

В.М. ВАРТАНЯН, д-р. техн. наук,
Ю.А. РОМАНЕНКОВ, канд. техн. наук, **А.В. КОНОНЕНКО**

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ПРОГНОЗНОЙ МОДЕЛИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО СГЛАЖИВАНИЯ

Розглянуто питання практичного застосування методу експоненціального згладжування при прогнозуванні процесів, що складно піддається факторному аналізу. Запропоновано підходи до обґрунтованого визначення константи згладжування.

Рассмотрим одну из задач прогноза, состоящую в установлении количественных оценок тенденций развития исследуемого процесса путем анализа временных серий и проецирования их вперед на период интервала получения статистических данных.

Одним из методов получения необходимого решения является экспоненциальное сглаживание, базовая формула которого имеет вид

$$F_t = \alpha A_{t-1} + \sum_{i=1}^{t-2} \alpha(1-\alpha)^i A_{t-(i+1)}, \quad (1)$$

где F_t – прогноз, α – вес или константа сглаживания ($0 < \alpha < 1$), $A_{t-(i+1)}$ – текущие значения параметра в прошлых периодах.

Зависимость (1) может быть представлена в следующей форме:

$$F_t = \alpha A_{t-1} + \alpha(1-\alpha)A_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^2 A_{t-3} + \alpha(1-\alpha)^3 A_{t-4} + \dots + \alpha(1-\alpha)^n A_{t-n}. \quad (2)$$

Постановка проблемы. Особенности применения метода состоит в обоснованном выборе константы сглаживания α , которая существенно влияет на результат прогноза. Так, если α близка к единице, то это приводит к учету в прогнозе в основном влияния лишь последних наблюдений; если α близка к нулю, то веса, по которым взвешиваются значения во временном ряду, убывают медленно, т.е. при прогнозе учитываются все (или почти все) наблюдения.

Анализ литературы. Точность модели прогнозирования может быть определена сравнением прогнозного значения с текущим, или наблюдаемым, значением. Ошибка прогноза определяется разностью между прогнозом и действительным значением параметра.

Значения ошибок прогноза ε_{cao} для модели (1) оцениваются средним абсолютным отклонением (CAO). Оно рассчитывается суммированием абсолютных значение индивидуальных ошибок прогноза и делением на число периодов данных n :

$$\varepsilon_{cao} = \frac{\sum_{i=1}^n |Ошибка прогноза|}{n}. \quad (3)$$

Предпочтительным будет являться такое значение константы сглаживания α , при котором ε_{cao} будет наименьшим [1].

Наряду со средним абсолютным отклонением, в прогнозировании также используется другой измеритель ошибок – среднеквадратическое отклонение $\varepsilon_{ско}$. Среднеквадратическое отклонение (СКО) – это среднее от квадрата разности между прогнозными и наблюдаемыми значениями.

Цель статьи. Проблема обоснованного выбора константы сглаживания α может рассматриваться, исходя из различных гипотез, которые характеризуют свойства и особенности конкретных временных рядов. Анализ возможных подходов к выбору константы сглаживания, а также выявление границ применимости и адекватности самого метода прогнозирования является целью данной статьи.

Процесс выбора константы сглаживания по значениям САО и СКО, связан с анализом сложной полиномиальной зависимости между используемыми оценками ошибок прогнозирования и величиной константы сглаживания и может быть сведен к графоаналитическому решению задачи.

Предлагаемая процедура определения константы сглаживания, в отличие от методик, рассмотренных в работах [2, 3], позволяет учесть влияние ошибки первоначального прогноза и предусматривает следующую последовательность действий:

1. Определение кругового прогноза исследуемого параметра на всех рассматриваемых периодах временных серий в аналитической форме с использованием системы символьных вычислений как некоторого полинома

$$F_t(\alpha, \Delta) = \alpha A_{t-1} + \sum_{i=1}^{t-2} \alpha(1-\alpha)^i A_{t-(i+1)}, \quad (4)$$

где t – количество рассматриваемых периодов, Δ – ошибка первоначального прогноза.

2. Расчет абсолютных отклонений прогнозируемой функции для каждого периода как разницы между круговым прогнозом и текущим значением рассматриваемого параметра.

