frac{7+3+4+8+6+3}{7} = 5 \ ;$$

$$S = \sqrt{\frac{(7-5)^2 + (3-5)^2 + (4-5)^2 + \cdot\cdot + (3-5)^2}{6}} = \sqrt{\frac{25}{6}} \approx 2 \ .$$

Оцінки коефіцієнтів асиметрії $\overline{\gamma}_a$ та ексцесу $\overline{\gamma}_e$ складуть:

$$\overline{\gamma}_\alpha = \frac{1}{7 \cdot 2^3}[(7-5)^3 + (3-5)^3 + \cdot\cdot + (3-5)^3] = 18/56 \approx 0{,}3 \ ;$$

$$\overline{\gamma}_e = \frac{1}{7 \cdot 2^4}[(7-5)^4 + (3-5)^4 + \cdot\cdot + (3-5)^4] - 3 = (132/112) - 3 = -1{,}8.$$

Задача 4.2.2. Проведено 25 вимірювань величини постійного струму Х(мА) на виході термоелектричного перетворювача типу ТХАУ, результати яких представлені у згрупованому вигляді в таблиці 4.2:

Таблиця 4.2. Вихідні дані до задачі 4.2.2.

Межі інтервалів (X_{min} - X_{max})	5÷7	7÷9	9÷11	11÷13	13÷15
Число n_k попадань у інтервал	2	4	9	7	3

Необхідно оцінити математичне очікування, середньоквадратичне відхилення, коефіцієнти асиметрії та ексцесу результатів вимірювання постійного струму.

Рішення

Представником кожного інтервалу слід вважати його середину, а саме X_K. З урахуванням цього оцінка математичного очікування та середньоквадратичного відхилення будуть дорівнювати, мА:

$$\overline{X} = \frac{6 \cdot 2 + 8 \cdot 4 + 10 \cdot 9 + 12 \cdot 7 + 14 \cdot 3}{25} = \frac{260}{25} = 10,4 \ ;$$

$$S = \sqrt{\frac{(6-10,4)^2 \cdot 2 + (8-10,4)^2 \cdot 4 + \cdots + (14-10,4)^2 \cdot 3}{24}} = \sqrt{\frac{120}{24}} \approx 2,2 \ .$$

Оцінки коефіцієнтів асиметрії та ексцесу за результатами вимірювань складуть:

$$\overline{\gamma}_\alpha = \frac{1}{25 \cdot 2,2^3}\left[(6-10,4)^3 + (8-10,4)^3 + \cdots + (14-10,4)^3\right] =$$

$$= \frac{1}{266,2}(-48,37) = -0,18;$$

$$\overline{\gamma}_e = \frac{1}{25 \cdot 2,2^4}\left[(6-10,4)^4 + (8-10,4)^4 + \cdots + (14-10,4)^4\right] - 3 =$$

$$= \frac{1}{585,6} \cdot 582,5 - 3 = -2,01.$$

Задача 4.2.3. Для перевірки стабільності технологічної операції обточки валу протягом певного часу, була отримана вибірка у кількості 12 валів, що мала наступні діаметри. мм: 40,00; 40,02; 39,99; 39,98; 40,00; 40,03; 39,99; 39,98; 40,01; 40,08; 40,04; 39,97. Необхідно оцінити результат 40,08 мм та визначити чи не є він промахом за рівня значимості α = 0,05.

Рішення

Оцінки математичного очікування $\overline{X}$ та середньоквадратичного відхилення S складатимуть, мм:

$$\overline{X} = \frac{1}{12}(40,00 + 40,2 + 39,99 + \cdots + 39,97) = 40,01 \ ;$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{11}\sum_{i=1}^{12}(40,00-40,01)^2+(40,2-40,01)^2+\cdots+(39,97-40,01)^2} = 0,06516\ .$$

Випадкова величина τ буде дорівнювати:

$$\tau = \frac{|40,08-40,01|}{0,06516} = 1,074 < \tau_\alpha = 2,516,$$

де τ_α = 2,516 - визначено по табл. 4.1.

Отже результат 40,08 мм не є промахом.

Задача 4.2.4. В процесі вимірювання сили струму були отримані наступні результати; А: 10,07; 10,08; 10,10; 10,12; 10,13; 10,15; 10,16; 10,17; 10,20; 10,60. Необхідно оцінити результат 10,6 А та визначити чи не є він промахом за рівня значимості α = 0,01

Рішення

Оцінки математичного очікування $\overline{X}$ та середньоквадратичне відхилення S будуть мати наступні значення, А:

$$\overline{X} = \frac{1}{10}(10,07+10,08+10,10+\cdots+10,60) = 10,18;$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{9}(10,07-10,18)^2+(10,08-10,18)^2+\cdots+(10,60-10,18)^2} = 0,1537.$$

Випадкова величина τ буде становити:

$$\tau = \frac{|10,6-10,18|}{0,1537} = 2,732 > \tau_\alpha = 2,611,$$

де τ_α = 2,611 згідно табл. 4.1.

Отже результат 10,6 А слід відкинути, бо він є грубою помилкою.

4.3. Задачі для самостійної роботи

Задача 4.3.1. Провести оцінку математичного очікування, середньоквадратичного відхилення, коефіцієнтів асиметрії та ексцесу за результатами вимірювання постійного струму I(мА), наведених у таблиці 4.3.

Таблиця 4.3Вихідні дані до задачі 4.3.1.

Показники, мА	Номер варіанту									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I_1	3,5	1,2	3,9	4,4	2,9	5,3	3,6	4,1	8,1	7,2
I_2	0,9	3,7	1,7	3	5,5	3,1	5,8	6,3	4,5	5,1
I_3	3,2	2,3	4,5	2,2	4,9	3,9	4,5	4,9	6,7	8,5
I_4	3	4,2	2,5	2,4	2,7	6,1	6,6	7,6	5,2	6,9
I_5	1,8	1,4	1,9	5	3,5	5,9	5,4	5,9	6,4	5,7
I_6	3,1	3,2	4,7	4,2	4,7	5,1	6,4	6,9	7,3	7,8
I_7	0,8	4	4,1	2,3	5,7	3,3	3,8	4,3	4,9	5,4
I_8	2,8	3,6	1,8	4,6	2,8	3,2	6,1	6,7	7,1	7,6
I_9	1,7	1,3	3,7	5,2	5,1	5,5	3,7	4,2	4,7	5,2
I_{10}	1,9	1,6	3,2	2,6	4,2	3,8	4,1	3,4	4,4	5
I_{11}	1,2	1,1	2,5	3,3	2,8	3,3	2,9	4,5	5	4,8
I_{12}	2,1	1,2	1,4	2,8	3,2	3,1	3,5	3,2	4,1	5,2

Задача 4.3.2 За згрупованими даними вимірювання температури $\Theta(^{o}C)$ необхідно оцінити математичне очікування, середньоквадратичне відхилення, коефіцієнти асиметрії та ексцесу цієї випадкової величини, згідно даних, наведених у таблиці 4.4.

Таблиця 4.4. Вихідні дані задачі 4.3.2.

Показники	Номер варіанту					
	11	12	13	14	15	16
$\Theta_{min}\div\Theta_{max}$ n_K	-25÷-15 13	-20÷-10 14	4÷6 12	-20÷-10 9	-10÷-6 10	-20÷-10 10
$\Theta_{min}\div\Theta_{max}$ n_K	-15÷-5 17	-10÷0 55	6÷8 25	-10÷0 23	-6÷-2 20	-10÷0 25
$\Theta_{min}\div\Theta_{max}$ n_K	-5÷5 36	0÷10 68	8÷10 29	0÷10 39	-2÷2 39	0÷10 33
$\Theta_{min}\div\Theta_{max}$ n_K	5÷15 25	10÷20 43	10÷12 19	10÷20 17	2÷6 22	10÷20 19
$\Theta_{min}\div\Theta_{max}$ n_K	15÷25 9	20÷30 20	12÷14 15	20÷30 12	6÷10 9	20÷30 13
Показники	Номер варіанту					
	17	18	19	20	21	22
$\Theta_{min}\div\Theta_{max}$ n_K	-8÷-4 10	-4÷0 22	-2÷2 10	-4÷0 11	0÷2 12	-5÷-3 11
$\Theta_{min}\div\Theta_{max}$ n_K	-2÷0 19	-4÷0 22	2÷6 20	0÷4 19	2÷4 19	-3÷-1 19
$\Theta_{min}\div\Theta_{max}$ n_K	0÷2 39	0÷4 37	6÷10 39	4÷8 39	4÷6 37	-1÷1 39
$\Theta_{min}\div\Theta_{max}$ n_K	2÷4 21	4÷8 20	10÷14 22	8÷12 21	6÷8 21	1÷3 21
$\Theta_{min}\div\Theta_{max}$ n_K	4÷6 10	8÷12 11	14÷18 9	12÷16 10	8÷10 11	3÷5 10

Задача 4.3.3. За результатами повірки газоаналізатора типа ГТМК - 18 отримані результати X(% об) вимірювання концентрації кисню, що наведені у

табл. 4.5. Необхідно оцінити найбільший та найменший результат вимірювання з наведених у табл. 4.5 чи не є він промахом за рівня значимості α.

Таблиця 4.5 Вихідні дані до задачі 4.3.3.

Показники, % об	Номер варіанту							
	23	24	25	26	27	28	29	30
X_1	15,0	12,5	5,5	16,0	10,7	18,0	14,0	10,5
X_2	16,1	12,0	5,0	17,2	10,8	18,2	15,1	9,8
X_3	15,7	13,2	4,8	16,8	10,1	18,3	14,7	10,1
X_4	15,8	13,6	5,8	16,6	10,9	18,4	14,8	10,0
X_5	15,5	12,8	5,2	16,5	10,5	19,6	14,5	10,5
X_6	17,0	12,4	5,4	17,0	9,8	18,8	16,0	8,9
X_7	14,7	13,8	4,5	15,8	10,6	19,0	13,8	10,6
X_8	15,0	13,0	4,9	16,2	11,5	17,8	14,0	11,0
X_9	14,0	12,5	5,6	16,6	11,2	18,5	15,0	10,2
X_{10}	14,2	12,9	4,7	15,9	10,7	18,1	13,2	10,4
α	0,01	0,05	0,1	0,05	0,01	0,05	0,1	0,05

РОЗДІЛ 5
ДОВІРЧІ ІНТЕРВАЛИ ТА ДОВІРЧІ ЙМОВІРНОСТІ

5.1. Загальні відомості

Всі вибіркові параметри (числові характеристики) є випадковими величинами, а отже їх відхилення від істинних параметрів (похибки) також будуть випадковими. Сенс оцінки параметрів за допомогою інтервалів полягає у визначенні інтервалів, що називають довірчими, між межами яких з визначеними ймовірностями (довірчими) знаходяться істинні значення параметрів, що оцінюються.

Якщо кількість спостережень n достатньо велика, то на підставі постулату К. Гауса можна стверджувати (за відсутності систематичної похибки), що оцінка $\overline{x}$ має бути близькою до нормального закону розподілу. Параметри цього нормального закону обчислюються за рівняннями (4.3)–(4.6), а довірча ймовірність того, що результати вимірювань не вийдуть за межі якого-небудь інтервалу похибки ε визначається формулою:

$$P\left\{\overset{o}{\Delta} \le \varepsilon\right\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{S_X}\right), \tag{5.1}$$

де $\Phi\left(\varepsilon / S_X\right)$ - функція Лапласа; $\overset{o}{\Delta} = \left|\overline{x} - M\left(x\right)\right|$ - випадкова похибка, що характеризує відхилення оцінки результату вимірювання від істинного значення $M\left(x\right)$; $M\left(x\right)$ - математичне очікування.

