

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ПУСКОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК АСИНХРОННОГО ДВИГУНА З УРАХУВАННЯМ ЕКВІВАЛЕНТНИХ КОНТУРІВ ВТРАТ В СТАЛІ СТАТОРА І РОТОРА

Попович О.М., к.т.н., Головань І.В.  
 Інститут електродинаміки НАН України  
 Україна, 03680, Київ, пр. Перемоги, 56  
 тел. (044) 454-26-37

*Запропонована уточнена математична модель з урахуванням еквівалентних контурів втрат в сталі статора і ротора від вихрових струмів для формування пускових характеристик асинхронних двигунів з частотозалежними параметрами ротора.*

*Предложена математическая модель с учетом эквивалентных контуров потерь в стали статора и ротора от вихровых токов для формирования пусковых характеристик асинхронных двигателей с частотозависимыми параметрами ротора.*

При розрахунках асинхронних двигунів (АД) на підвищену частоту живлення і особливі режими роботи, що пов'язані з важкими і частими пусками, необхідний уточнений розрахунок пускових характеристик.

Під уточненими розрахунками пускових характеристик вважається врахування впливу контурів вихрових струмів на статорі, що характеризуються втратами в сталі.

В існуючих методиках розрахунку АД фізичні процеси в сталі або ідеалізуються приймаючи, що осердя ротора і статора не електропровідні, або приймають припущення про можливість врахування втрат введенням в коло намагнічування схеми заміщення АД додаткових опорів, що визначаються величиною втрат в сталі, які отримано розрахунковим шляхом або з досліду холостого ходу.

З метою рішення ряду задач, пов'язаних перш за все з проектуванням АД для інтенсивних режимів робіт, розроблено математичну модель, що призначена підвищити точність розрахунку пускових характеристик проектуємих АД.

Система рівнянь електричної рівноваги АД для статорних і роторних обмоток розширюється ще чотирма рівняннями, які відображають системи еквівалентних контурів втрат в сталі – для двох статорних і двох роторних зубців і ділянок ярм.

З метою складення системи рівнянь електричної рівноваги необхідно визначити систему просторових орієнтацій для електричних контурів статора і ротора, а також для еквівалентних контурів вихрових струмів машини. Короткозамкнута обмотка ротора складається з  $z_2$  контурів ( $z_2$  – число зубців ротора), що утворені сусідніми стержнями обмотки і ділянками короткозамикаючих кілець між ними. В системі координат ротора нульове значення кутової координати відповідає вісі зубця з номером  $z_2$ . В якості статорних відповідає вісі зубця з номером  $z_1$ . В якості статорних розглядаються фазні обмотки. Номер фази приймає значення 3,1,2, відповідно до фаз А,В,С. Еквівалентні зубцеві контури вихрових струмів статора і ротора відповідають одноритковому контуру суміщеному з віссю зубців. Зубець з номером 1 знаходиться між всіма пазів з номерами  $z_1$  і 1. Нульове значення просторової кутової координати (дійсні вісі

просторових комплексних площин по всіх гармонічних складових магніторушійної сили МРС) суміщене з вісю пазу статора і ротора з номерами відповідно  $z_1$  і  $z_2$  де  $z_1$  – число зубців статора. Нумерація зубців і додатній напрямку кутової координати – проти часової стрілки.

Еквівалентні ділянки ярмових контурів вихрових струмів статора і ротора еквівалентуються струмом провідника, що розташовується по вісі пазів відповідних ділянок ярм. Ділянка ярма з номером 1 знаходиться між всіма зубців з номерами 1 і 2.

Для розв'язання системи рівнянь електричної рівноваги з урахуванням визначених контурів необхідно отримати величини і просторові положення максимумів їх МРС  $v$ -ї гармонічної складової при одиничному струмі. Так кутові координати максимумів МРС  $i$ -го зубцевого контуру статора і ротора становлять відповідно:

$$\delta_{sziv} = \frac{(2 \cdot i - 1) \cdot v \cdot \pi}{z_1}, \quad \delta_{rziv} = \frac{(2 \cdot i - 1) \cdot v \cdot \pi}{z_2} + v\theta,$$

де  $v$  – порядок просторової гармоніки МРС.

Величини амплітуд  $v$ -х гармонічних складових при одиничних струмах еквівалентних зубцевих статорних і роторних контурів визначаються виразами:

$$f_{szv} = \frac{2}{v \cdot \pi} \cdot \sin\left(\frac{v \cdot \pi}{z_1}\right), \quad f_{rzv} = \frac{2}{v \cdot \pi} \cdot \sin\left(\frac{v \cdot \pi}{z_2}\right).$$