3. Расчет аналитических (символьных) зависимостей $\varepsilon_{cao}(\alpha, \Delta)$, $\varepsilon_{ско}(\alpha, \Delta)$ и построение графиков этих функций для области определения константы сглаживания $\{0 < \alpha < 1\}$.

4. Установление значения константы сглаживания α_m , доставляющего минимум соответствующим функциям ошибок.

$$\min\{\varepsilon_{cao}(\alpha)\} = \varepsilon_{cao}(\alpha_m^*), \quad \min\{\varepsilon_{cko}(\alpha)\} = \varepsilon_{cko}(\alpha_m^{**}). \quad (5)$$

Для иллюстрации метода выбора константы сглаживания α воспользуемся данными торгового предприятия «Молочные продукты» за 2004 г. по продукту «Десерт творожный Ромол 200 г. 7.5% Танюша пл/ст», представленными в таблице.

Чтобы проверить, насколько точно полученный прогноз соответствует реальной ситуации, необходимо сравнить полученные результаты с данными, полученными при нахождении минимума функциональных зависимостей САО и СКО от константы сглаживания α и ошибки первоначального прогноза Δ .

Для определения прогнозного значения объема продаж товара в январе 2005г. воспользуемся инструментальными средствами MS Excel. Для этого вначале определяем тренд, наилучшим образом аппроксимирующий фактические данные.

Таблица 1

Динамика изменения объема продаж товара «Десерт творожный Ромол 200г 7.5% Танюша пл/ст» торгового предприятия «Молочные продукты» за 2004г.

Период	Обозначение	Количество продаж	Объем продаж (грн)	Относительное количество продаж
Январь	F_1	535	1121,25	1
Февраль	F_2	576	1236,92	1,077
Март	F_3	582	1278,14	1,088
Апрель	F_4	664	1453,79	1,241
Май	F_5	749	1638,88	1,4
Июнь	F_6	835	1824,81	1,56
Июль	F_7	870	1897,33	1,626
Август	F_8	1073	2339,04	2
Сентябрь	F_9	1097	2490,68	2,05
Октябрь	F_{10}	1116	2734,69	2,086
Ноябрь	F_{11}	1244	3049,62	2,325
Декабрь	F_{12}	1073	2807,08	2,006
Январь 2005г.	F_{13}	1045	2775,2	1,953

Для расчета тренда используем опцию «Линия тренда» MS Excel. При этом воспользуемся полиномиальным трендом, имеющим гораздо более высокий коэффициент детерминации, чем линейный тренд, что позволит сократить ошибку прогнозной модели. При помощи аппроксимирующей (сглаженной) кривой получим прогноз на следующий период (рис. 1). Согласно этому прогнозу объем продаж в январе 2005г. составит 912.