Довірчий інтервал ε (гранична випадкова похибка, що характеризує довірчий інтервал) як правило виражають відносною величиною $t = \varepsilon / S_x$. Виходячи з цього рівняння (5.1) для довірчої ймовірності прийме наступний вигляд:

$$P\left\{\overset{o}{\Delta} \le t \cdot S_X\right\} = 2\Phi\left(t\right). \tag{5.2}$$

Значення функції Лапласа $\Phi(x)$ наведені у табл. 5.1

За невеликої кількості спостережень (вимірювань) для побудови довірчого інтервалу необхідна інформація щодо типу закону розподілу випадкової величини. За таких обставин тип закону розподілу встановлюють наступним чином. Якщо середньоквадратичне відхилення σ відоме, а невідоме лише математичне очікування $M(x)$, то при незалежних спостереженнях (вимірюваннях) користуються властивістю сталості нормального закону розподілу. Згідно такої властивості сума незалежних випадкових величин, що мають нормальний закон розподілу, сама має нормальний закон розподілу. Тому в таких умовах та невеликої кількості спостережень можна стверджувати, що оцінка математичного очікування $\overline{x}$ має нормальний закон розподілу, що дозволяє використовувати формулу (5.2).

Таблиця 5.1. Значення функції розподілу Лапласа $\Phi(x)$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	1,20	0,3849	2,40	0,4918
0,10	0,0398	1,30	0,4032	2,50	0,4938
0,20	0,0793	1,40	0,4192	2,60	0,4953
0,30	0,1179	1,50	0,4332	2,70	0,4965
0,40	0,1554	1,60	0,4452	2,80	0,4974
0,50	0,1915	1,70	0,4554	2,90	0,4981
0,60	0,2257	1,80	0,4641	3,00	0,4987
0,70	0,2580	1,90	0,4713	3,50	0,4990
0,80	0,2881	2,00	0,4772	3,80	0,4999
0,90	0,3159	2,10	0,4821	4,00	0,4999
1,00	0,3413	2,20	0,4861	4,50	0,4999
1,10	0,3643	2,30	0,4893	5,00	0,4999

Якщо середньоквадратичне відхилення σ невідоме, то за невеликої кількості вимірювань його оцінка S_X за результатами спостережень буде грубою і формула (5.2) не вирішує задачі побудови довірчого інтервалу. У такому випадку користуються також формулою (5.2), однак відповідне значення параметра t для заданої довірчої ймовірності та степені свободи $(n-1)$ знаходять по табл. 5.2 розподілу Стьюдента.

Таблиця 5.2. Значення параметра t розподілу Стьюдента

$(n-1)$	Довірча ймовірність P						
	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	1,96	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66	636,62
2	1,38	1,88	2,92	4,30	6,97	9,93	31,60
3	1,25	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	12,92
4	1,19	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61
5	1,16	1,48	2,02	2,57	3,37	4,03	6,87
6	1,13	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	5,96
7	1,12	1,42	1,90	2,37	3,00	3,50	5,41
8	1,11	1,39	1,86	2,31	2,90	3,36	5,04
9	1,1	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78
10	1,09	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	4,59
11	1,09	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	4,44
12	1,08	1,35	1,78	2,18	2,68	3,06	4,32
13	1,08	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	4,22
14	1,07	1,34	1,76	2,15	2,62	2,98	4,14
15	1,07	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	4,07
16	1,07	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92	4,02
17	1,07	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90	3,97
18	1,07	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88	3,92
19	1,06	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,88

Результат вимірювання представляється у стандартному вигляді: $\left(\bar{x}\pm\Delta\right);P$. При цьому округлення рекомендуються виконувати у такому порядку. Спочатку округлити значення абсолютної похибки Δ до двох значущих цифр, якщо перша з них дорівнює 1 чи 2, і до однієї цифри, якщо перша цифра 3 та більше. Потім необхідно округлити значення $\bar{x}$ таким чином, щоб останні цифри результату вимірювання $\bar{x}$ і округленого значення похибки Δ знаходились в одному розряді. Наприклад: $m=\left(197\pm3\right)\cdot10^{-3}$ кг, $P=0,95$ або $L=\left(68,4\pm1,5\right)\cdot10^{3}$ м, $P=0,95$.

5.2. Приклади розв'язання задач

Задача 5.2.1. За результатами шести зважувань зливку з дорогоцінного металу отримані наступні значення, г: 72,361; 72,357;72,352; 72,346; 72,344; 72,340. Необхідно визначити довірчий інтервал ε для середнього значення $\bar{x}$ за довірчої ймовірності $P=0,99$.

Рішення.

Оцінки математичного очікування $\bar{x}$, г, та середньоквадратичного відхилення середньоарифметичного S_X , мг, будуть дорівнювати:

$$\bar{x}=\frac{1}{6}\left(72,361+72,357+...72,340\right)=72,350\,.$$

$$S_X=\sqrt{\frac{1}{6\cdot5}\left[\left(72361-72350\right)^2+...+\left(72340-72350\right)^2\right]}=$$

$$=\sqrt{\frac{326}{30}}=3,29\,.$$

Параметр розподілу Стьюдента по табл. 5.2 для $n-1=5$ і $P=0,99$ складе $t=4,03$.

Тоді довірчий інтервал ε, прийме наступне значення, мг:

$$\varepsilon = 3,29 \cdot 4,03 = \pm 13,6.$$

Отже маса зливку буде дорівнювати, г:

$$(72,350 \pm 0,014);\ P = 0,99.$$

При цьому останні цифри результату вимірювання з урахуванням округлення знаходяться в одному розряді з похибкою $\varepsilon = \overset{o}{\Delta}$.

Задача 5.2.2. За результатами десяти вимірювань довжини металевого бруска отримані наступні значення, мм: 358,59; 358,55; 358,53; 358,52; 358,51; 358,49; 358,48; 358,46; 358,45; 358,42. Визначити ймовірність того, що похибка середньоарифметичного значення $\overline{x}$ не вийде за межі інтервалу $\varepsilon = \pm 0,05$ мм.

Рішення.

Визначаємо оцінки математичного очікування $\overline{x}$, мм, та середньоквадратичного відхилення середньоарифметичного S_X, мм.

$$\overline{x} = \frac{1}{10}(358,59 + 358,55 + ... + 358,42) = 358,50.$$

$$S_X = \sqrt{\frac{1}{10 \cdot 9}\left[(358,59 - 358,50)^2 + ... + (358,42 - 358,50)^2\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{0,023}{90}} = 0,016.$$

Параметр розподілу Стьюдента t складе:

$$t = 0,05 / 0,016 = 3,12.$$

За степені свободи $(n-1) = 9$ і $t = 3,12$ згідно табл. 5.2 довірча ймовірність складе $P = 0,987$.

Задача 5.2.3. Необхідно визначити межі довірчого інтервалу похибки вимірювання температури з довірчою ймовірністю $P = 0{,}95$ за невідомого закону розподілу. При цьому, за результатами 100 спостережень були знайдені оцінки математичного очікування $\bar{x} = 1072$ °C і дисперсії $S^2 = 64$ (°C)^2.

Рішення.

Оцінка середньоквадратичного відхилення буде складати, °C:

$$S = \sqrt{64} = \pm 8.$$

За великої кількості вимірювань $(n = 100)$ використовуємо розподіл Лапласу і по табл. 5.1 визначаємо параметр розподілу t для $P = 0{,}95$, який буде дорівнювати:

$$2\Phi(t) = 0{,}95, \text{ а } t \approx 2 \text{ (правило двох сігм)}$$

За такої величини t довірчий інтервал ε складе, °C:

$$\varepsilon = 2 \cdot 8 / \sqrt{100} = \pm 1{,}6.$$

Результат вимірювання після округлення буде мати вигляд, °C:

$$[1072{,}0 \pm 1{,}6];\ P = 0{,}95.$$

Задача 5.2.4. За результатами 9-ти спостережень вимірювання температури отримані оцінки математичного очікування $\bar{x} = 1072$ °C та дисперсії $S^2 = 64$ (°C)^2. Необхідно визначити межі довірчого інтервалу похибки вимірювання температури за довірчої ймовірності $P = 0{,}95$ і $P = 0{,}9$. При цьому похибка вимірювання має нормальний закон розподілу.

Рішення.

Оцінка середньоквадратичного відхилення буде складати, °C:

$$S = \sqrt{64} = \pm 8.$$

Визначаємо параметр розподілу t для заданих ймовірностях 0,95 і 0,9 по табл. 5.1:

$$2\Phi(t) = 0{,}95,\ t \approx 2;$$

$$2\Phi(t) = 0{,}9,\ t = 1{,}65.$$

Довірчі інтервали ε будуть дорівнювати, °C:

$$\varepsilon_{0,95} = 2 \cdot 8 / \sqrt{9} = \pm 5{,}3;$$

$$\varepsilon_{0,9} = 1{,}65 \cdot 8 / \sqrt{9} = \pm 4{,}4.$$

Результати вимірювання для цих інтервалів будуть мати наступний вигляд, °C:

$$(1072 \pm 5),\ P = 0{,}95;$$

$$(1072 \pm 4),\ P = 0{,}9.$$

Задача 5.2.5. Вимірювання термоопору дало наступні результати (Ом): 975; 1005; 945; 950; 987. Відомо, що похибка вимірювання має нормальний закон розподілу, але середньоквадратичне відхилення похибки вимірювання невідоме. Необхідно визначити межі довірчого інтервалу похибки вимірювання термоопору з довірчою ймовірністю $P = 0{,}9$.

Рішення.

Визначаємо оцінки математичного очікування $\bar{x}$, Ом, та середньоквадратичного відхилення середньоарифметичного S_X , Ом.

$$\bar{x} = (975 + 1005 + ... + 987) / 5 = 972{,}4;$$

$$S_X = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 4}\left[(975 - 972{,}4)^2 + (1005 - 972{,}4)^2 + ... + (987 - 972{,}4)^2\right]} =$$

$$= \sqrt{633,8} = \pm 25,17.$$

За невідомої величини σ та невеликої кількості вимірювань параметр розподілу t обчислюється по табл. 5.2 для $n-1=4$ і $P=0,9$ та прийме значення $t=2,13$.

Довірчий інтервал буде дорівнювати, Ом:

$$\varepsilon = 2,13 \cdot 25,17 \approx \pm 23,99 \approx 24.$$

Отже після округлення результат вимірювання буде мати вигляд, Ом:

$$(972 \pm 24);\ P = 0,9.$$

Задача 5.2.6. За згрупованими результатами вимірювань постійної напруги на виході нормуючого перетворювача необхідно визначити довірчий інтервал для її математичного очікування, що відповідає довірчій ймовірності $P=0,98$. Результати групування представлені в табл. 5.3.

Табл. 5.3. Вихідні дані до задачі 5.2.6

Інтервали, мВ	$0 \div 4$	$4 \div 8$	$8 \div 12$	$12 \div 16$	$16 \div 20$
Число n_k попадань в інтервал	12	29	42	21	16
Середина інтервалу, мВ	2	6	10	14	18

Рішення.