Еквівалентуючи вихорові струми ділянки ярма, розкладемо в ряд Фур'є МРС еквівалентуючого провідника. В результаті отримуємо величину і просторове положення максимуму МРС  $v$ -ї гармонічної складової при одиничному струмі еквівалентного ярмового контуру статора і ротора відповідно

$$f_{sav} = f_{rav} = \frac{1}{v \cdot \pi},$$

$$\delta_{sai v} = \frac{2 \cdot v \cdot \pi \cdot i}{z_1} + \frac{\pi}{2}, \quad \delta_{rai v} = \frac{2 \cdot v \cdot \pi \cdot i}{z_2} + \frac{\pi}{2} + v\theta.$$

Величина і просторове положення максимуму  $v$ -ї гармоніки МРС  $i$ -го електричного контуру ротора при одиничному струмі визначаються виразами.

$$f_{r\nu} = \frac{2}{\nu \cdot \pi} \cdot \sin \frac{\nu \cdot \pi}{z_2}; \quad \delta_{r\nu} = \nu \cdot Q + \frac{2 \cdot \nu \cdot \pi \cdot i}{z_2}.$$

де  $\theta$  – кут між нульовими кутовими координатами статора і ротора (вісьями  $z_2$ -го зубця ротора і  $z_1$ -го паза статора).

Величина і просторове положення максимуму  $\nu$ -ї гармоніки МРС  $i$ -го електричного контуру статора при одиничному струмі визначаються виразами:

$$f_{s\nu} = \frac{2}{\nu \cdot \pi} \cdot k_{об} \cdot w_1; \quad \delta_{s\nu} = \delta_{A\nu} + \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{3},$$

де  $\delta_{A\nu}$  – координата максимуму МРС по  $\nu$ -ї гармоніці фази  $A$ ;  $i$  – номер фази, що приймає значення 3,1,2, відповідно для фаз А,В,С.

### ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРИЧНОЇ РІВНОВАГИ В ФАЗНИХ КООРДИНАТАХ

При врахуванні тільки однієї просторової гармонічної складової МРС порядку  $\nu$  складемо систему диференціальних рівнянь електричної рівноваги симетричного асинхронного двигуна з короткозамкнутим ротором, що враховує еквівалентні контури в сталі статора і ротора в фазних координатах

$$[U] = \text{diag}(r_s, r_{sz}, r_{sa}, r_r, r_{rz}, r_{ra}) [I] + \frac{d}{dt} [L] \times [I], \quad (1)$$

$$[U] = [u_s, 0, 0, 0, 0]_i;$$

$$[I] = [i_s, i_{sz}, i_{sa}, i_r, i_{rz}, i_{ra}]_i;$$

$$[L] = ((L_{k,n}, k = s, sz, sa, r, r, rz, ra), n = s, sz, sa, r, r, rz, ra);$$

$$\text{ТУТ } [u_s] = [u_A, u_B, u_C]_i;$$

$$[i_s] = [i_A, i_B, i_C]_i; \quad [i_{sz}] = [i_{sz1}, i_{sz1}, \dots, i_{sz(z_1-1)}]_i;$$

$$[i_{sa}] = [i_{sa1}, i_{sa1}, \dots, i_{sa(z_1-1)}]_i;$$

$$[i_r] = [i_{rz2}, i_{rz1}, \dots, i_{rz(z_2-1)}]_i; \quad [i_{rz}] = [i_{rz2}, i_{rz1}, \dots, i_{rz(z_2-1)}]_i;$$

$$[i_{ra}] = [i_{ra2}, i_{ra1}, \dots, i_{ra(z_2-1)}]_i; \quad [r_s] = \text{diag}(r_A, r_B, r_C);$$

$$[r_r] = \begin{vmatrix} 2 \cdot (r_c + r_{yk}) & -r_c & \dots & -r_c \\ -r_c & 2 \cdot (r_c + r_{yk}) & -r_c & \dots \\ \dots & -r_c & 2 \cdot (r_c + r_{yk}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -r_c & \dots & \dots & 2 \cdot (r_c + r_{yk}) \end{vmatrix};$$

$$[r_{sz}] = r_{sz} [1]_i; \quad [r_{sa}] = r_{sa} [1]_i; \quad [r_{rz}] = r_{rz} [1]_i; \quad [r_{ra}] = r_{ra} [1]_i;$$

$$[L_{ss}] = \text{diag}(l_{s\sigma}, l_{s\sigma}, l_{s\sigma}) + ((L_{ssv}^{k,n}, k = 3,1,2), n = 3,1,2);$$

$$L_{ssv}^{k,n} = M_{ssv} \cdot \cos(\delta_{skv} - \delta_{snv});$$

$$[L_{ss}] = \text{diag}(l_{s\sigma}, l_{s\sigma}, l_{s\sigma}) + M_{ss}/2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$[L_{rr}] = [L_{rrv}] + [L_{rrnr}];$$

$$[L_{rrv}] = ((L_{rrv}^{k,n}, k = z_2, 1, \dots, z_2 - 1), n = z_2, 1, \dots, z_2 - 1);$$

$$L_{rrv}^{k,n} = M_{rrv} \cdot \cos((k-n) \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu / z_2);$$

