

$$c_2 = \frac{[(\omega_{02}^2 + \omega_{01}^2)m_1 - c_1]m_2}{m_1 + m_2},$$

или из (10)

$$c_2 = \frac{m_1 m_2 \omega_{01}^2 \omega_{02}^2}{c_1}.$$

Таким образом, без использования системы обратных связей, управляющих совместно с задающим генератором вибровозбудителем, только простым изменением величин массы КС получены их параметры. Данный метод является теоретико-экспериментальным. Он апробирован в реальных условиях и подтвержден.

Список литературы: 1. Божко А.Е., Голуб Н.М. Динамико-энергетические связи колебательных систем. – Киев: Наукова думка, 1980. – 188 с. 2. Божко А.Е., Иванова З.А., Личкатый Е.А. Резонансный метод идентификации параметров колебательной системы с двумя степенями свободы // Проблемы машиностроения, 2000. – Т. 3. – № 3-4. – С. 56-61.

Поступила в редколлегию 8.07.2009

УДК 539.3

Р.Е.КОЧУРОВ, асп., НТУ «ХПИ»;

К.В.АВРАМОВ, докт.техн.наук, проф., НТУ «ХПИ»

НЕЛИНЕЙНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ И БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ ПРИ ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

Нелінійні параметричні коливання циліндричних оболонок описуються рівняннями Доннелла-Муштарі-Власова. Рухи представляються у вигляді багатомодового розкладання по формах коливань. Дискретизація проводиться методом Бубнова-Гальоркіна. За допомогою методу гармонійного балансу досліджуються хвилі, які біжать, і нелінійні нормальні форми в системі з дисипацією та без її.

Donnell's equations are used to analyze cylindrical shell nonlinear parametrical vibrations. The motions are presented as multi-mode expansion. To obtain a finite-degree-of-freedom model of shell motions the Bubnov-Galerkin method is applied. Nonlinear modes and traveling waves of shells are treated using harmonic balance method; the effect of structural damping is taken into account.

Введение. Большое число исследований посвящено анализу нелинейных колебаний тонкостенных цилиндрических оболочек. В работах [3, 4] рассмат-

риваются модели нелинейных колебаний цилиндрических оболочек с тремя и четырьмя степенями свободы, которые описывают свободные, вынужденные и параметрические колебания. Взаимодействие двух пар сопряженных форм колебаний цилиндрических оболочек рассмотрено в [9]. Подробный обзор работ по динамике оболочек содержится в статье [8].

Анализ линейных колебаний цилиндрических оболочек показывает, что спектр собственных частот может быть весьма плотным. В этом случае только многомерными моделями, которые описывают взаимодействие между модами с плотным спектром, можно описать нелинейную динамику цилиндрических оболочек. В данной работе для анализа параметрических колебаний цилиндрических оболочек при их геометрически нелинейном деформировании учитываются три пары сопряженных форм колебаний имеющих близкие частоты линейных колебаний. В статье подробно исследованы два вида движений: нелинейные моды и бегущие волны.

Постановка задачи и уравнения колебаний. Рассмотрим шарнирно опертую цилиндрическую оболочку без начальных неправильностей, сжатую вдоль образующей распределенной периодической нагрузкой вида

$$N_x(t) = N_1 \cos 2vt, \quad N_1 = \text{const} > 0.$$

Оболочка совершает колебания с умеренными амплитудами. Тогда деформации являются малыми, а перемещения умеренными и связи между деформациями и перемещениями описываются нелинейными уравнениями. Напряжения и деформации связаны законом Гука. Тогда колебания оболочки описываются уравнениями Донелла-Муштари-Власова:

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^4 w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \\ \frac{1}{E} \nabla^4 F = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где w – радиальные перемещения точек срединной поверхности оболочки, x, y – продольная и окружная координаты, R – радиус оболочки, ρ – плотность материала оболочки; E, μ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона, F – функция напряжений, $D = Eh^3/(12(1 - \mu^2))$ – цилиндрическая жесткость оболочки.