Оцінки математичного очікування $\overline{x}$, мВ, та середньоквадратичного відхилення середньоарифметичного S_X, мВ, для серії зі 120 результатів вимірювань будуть дорівнювати:

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 12 + 6 \cdot 29 + \ldots + 18 \cdot 16}{120} = 10;$$

$$S_X = \sqrt{\frac{1}{119 \cdot 120}\left[(2-10)^2 \cdot 12 + (6-10)^2 \cdot 29 + \ldots + (18-10)^2 \cdot 16\right]} = 0,426.$$

За великої кількості вимірювань $(n > 100)$ використовуємо розподіл Лапласу і по табл. 5.1 визначаємо параметр розподілу t для $P = 0,98$

$$2\Phi(t) = 0,98,\ t = 2,33.$$

Тоді довірчий інтервал ε визначиться наступною величиною, мВ:

$$\varepsilon = 0,426 \cdot 2,33 = 0,99.$$

Отже, користуючись правилом округлення, середній результат вимірювання буде дорівнювати, мВ:

$$(10 \pm 1),\ P = 0,98.$$

5.3 Задачі для самостійної роботи

Задача 5.3.1. За результатами n незалежних вимірювань температури розсолу на виході випарника, представлених у табд.5.4, отримані оцінки математичного очікування $\bar{x}$ і дисперсії S^2. Необхідно визначити довірчі інтервали ε для математичного очікування цієї температури за довірчої ймовірності $P = 0,95$ і $P = 0,98$.

Задача 5.3.2. Результати вимірювань температури x (°C) представлені у вигляді статистичного ряду в табл. 5.5. Необхідно визначити довірчі інтервали ε для математичного очікування цієї температури за довірчої ймовірності $P = 0,9$ і $P = 0,95$.

Таблиця 5.4. Вихідні дані до задачі 5.3.1

Номер варіанту	Показники			Номер варіанту	Показники			Номер варіанту	Показники			Номер варіанту	Показники		
	n	$\bar{x}$, ^oC	S^2 $\left(^oC\right)^2$		n	$\bar{x}$, ^oC	S^2 $\left(^oC\right)^2$		n	$\bar{x}$, ^oC	S^2 $\left(^oC\right)^2$		n	$\bar{x}$, ^oC	S^2 $\left(^oC\right)^2$
1	64	1,2	4,5	9	100	2,5	1,4	17	75	3,2	1,44	25	64	5,3	4,8
2	81	-1	2,25	10	70	1,4	1,96	18	60	-2	1,96	26	70	-1	2,25
3	90	4,8	3,2	11	64	1,3	4,2	19	55	3,4	4,8	27	64	4,8	3,2
4	85	-2	4	12	81	2,1	2,25	20	64	4,8	4	28	81	-2	4
5	60	3,5	1,96	13	100	2,4	1,6	21	81	-2	1,96	28	100	3,5	1,96
6	55	4,2	3,6	14	64	4,2	1,44	22	90	3,5	3,6	30	64	2,5	1,4
7	68	2,8	2,25	15	90	3,5	4	23	85	4,2	2,25	31	90	1,4	1,96
8	56	1,6	2,56	16	81	4,2	2,56	24	60	2,8	2,56	32	81	1,3	4,2

Таблиця 5.5. Вихідні дані до задачі 5.3.2

Показники	Номер варіанту						
	33	34	35	36	37	38	39
Інтервал, число n_k	$-6 \div -2$ 12	$0 \div -2$ 13	$-5 \div -3$ 14	$0 \div 2$ 22	$-10 \div -6$ 18	$-2 \div 0$ 19	$-8 \div -4$ 24
Інтервал, число n_k	$-2 \div 2$ 22	$2 \div 4$ 21	$-3 \div -1$ 20	$2 \div 4$ 45	$-6 \div -2$ 45	$0 \div 2$ 46	$-4 \div 0$ 40
Інтервал, число n_k	$2 \div 6$ 30	$4 \div 6$ 30	$-1 \div 1$ 30	$4 \div 6$ 62	$-2 \div 2$ 70	$2 \div 4$ 74	$0 \div 4$ 65
Інтервал, число n_k	$6 \div 10$ 26	$6 \div 8$ 25	$1 \div 3$ 24	$6 \div 8$ 53	$2 \div 6$ 53	$4 \div 6$ 38	$4 \div 8$ 54
Інтервал, число n_k	$10 \div 14$ 10	$8 \div 10$ 11	$3 \div 5$ 12	$8 \div 10$ 18	$6 \div 10$ 14	$6 \div 8$ 23	$8 \div 12$ 17

Задача 5.3.3. За результатами вимірювання концентрації аміаку x (% об) у циркуляційному газі відділення синтезу отримані показники, що представлені у табл. 5.6. Необхідно визначити довірчий інтервал для математичного очікування цієї концентрації за довірчої ймовірності $P = 0{,}9$ в передбаченні, що середньоквадратичне відхилення σ відоме і дорівнює 1,44% об. При цьому величина x має нормальний закон розподілу.

Задача 5.3.4. За результатами вимірювання сили постійного струму x (мА) на виході нормуючого перетворювача отримані показники, що представлені у табл. 5.7. Необхідно визначити довірчий інтервал для математичного очікування сили струму за довірчої ймовірності $P = 0{,}98$, якщо середньоквадратичне відхилення σ невідоме. При цьому величина x має нормальний закон розподілу.

Таблиця 5.6. Вихідні дані до задачі 5.3.3

Показники, % об.	Номер варіанту									
	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
x_1	1,9	3,5	3,7	2,6	1,7	2,8	3,6	1,6	3,2	1,5
x_2	0,4	2,1	2,9	1,5	0,2	1,5	6,2	1,1	2,4	2,9
x_3	3,3	2,4	3,6	3,3	3,1	1,7	5,1	3,0	0,8	0,1
x_4	1,5	2,8	6,3	2,5	1,3	2,7	4,4	1,2	4,8	1,1
x_5	0,9	0,5	4,4	0,9	2,4	1,1	3,2	0,6	2,1	0,4
x_6	2,6	2,5	3,2	4,9	0,7	5,1	4,8	2,3	3,0	2,2
x_7	2,4	2,8	5,1	2,2	1,2	2,2	2,1	2,1	4,1	2,0
x_8	1,4	0,5	4,8	3,1	2,5	4,5	3,7	1,1	2,5	1,0
x_9	2,7	2,5	2,1	4,2	2,2	3,3	2,9	2,4	1,4	2,3

Задача 5.3.5. Результати дев’яти вимірювань рівня x в абсорбері дифманометричним методом представлені у табл. 5.8. Необхідно визначити

ймовірність P того, що похибка середньоарифметичного значення $\overline{x}$ не вийде за межі інтервалу ε.

Таблиця 5.7 Вихідні дані до задачі 5.3.4

Показники, мА	Номер варіанту									
	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
x_1	2,3	0,3	5,0	2,2	3,6	2,0	6,1	2,6	0,9	2,8
x_2	0,7	1,4	3,4	3,6	2,3	3,4	3,1	0,3	2,6	0,5
x_3	4,7	0,0	2,6	0,6	1,2	0,4	4,3	3,2	2,4	2,5
x_4	2,0	2,8	1,0	1,1	0,7	2,7	5,0	1,4	1,4	2,8
x_5	2,9	1,0	2,3	2,7	2,9	0,9	4,7	0,8	2,7	0,5
x_6	4,0	2,1	3,2	1,7	1,8	2,5	2,0	1,3	1,9	2,5
x_7	2,4	1,9	1,6	2,6	2,7	1,5	3,6	1,8	0,4	3,5
x_8	1,3	0,9	4,3	1,5	3,0	1,3	2,8	2,5	3,3	2,1
x_9	3,1	2,2	2,7	2,9	1,6	2,4	3,5	2,3	1,5	2,4

Таблиця 5.8. Вихідні дані до задачі 5.3.5

Показники, м	Номер варіанту								
	60	61	62	63	64	65	66	67	68
x_1	3,5	2,6	1,9	6,3	4,9	0,2	1,7	3,2	2,3
x_2	2,1	1,5	0,4	4,4	2,2	3,1	2,7	4,8	2,1
x_3	2,4	3,3	3,3	3,2	3,1	1,3	1,1	2,1	1,1
x_4	2,8	2,5	1,5	3,7	4,2	2,4	5,1	3,7	2,4
x_5	0,5	0,9	0,9	2,9	2,6	1,7	2,2	2,9	1,6
x_6	2,5	4,9	2,6	3,6	1,5	0,7	2,8	3,6	0,1
x_7	2,8	2,2	2,4	5,1	3,3	1,2	1,5	6,2	3,0
x_8	0,5	3,1	1,4	4,8	2,5	2,5	4,5	5,1	1,2
x_9	2,5	4,2	2,7	2,1	0,9	2,2	3,3	4,4	0,6
ε	0,5	0,6	0,7	0,5	0,6	0,55	0,45	0,65	0,7

РОЗДІЛ 6
ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ. КРИТЕРІЇ УЗГОДЖЕННЯ

6.1. Загальні відомості

У переважній більшості реальних процесів вимірювання отримані результати мають достатньо близький розподіл до нормального закону. Тому при обробці результатів вимірювань (спостережень) перша гіпотеза, що перевіряється – нормальність відповідного розподілу. Цю гіпотезу прийнято називати основною, а критерії для перевірки гіпотези щодо закону розподілу як правило називають критеріями узгодження.

Найпростіші критерії узгодження ґрунтуються на порівнянні таких параметрів як математичне очікування $M(x)$ і середньоквадратичне відхилення σ, що відповідають нормальному закону, з оцінками $\overline{x}$ і S цих параметрів щодо спостерігаємого розподілу за результатами вимірювань. У випадку якщо вибіркові оцінки достатньо добре узгоджуються з теоретично обчисленими значеннями цих параметрів, то це може служити підставою для прийняття основної гіпотези.

6.1.1. Критерій узгодження по асиметрії та ексцесу розподілу

Дисперсія є мірою розсіювання для будь-якого розподілу. При цьому знання навіть тільки однієї дисперсії забезпечує можливість оцінювати ймовірність тих чи інших значень випадкової величини (результату вимірювання), що підлягає дослідженню. Тому по дисперсіям асиметрії $D(\gamma_a)$ і ексцесу $D(\gamma_e)$ можна оцінювати, чи значимо вибіркові асиметрія $\overline{\gamma_a}$ і ексцес $\overline{\gamma_e}$ відхиляються від своїх математичних очікувань, тобто від нуля. Згідно цього критерію розподіл, що перевіряється, можна вважати нормальним, якщо вибіркові асиметрія і ексцес задовольняють нерівностям:

$$\left|\overline{\gamma_a}\right| \le 3\sqrt{D(\gamma_a)}; \qquad (6.1)$$

$$\left|\overline{\gamma_e}\right| \leq 5\sqrt{D\left(\gamma_e\right)}. \tag{6.2}$$

При цьому $\overline{\gamma_a}$ і $\overline{\gamma_e}$ визначаються за рівняннями (4.7; 4.8) або (4.13; 4.14), а формули для розрахунку дисперсій цих величин мають вигляд:

$$D\left(\overline{\gamma_a}\right) = \frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}; \tag{6.3}$$

$$D\left(\overline{\gamma_e}\right) = \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}, \tag{6.4}$$

де n – обсяг виборки (результатів вимірювань).

Найчастіше цей критерій застосовується для невеликого об'єму виборки $(n \leq 20)$. При цьому він може бути застосованим і для більшого об'єму виборки, особливо коли не потрібна велика точність встановлення відповідності нормальному закону.