$$[L_{rrnr}] = \begin{vmatrix} 2 \cdot (m_l + m_n) & -m_n & \dots & -m_n \\ -m_n & 2 \cdot (m_l + m_n) & \dots & \dots \\ \dots & -m_n & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -m_n & \dots & \dots & 2 \cdot (m_l + m_n) \end{vmatrix};$$

$$[L_{szsz}] = \text{diag}(l_{sz1\sigma}, l_{sz1\sigma}, \dots, l_{sz(z_1-1)\sigma}) + ((L_{szszv}^{k,n}, k = z_1, 1, \dots, z_1 - 1), n = z_1, 1, \dots, z_1 - 1);$$

$$L_{szszv}^{k,n} = M_{szszv} \cdot \cos((k-n) \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu / z_1);$$

$$[L_{sasa}] = \text{diag}(l_{sa1\sigma}, l_{sa1\sigma}, \dots, l_{sa(z_1-1)\sigma}) + ((L_{sasav}^{k,n}, k = z_1, 1, \dots, z_1 - 1), n = z_1, 1, \dots, z_1 - 1)$$

$$L_{sasav}^{k,n} = M_{sasav} \cdot \cos((k-n) \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu / z_1);$$

$$[L_{rzzz}] = \text{diag}(l_{rz2\sigma}, l_{rz1\sigma}, \dots, l_{rz(z_2-1)\sigma}) + ((L_{rzzzv}^{k,n}, k = z_2, 1, \dots, z_2 - 1), n = z_2, 1, \dots, z_2 - 1);$$

$$L_{rzzzv}^{k,n} = M_{rzzzv} \cdot \cos((k-n) \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu / z_2);$$

$$[L_{rara}] = \text{diag}(l_{ra2\sigma}, l_{ra1\sigma}, \dots, l_{ra(z_2-1)\sigma}) + ((L_{rarav}^{k,n}, k = z_2, 1, \dots, z_2 - 1), n = z_2, 1, \dots, z_2 - 1);$$

$$L_{rarav}^{k,n} = M_{rarav} \cdot \cos((k-n) \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu / z_2);$$

$$[L_{ssz}] = ((L_{sszv}^{k,n}, k = 3,1,2), n = z_1, 1, \dots, z_1 - 1);$$

$$L_{sszv}^{k,n} = M_{sszv} \cdot \cos(\delta_{szkv} - \delta_{sznv});$$

$$[L_{ssa}] = ((L_{ssav}^{k,n}, k = 3,1,2), n = z_1, 1, \dots, z_1 - 1);$$

$$L_{ssav}^{k,n} = M_{ssav} \cdot \cos(\delta_{sakv} - \delta_{sanv});$$

$$[L_{rrz}] = ((L_{rrzv}^{k,n}, k = z_2, 1, \dots, z_2 - 1), n = z_2, 1, \dots, z_2 - 1);$$

$$L_{rrzv}^{k,n} = M_{rrzv} \cdot \cos(\delta_{rzkv} - \delta_{rznv});$$

$$[L_{rra}] = ((L_{rrav}^{k,n}, k = z_2, 1, \dots, z_2 - 1), n = z_2, 1, \dots, z_2 - 1);$$

$$L_{rrav}^{k,n} = M_{rrav} \cdot \cos(\delta_{rakv} - \delta_{ranv});$$

$$[L_{sas}] = [L_{szsa}]_i; \quad [L_{sas}] = [L_{ssa}]_i; \quad [L_{szs}] = [L_{ssz}]_i;$$

$$[L_{szsa}] = ((L_{szsav}^{k,n}, k = z_1, 1, \dots, z_1 - 1), n = z_1, 1, \dots, z_1 - 1);$$

$$L_{szsav}^{k,n} = M_{szsav} \cdot \cos(\delta_{szkv} - \delta_{sanv});$$

$$[L_{rzra}] = ((L_{rzrav}^{k,n}, k = z_2, 1, \dots, z_2 - 1), n = z_2, 1, \dots, z_2 - 1);$$

$$L_{rzrav}^{k,n} = M_{rzrav} \cdot \cos(\delta_{rzkv} - \delta_{ranv});$$

$$[L_{rarz}] = [L_{rzra}]_i; \quad [L_{rar}] = [L_{rra}]_i; \quad [L_{rzz}] = [L_{rrz}]_i;$$

$$[L_{rsz}] = ((L_{rszv}^{k,n}, k = z_2, 1, \dots, z_2 - 1), n = z_1, 1, \dots, z_1 - 1);$$

$$L_{rszv}^{k,n} = M_{rszv} \cdot \cos(\delta_{rkv} - \delta_{sznv});$$

$$[L_{rsa}] = ((L_{rsav}^{k,n}, k = z_2, 1, \dots, z_2 - 1), n = z_1, 1, \dots, z_1 - 1);$$

$$L_{rsav}^{k,n} = M_{rsav} \cdot \cos(\delta_{rkv} - \delta_{sanv});$$

$$[L_{rzs}] = ((L_{rzs v}^{k,n}, k = z_2, 1, \dots, z_2 - 1), n = z_1, 1, \dots, z_1 - 1);$$