В цилиндрических оболочках сопряженные собственные формы колебаний $\cos sy \sin rx$ и $\sin sy \sin rx$ имеют одинаковые частоты. При нелинейных колебаниях цилиндрических оболочек эти формы, в основном, возбуждаются совместно. В данной модели в разложении радиального прогиба учитываются три пары сопряженных форм колебаний, частоты которых близки. Динамический прогиб оболочки аппроксимируем разложением

$$w = \sum_{i=1}^3 (f_{2i-1} \cos s_i y + f_{2i} \sin s_i y) \sin r x + f_7 \sin^2 r x + f_8, \quad (2)$$

где $s_i = n_i / R$; $r = m \pi / L$; $i = \overline{1,3}$; n_i – число волн в окружном направлении, m – число полуволн вдоль образующей. Слагаемое $f_7 \sin^2 r x$ отражает не-симметричность прогиба относительно срединной поверхности с преимущественным перемещением к центру кривизны. Слагаемое f_8 описывает радиальные перемещения точек, принадлежащих торцевым сечениям оболочки. Это слагаемое не зависит от окружной координаты y , то есть торцевые сечения при колебаниях оболочки могут «дышать» [3].

Функцию напряжений представим так: $F = F_h + F_p$. Общее решение второго уравнения системы (1), F_h , определяется, удовлетворяя условие периодичности окружных перемещений [4], и имеет следующий вид:

$$F_h = \frac{E}{16} \sum_{i=1}^6 s_i f_i^2 x^2 - \frac{1}{4} \frac{E}{R} f_7 x^2 - \frac{1}{2} \mu N_x x^2 - \frac{1}{2} N_x y^2. \quad (3)$$

Частное решение второго уравнения системы (1), F_p , представим так:

$$\begin{aligned} F_p = & (F_1^{(0)} + F_5^*) \cos 2r x + \sum_{i=1}^3 (F_{i+2}^{(0)} \cos 2s_i y + F_{i+5}^{(0)} \sin 2s_i y) + F_1^* \sin r x + F_2^* \sin 3r x + F_4^*, \\ F_k^* = & \sum_{i=1}^3 (F_i^{(k)} \cos s_i y + F_{i+3}^{(k)} \sin s_i y); F_l^* = F_1^{(l)} \cos(s_1 + s_2)y + F_2^{(l)} \cos(s_1 - s_2)y + \\ & + F_3^{(l)} \cos(s_1 + s_3)y + F_4^{(l)} \cos(s_1 - s_3)y + F_5^{(l)} \cos(s_2 + s_3)y + F_6^{(l)} \cos(s_2 - s_3)y + \\ & + F_7^{(l)} \sin(s_1 + s_2)y + F_8^{(l)} \sin(s_1 - s_2)y + F_9^{(l)} \sin(s_1 + s_3)y + F_{10}^{(l)} \sin(s_1 - s_3)y + \\ & + F_{11}^{(l)} \sin(s_2 + s_3)y + F_{12}^{(l)} \sin(s_2 - s_3)y; k = 1,2; l = 3,4. \end{aligned} \quad (4)$$

Величины F_i определяются подстановкой выражений (2), (4) во второе уравнение системы (1) и приравниванием коэффициентов при одинаковых гармониках.

Для дискретизации системы применим метод Бубнова-Галеркина к первому уравнению системы (1). Получим модель с конечным числом степеней свободы, которая относительно безразмерных переменных и параметров имеет вид:

$$\ddot{f}_i + \omega_i^2 f_i + f_i R_i (f_1, \dots, f_7) + G_i (f_1, \dots, f_6) + \chi_i N_x f_i = 0, \quad i = \overline{1,6}; \quad (5)$$

$$\ddot{f}_7 + \frac{4}{3} \ddot{f}_8 + \omega_7^2 f_7 + \tilde{\omega}_8^2 f_8 + \sum_{j=1}^6 \gamma_{7j} f_j^2 = 0; \quad (6)$$

$$\ddot{f}_8 + \frac{1}{2} \ddot{f}_7 + \omega_8^2 f_8 + \tilde{\omega}_7^2 f_7 + \sum_{j=1}^6 \gamma_{8j} f_j^2 = 0, \quad (7)$$