6.1.2. Критерій узгодження Пірсона

Цей критерій застосовується за великого об'єму вибірки $(n > 50)$ і передбачає групування даних, розглянутого у підрозділі 4.1. Для порівняння спостерігаємого розподілу результатів вимірювання з нормальним законом здійснюється порівняння чисел n_i (кількість попадань результатів в інтервал) і добутку $nf(x_i)$. В процесі порівняння за умови $nf(x_i) \geq 5$ обчислюється величина χ^2 за формулою:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left[n_i - nf(x_i)\right]^2}{nf(x_i)}. \tag{6.5}$$

Теоретичне значення ймовірності $f(x_k)$ попадання результату вимірювань в інтервал K визначається за рівнянням:

$$f\left(X_k\right)=\Phi\left(\frac{X_{k+1}-\bar{x}}{S}\right)-\Phi\left(\frac{X_{k-1}-\bar{x}}{S}\right). \qquad (6.6)$$

Обравши рівень значимості α і знайшовши по табл. 6.1 розподілу Пірсона для числа ступенів свободи $f=K-3$ значення χ_α^2 , необхідно гіпотезу нормальності спостерігаємого розподілу відхилити за умови $\chi^2 \geq \chi_\alpha^2$ і вважати правильною за $\chi^2 < \chi_\alpha^2$. В процесі обчислень слід звернути увагу, якщо добуток $nf\left(X_k\right) \leq 5$ для деяких інтервалів, то слід об'єднати інтервал, у якому спостерігається ця нерівність, з одним чи декількома сусідніми інтервалами таким чином, щоб у новому (сумарному) інтервалі виконувалась нерівність $nf\left(X_k\right) \geq 5$.

6.1.3. Критерій узгодження Колмогорова

Критерій Колмогорова є універсальним критерієм і може бути застосований не тільки для нормального, але і для будь-якого теоретичного розподілу, що має неперервний характер. При цьому параметри теоретичного закону розподілу визначаються не за даними виборки, що досліджується. За міру неузгодженості статистичного і теоретичного (нормального) законів розподілу приймається найбільше значення D абсолютної різниці статистичної і теоретичної функцій розподілу. Експериментальне значення D_e величини D визначається за формулою:

$$D_e=\max\left|F^*\left(X\right)-F\left(X\right)\right|, \qquad (6.7)$$

де $F^*\left(X\right);F\left(X\right)$ - відповідно статистична (емпірична) та теоретична інтегральні функції розподілу, тобто функції накопиченої ймовірності.

У випадку, якщо експериментальне значення величини $\lambda_e=D_e\sqrt{n}>\lambda_\alpha$, то гіпотеза щодо узгодження теоретичного закону розподілу з даними вибірки відхиляється. Застосування критерію Колмогорова здійснюється з доволі жорсткими рівнями значимості $\alpha = 0,2$ або навіть $\alpha = 0,3$. Обсяг вибірки n має бути достатньо великим $n \geq 50$. В таблиці 6.2 наведені значення λ_α для розподілу Колмогорова.

Таблиця 6.1. Значення α - відсоткових точок для χ^2_α розподілу Пірсона

f	Рівень значимості α								
	0,95	0,90	0,8	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,004	0,016	0,064	1,642	2,71	3,84	5,41	6,64	10,83
2	0,103	0,211	0,446	3,22	4,6	5,99	7,82	9,21	13,82
3	0,352	0,584	1,005	4,64	6,25	7,82	9,84	11,34	16,27
4	0,711	1,064	1,649	5,99	7,48	9,49	11,67	13,28	18,46
5	1,145	1,610	2,34	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	20,05
6	1,635	2,20	3,07	8,56	10,64	12,59	15,03	16,81	22,5
7	2,17	2,83	3,82	9,80	12,02	14,07	16,62	18,48	24,3
8	2,73	3,49	4,59	11,03	13,36	15,51	18,17	20,01	26,1
9	3,32	4,17	5,38	12,24	14,68	16,92	19,68	21,7	27,9
10	3,94	4,86	6,18	13,44	15,99	18,31	21,2	23,2	29,6
11	4,58	5,58	6,99	14,63	17,28	19,68	22,6	24,7	31,3
12	5,23	6,30	7,81	15,81	18,55	21,0	24,1	26,2	32,9
13	5,89	7,04	8,63	16,98	19,81	22,4	25,5	27,7	34,6
14	6,57	7,79	9,47	18,15	31,1	23,7	26,9	29,1	36,1
15	7,26	8,55	10,21	19,31	22,3	25,0	28,3	30,6	37,7
16	7,96	9,31	11,15	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	39,3
17	8,67	10,08	12,0	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	40,8
18	9,39	10,86	12,86	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	42,3
19	10,11	11,65	13,72	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	43,8
20	10,85	12,44	14,58	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	45,3
21	11,59	13,24	15,44	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	46,8
22	12,34	14,04	16,31	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	48,3

Таблиця 6.2. Критичні значення величини λ_α для розподілу Колмогорова

α	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
λ_α	0,828	0,895	0,974	1,073	1,224	1,358	1,520	1,627	1,950

6.1.4. Складовий критерій узгодження

Складовий критерій застосовується, якщо необхідно виконати перевірку про нормальність розподілу за невеликої кількості спостережень n, тобто в діапазоні від 15 до 50 спостережень. Перевірка здійснюється у два етапи. На першому етапі (критерій 1) перевіряється гіпотеза нормальності для середини результатів розподілу, а на другому – для «кінців» розподілу (критерій 2).

За критерієм 1 визначається відношення $\overline{d}$ у відповідності з рівнянням:

$$\overline{d} = \sum_{i=1}^{n} \left| x_i - \overline{x} \right| / \left(n \cdot S^* \right). \tag{6.8}$$

У рівнянні (6.8) величина S^*, що характеризує зміщену оцінку середньоквадратичного відхилення, обчислюється за формулою:

$$S^* = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x} \right)^2 / n}. \tag{6.9}$$

За обраним рівнем значимості α' по табл. 6.3 знаходяться параметри розподілу $d_{(1-\alpha'/2)}$ і $d_{\alpha'/2}$. Розподіл результатів вимірювань вважають нормальним, якщо виконується умова:

$$d_{(1-\alpha'/2)} \le \overline{d} \le d_{\alpha'/2}. \tag{6.10}$$

За критерієм 2 вважають, що результати спостережень мають приналежність до нормального розподілу, якщо не більше m-різниць $\left| x_i - \overline{x} \right|$ перевищило значення $z_{P/2}S$, де S - оцінка середньоквадратичного відхилення визначається за формулами (4.4), (4.5) або (4.12), а $Z_{P/2}$ - верхня квантіль розподілу нормованої функції Лапласа, що відповідає ймовірності $P/2$ і знаходиться по табл. 5.1. для функції Лапласа.

Таблиця 6.3. Значення параметрів розподілу $d_{(1-\alpha'/2)}$ і $d_{\alpha'/2}$

n	$d_{0,01}$	$d_{0,05}$	$d_{0,10}$	$d_{0,90}$	$d_{0,95}$	$d_{0,99}$
11	0,9359	0,9073	0,8899	0,7409	0,7153	0,6675
16	0,9137	0,8884	0,8733	0,7452	0,7236	0,6829
21	0,9001	0,8768	0,8631	0,7495	0,7304	0,6950
26	0,8901	0,8686	0,8570	0,7530	0,7360	0,7040
31	0,8827	0,8625	0,8511	0,7559	0,7404	0,7110
36	0,8769	0,8578	0,8468	0,7583	0,7440	0,7167
41	0,8722	0,8540	0,8436	0,7604	0,7470	0,7216
46	0,8682	0,8508	0,8409	0,7621	0,7496	0,7256
51	0,8648	0,8481	0,8385	0,7636	0,7518	0,7291

Значення P і m визначаються числом вимірювань n і рівнем значимості α'' у відповідності з табл. 6.4.

Для рівня значимості відмінного від передбаченого табл..6.4 значення P обчислюється шляхом інтерполяції. До того ж, якщо для «критерію 1» обрано рівень значимості α', а для «критерію 2» - рівнем значимості α'', то сумарний рівень значимості α складового критерію повинен відповідати нерівності $\alpha \le \alpha' + \alpha''$. Гіпотеза про нормальність розподілу приймається тільки за умови виконання обох складових. При цьому перевірку проводять, як правило, з рівнем значимості α від 10 до 2%. У випадку n<15 приналежність до нормального розподілу за цим критерієм не перевіряється.

Таблиця 6.4. Значення довірчої ймовірності P і кількості різниць m

Кількість		Рівень значимості α''		
спостережень, n	різниць, m	0,01	0,02	0,05
10	1	0,98	0,98	0,96
11-14	1	0,99	0,98	0,97
15-20	1	0,99	0,99	0,98
21-22	2	0,98	0,97	0,96
23	2	0,98	0,98	0,96
24-27	2	0,98	0,98	0,97
28-32	2	0,99	0,98	0,97
33-35	2	0,99	0,98	0,98
36-49	2	0,99	0,99	0,98

6.2. Приклади розв'язання задач

Задача 6.2.1. За результатами вимірювання концентрації аміаку у циркуляційному газі x (% об) відділення синтезу отримана вибірка об'єму $n = 200$. Згруповані дані результатів вимірювання наведені у вигляді статистичного ряду у табл. 6.5. Необхідно провести перевірку гіпотези щодо нормальності розподілу результатів вимірювання з використанням критерію узгодження за асиметрією і ексцесом розподілу.

Рішення

Для зручності обчислень числових характеристик спостерігаємого розподілу концентрації аміаку x визначаються добутки, що представлені у табл. 6.6.

Використовуючи суми, що отримані в останній строчці табл. 6.6 визначимо оцінки числових характеристик, а саме середньоарифметичне, середньоквадратичне, % об:

Таблиця 6.5. Результати вимірювань у згрупованому вигляді

Номер інтервалу, k	Межі інтервалу, $x_{k-1} \div x_{k+1}$	Середина інтервалу, x_k	Емпірічна частота попадання в інтервал, n_k	Ймовірність попадання величини в інтервал, $f^*\left(x_k\right) = n_k / n_i$
1	$3{,}1 \div 3{,}3$	3,2	1	0,005
2	$3{,}3 \div 3{,}9$	3,4	5	0,025
3	$3{,}5 \div 3{,}7$	3,6	4	0,020
4	$3{,}7 \div 3{,}9$	3,8	18	0,090
5	$3{,}9 \div 4{,}1$	4,0	86	0,430
6	$4{,}1 \div 4{,}3$	4,2	62	0,310
7	$4{,}3 \div 4{,}5$	4,4	14	0,070
8	$4{,}5 \div 4{,}7$	4,6	6	0,030
9	$4{,}7 \div 4{,}9$	4,8	3	0,015
10	$4{,}9 \div 5{,}1$	5,0	1	0,005

Таблиця 6.6. Результати обчислень добутків

Номер інтервалу, K	Добутки			
	$n_k x_k$	$n_k x_k^2$	$n_k x_k^3$	$n_k x_k^4$
1	3,2	10,24	32,77	184,8
2	17,0	57,80	196,52	668,2
3	14,4	51,84	186,62	671,8
4	68,4	259,92	987,70	3753,2
5	344,0	1376,00	5504,00	22016,0
6	260,4	1093,68	4593,46	19292,5
7	61,6	271,04	1192,58	5247,3
8	27,6	126,96	584,02	2686,5
9	14,4	69,12	331,78	1592,5
10	5,0	25,00	125,00	625,0
Сума	816,0	3341,60	13610,70	56657,8

$$\overline{x} = 816/200 = 4,08;$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{200-1}\left(3341,6 - \frac{816^2}{200}\right) - \frac{0,04}{12}} = 0,25.$$