$$L_{rzs v}^{k,n} = M_{rzs v} \cdot \cos(\delta_{rkv} - \delta_{snv});$$

$$[L_{ras}] = ((L_{ras v}^{k,n}, k = z_2, 1, \dots, z_2 - 1), n = z_1, 1, \dots, z_1 - 1);$$

$$L_{ras v}^{k,n} = M_{ras v} \cdot \cos(\delta_{rav} - \delta_{snv});$$

$$[L_{rs}] = ((L_{rs v}^{k,n}, k = z_2, 1, \dots, z_2 - 1), n = z_1, 1, \dots, z_1 - 1);$$

$$L_{rs v}^{k,n} = M_{rs v} \cdot \cos(\delta_{rkv} - \delta_{snv});$$

$$[L_{szr}] = [L_{rsz}]_i; \quad [L_{sar}] = [L_{rsa}]_i; \quad [L_{srz}] = [L_{rzs}]_i;$$

$$[L_{sra}] = [L_{ras}]_i$$

де матриці миттєвих значень позначено:  $[u_s]$  – напруга статора, що прикладена до його фаз;  $[i_s]$  – струм фаз статора;  $[i_{sz}]$ ,  $[i_{sa}]$  – струмів еквівалентних контурів в

сталі зубців і ділянок ярм в статорі;  $[i_{rz}], [i_{ra}]$  – струмів еквівалентних контурів в сталі зубців і ділянок ярм в роторі;  $[i_r]$  – струмів в короткозамкнутих контурах ротора;  $[i_s], [i_{sz}], [i_{sa}], [i_{rz}], [i_{ra}], [i_r]$  – матриці активних опорів фаз статора, еквівалентних контурів струмів в сталі зубців і ділянок ярма в статорі і ротора відповідно, короткозамкнутих контурів ротора;  $[L]$  – матриці власних і взаємних індуктивностей (на групи контурів вказують індекси:  $s$  – статор;  $r$  – ротор;  $z, a$  – еквівалентні контури сталі зубців і ділянок ярма);  $[L_{rr\ nll}], [L_{rv}]$  – матриці взаємних індуктивностей контурів ротора по шляхах потоків пазового і лобового розсіювання і основного потоку взаємодукації статор-ротор по просторовій гармоніці  $v$ ; параметри  $r_c, r_{yk}$  – активні опори стержнів ротора і ділянки короткозамкнутого кільця між сусідніми стержнями;  $m_n$  – власна індуктивність роторного контура по потоку розсіювання, що визвана струмом в ділянці короткозамкнутого кільця;  $m_n$  – власна чи взаємна індуктивність роторних контурів по потоку розсіювання, що визвана струмом в стержні;  $M_{ijv}$  ( $i, j = s, r, sz, sa, rz, ra$ ) – взаємна індуктивність двох електричних контурів при умові співпадання їх осей по гармоніці  $v$ ;  $l_\sigma$  – індуктивність розсіювання;  $L^{k,n}$  – елемент матриці індуктивності розсіювання;  $\delta$  – величина повітряного зазору;  $k_\delta$  – коефіцієнт Картера;  $k_{uv}$  – модуль коефіцієнта насичення магнітного кола;  $R, l_\delta$  – радіус розточки і довжина пакету статора;  $k_{cij}$  – коефіцієнт скосу контурів  $i$  і  $j$ .

#### СПРОЩЕННЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

Складена система рівнянь електричної рівноваги складається з  $3+2 \cdot z_2 + 2 \cdot z_1$  рівнянь і містить періодичні коефіцієнти, що залежать від кута повороту ротора. Для спрощення системи рівнянь застосовують заміну змінних. Так як розглядається симетрична електрична машина при симетричному живленні, то у відповідності з [1] в якості нових змінних доцільно вибрати симетричні складові просторових векторів в системі координат, що обертається синхронно з полем. Це скоротить кількість рівнянь до шести і звільнить їх від періодичних коефіцієнтів.

В результаті заміни змінних вихідна система рівнянь електричної рівноваги перетворюється в систему 6-ти рівнянь для комплексних змінних.