Частоты ω_7, ω_8 значительно больше частот $\omega_1, \dots, \omega_6$. Поэтому, полагая $\dot{f}_7 = \dot{f}_8 = 0$, из (6), (7) определим $f_7 = f_7(f_1, \dots, f_6)$, $f_8 = f_8(f_1, \dots, f_6)$ и введем их в (5). Тогда функции R_i , $i = \overline{1,6}$ системы (5) примут вид:

$$R_i(f_1, \dots, f_6) = \sum_{j=1}^6 \eta_{ij} f_j^2, \quad i = \overline{1,6}. \quad (8)$$

Итак, параметрические колебания оболочки описываются системой уравнений (5) с функциями R_i в виде (8).

Анализ нелинейных колебаний. Исследуем динамику системы (5). В этой системе существуют две нелинейные нормальные формы: $f_{2i-1} = \pm f_{2i}$, $i = \overline{1,3}$. Движения на этих нормальных формах описываются системой трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{f}_i + \omega_i^2 f_i + f_i \tilde{R}_i(f_1, f_3, f_5) + \tilde{G}_i(f_1, f_3, f_5) + \chi_i N_x f_i = 0, \quad i = 1, 3, 5. \quad (9)$$

Полученные нелинейные моды являются прямыми линиями в конфигурационном пространстве динамической системы (5). Эти линии являются точным решением системы (5). Метод определения нелинейных нормальных форм в параметрически возбуждаемых системах предложен в [1, 5].

Для исследования движений на нормальной форме (9) воспользуемся методом гармонического баланса и движение представим так:

$$f_i = A_i \cos(\nu t) + B_i \sin(\nu t), \quad i = 1, 3, 5. \quad (10)$$

В результате, получаем следующую систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$A_i \left(\omega_i^2 - \nu^2 + \eta_{ii} A_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1,3,5} \eta_{ij} (3A_j^2 + B_j^2) + \frac{1}{2} \chi_i N_1 \right) + G_i^{(A)} = 0;$$

$$B_i \left(\omega_i^2 - \nu^2 + \eta_{ii} B_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1,3,5} \eta_{ij} (3B_j^2 + A_j^2) - \frac{1}{2} \chi_i N_1 \right) + G_i^{(B)} = 0, \quad i = 1, 3, 5, \quad (11)$$

В системе (11) существуют следующие группы решений:

- | | |
|--|--|
| 1.1). $A_1 \neq 0; A_3 = A_5 = 0; B_i = 0;$ | 1.2). $B_1 \neq 0; B_3 = B_5 = 0; A_i = 0;$ |
| 2.1). $A_3 \neq 0; A_1 = A_5 = 0; B_i = 0;$ | 2.2). $B_3 \neq 0; B_1 = B_5 = 0; A_i = 0;$ |
| 3.1). $A_5 \neq 0; A_1 = A_3 = 0; B_i = 0;$ | 3.2). $B_5 \neq 0; B_1 = B_3 = 0; A_i = 0;$ |
| 4.1). $A_1 \neq 0; A_5 \neq 0; A_3 = 0; B_i = 0;$ | 4.2). $B_1 \neq 0; B_5 \neq 0; B_3 = 0; A_i = 0;$ |
| 5.1). $A_1 \neq 0; A_3 \neq 0; A_5 \neq 0; B_i = 0;$ | 5.2). $B_1 \neq 0; B_3 \neq 0; B_5 \neq 0; A_i = 0,$ |

где $i = 1, 3, 5$. Решения (1.1) – (4.2) могут быть определены аналитически.

В случаях (5.1), (5.2) амплитуды колебаний $A_1, B_1, A_3, B_3, A_5, B_5$ определяются численно методом Ньютона из системы нелинейных алгебраических уравнений (11). В этом случае параметр ν варьируется с некоторым шагом.

