график которых симметричен относительно прямой $x=x^*$. Метод кубической интерполяции позволяет определять минимум с погрешностью 10^{-2}—10^{-3} и эффективнее метода квадратичной интерполяции для функций 3)—5), которые асимметричны относительно прямой $x=x^*$.

В алгоритмах многомерной минимизации, где допускается погрешность одномерной минимизации по аргументу порядка 10^{-3} [1], каждый из рассмотренных методов может оказаться эффективнее других в зависимости от конкретного вида функции. Например, в табл. 2 приведены количества вычислений тестовой функции Розенброка [1] при ее минимизации различными методами до определения минимального значения с погрешностью 10^{-6}. Данные табл. 2 позволяют заключить, что для полиномиальных функций типа функции Розенброка эффективнее применять алгоритм кубической интерполяции.

Таблица 2

Метод одномерной минимизации	Метод многомерной минимизации				
	Полака-Рибьера	Девидона-Флетчера-Пауэлла	Гольдфарба	Ньютона	Пауэлла
Золотое сечение	370	373	373	299	589
Квадратичная интерполяция	243	243	221	170	267
Кубическая интерполяция	148	139	139	144	205

Список литературы: 1. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование.— М.: Мир, 1975.— 534 с. 2. *Полак Э.* Численные методы оптимизации. Единый подход.— М.: Мир, 1974.—376 с. 3. *Fletcher R., Reeves C. M.* Function minimization by conjugate gradients.— The Computer Journal, 1964, 7, № 2, p. 149—154. 4. *Кураев А. А., Ковалев И. С., Колосов С. В.* Численные методы оптимизации в задачах электроники СВЧ.—Минск: Наука и техника, 1975. — 295 с.

Поступила в редколлегию 09.12.80.

УДК 62.505

П. И. ЗАХАРЕНКО,
Н. Г. КИРЕЕВ, канд. техн. наук

МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА АНАЛИТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛЬЮ

Постановка задачи: для объекта, описываемого уравнением $\dot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)=\varphi(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{u}$ (1), требуется найти управление $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}, t)=0$, минимизирующее функционал

$$I = V_з(\boldsymbol{x}(t_2)) + \int_{t_1}^{t_2} Q(\boldsymbol{x}, t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{t_1} (\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{k}^{-2} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}_{оп}^T \boldsymbol{k}^{-2} \boldsymbol{u}_{оп})\,dt,$$

где $\boldsymbol{f}$, φ, Q, $V_з$ — заданные непрерывные функции; t_1, t_2 — заданные моменты времени; $\boldsymbol{k}^2$ — заданная диагональная матрица с положительными постоянными элементами.

Из основной теоремы аналитического конструирования управления по критерию обобщенной работы [1, 2] следует, что искомое управление имеет вид

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{оп} = -\boldsymbol{k}^2 \varphi^T \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}, \tag{2}$$

где $V = V(\boldsymbol{x}, t)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \boldsymbol{f}^T \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} = -Q$$

при граничном условии $V_{t=t_2} = V_з$.

Алгоритм оптимизации управления с прогнозирующей моделью и его модификация. В работе [2] предложен метод определения функции $\partial V/\partial \boldsymbol{x}$ и, следовательно, управления (2).

В данном алгоритме управления за свободное движение объекта принимается движение при $\boldsymbol{u} = 0$, т. е. при отсутствии управления. Такое движение может очень сильно отличаться от реального управляемого движения объекта на интервале оптимизации и приводить в область пространства состояний, далекую от реально достигаемой. Это сказывается на точности определения управления. В данной работе предлагается «свободным» движением считать движение с некоторым наперед заданным управлением. В качестве такого управления можно взять либо априорно известное приближение оптимального управления, либо управление, вычисленное на предыдущем цикле оптимизации в виде $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^* + \Delta\boldsymbol{u}$, где u^* — заданное управление.

Уравнение объекта (1) запишем следующим образом:

$$\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) = \varphi(\boldsymbol{x}, t)(\boldsymbol{u}^* + \Delta\boldsymbol{u}). \tag{3}$$

Так как $\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ — известная функция, которая не подвергается оптимизации, выражение (3) можно переписать в виде

$$\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}, t) = \varphi(\boldsymbol{x}, t)\,\Delta\boldsymbol{u}, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) - \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})\,\boldsymbol{u}^*$.

Уравнение (4) аналогично уравнению (1) и, следовательно, можно получить

$$\Delta\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{k}^2 \varphi^T \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}; \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{k}^2 \varphi^T \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}},$$

где $\partial V/\partial x$ вычисляется на «свободном» движении:

$$\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}, t) = 0 \quad \text{или} \quad \dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) = \varphi(\boldsymbol{x}, t)\,\boldsymbol{u}^*.$$

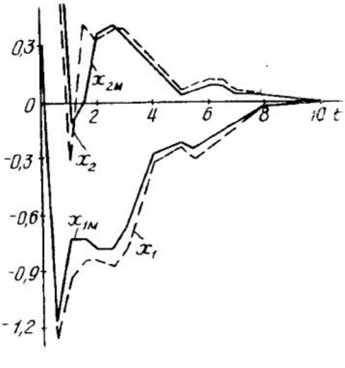
Пример. Метод аналитического синтеза оптимального управления с помощью прогнозирующей модели и его модификация, предложенная в данной работе, реализованы для системы

$$\dot{x}_1 = x_2 + \zeta_{1x};\ \dot{x}_2 = u - a_1 x_2 - a_2 x_1 + \zeta_{2x};\ \dot{a}_1 = \zeta_{1a};\ \dot{a}_2 = \zeta_{2a};$$

$$z_1 = x_1 + \zeta_{1z};\ z_2 = x_2 + \zeta_{2z}$$

при $t_0=0$; $x_{10}=0{,}3$; $x_{20}=-10$; $a_{10}=1{,}1$; $a_{20}=0{,}1$. Здесь ζ_{1x}, ζ_{2x}, ζ_{1a}, ζ_{2a}, ζ_{1z}, ζ_{2z} — белые шумы с нулевым математическим ожиданием и с известными ковариационными матрицами $\boldsymbol{S}_x$, $\boldsymbol{S}_a$, $\boldsymbol{S}_z$, $\boldsymbol{S}_{xz}$, причем полагали, что белые шумы составляют 50% от соответствующих параметров. Переменные состояния системы и ее динамические параметры определяли при помощи системы одновременной идентификации и оценивания, описанной в работе [2].

Изменение переменных состояния системы при обычном управлении (x_1, x_2) и при его модификации ($x_{1м}$, $x_{2м}$) показано на рисунке. Как видно из рисунка, модифицированный метод аналитического синтеза оптимального управления предпочтительнее, так как требуемое состояние ($x_1=x_2=0$) достигается быстрее и с меньшими отклонениями. Преимущество предлагаемой модификации особенно наглядно в тех случаях, когда оптимальное управление является квазипостоянным в течение некоторого времени либо когда известно некоторое приближенное значение оптимального управления. Продолжительность цикла управления Δt задается исходя из допустимой дискретности управления, интервала оптимизации и быстродействия управляющей ЭВМ.



Список литературы: 1. *Красовский А. А.* Аналитическое конструирование контуров управления летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1969.— 231 с. 2. *Красовский А. А., Буков В. Н., Шендрик В. С.* Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами.— М.: Наука, 1977.— 272 с. 3. *Шендрик В. С.* Синтез оптимальных управлений методом прогнозирующей модели.— Докл. АН СССР, 1975, № 3, с. 561—562.

Поступила в редколлегию 10.11.78.