$$\begin{aligned} \bar{i}_{1s} &= 3^{-0,5} \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot (i_A + i_B \cdot a_3 + i_C \cdot a_3^2); \\ \bar{i}_{vsz} &= \frac{e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}}{z_1^{0,5}} \cdot [i_{szz_1} + i_{sz_1} \cdot a_{z_1}^v + \dots + i_{sz(z_1-1)} \cdot a_{z_1}^{v \cdot (z_1-1)}] \\ \bar{i}_{vsa} &= \frac{e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}}{z_1^{0,5}} \cdot [i_{saz_1} + i_{sa_1} \cdot a_{z_1}^v + i_{sa_2} \cdot a_{z_1}^{2v} + \dots + i_{sa(z_1-1)} \cdot a_{z_1}^{v \cdot (z_1-1)}] \\ \bar{i}_{vrz} &= \frac{e^{-j \cdot (\omega_0 \cdot t - v \cdot \theta)}}{z_2^{0,5}} \cdot [i_{rzz_2} + i_{rz_2} \cdot a_{z_2}^v + \dots + i_{rz(z_2-1)} \cdot a_{z_2}^{v \cdot (z_2-1)}] \\ \bar{i}_{vra} &= \frac{e^{-j \cdot (\omega_0 \cdot t - v \cdot \theta)}}{z_2^{0,5}} \cdot [i_{raz_2} + i_{ra_2} \cdot a_{z_2}^v + i_{ra_2} \cdot a_{z_2}^{2v} + \dots + i_{ra(z_2-1)} \cdot a_{z_2}^{v \cdot (z_2-1)}] \\ \bar{i}_{vr} &= \frac{e^{-j \cdot (\omega_0 \cdot t - v \cdot \theta)}}{z_2^{0,5}} \cdot [i_{rz_2} + i_{k_1} \cdot a_{z_2}^v + \dots + i_{k(z_2-1)} \cdot a_{z_2}^{v \cdot (z_2-1)}] \quad (2) \end{aligned}$$

де  $\bar{i}_{1s}$  – перша симетрична складова просторових векторів миттєвих значень фазних струмів статора;  $\bar{i}_{vr}$ ,  $\bar{i}_{vsz}$ ,  $\bar{i}_{vsa}$ ,  $\bar{i}_{vrz}$ ,  $\bar{i}_{vra}$  –  $v$ -і симетричні складові просторових векторів контурних струмів: ротора, втрат в сталі зубців і ділянок ярм статора і ротора відповідно.

Кожний із представлених просторових комплексів співпадає в просторі з максимумом результуючої хвилі струму, а отже, і МРС кожної групи струмів. Модулі просторових комплексів, як видно з (2), в  $(m_i)^{0,5}$ , ( $i=s, sz, sa, rz, ra, r$ ) раз менші сумарних векторів струмів  $m_i$ -фазних симетричних систем ( $m_i$  – число фаз системи контурів з індексом  $i$ ). Підсумувавши комплекси (2) з відповідними коефіцієнтами пропорційності, отримуємо просторовий комплекс, еквівалентний результуючій хвилі МРС машини по  $v$ -й гармонічній складовій

$$\begin{aligned} \bar{F}_{mv} &= 3^{0,5} \cdot f_{sv} \cdot \bar{i}_{1s} + z_1^{0,5} \cdot (f_{szv} \cdot \bar{i}_{vsz} + f_{sav} \cdot \bar{i}_{vsa}) + \\ &+ (z_2^{0,5} \cdot f_{rvz} \cdot \bar{i}_{vrz} + f_{rav} \cdot \bar{i}_{vra}) + z_2^{0,5} \cdot f_{rv} \cdot \bar{i}_{vr}. \quad (3) \end{aligned}$$