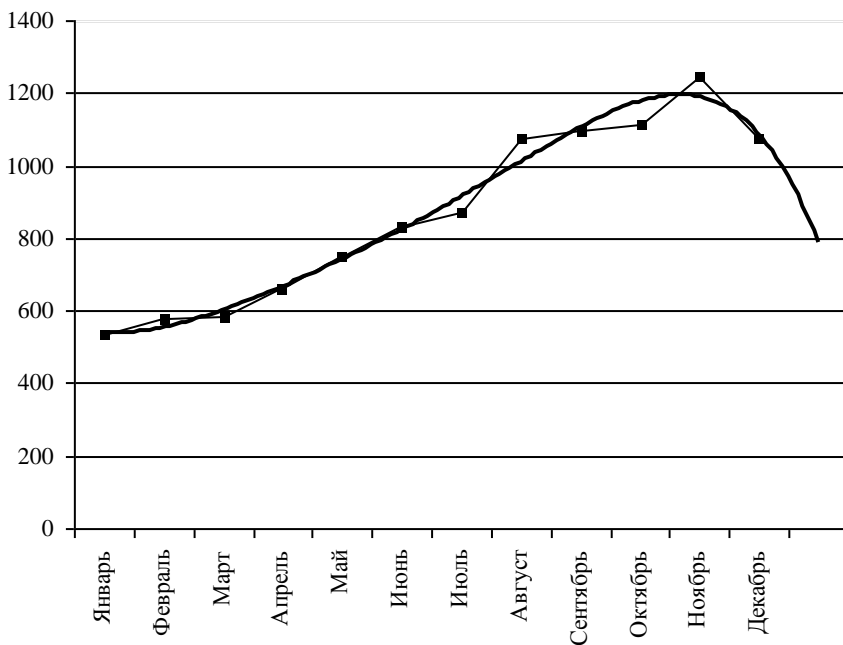


Рис. 1. Динамика изменения объема продаж товара

Проанализировав графики зависимостей САО и СКО от константы сглаживания α и от ошибки первоначального прогноза Δ , можно сделать вывод, что данные модели хорошо аппроксимируют фактические данные и их использование обеспечивает составление прогнозов с высокой степенью достоверности.

С учетом того, что моделируемая функция в рассматриваемом примере известна, то вычисленная ошибка прогноза составляет $\Delta=7.85\%$, что является вполне удовлетворительным, с точки зрения прогноза продаж.

Прогнозные значения объема продаж товара в январе 2005г. предлагается определять методом экспоненциального сглаживания.

Функция зависимости прогнозного значения от константы сглаживания α и от ошибки первоначального прогноза Δ представлена на рис.2.

Построим графики зависимостей оценок ошибок прогнозирования $\varepsilon_{сао}(\alpha, \Delta)$, и $\varepsilon_{ско}(\alpha, \Delta)$ от константы сглаживания α и от ошибки первоначального прогноза Δ .

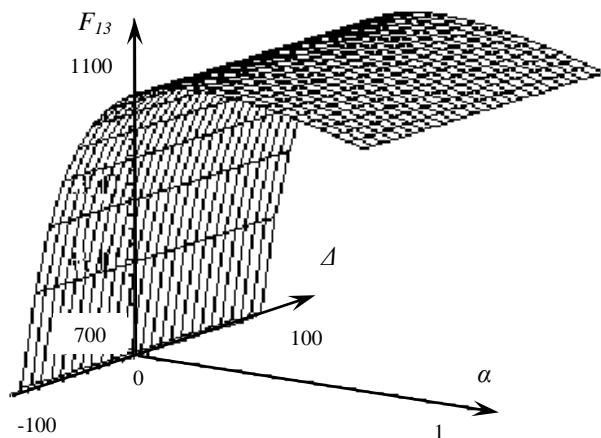


Рис. 2. Функция зависимости прогнозного значения от константы сглаживания и от первоначальной ошибки прогноза

Как видно из рис. 3, функция $\varepsilon_{cao}(\alpha)$, достигает своего наименьшего значения при $\alpha = 0,915$. Составим прогноз на январь 2005г. и сравним его с фактическими данными продаж. При данном значении α прогноз будет равняться 1086, а ошибка прогноза составит 3,98%.

В то же время, функция $\varepsilon_{cko}(\alpha)$ достигает своего минимума при $\alpha = 0,977$. При данном значении α прогноз будет равняться 1076, а ошибка прогноза составит 3,049 %. Сравним полученные данные с результатами, полученными при составлении прогноза на следующий период путем использования аппроксимирующей (сглаженной) кривой в тренде, получаемом в результате применения опции «Линия тренда» в MS Excel.

Представим полученные результаты в виде таблицы 2.

Таблица 2

Сравнительная таблица ошибок прогнозирования для различных методов

Метод прогнозирования	$\min \varepsilon_{cao}(\alpha)$	$\min \varepsilon_{cko}(\alpha)$	Тренд MS Excel
α	$\alpha_m^* = 0,977$	$\alpha_m^{**} = 0,915$	–
Прогноз F_{13}	1076	1086	912
Абсолютная ошибка прогноза	31	41	133
Относительная ошибка прогноза (%)	3,05	3,98	7,86