При цьому коефіцієнти асиметрії та ексцесу приймуть наступні значення:

$$\overline{\gamma_a} = \frac{1}{0,25^3}\left[\frac{13610,7}{200} - \frac{3 \cdot 3341,6 \cdot 816}{200^2} + \frac{2 \cdot 816^3}{200^3}\right] = -217,5;$$

$$\overline{\gamma_e} = \frac{1}{0,25^4}\left[\frac{56657,8}{200} - \frac{4 \cdot 13610,7 \cdot 816}{200^2} + \frac{6 \cdot 3341,6 \cdot 816^2}{200^3} - \frac{3 \cdot 816^4}{200^4}\right] - 3 = 255,6.$$

Визначаємо теоретичні дисперсії коефіцієнтів асиметрії та ексцесу розподілу $D\left(\overline{\gamma_\alpha}\right)$ і $D\left(\overline{\gamma_e}\right)$:

$$D\left(\overline{\gamma_a}\right) = \frac{6(200-1)}{(200+1)(200+3)} = 0,0293;$$

$$D\left(\overline{\gamma_e}\right) = \frac{24 \cdot 200(200-2)(200-3)}{(200+1)^2(200+3)(200+5)} = 0,113.$$

Перевіряємо умову щодо відповідності спостерігаємого розподілу результатів вимірювання нормальному закону.

$$\left|\overline{\gamma_a}\right| = 217,5 > 3\sqrt{0,0293} = 0,513;$$

$$\left|\overline{\gamma_e}\right| = 255,6 > 5\sqrt{0,113} = 1,68.$$

Отже, отримані значення коефіцієнтів $\overline{\gamma_a}$ і $\overline{\gamma_e}$ в значній мірі перевищують свої середньоквадратичні відхилення. Тому слід вважати, що спостерігаємий розподіл не відповідає нормальному закону.

Задача 6.2.2. За результатами вимірювання концентрації аміаку у циркуляційному газі x (% об), що у згрупованому вигляді наведені у табл. 6.5, необхідно провести перевірку щодо нормальності розподілу з використанням критерію Пірсона та Колмогорова. Виконати візуальне порівняння емпіричної та теоретичної, що відповідає нормальному закону, функцій щільності розподілу.

Рішення.

За результатами розрахунків згідно задачі 6.2.1 попередньо встановлені числові характеристики, а саме $\overline{x} = 4,08\%$ об. і $S = 0,25\%$об.

Для зручності обчислень складається табл. 6.7.

Таблиця 6.7. Результати розрахунків значень теоретичної і емпіричної функцій щільності розподілу та інтегральної функцій розподілу.

Номер інтервалу, K	Функція щільності розподілу		Інтегральна функція розподілу	
	Емпірична $f^*(x_k)$	Теоретична, $f(x_k)$	Емпірична, $F^*(x_k)$	Теоретична, $F(x_k)$
1	0,005	0,0010	0,005	0,0010
2	0,025	0,0095	0,030	0,0105
3	0,020	0,0540	0,050	0,0645
4	0,090	0,1715	0,140	0,2360
5	0,430	0,2960	0,570	0,5320
6	0,310	0,2785	0,880	0,8105
7	0,070	0,1430	0,950	0,9535
8	0,030	0,0400	0,980	0,9935
9	0,015	0,0060	0,995	0,9995
10	0,005	0,0005	1,000	1,0000

У якості прикладів нижче наведені розрахунки функції щільності (ймовірності) для відповідних інтервалів у передбаченні, що спостерігаємий розподіл характеризується нормальним законом. Так для четвертого інтервалу з межами від 3,7 % об. до 3,9 % об. ймовірність попадання концентрації у цей інтервал буде наступною:

$$f\left(x_4\right)=P\left\{3{,}7<x_4<3{,}9\right\}=\Phi\left(\frac{3{,}9-4{,}00}{0{,}25}\right)-\Phi\left(\frac{3{,}7-4{,}08}{0{,}25}\right)=$$

$$=\Phi\left(-0{,}72\right)-\Phi\left(-1{,}52\right)=-0{,}2642+0{,}4357=0{,}1715\,.$$

При цьому інтегральна функція $F\left(x_4\right)$ визначиться таким чином:

$$F\left(x_4\right)=0{,}0010+0{,}0095+0{,}0540+0{,}1715=0{,}2360\,.$$

В табл. 6.8 зведені результати щодо визначення показників χ^2 розподілу Пірсона та різниці D розподілу Колмогорова.

Таблиця 6.8. Результати обчислень показників χ^2 і D.

Номер інтервалу, K	Добуток $nf\left(x_k\right)$	Різниця $\left\lvert F^*\left(x_k\right)-F\left(x_k\right)\right\rvert$	Відношення $\frac{\left[n_k-nf\left(x_k\right)\right]^2}{nf\left(x_k\right)}$
1	0,2	0,0040	0,65
2	1,9	0,0195	
3	10,8	0,0145	
4	34,3	0,0960	7,75
5	59,2	0,0380	12,13
6	55,7	0,0695	0,71
7	28,6	0,0035	7,45
8	8,0	0,0135	0,05
9	1,2	0,0045	
10	0,1	0	

У табл. 6.8 перші три інтервали об'єднані в один у зв'язку з тим, що $nf(x_1)=0,2$ та $nf(x_2)=1,9$, тобто навіть у підсумку ці числа менше 5. По тій самій причині об'єднані в один останні три інтервали. Підсумовуючи значення останньої колонки показник χ^2 розподілу Пірсона прийме значення 28,74. Обираємо рівень значимості $\alpha=0,05$. Тоді для числа степені свободи $f=6-3=3$ визначаємо по табл. 6.1 $\chi^2_{0,05}=7,82$. Розраховане по результатам вимірювань концентрації $\chi^2=28,74>\chi^2_\alpha$, тому гіпотезу про нормальність емпіричного розподілу слід відхилити.

Застосуємо до спостерігаємого розподілу критерій узгодження Колмогорова. Для цього в табл. 6.8 обчислені значення різниць $\left|F^*(x_k)-F(x_k)\right|$. Аналіз цієї таблиці свідчить, що найбільша з них дорівнює $D_e=0,096$. Після цього визначаємо експериментальний показник λ_e, який прийме наступне значення:

$$\lambda_e=0,096\sqrt{200}=1,357.$$

Приймаємо рівень значимості $\alpha=0,2$ і визначаємо по табл. 6.2 $\lambda_{0,2}=1,073$. Розраховане значення $\lambda_e=1,357>\lambda_\alpha$, тому гіпотеза про нормальність емпіричного розподілу і за цим критерієм узгодження відхиляється. На рис. 6.1 наведені графіки теоретичної та експериментальної функції щільності розподілу концентрації, що побудовані за даними табл. 6.5 і 6.7.

Візуальне порівняння побудованих графіків також доводить, що спостерігаємий розподіл результатів вимірювання не відповідає нормальному закону.

Задача 6.2.3. Перевірити гіпотезу щодо нормальності розподілу дев'ятнадцяти результатів вимірювання довжини деталі з використанням складового критерію узгодження. Результати вимірювань з необхідними проміжними розрахунками представлені у табл. 6.9.

Рішення.

Визначаємо оцінку математичного очікування $\overline{x}$ та зміщеного середньоквадратичного відхилення S^*, мм:

$$\overline{x} = \frac{1}{19}(18,305 + 18,308 + ... + 18,310) = 347,845/19 = 18,3076$$

$$S^* = \sqrt{\frac{(0,00000676 + 0,00000016 + ... + 0,00000576)}{19}} =$$

$$= \sqrt{\frac{0,00010234}{19}} = 0,002321.$$

Обчислюємо параметр $\overline{d}$:

$$\overline{d} = (0,0026 + 0,0004 + ... + 0,0024)/19 \cdot 0,002321 = 0,823.$$

Задаємось рівнем значимості $\alpha' = 0,02$. За відсутності у табл. 6.3 значень $\overline{d}$ для $n = 19$ здійснюємо процес інтерполяції, обравши з таблиці значення параметрів розподілу для тих чисел спостережень, між якими знаходиться $n = 19$:

$$n = 16; \; d_{0,01} = 0,9137; \quad d_{0,99} = 0,6829;$$

$$n = 21; \; d_{0,01} = 0,9001; \quad d_{0,99} = 0,6950.$$

Лінійна інтерполяція забезпечить наступні значення параметрів $d_{(1-\alpha'/2)}$ і $d_{\alpha'/2}$:

$$d_{0,01} = 0,9137 - \frac{0,9137 - 0,9001}{21 - 16} \cdot (19 - 16) = 0,9065;$$

$$d_{0,99} = 0,6829 + \frac{0,6950 - 0,6829}{21 - 16} \cdot (19 - 16) = 0,6902.$$

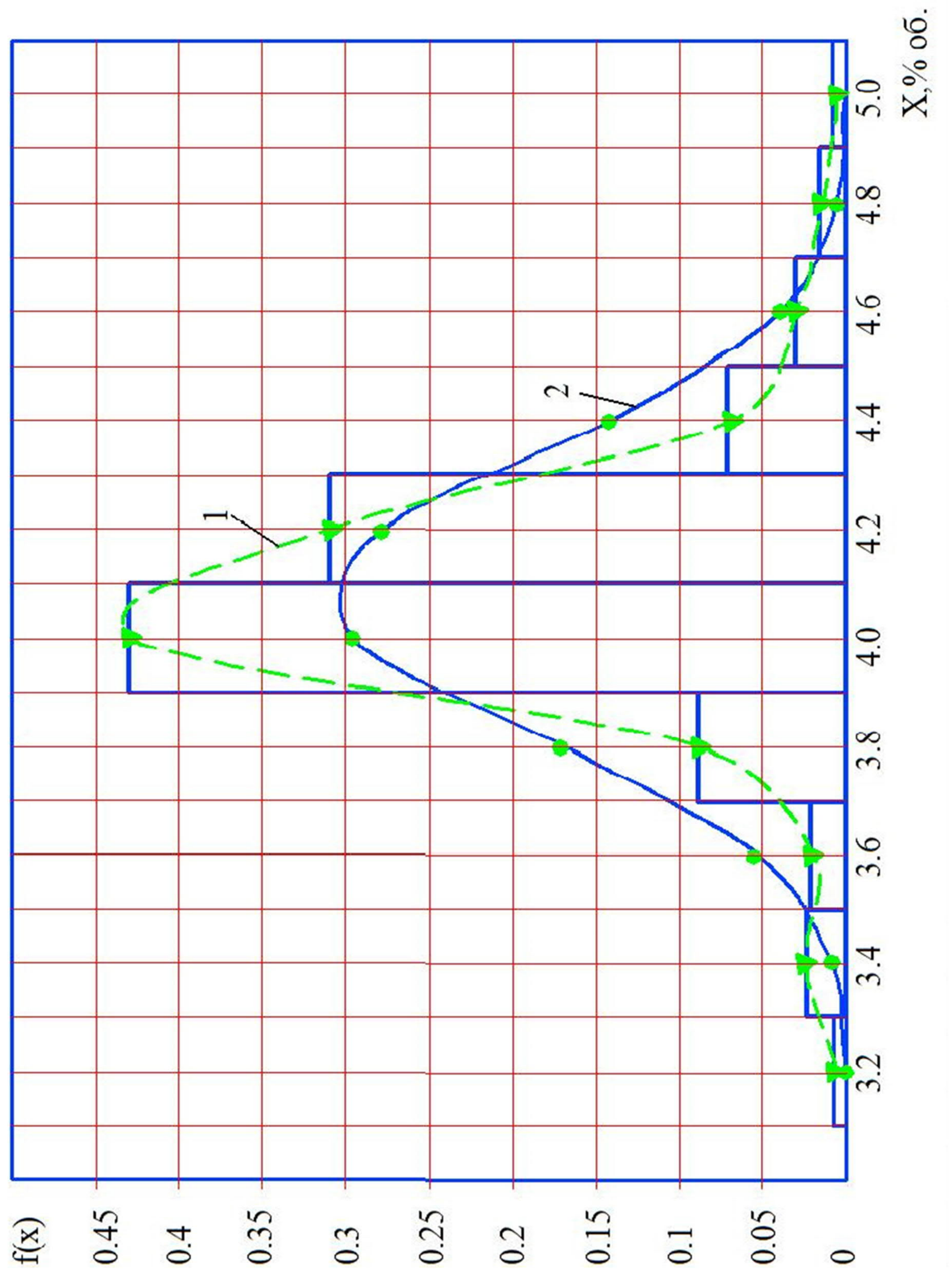

Рис. 6.1. Графіки функцій щільності розподілу концентрації аміаку у циркуляційному газі: 1 – експериментальна; 2 – теоретична, що відповідає нормальному закону.