Система рівнянь (1), перетворена до змінних (2), має вигляд

$$\begin{aligned} \bar{u}_s &= r_s \cdot \bar{i}_{vs} + \left( \frac{d}{dt} + j \cdot \omega_0 \right) \cdot \left[ \left( l_{\sigma s} + \frac{3}{2} \cdot M_{ssv} \right) \cdot \bar{i}_{vs} + \right. \\ &+ \bar{L}_{sszv} \cdot \bar{i}_{vsz} + \bar{L}_{ssav} \cdot \bar{i}_{vsa} + \bar{L}_{srv} \cdot \bar{i}_{vr} + \\ &+ \bar{L}_{srzv} \cdot \bar{i}_{vrz} + \bar{L}_{srav} \cdot \bar{i}_{vra} \left. \right] \\ 0 &= r_{sz} \cdot \bar{i}_{vsz} + \left( \frac{d}{dt} + j \cdot \omega_0 \right) \cdot \left[ \left( l_{\sigma sz} + \frac{3}{2} \cdot M_{zsszv} \right) \cdot \bar{i}_{vsz} + \right. \\ &+ \bar{L}_{szsv} \cdot \bar{i}_{vs} + \bar{L}_{szsav} \cdot \bar{i}_{vsa} + \bar{L}_{szrv} \cdot \bar{i}_{vr} + \\ &+ \bar{L}_{szrzv} \cdot \bar{i}_{vrz} + \bar{L}_{szrav} \cdot \bar{i}_{vra} \left. \right] \\ 0 &= r_{sa} \cdot \bar{i}_{vsa} + \left( \frac{d}{dt} + j \cdot \omega_0 \right) \cdot \left[ \left( l_{\sigma sa} + \frac{3}{2} \cdot M_{zasav} \right) \cdot \bar{i}_{vsa} + \right. \\ &+ \bar{L}_{sasv} \cdot \bar{i}_{vs} + \bar{L}_{saszv} \cdot \bar{i}_{vsz} + \bar{L}_{sarv} \cdot \bar{i}_{vr} + \\ &+ \bar{L}_{sarzv} \cdot \bar{i}_{vrz} + \bar{L}_{sarav} \cdot \bar{i}_{vra} \left. \right] \\ 0 &= r_{rz} \cdot \bar{i}_{vrz} + \left( \frac{d}{dt} + j \cdot (\omega_0 - \omega_r) \right) \cdot \left[ \left( l_{\sigma rz} + \frac{z_2}{2} \cdot M_{rzzzv} \right) \cdot \bar{i}_{vrz} + \right. \\ &+ \bar{L}_{rzs} \cdot \bar{i}_{vs} + \bar{L}_{rzs} \cdot \bar{i}_{vsz} + \bar{L}_{rzasv} \cdot \bar{i}_{vsa} + \bar{L}_{rzzrv} \cdot \bar{i}_{vr} + \bar{L}_{rzzrav} \cdot \bar{i}_{vra} \left. \right] \\ 0 &= r_{ra} \cdot \bar{i}_{vra} + \left( \frac{d}{dt} + j \cdot (\omega_0 - \omega_r) \right) \cdot \left[ \left( l_{\sigma ra} + \frac{z_2}{2} \cdot M_{rarav} \right) \cdot \bar{i}_{vra} + \right. \\ &+ \bar{L}_{rav} \cdot \bar{i}_{vs} + \bar{L}_{raszv} \cdot \bar{i}_{vsz} + \bar{L}_{rasv} \cdot \bar{i}_{sa} + \bar{L}_{rarv} \cdot \bar{i}_{vr} + \bar{L}_{rarzv} \cdot \bar{i}_{vrz} \left. \right] \\ 0 &= r_r \cdot \bar{i}_{vr} + \left( \frac{d}{dt} + j \cdot (\omega_0 - \omega_r) \right) \cdot \left[ \left( l_{\sigma r} + \frac{z_2}{2} \cdot M_{rrv} \right) \cdot \bar{i}_{vr} + \right. \\ &+ \bar{L}_{rvs} \cdot \bar{i}_{vs} + \bar{L}_{rvsz} \cdot \bar{i}_{vsz} + \bar{L}_{rvsa} \cdot \bar{i}_{vsa} + \\ &+ \bar{L}_{rvzv} \cdot \bar{i}_{vrz} + \bar{L}_{rvav} \cdot \bar{i}_{vra} \left. \right] \quad (4) \end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned} r_r &= 2 \cdot [r_{yk} + r_c \cdot (1 - \cos 2 \cdot \pi \cdot v / z_2)]; \\ l_{\sigma r} &= 2 \cdot [m_n + m_n \cdot (1 - \cos 2 \cdot \pi \cdot v / z_2)]; \\ (\bar{L}_{kmv} &= M_{kmv} \cdot 0,5 \cdot (m_k \cdot m_n)^{0,5} \cdot e^{-j \cdot \delta \cdot k_0} \cdot e^{j \cdot \delta \cdot n_0}, \\ k &= s, sz, sa, rz, ra, r, n = s, sz, sa, rz, ra, r); \end{aligned}$$

$$\delta_{s_0} = \delta_{A_0}; \quad \delta_{sz_0} = \delta_{rz_0} = -\pi \cdot \nu / z_1; \quad \delta_{sa_0} = \delta_{ra_0} = \pi / 2;$$

$$\delta_{r_0} = 0; \quad \omega_r = d\theta / dt,$$

де  $\omega_r$  – частота обертання ротора;  $r_l$  – опір фази статора симетричного двигуна.

Дана система шести диференціальних рівнянь електричної рівноваги спільно з рівнянням механічної рівноваги описує електромагнітні і механічні перехідні процеси в симетричній асинхронній машині з врахуванням еквівалентних контурів втрат в сталі статора і ротора від вихрових струмів.

### СИСТЕМА АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ ЕЛЕКТРИЧНОЇ РІВНОВАГИ

Електричні змінні (2) представлено в системі координат, що обертаються синхронно з полем. Вони пропорційні огинаючим кривих зміни миттєвих значень в часі. В усталеному режимі вони стають постійними величинами. Миттєві ж значення струмів електричних контурів машини в цьому випадку визначаються слідуочим чином:

$$i_{sk} = I_{ms} \cdot \cos(\xi_0 \cdot t + \xi_s - 2 \cdot k \cdot \pi / 3) =$$

$$= 2^{-0,5} \cdot \left( \dot{I}_s \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi / 3} + I_s^* \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi / 3} \right),$$

$$k=3, 1, 2;$$

$$i_{szk} = I_{msz} \cdot \cos(\xi_0 \cdot t + \xi_{sz} - 2 \cdot k \cdot \pi / z_1) = 2^{-0,5} \times$$

$$\times \left( \dot{I}_{sz} \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi / z_1} + I_{sz}^* \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi / z_1} \right),$$