Теперь исследуем нелинейные колебания оболочки с учетом диссипации энергии. В систему (5) введем слагаемые, которые описывают линейное демпфирование колебаний. Тогда эта система преобразуется к виду:

$$\ddot{f}_i + \xi_i \dot{f}_i + \omega_i^2 f_i + f_i R_i(f_1, \dots, f_6) + G_i(f_1, \dots, f_6) + \chi_i N_x f_i = 0, i = \overline{1,6}. \quad (13)$$

В системе с диссипацией (13) существуют нелинейные моды $f_{2i-1} = \pm f_{2i}$, $i = \overline{1,3}$. Следуя методу гармонического баланса получаем:

$$A_i \left(\omega_i^2 - \nu^2 + \eta_{ii} A_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1,3,5} \eta_{ij} (3A_j^2 + B_j^2) + \frac{1}{2} \chi_i N_1 \right) + B_i \xi_i \nu + G_i^{(A)} = 0;$$

$$B_i \left(\omega_i^2 - \nu^2 + \eta_{ii} B_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1,3,5} \eta_{ij} (3B_j^2 + A_j^2) - \frac{1}{2} \chi_i N_1 \right) - A_i \xi_i \nu + G_i^{(B)} = 0, i = 1,3,5. \quad (14)$$

В системе (14) существуют следующие группы решений:

- 1). $A_1 \neq 0; B_1 \neq 0; A_3 = A_5 = 0; B_3 = B_5 = 0;$
- 2). $A_3 \neq 0; B_3 \neq 0; A_1 = A_5 = 0; B_1 = B_5 = 0;$
- 3). $A_5 \neq 0; B_5 \neq 0; A_1 = A_3 = 0; B_1 = B_3 = 0;$
- 4). $A_1 \neq 0; A_5 \neq 0; B_1 \neq 0; B_5 \neq 0; A_3 = 0; B_3 = 0;$
- 5). $A_1 \neq 0; A_3 \neq 0; A_5 \neq 0; B_1 \neq 0; B_3 \neq 0; B_5 \neq 0.$ (15)

Решения (15) системы (14) исследуются численно. Задавая параметр ν с некоторым шагом, методом Ньютона определяются все неизвестные.

Рассмотрим режим бегущих волн в цилиндрической оболочке, который описывается системой (13). Для исследования этих движений воспользуемся методом гармонического баланса и колебания системы представим так:

$$f_i = A_i \cos(\nu t) + B_i \sin(\nu t), \quad f_{i+1} = A_i \sin(\nu t) + B_i \cos(\nu t), \quad i = 1,3,5. \quad (16)$$

Тогда амплитуды гармоник (16) описываются системой нелинейных алгебраических уравнений:

$$A_i \left(\omega_i^2 - \nu^2 + \eta_{ii} B_i^2 + \sum_{j=1,3,5} \eta_{ij} (A_j^2 + B_j^2) \pm \frac{1}{2} \chi_i N_1 \right) \pm B_i \xi_i \nu + \tilde{G}_i^{(A)} = 0;$$

$$B_i \left(\omega_i^2 - \nu^2 + \eta_{ii} A_i^2 + \sum_{j=1,3,5} \eta_{ij} (A_j^2 + B_j^2) \pm \frac{1}{2} \chi_i N_1 \right) \pm A_i \xi_i \nu + \tilde{G}_i^{(B)} = 0, i = 1,3,5, \quad (17)$$

В системе (17) существуют следующие группы решений:

- 1). $A_1 = B_1 \neq 0; A_3 = A_5 = B_3 = B_5 = 0;$
- 2). $A_1 = B_1 \neq 0; A_5 = B_5 \neq 0; A_3 = B_3 = 0;$
- 3). $A_1 = B_1 \neq 0; A_5 = B_5 \neq 0; A_3 = B_3 \neq 0.$ (18)

Движения (18) исследуются при изменении частоты параметрической нагрузки ν численным решением системы (17) методом Ньютона.

Численный анализ колебаний. Рассмотрим оболочку со следующими численными значениями параметров [6]: $h = 0,002$ м; $L = 0,4$ м; $R = 0,2$ м; $E = 2,1 \times 10^{11}$ Н/м²; $\mu = 0,3$; $\rho = 7850$ кг/м³; $\xi_i = 0,001\omega_i / \omega_0$, $i = \overline{1,6}$; $\omega_0 = 3165,03$; $N_1 = 0,6 N_{cr}$; $N_{cr} = 2,54 \times 10^6$ Н/м. Из анализа частот линейных колебаний оболочки с представленными параметрами следует, что в дальнейшем исследовании будут учитываться моды колебаний, имеющие такие параметры волнообразования: $n_1 = 4$; $n_2 = 5$; $n_3 = 6$; $m = 1$.