Таблиця 6.9. Вихідні дані до задачі 6.2.3

Довжина деталі, x_i, мм	Різниця $\left\| x_i - \bar{x} \right\|$, мм	Квадрат різниці $\left(x_i - \bar{x} \right)^2$, мм^2
18,305	0,0026	0,00000676
18,308	0,0004	0,00000016
18,311	0,0034	0,00001156
18,309	0,0014	0,00000196
18,304	0,0036	0,00001296
18,306	0,0016	0,00000256
18,310	0,0024	0,00000576
18,303	0,0046	0,00002116
18,308	0,0004	0,00000016
18,306	0,0016	0,00000256
18,312	0,0044	0,00001936
18,305	0,0026	0,00000676
18,307	0,0006	0,00000036
18,308	0,0004	0,00000016
18,309	0,0014	0,00000196
18,306	0,0004	0,00000016
18,307	0,0006	0,00000036
18,309	0,0014	0,00000196
18,310	0,0024	0,00000576

Умова за критерієм 1 виконується, а саме $0,6902 < 0,823 < 0,9065$, тому у середині розподіл відповідає нормальному закону.

Для перевірки за критерієм 2 обираємо $\alpha'' = 0,02$ і по табл. 6.4 визначаємо для $n = 19$ ймовірність $P = 0,99$ і $m = 1$. Далі за табл. 5.1 знаходимо значення

$Z_{0,99/2}=2,58$ та обчислюємо середньоквадратичне відхилення результатів вимірювання, мм:

$$S=\sqrt{\frac{0,00010234}{18}}=0,00238.$$

Визначаємо добуток: $2,58\cdot 0,000238=0,00615$ мм. Оскільки жодна різниця $\left|x_i-\overline{x}\right|$ у табл. 6.9 не перевищує значення $0,00615$ мм, то і за критерієм 2 розподіл результатів вимірювання в цілому відповідає нормальному закону за рівнем значимості $\alpha\le\alpha'+\alpha''=0,04$ (4%).

6.3. Задачі для самостійної роботи

Задача 6.3.1. За результатами вимірювання температури x (°C) отримані згруповані дані, які у вигляді статистичного ряду представлені у табл. 6.10. За допомогою критерію узгодження Колмогорова необхідно перевірити чи узгоджується гіпотеза щодо нормальності спостерігаємого розподілу температур за рівня значимості $\alpha=0,3$.

Таблиця 6.10. Вихідні дані до задачі 6.3.1

Показники	Номер варіанту				
	1	2	3	4	5
Інтервал, число n_k	$50\div40$ 13	$62\div52$ 15	$-20\div-10$ 14	$4\div6$ 12	$-20\div-10$ 9
Інтервал, число n_k	$40\div30$ 17	$52\div42$ 39	$-10\div0$ 55	$6\div8$ 25	$-10\div0$ 23
Інтервал, число n_k	$30\div20$ 36	$42\div32$ 90	$0\div10$ 68	$8\div10$ 29	$0\div10$ 39
Інтервал, число n_k	$20\div10$ 25	$32\div22$ 43	$10\div20$ 43	$10\div12$ 19	$10\div20$ 17
Інтервал, число n_k	$10\div0$ 9	$22\div12$ 13	$20\div30$ 13	$12\div14$ 15	$20\div30$ 12

Задача 6.3.2. За результатами вимірювання тиску x (кПа) отримані згруповані дані, що у вигляді статистичного ряду наведені у табл. 6.11. За допомогою критерію узгодження по асиметрії та ексцесу розподілу перевірити на приналежність отриманих даних до нормального закону розподілу.

Задача 6.3.3. В процесі чисельної оцінки невизначеності концентрації Y (% об) отримані згруповані дані, які у вигляді статистичного ряду наведені у табл. 6.12. За допомогою критерію узгодження Пірсона перевірити гіпотезу щодо приналежності отриманих даних до нормального закону розподілу. Побудувати графіки функцій щільності розподілу емпіричної та теоретичної, що відповідає нормальному закону.

Таблиця 6.11. Вихідні дані до задачі 6.3.2.

Показники	Номер варіанту				
	6	7	8	9	10
Інтервал, число n_k	$40 \div 36$ 12	$28 \div 24$ 10	$100 \div 90$ 13	$50 \div 42$ 15	$34 \div 30$ 12
Інтервал, число n_k	$36 \div 32$ 21	$24 \div 20$ 22	$90 \div 80$ 17	$42 \div 34$ 39	$30 \div 26$ 19
Інтервал, число n_k	$32 \div 28$ 33	$20 \div 16$ 37	$80 \div 70$ 36	$34 \div 26$ 90	$26 \div 22$ 36
Інтервал, число n_k	$26 \div 24$ 23	$16 \div 12$ 20	$70 \div 60$ 25	$28 \div 18$ 44	$22 \div 18$ 23
Інтервал, число n_k	$24 \div 20$ 11	$12 \div 8$ 11	$60 \div 50$ 9	$18 \div 10$ 12	$18 \div 14$ 10

Таблиця 6.12. Вихідні дані до задачі 6.3.3.

Показники	Номер варіанту				
	11	12	13	14	15
Інтервал, число n_k	$2 \div 4$ 19	$0 \div 2$ 13	$0 \div 2$ 22	$4 \div 6$ 12	$6 \div 8$ 10
Інтервал, число n_k	$4 \div 6$ 46	$2 \div 4$ 21	$2 \div 4$ 45	$6 \div 8$ 21	$8 \div 10$ 22
Інтервал, число n_k	$6 \div 8$ 74	$4 \div 6$ 30	$4 \div 6$ 62	$8 \div 10$ 33	$10 \div 12$ 37
Інтервал, число n_k	$8 \div 10$ 38	$6 \div 8$ 25	$6 \div 8$ 53	$10 \div 12$ 23	$12 \div 14$ 20
Інтервал, число n_k	$10 \div 12$ 23	$8 \div 10$ 11	$8 \div 10$ 18	$12 \div 14$ 11	$14 \div 16$ 10

Задача 6.3.4. Перевірити гіпотезу щодо нормальності розподілу п'ятнадцяти результатів вимірювання витрати x (м^3/год) з використанням складового критерію узгодження. Результати вимірювань представлені у табл. 6.13. Прийняти рівень значимості $\alpha = 0,06$.

Таблиця 6.13. Вихідні дані до задачі 6.3.4.

Результати вимірювань	Номер варіанту						
	16	17	18	19	20	21	22
x_1	1,9	3,5	3,7	2,6	1,7	2,8	3,6
x_2	0,4	2,1	2,9	1,5	0,2	1,5	6,2
x_3	3,3	2,4	3,6	3,3	3,1	1,7	5,1
x_4	1,5	2,8	6,3	2,5	1,3	2,7	4,4
x_5	0,9	0,5	4,4	0,9	2,4	1,1	3,2
x_6	2,6	2,5	3,2	4,9	0,7	5,1	4,8
x_7	2,4	2,8	5,1	2,2	1,2	2,2	2,1
x_8	1,4	0,5	4,8	3,1	2,5	4,5	3,7
x_9	2,7	2,5	2,1	4,2	2,2	3,3	2,9
x_{10}	1,9	3,5	3,7	2,6	1,7	2,8	3,6
x_{11}	3,3	2,4	3,6	3,3	3,1	1,7	5,1
x_{12}	1,5	2,8	4,4	0,9	2,4	1,1	3,2
x_{13}	0,9	0,5	5,1	2,2	1,2	2,2	4,8
x_{14}	0,4	2,1	3,2	4,2	2,2	3,3	3,7
x_{15}	2,6	2,8	2,1	1,5	1,3	1,5	6,2

РОЗДІЛ 7

ВИЗНАЧЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ПОБІЧНИХ ВИМІРЮВАНЬ ТА ОЦІНЮВАННЯ ЇХ ПОХИБОК

7.1. Загальні відомості

У багатьох випадках фізичні величини неможливо визначити за допомогою прямих вимірювань. Наприклад, густина, в'язкість, прискорення вільного падіння та ін. При цьому в деяких випадках побічні вимірювання дозволяють спростити методику вимірювань, отримати більш точні результати, ніж при прямих вимірюваннях. Наприклад, електричний опір можливо точніше виміряти побічно методом амперметра-вольтметра, ніж безпосередньо за допомогою омметра.

Використовуючи один і той самий принцип вимірювання, а отже і той самий прилад, можливо виконувати вимірювання як безпосередньо, так і побічно у залежності від градуювання шкали приладу. Так, користуючись датчиком на основі термопари, ми вимірюємо термоелектрорушійну силу мілівольтметром, а далі по градуювальній характеристиці визначаємо температуру. Це буде побічне вимірювання. Однак, якщо шкалу мілівольтметра одразу проградуювати в одиницях температури, то саме вимірювання вже буде прямим.

Похибки побічних вимірювань залежать від виду функції, що визначає ту чи іншу величину, та від похибок прямих вимірювань тих величин, які є аргументами цієї функції. У якості аргументів можуть бути і постійні величини, значення яких відомі наближено: $e = 2,718\ldots$; $\pi = 3,1415\ldots$

Похибка функції, аргументи якої відомі з деякою похибкою, оцінюють найчастіше за допомогою диференціалу цієї функції. При цьому, абсолютна похибка функції становить собою отриманий нею приріст, коли аргументам функції надані прирости, що дорівнюють їх похибкам.

Під час розрахунку похибки результату побічного вимірювання враховують граничні абсолютні похибки величин, що входять до формули, і передбачається, що похибки різних аргументів підсилюють один одному (мають однаковий знак). Безумовно, цей розрахунок за таких умов дає завищене значення похибки. Однак, на цей час не існує універсального способу оцінки меж довірчого інтервалу для результату побічних вимірювань.