$$k=z_1, 1, \dots, 1, z_1-1;$$

$$i_{sak} = I_{msa} \cdot \cos(\xi_0 \cdot t + \xi_{sa} - 2 \cdot k \cdot \pi / z_1) = 2^{-0,5} \times$$

$$\times \left( \dot{I}_{sa} \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi / z_1} + I_{sa}^* \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi / z_1} \right),$$

$$k=z_1, 1, \dots, 1, z_1-1;$$

$$i_{rzk} = I_{mrz} \cdot \cos(\xi_0 \cdot t + \xi_{rz} - 2 \cdot k \cdot \pi \cdot \nu / z_2) = 2^{-0,5} \times$$

$$\times \left( \dot{I}_{rz} \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi \cdot \nu / z_2} + I_{rz}^* \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi \cdot \nu / z_2} \right),$$

$$k=z_2, 1, \dots, 1, z_2-1;$$

$$i_{rak} = I_{mra} \cdot \cos(\xi_0 t + \xi_{ra} - 2k\pi / z_2) = 2^{-0,5} \times$$

$$\times \left( \dot{I}_{ra} \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi \cdot \nu / z_2} + I_{ra}^* \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi \cdot \nu / z_2} \right),$$

$$k=z_2, 1, \dots, 1, z_2-1;$$

$$i_{rk} = I_{mr} \cdot \cos((\omega_0 - \nu \cdot \omega_r) \cdot t + \xi_r - 2 \cdot k \cdot \pi \cdot \nu / z_2) =$$

$$= 2^{-0,5} \cdot \left( \dot{I}_r \cdot e^{j \cdot (\omega_0 - \nu \cdot \omega_r) \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi \cdot \nu / z_2} + \right.$$

$$\left. + I_r^* \cdot e^{-j \cdot (\omega_0 - \nu \cdot \omega_r) \cdot t} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi \cdot \nu / z_2} \right),$$

де  $I_m, \xi, \dot{I}, I^*$  – амплітуди, початкові фази, часові комплекси, спряжені часові комплекси струмів відповідно.

Підставивши дані залежності в (2), отримаємо вирази зв'язку в усталеному режимі між часовими комплексами і симетричними складовими просторових векторів струмів і аналогічним чином напруг

$$\bar{i}_{\nu r} = (z_2/2)^{0,5} \cdot \dot{I}_r; \quad \bar{i}_{\nu sz} = (z_1/2)^{0,5} \cdot \dot{I}_{sz};$$

$$\bar{i}_{\nu sa} = (z_1/2)^{0,5} \cdot \dot{I}_{sa};$$

$$\bar{i}_{\nu rz} = (z_2/2)^{0,5} \cdot \dot{I}_{rz}; \quad \bar{i}_{\nu ra} = (z_2/2)^{0,5} \cdot \dot{I}_{ra};$$

$$\bar{i}_{1s} = (1,5)^{0,5} \cdot \dot{I}_s; \quad \bar{u}_{1s} = (1,5)^{0,5} \cdot \dot{U}_s; \quad (5)$$

де  $\dot{U}_s$  – діюче значення змінного комплексу напруги статора. Всі часові комплекси відповідають фазам з номерами 3,  $z_2, z_2, z_2, z_1, z_1$  – статора, ротора, контурів

зубців і ярм ротора та статора відповідно. Підставивши в (3), визначимо амплітуду результуючої хвилі МРС мишини

$$F_{mv} = 2^{-0,5} \cdot \left| 3 \cdot f_{sv} \cdot \dot{I}_s + z_1 \cdot (f_{szv} \cdot \dot{I}_{sz} + f_{sav} \cdot \dot{I}_{sa}) + \right.$$

$$\left. + z_2 \cdot (f_{rvz} \cdot \dot{I}_{rz} + f_{rav} \cdot \dot{I}_{ra}) + z_2 \cdot f_{rv} \cdot \dot{I}_r \right|. \quad (6)$$

Наявність зв'язку між просторовими і часовими комплексами означає об'єднання просторової і часової комплексних площин. На об'єднаній просторово-часовій комплексній площині симетричні складові просторових векторів (2) в усталеному режимі роботи у відповідному масштабі сумішуються з часовими комплексами струмів.

Перетворимо рівняння перехідного режиму (4) в систему рівнянь усталеного режиму, замінивши в них симетричні складові просторових комплексів часовими у відповідності з виразами (5), враховуючи, що останні не являються функціями часу

$$\dot{U}_s = r_s \cdot \dot{I}_s + j \cdot \omega_0 \cdot \left[ \left( l_{\sigma s} + \frac{3}{2} \cdot M_{ssv} \right) \cdot \dot{I}_s + (z_1/3)^{0,5} \cdot \left( \bar{L}_{sszv} \cdot \dot{I}_{sz} + \right. \right.$$