Для представленных параметров оболочки проводился численный анализ нелинейных нормальных форм. На рис. 1 представлена амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), которая выражает зависимости $A_1(\nu)$, $B_1(\nu)$. Ветви АЧХ, соответствующие случаю 1.1), 1.2) из (12), когда в колебаниях участвует только одна из трех сопряженных форм колебаний обозначены символами $A_1^{(1)}$, $B_1^{(1)}$. Ветви $A_1^{(2)}$, $B_1^{(2)}$, отвечают случаю возбуждения двух сопряженных форм колебаний: 4.1), 4.2) из (12). Ветви $A_1^{(3)}$, $B_1^{(3)}$ отражают случай возбуждения трех сопряженных форм колебаний: 5.1), 5.2) в формулах (12). На рис. 3 представлена АЧХ, описывающая динамику системы с диссипацией (13).

Для подтверждения результатов аналитического анализа проводилось прямое численное интегрирование системы (9) при различных значениях частот гармонического воздействия ν . Результаты расчетов представлены на рис. 1 точками, свидетельствуют о хорошем совпадении данных метода гармонического баланса и результатов прямого численного интегрирования.

Для исследования устойчивости параметрических колебаний производилось прямое численное интегрирование системы дифференциальных уравнений (5) на интервалах времени t порядка 1000 периодов колебаний. Начальные условия определялись из уравнений (10), (16). На рис. 1 устойчивые движения представлены сплошной линией, а неустойчивые – пунктирной.

Исследовалось поведение динамической системы (5) при потере устойчивости нормальных форм. Для этого проводилось прямое численное интегрирование системы (5). Данные, представленные на рис. 2 а) соответствуют группе решений 1.1) из (12), при параметрах: $\nu = 1,18$, $A_1 = 0,3694$. На рис. 2 б) представлена динамика системы (5) после потери устойчивости решений 4.1) из (12) с параметрами: $\nu = 1,43$, $A_1 = 2,8494$, $A_5 = 2,6091$.

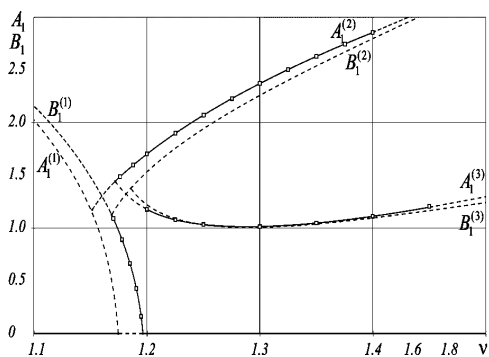
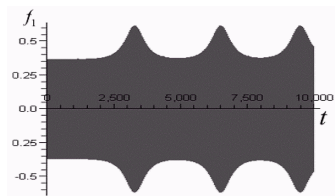
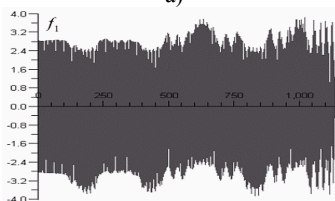


Рисунок 1 – АЧХ при движении на нормальной форме



а)



б)

Рисунок 2 – Поведение системы при потере устойчивости движения

Производился численный анализ режимов типа бегущих волн на основании методики, представленной выше. Результаты анализа представлены в виде АЧХ на рис. 4.