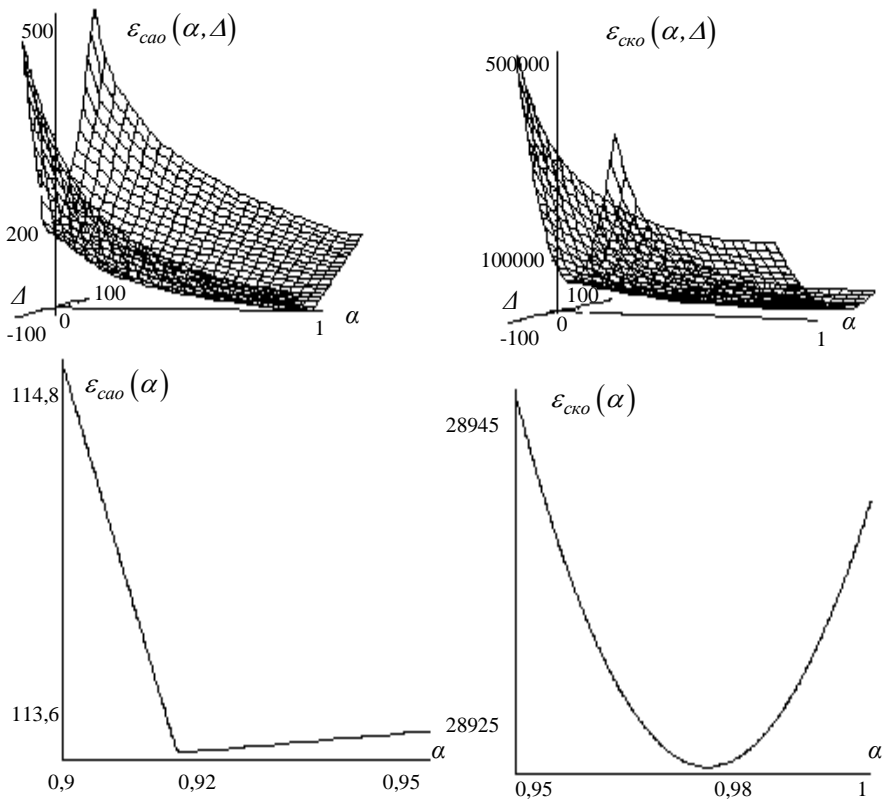


Рис. 3. Графики зависимостей ошибок прогнозирования $\varepsilon_{cao}(\alpha)$, и $\varepsilon_{cko}(\alpha)$ от константы сглаживания α и от ошибки первоначального прогноза Δ

Альтернативно выбор α_t для текущего прогноза предлагается осуществлять методом экстраполяции значений α , вычисленных для предыдущих временных периодов, путем решения обратной задачи.

Особенностью предлагаемого подхода по сравнению с [2] является включение в прогнозную модель ошибки прогноза $-\Delta F_t$ и поиск ее минимальной величины для случаев, когда решение обратной задачи не дает в спектре решений степенного уравнения (2) значений α , удовлетворяющих допустимой области.

Определение α_t и ΔF_t может быть осуществлено как в аналитическом виде, путем решения уравнения $F_{t-i}(\alpha_t) = A_{t-i}(\alpha_t)$, так и

графоаналитическим способом по месту пересечения зависимости $F_{t-i}(\alpha)$, и $A_{t-i}(\alpha)$ на интервале $[0, 1]$, рис. 4. При отсутствии такого пересечения определяется минимальная ошибка прогноза $\min \Delta F_t$ из уравнения

$$\min \Delta F_t = F_{t-i}(\alpha_t) - \max_{0 < \alpha < 1} A_{t-i}(\alpha).$$

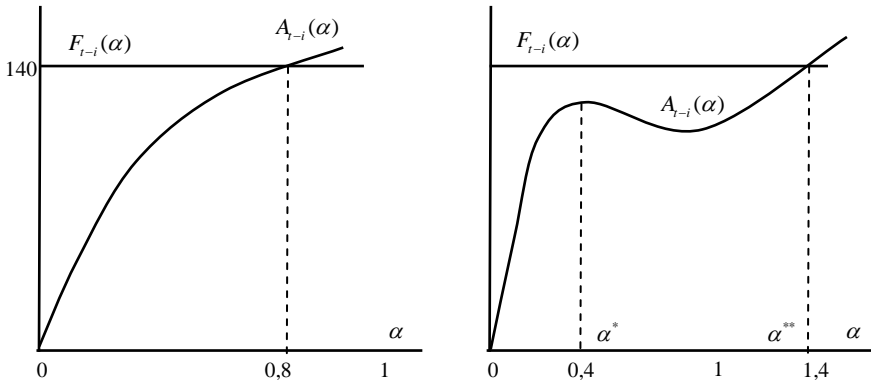


Рис. 4. Графоаналитический метод определения константы сглаживания

Определив значения α_i для всех прошлых значений временного ряда, можно путем аппроксимации определить значение α для прогноза на следующий период времени (рис. 5).