Нехай побічна величина x становить собою наступну функцію:

$$x = f\left(a, b, c...\right) \tag{7.1}$$

Серед величин $a, b, c...$, що входять у рівняння (7.1), передбачається некорельованість їх поміж собою.

За визначенням, повний диференціал функції – це приріст функції, що викликаний малими приростами аргументів:

$$d_X = \frac{\partial x}{\partial a} da + \frac{\partial x}{\partial b} db + \frac{\partial x}{\partial c} dc + ... \tag{7.2}$$

Оскільки кожний з аргументів функції визначений з деякою похибкою $(\Delta a, \Delta b, \Delta c, ...)$, то кожна з цих похибок має свій визначений вклад у загальну похибку Δx величини x.

Якщо припустити, що значення похибок $\Delta a, \Delta b, \Delta c, ...$значно менше самих значень величин $a, b, c...$ відповідно, то згідно формули (7.2) можна визначити величину похибки Δx наступним чином:

$$\Delta x = \frac{\partial x}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial x}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial x}{\partial c} \Delta c + ... \tag{7.3}$$

Для практичних розрахунків похибки Δx величини x, що вимірюється побічно та виражена функцією (7.1), в передбаченні некорельованості аргументів (статистично незалежні величини) застосовується статистичне підсумовування, тобто середньоквадратичне відхилення випадкової похибки:

$$\Delta x = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial a} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial b} \Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial c} \Delta c\right)^2 + ...}, \tag{7.4}$$

При цьому похибки аргументів визначаються довірчим інтервалом ε за $n < 20$ та прийнятою довірчою ймовірністю P за рівнянням:

$$\varepsilon = tS_a, \tag{7.5}$$

де S_a - оцінка середньоквадратичного відхилення аргументу; t - коефіцієнт Стьюдента, визначаємий по табл. 5.2.

Остаточний результат побічного вимірювання представляється у наступному вигляді:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x;\ P = 0{,}95, \tag{7.6}$$

У цій формі представлення результату довірча ймовірність P має те саме значення, що і для всіх безпосередньо вимірюваних величин, а середнє значення $\bar{x}$ обчислюється за середніми значеннями аргументів:

$$\bar{x} = f\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}...\right) \tag{7.7}$$

Формула (7.4) зручна в обчисленні похибки побічних вимірювань, що визначаються рівнянням, до якої входять сума чи різниця, а також рівнянням, яке містить степенну функцію.

В табл. 7.1 наведені розрахункові формули абсолютних та відносних похибок функцій, що мають найбільше розповсюдження.

Абсолютна похибка у табл. 7.1 отримана за формулою (7.4), а відносна похибка – за формулою:

$$\delta_X = \Delta x / x \tag{7.8}$$

Особливість формули (7.4) у порівнянні з рівнянням (7.3) полягає у наступному. З одного боку, усі доданки в арифметичній сумі (7.3) після піднесення у квадрат у формулі (7.4) підсумовуються з одним знаком і таким чином визначається гранично можлива, наперед завищена, оцінка похибки у передбаченні, що окремі похибки підсилюють одна одну. З іншого боку, внаслідок піднесення у квадрат малих величин у круглих скобках різниця поміж доданками зростає, і деякими з них за їх мале значення під час оцінки похибки можна зневажити. Як правило, зневажають тими доданками у формулі (7.4) до піднесення у квадрат, значення яких у $3 \div 5$ разів менше інших.

Таблиця 7.1. Основні формули визначення похибок функції x декількох змінних при побічних вимірюваннях.

Функції	Абсолютна похибка	Відносна похибка
1	2	3
$x=a+b+c$	$\Delta x=\sqrt{\Delta a^2+\Delta b^2+\Delta c^2}$	$\delta_X=\frac{\sqrt{\Delta a^2+\Delta b^2+\Delta c^2}}{a+b+c}$
$x=a-b$	$\Delta x=\sqrt{\Delta a^2+\Delta b^2}$	$\delta_X=\frac{\sqrt{\Delta a^2+\Delta b^2}}{a-b}$
$x=\sin a$	$\Delta x=\cos a\cdot\Delta a$	$\delta_X=ctga\cdot\Delta a$
$x=\cos a$	$\Delta x=\sin a\cdot\Delta a$	$\delta_X=tga\cdot\Delta a$
$x=\frac{a}{a-b}$	$\Delta x=\frac{\sqrt{b^2\Delta a^2+a^2\Delta b^2}}{(a-b)^2}$	$\delta_X=\frac{\sqrt{b^2\Delta a^2+a^2\Delta b^2}}{\alpha(a-b)}$
$x=a\cdot b$	$\Delta x=\sqrt{b^2\Delta a^2+a^2\Delta b^2}$	$\delta_X=\sqrt{\frac{b^2\Delta a^2+a^2\Delta b^2}{ab}}$
$x=\ln a$	$\Delta x=\frac{\Delta a}{a}$	$\partial_X=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{\Delta a}{a}$
$x=\frac{a}{b}$	$\Delta x=\sqrt{\left(\frac{\Delta a}{b}\right)^2+\left(\frac{\alpha}{b^2}\Delta b\right)^2}$	$\delta_X=\sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2+\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2}$
$x=a^m b^n$	$\Delta x=m^2b^{2n}a^{2(m-1)}\Delta a^2+$ $+n^2a^{2m}b^{2(n-1)}\Delta b^2$	$\delta_X=\sqrt{\left(m\frac{\Delta a}{a}\right)^2+\left(n\frac{\Delta b}{b}\right)^2}$
$x=\frac{a}{a+b}$	$\Delta x=\frac{\sqrt{b^2\Delta a^2+a^2\Delta b^2}}{(a+b)^2}$	$\delta_X=\frac{\sqrt{b^2\Delta a^2+a^2\Delta b^2}}{a(a+b)}$

У випадку, коли похибка приладу задана його класом точності, то оцінка точності побічного вимірювання визначається за похибками складових прямих вимірювань.

7.2. Приклади розв'язання задач

Задача 7.2.1. Необхідно визначити густину ρ твердого тіла за формулою $\rho = m/V$. За результатами багатократних прямих вимірювань маси m_i та об'єму V_i твердого тіла отримані наступні значення, що зведені до табл. 7.2.

Таблиця 7.2. Результати прямих вимірювань

Маса тіла $m_i \cdot 10^3$, кг	Різниці $\left(m_i - \overline{m}\right) \cdot 10^7$ кг	Квадрат різниці $\left(m_i - \overline{m}\right)^2 \cdot 10^{14}$ кг	Об'єм тіла, $V_i \cdot 10^6$, м^3	Різниці $\left(V_i - \overline{V}\right) \cdot 10^{10}$, м^3	Квадрат різниці $\left(V_i - \overline{V}\right)^2 \cdot 10^{20}$ м^3
252,9119	1	1	195,3799	1	1
252,9133	13	169	195,3830	32	1024
252,9151	31	961	195,3790	8	64
252,9130	10	100	195,3819	21	441
252,9109	11	121	195,3795	3	9
252,9094	26	676	195,3788	10	100
252,9113	7	49	195,3792	6	36
252,9115	5	25	195,3794	4	16
252,9119	1	1	195,3794	4	16
252,9115	5	25	195,3791	7	49
252,9118	2	4	195,3791	7	49

Рішення.

Оцінки математичних очікувань маси $\overline{m}$, кг, та об'єму $\overline{V}$, м^3, будуть дорівнювати:

$$\overline{m} = \frac{1}{11}\left(252,9119 + 252,9133 + .. + 252,9118\right)\cdot 10^{-3} = 252,9120\cdot 10^{-3};$$

$$\overline{V} = \frac{1}{11}\left(195,3799 + 195,3830 + .. + 195,3791\right)\cdot 10^{-6} = 195,3798\cdot 10^{-6}\ .$$

Оцінки середньоквадратичних відхилень S_m , кг, і S_V , м^3, ,приймуть наступні значення:

$$S_m = \sqrt{\frac{1}{10\cdot 11}\left(1 + 169 + .. + 4\right)\cdot 10^{-14}} = 4,024\cdot 10^{-7};$$

$$S_V = \sqrt{\frac{1}{10\cdot 11}\left(1 + 1024 + .. + 49\right)\cdot 10^{-20}} = 4,0497\cdot 10^{-10}\ .$$

Параметр розподілу Стьюдента для $n = 11$ та довірчої ймовірності $P = 0,95$ згідно табл. 5.2 складе $t = 2,2$, а довірчі інтервали ε_m, кг, і ε_V , м^3, відповідно для маси та об’єму приймуть наступні значення:

$$\varepsilon_m = 2,2\cdot 4,4024\cdot 10^{-7} = 9,7\cdot 10^{-7};$$

$$\varepsilon_V = 2,2\cdot 4,0497\cdot 10^{-10} = 8,9\cdot 10^{-10}.$$

Таким чином безпосередніми вимірюваннями з багатократними спостереженнями величин m, кг, і V , м^3, з урахуванням округлення отримані такі результати:

$$m = \left(252,912 \pm 0,001\right)10^{-3},\ P = 0,95;$$

$$V = \left(195,380 \pm 0,001\right)10^{-6}\ ,\ P = 0,95.$$

У відповідності з формулою для густини твердого тіла середній результат вимірювання дорівнює, кг/ м^3:

$$\overline{\rho} = \overline{m} / \overline{V} = 252,912 \cdot 10^{-3} / 195,380 \cdot 10^{-6} = 1,294 \cdot 10^{3}.$$

Оцінка середньоквадратичного відхилення результату обчислюється наступним чином згідно формули, наведеній у табл. 7.1, кг/ м^3:

$$\Delta\rho = \sqrt{\left(\frac{0,001 \cdot 10^{-3}}{195,380 \cdot 10^{-6}}\right)^2 + \frac{\left(252,912 \cdot 10^{-3} \cdot 0,001 \cdot 10^{-6}\right)^2}{\left(195,380 \cdot 10^{-6}\right)^4}} = 0,008.$$

Результат вимірювання густини твердого тіла можна представити у вигляді, кг/ м^3:

$$\rho = \left(1294 \pm 8\right)10^{-3};\ P = 0,95.$$

Задача 7.2.2. Визначити відносну похибку вимірювання моменту інерції J кулі масою m і діаметром d, що підвішена на нитці довжиною l. При цьому, момент інерції кулі відносно горизонтальної осі, що проходить через точку підвісу визначається формулою:

$$J = 0,1md^2 + m\left(l + 0,5d\right)^2.$$

Безпосередніми вимірюваннями з багатократними спостереженнями величин m, г, d, мм, і l, мм, отримані наступні результати:

$$m = \left(227 \pm 3\right),\ P = 0,95;$$

$$d = \left(38,2 \pm 0,6\right),\ P = 0,95;$$

$$l = \left(125 \pm 2\right),\ P = 0,95.$$

Рішення.