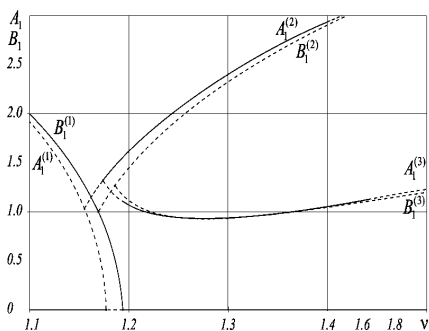


Рисунок 3 – АЧХ при движении на нормальной форме с учетом диссипации

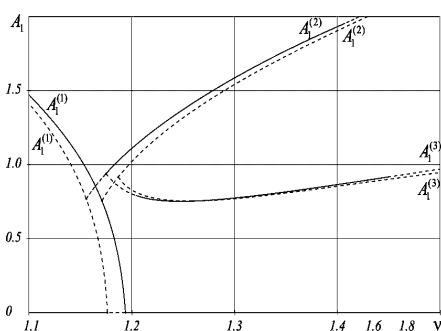


Рисунок 4 – АЧХ при движении в режиме бегущих волн

Выводы. Существует большой класс цилиндрических оболочек, для которых двух и трех модовые аппроксимации колебаний не достаточны для адекватного описания динамики. Это объясняется близостью собственных частот различных мод колебаний. В этом случае только многомодовые модели адекватно описывают колебания.

При многомодовом режиме колебаний оболочки было обнаружено, что существуют нелинейные моды, которые описываются прямыми линиями в конфигурационном пространстве. Подчеркнем, что одинаковые нелинейные

моды существуют как в системе без диссипации, так и в системе с диссипацией. Существование таких нормальных форм объясняется циклической симметрией цилиндрических оболочек.

Список литературы: 1. *Аврамов К. В.* Нелинейные нормальные формы параметрических колебаний // ДНАНУ. – 2008. – № 11. – С. 41-47. 2. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 423 с. 3. *Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Краснополяская Т. С.* Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. – К.: Наукова думка, 1984. – 218 с. 4. *Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Подчасов Н. П.* Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. – К.: Выща школа, 1989. – 207 с. 5. *Avramov K.* Nonlinear modes of parametric vibrations and their applications to beams dynamics // Journal of Sound and Vibrations. – 2009. – **322**. – P. 476-489. 6. *Gonçalves P.B., Del Prado Z.J.G.N.* Nonlinear Oscillations and Stability of Parametrically Excited Cylindrical Shells // Meccanica. – 2002. – V. 36. – P. 105-116. 7. *Koval'chuk P. S., Kruk L. A.* Forced nonlinear oscillations of cylindrical shells interacting with fluid flow // Journal of Sound and Vibration. – 2003. – V. 265. – P. 245-268. 8. *Kubenko V. D., Kovalchuk P. S.* Nonlinear problems of oscillations of thin shells // International Applied Mechanics. – 1998. – V. 34, №8. – P. 703-728. 9. *Kubenko V. D., Koval'chuk P. S., Kruk L. A.* Non-linear interaction of bending deformations of free-oscillating cylindrical shells // Journal of Sound and Vibration. – 2003. – V. 265. – P. 245-268. 10. *Yamaki N.* Elastic Stability of Circular Cylindrical Shells. – North-Holland, Amsterdam. – 1984.

Поступила в редколлегию 20.06.2009

УДК 519:539:534

С.В.КРАСНИКОВ, канд.техн.наук, ст.наук.співр., НТУ «ХП»

РОЗРОБКА ІНТЕГРОВАНІХ ПРОГРАМНИХ ЗАСОБІВ З АВТОМАТИЗАЦІЇ РОЗРАХУНКІВ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОНСТРУКЦІЙ

Розглядаються проблеми з використання сучасних САПР для проведення досліджень динаміки складних машинобудівних конструкцій. Запропоновано методику проведення досліджень за допомогою інтегрованого програмного засобу. Розроблені дві моделі спеціалізованого програмного комплексу щодо автоматизації проведення необхідних серій розрахунків.

The problems with the use of modern CAD systems for studies of dynamics for complex engineering designs are considered. A method for conducting research using integrated software is described. Developed two models of specialized software to automate the necessary series of calculations

Вступ. Сучасні дослідження пов'язані з проведенням багатої кількості обчислень. Особливо це стосується розрахунків динамічних характеристик машинобудівних конструкцій, що звичайно групуються у декілька серій. Кожній серії відповідають свої значення змінних параметрів. Доволі часто відомі програмні засоби з автоматизації інженерних досліджень (CAE) не мають