Выводы. Величина ошибки прогноза $\min \Delta F_t$ может служить мерой адекватности (возможной погрешности) применения метода экспоненциального сглаживания для конкретного временного ряда прогнозируемого процесса.

Вместе с тем, может быть рассмотрен вопрос о целесообразности выбора константы сглаживания из более широкого диапазона (рис. 4) для обеспечения более точного прогноза для определенных процессов.

Предложенная процедура реализована инструментальными средствами интегрированного математического пакета MAPLE, обеспечивающего все аналитические вычисления и необходимые средства визуализации.

Все необходимые, согласно рассматриваемой процедуре, аналитические вычисления и графические построения выполнены с использованием инструментальных средств интегрированного математического пакета MAPLE.

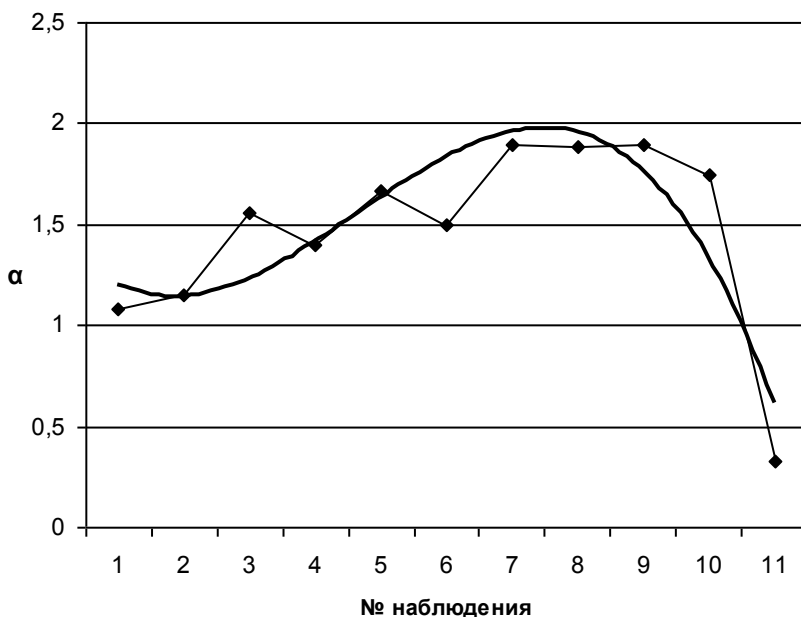


Рис. 5. Аппроксимация значений константы сглаживания, полученных путем решения обратной задачи прогнозирования

Заключение. Проведенные расчеты позволяют сделать вывод о работоспособности предложенной процедуры определения константы сглаживания.

Величины полученных прогнозных ошибок позволяют говорить о том, что построенные модели хорошо аппроксимируют фактические данные, т.е. вполне адекватно отражают экономические тенденции, определяющие объем продаж, и является предпосылкой для построения прогнозов с высокой достоверностью.

Список литературы: 1. *Четыркин Е.М.* Статистические методы прогнозирования. 2-е изд., перераб. и доп. // М.: Статистика, 1997. 2. *Вартамян В.М., Федоренко Н.М.* Графоаналитический метод выбора константы сглаживания в моделях временных серий. // Науковий вісник Чернівецького торгово-економічного інституту КНТЕУ.: Матеріали XIII міжнар. наук. – практ. конф. (9-10 квітня 2002 року, Чернівці): - Чернівці: - 2002. – Вип. II. Економічні науки. – Ч. II. – С. 202-206. 3. *Вартамян В.М., Кононенко А.В.* Метод определения константы сглаживания в прогнозной модели продаж. // Вестник НТУ „ХПИ”. Сб. научн. тр. „Системний аналіз, управління и інформаційні технології” – Х.: НТУ „ХПИ”. – 2005.- № 41. С. 67-70. 3.

Поступила в редколлегию 15.11.05