Момент інерції, отриманий за середнім значенням величин буде дорівнювати, кг$\cdot$м^2:

$$\overline{J} = 0,1\cdot 0,227\left(38,2\cdot 10^{-3}\right)^2 + 0,227\left[\left(125 + 0,5\cdot 38,2\right)\cdot 10^{-3}\right]^2 = 4,747\cdot 10^{-3}$$

Обчислюються окремі доданки рівняння для середнього квадратичного відхилення моменту інерції ΔJ, кг$\cdot$м^2.

$$\frac{\partial J}{\partial m}\Delta m = \left[0,1d^2 + \left(l + 0,5d\right)^2\right]\Delta m;$$

$$\frac{\partial J}{\partial m}\Delta m = \left[0,1\left(38,2\cdot 10^{-3}\right)^2 + \left(125\cdot 10^{-3} + 0,5\cdot 38,2\cdot 10^{-3}\right)^2\right]\cdot 0,003 = 0,063\cdot 10^{-3};$$

$$\frac{\partial J}{\partial d}\Delta d = \left[0,1m\cdot 2d + m\cdot 2\left(l + 0,5d\right)\cdot 0,5\right]\Delta d = \left[m\left(0,7d + l\right)\right]\Delta d;$$

$$\frac{\partial J}{\partial d}\Delta d = 0,227\left(0,7\cdot 38,2\cdot 10^{-3} + 0,125\cdot 10^{-3}\right)\cdot 0,6\cdot 10^{-3} = 0,021\cdot 10^{-3};$$

$$\frac{\partial J}{\partial l}\Delta l = \left[2m\left(l + 0,5d\right)\right]\Delta l;$$

$$\frac{\partial J}{\partial l}\Delta l = 2\cdot 0,227\left(0,125\cdot 10^{-3} + 0,5\cdot 38,2\cdot 10^{-3}\right)\cdot 2\cdot 10^{-3} = 0,131\cdot 10^{-3}.$$

Абсолютна похибка моменту інерції прийме наступне значення, кг$\cdot$м^2:

$$\Delta J = \sqrt{\left(0,063\cdot 10^{-3}\right)^2 + \left(0,021\cdot 10^{-3}\right)^2 + \left(0,131\cdot 10^{-3}\right)^2} = 0,146\cdot 10^{-3}.$$

Результат вимірювання моменту інерції кулі буде дорівнювати, кг$\cdot$м^2:

$$J = \left(4,75 \pm 0,15\right)\cdot 10^{-3},\ P = 0,95.$$

Відносна похибка вимірювання δ складе, %:

$$\delta = \left(0,146\cdot 10^{-3} / 4,75\cdot 10^{-3}\right)100 = 3,07.$$

7.3. Задачі для самостійної роботи

Задача 7.3.1. Визначити відносну похибку вимірювання об'єму кулі V, який встановлюється за рівнянням: $V = \pi d^3 / 6$, де d - діаметр кулі. За результатами багатократних прямих вимірювань діаметру кулі отримані наступні значення, що зведені до табл. 7.3.

Таблиця 7.3. Результати прямих вимірювань діаметру гвинтовим мікрометром до задачі 7.3.1

Результати вимірювань, мм	Номер варіанту								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
d_1	12,05	16,08	24,10	18,11	32,02	42,03	22,07	65,05	10,81
d_2	12,08	16,12	24,22	18,06	32,11	42,05	22,11	65,04	10,86
d_3	12,10	16,14	24,26	18,05	32,08	42,01	22,15	65,08	10,85
d_4	12,11	16,10	24,25	18,08	32,04	42,08	22,14	65,11	10,77
d_5	12,02	16,07	24,27	18,11	32,06	42,10	22,09	65,09	10,79
d_6	12,03	16,15	24,24	18,10	32,12	4,06	22,12	65,12	10,82
d_7	12,07	16,09	24,21	18,07	32,10	42,07	22,10	65,13	10,76
d_8	12,12	16,11	24,20	18,09	32,05	42,11	22,08	65,06	10,80

Задача 7.3.2. Визначити відносну похибку вимірювання об'єму V прямокутної пластини товщиною c, довжиною a та шириною b, який визначається рівнянням: $V = a \cdot b \cdot c$. За результатами багатократних вимірювань отримані з довірчою ймовірністю $P = 0{,}95$ наступні значення, що зведені до табл. 7.4. При цьому, систематичною похибкою, що має бути пов'язана з викривленням форми, можна зневажити.

Задача 7.3.3. За результатами вимірювання електричного опору методом амперметра-вольтметра отримані наступні значення: сила струму I, а напруга

U . Межа вимірювання вольтметра $D_в$, а амперметра D_a . Клас точності вольтметра $K_в$, а амперметра K_a . Необхідно визначити електричний опір , абсолютну та відносну похибку його вимірювання. Вихідні дані представлені у табл. 7.5.

Таблиця 7.4. Вихідні дані до задачі 7.3.2

Результати вимірювань, см	Номер варіанту				
	10	11	12	13	14
$(a \pm \Delta a)$ $(b \pm \Delta b)$ $(c \pm \Delta c)$	$5,45 \pm 0,03$ $5,45 \pm 0,03$ $2,24 \pm 0,03$	$18,24 \pm 0,04$ $20,45 \pm 0,04$ $8,21 \pm 0,03$	$15,85 \pm 0,03$ $21,44 \pm 0,05$ $10,12 \pm 0,03$	$42,34 \pm 0,05$ $26,21 \pm 0,04$ $10,15 \pm 0,03$	$54,05 \pm 0,05$ $60,28 \pm 0,05$ $15,05 \pm 0,03$
Результати вимірювань, см	Номер варіанту				
	15	16	17	18	19
$(a \pm \Delta a)$ $(b \pm \Delta b)$ $(c \pm \Delta c)$	$15,12 \pm 0,04$ $18,24 \pm 0,05$ $5,44 \pm 0,03$	$10,22 \pm 0,03$ $15,18 \pm 0,04$ $4,20 \pm 0,03$	$21,05 \pm 0,03$ $26,12 \pm 0,04$ $6,44 \pm 0,03$	$35,15 \pm 0,04$ $40,32 \pm 0,04$ $10,24 \pm 0,03$	$40,26 \pm 0,05$ $48,08 \pm 0,05$ $12,24 \pm 0,03$

Таблиця 7.5. Вихідні дані до задачі 7.3.3

Позначення показника	Номер варіанту					
	20	21	22	23	24	25
I, мА	17,2	100	10	35,4	28,6	58,5
U, мВ	440	10000	300	250	545	750
$D_в$, В	$0 \div 1,5$	$1 \div 1,5$	$0 \div 20$	$0 \div 5$	$0 \div 4$	$0 \div 1,5$
D_a, мА	$0 \div 75$	$0 \div 150$	$4 \div 20$	$1 \div 100$	$10 \div 100$	$0 \div 100$
$K_в$, %	1	1	0,5	1,5	2,5	1
K_a, %	1	1,5	1	0,25	0,5	2

Задача 7.3.4. Під час градуювання витратоміра у кінцевій позначці шкали об'ємним методом були отримані результати вимірювання часу наповнення баку t. Необхідно оцінити значення витрати та визначити абсолютну похибку цієї оцінки, якщо систематична похибка вимірювання часу відсутня. Результат вимірювання об'єму баку складає: $(V \pm \Delta V)$, $P = 0{,}95$. Вихідні дані до задачі зведені до табл. 7.6. При цьому, об'ємна витрата розраховується за рівнянням: $Q = V / t$.

Таблиця 7.6. Вихідні дані до задачі 7.3.4

Позначення показника	Номер варіанту					
	26	27	28	29	30	31
t_1, с	97,5	45,3	115,0	38,2	65,6	57,5
t_2,с	94,8	46,8	114,5	39,5	64,8	55,8
t_3, с	94,7	47,4	114,8	38,6	65,9	64,7
t_4, с	95,2	49,9	113,7	39,1	66,4	55,2
t_5, с	94,9	50,2	115,5	37,9	64,2	54,9
t_6, с	95,3	47,8	114,4	38,9	65,1	55,3
t_7, с	91,1	45,5	115,2	39,4	63,9	52,2
t_8, с	95,2	48,8	114,5	38,3	66,8	55,1
t_9, с	95,3	50,0	15,4	37,7	64,9	55,4
$(V \pm \Delta V)$, л	$507 \pm 0{,}10$	$480 \pm 0{,}21$	$385 \pm 0{,}15$	$510 \pm 0{,}10$	$455 \pm 0{,}12$	$545 \pm 0{,}1$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Промислові засоби автоматизації. Ч. 1. Вимірювальні пристрої : навч. посіб. / А. К. Бабіченко [та ін.] ; за ред. А. К. Бабіченка. – Харків : НТУ «ХПІ», 2001. – 470 с.

2. Основи вимірювань і автоматизації технологічних процесів : підруч. для студентів вищ. навч. закл. / А. К. Бабіченко [та ін.] ; за ред. А. К. Бабіченка. – Харків : С. А. М., 2009. – 616 с.

3. Пустыльник, Е. И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений / Е. И. Пустыльник. – Москва : Наука, 1968. – 288 с.

4. Маркин, Н. С. Метрология. Введение в специальность / Н. С. Маркин, В. С. Ершов. – Москва : Изд-во стандартов, 1991. – 208 с.

5. Горлач, В. В. Обработка, представление, интерпретация результатов измерений : учеб. пособие / В. В. Горлач, В. Л. Егоров, Н. А. Иванов ; под. ред. В. В. Горлача. – Омск : Изд-во Сиб. АДИ, 2006. – 83 с.

6. Кассандрова, О. Н. Обработка результатов наблюдений / О. Н. Кассандрова, В. В. Лебедев. – Москва : Наука, 1970. – 109 с.

7. Кузнецов, Н. Д. Сборник задач и вопросов по теплотехническим измерениям и приборам: учеб. пособие / Н. Д. Кузнецов, В. С. Чистяков. – Москва : Энергия, 1985. – 328 с.

8. Артемьев, Б. Г. Справочное пособие для работников метрологических служб. / Б. Г. Артемьев, С. М. Голубев. – 3-е изд. – Москва : Изд-во стандартов, 1990. – Кн. 1. – 428 с.

9. Промислові засоби автоматизації. Ч. 2. Регулювальні і виконавчі пристрої : навч. посіб. / А. К. Бабіченко [та ін.] ; за ред. А. К. Бабіченка. – Харків : НТУ «ХПІ», 2003. – 658 с.

10. Практикум з метрології, основ вимірювань та технічних засобів автоматизації : навч. посіб. / А. К. Бабіченко [та ін.] ; за ред. А. К. Бабіченка. – Харків : НТУ «ХПІ», НФаУ, 2019. – 132 с.

ЗМІСТ

Навчальний посібник

БАБІЧЕНКО Анатолій Костянтинович
КРАСНІКОВ Ігор Леонідович
ВЕЛЬМА Володимир Іванович
ЛИСАЧЕНКО Ігор Григорович
БАБІЧЕНКО Юлія Анатоліївна
ДЕМЕНКОВА Світлана Дмитрівна

ЗБІРНИК ЗАДАЧ
З МЕТРОЛОГІЇ ТА ОСНОВ ВИМІРЮВАНЬ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

За редакцією А. К.Бабіченка

Редактор – Гобельовська Л. П.
Верстка – Вус К. О.

Підписано до друку 24.02.2021. Формат 60×84 1/16.
Папір офсетний. Друк цифровий. Гарнітура Times New Roman.
Ум. друк. арк.5,4. Наклад 80 прим. Зам. № 165.

Матеріали надано: Національним фармацевтичним університетом.
вул. Пушкінська, 53, м. Харків, 61002
Свідоцтво серії ДК № 3420 від 11.03.2009 р.

Видавець та виготовлювач ТОВ «Друкарня Мадрид»
Через ФОП Гобельовська Л.П.
61024, м. Харків, вул.. Максиміліанівська, 11. Тел.: 0800-33-67-62
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи: Серія ДК № 4399 від 27.08.12 р.
www.madrid.in.ua info@madrid.in.ua