$$\left. + \bar{L}_{ssav} \cdot \dot{I}_{sa} \right) + (z_2/3)^{0,5} \cdot \left( \bar{L}_{srzv} \cdot \dot{I}_{rz} + \bar{L}_{srav} \cdot \dot{I}_{ra} \right) + \bar{L}_{srv} \cdot \dot{I}_r \left. \right\}$$

$$0 = r_{sz} \cdot \dot{I}_{sz} + j \cdot \omega_0 \cdot \left[ \left( l_{\sigma sz} + \frac{z_1}{2} \cdot M_{szsv} \right) \cdot \dot{I}_{sz} + (3/z_1)^{0,5} \cdot \bar{L}_{szsv} \cdot \dot{I}_s + \right.$$

$$\left. + \bar{L}_{szsav} \cdot \dot{I}_{sa} + (z_2/z_1)^{0,5} \cdot \left( \bar{L}_{szrv} \cdot \dot{I}_{rz} + \bar{L}_{szrav} \cdot \dot{I}_{ra} \right) + \bar{L}_{szrv} \cdot \dot{I}_r \left. \right\}$$

$$0 = r_{sa} \cdot \dot{I}_{sa} + j \cdot \omega_0 \cdot \left[ \left( l_{\sigma sa} + \frac{z_1}{2} \cdot M_{sasv} \right) \cdot \dot{I}_{sa} + (3/z_1)^{0,5} \cdot \bar{L}_{sasv} \cdot \dot{I}_s + \right.$$

$$\left. + \bar{L}_{sasv} \cdot \dot{I}_{sz} + (z_2/z_1)^{0,5} \cdot \left( \bar{L}_{sarv} \cdot \dot{I}_{rz} + \bar{L}_{sarv} \cdot \dot{I}_{ra} \right) + \bar{L}_{sarv} \cdot \dot{I}_r \left. \right\}$$

$$0 = r_{rz} \cdot \dot{I}_{rz} + j \cdot (\omega_0 - \nu \cdot \omega_r) \cdot \left[ \left( l_{\sigma rz} + \frac{z_2}{2} \cdot M_{rzzv} \right) \cdot \dot{I}_{rz} + \right.$$

$$\left. + (3/z_2)^{0,5} \cdot \bar{L}_{rzzv} \cdot \dot{I}_s + (z_1/z_2)^{0,5} \cdot \left( \bar{L}_{rzzsv} \cdot \dot{I}_{sz} + \bar{L}_{rzzsv} \cdot \dot{I}_{sa} \right) + \right.$$

$$\left. + \bar{L}_{rzzv} \cdot \dot{I}_r + \bar{L}_{rzzv} \cdot \dot{I}_r \right]$$

$$0 = r_{ra} \cdot \dot{I}_{ra} + j \cdot (\omega_0 - \nu \cdot \omega_r) \cdot \left[ \left( l_{\sigma ra} + \frac{z_2}{2} \cdot M_{rarv} \right) \cdot \dot{I}_{ra} + \right.$$

$$\left. + (3/z_2)^{0,5} \cdot \bar{L}_{rasv} \cdot \dot{I}_s + (z_1/z_2)^{0,5} \cdot \left( \bar{L}_{rasv} \cdot \dot{I}_{sz} + \bar{L}_{rasv} \cdot \dot{I}_{sa} \right) + \right.$$

$$\left. + \bar{L}_{rarv} \cdot \dot{I}_{rz} + \bar{L}_{rarv} \cdot \dot{I}_r \right]$$

$$0 = r_r \cdot \dot{I}_r + j \cdot (\omega_0 - \nu \cdot \omega_r) \cdot \left[ \left( l_{\sigma r} + \frac{z_2}{2} \cdot M_{rrv} \right) \cdot \dot{I}_r + \right.$$

$$\left. (z_1/z_2)^{0,5} \cdot \bar{L}_{rvsv} \cdot \dot{I}_s + (z_1/z_2)^{0,5} \cdot \left( \bar{L}_{rvsv} \cdot \dot{I}_{sz} + \bar{L}_{rvsv} \cdot \dot{I}_{sa} \right) + \right.$$

$$\left. + \bar{L}_{rvz} \cdot \dot{I}_{rz} + \bar{L}_{rvav} \cdot \dot{I}_{ra} \right]$$

Таким чином, отримана система шести алгебраїчних рівнянь відносно комплексів струмів для розрахунку робочих та пускових характеристик симетричної машини з врахуванням втрат в сталі статора і ротора. Розв'язання її не викликає ускладнень при наявності інформації про величину коефіцієнтів.

### ОТРИМАННЯ ВИРАЗІВ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ МОМЕНТІВ

Рівняння електромагнітного моменту визначимо як часткову похідну від запасу магнітної коенергії по переміщенню. Даний вираз істотно спрощується при припущенні про рівність магнітних енергії і коенергії. В цьому випадку інтеграл замінюється половиною добутку підінтегральною функцією на величину, що

стоїть під знаком диференціала. Приводом для даного припущення являється те, що, як показано в [1], при рівнях насичення магнітного кола, що відповідає експлуатаційним навантаженням, похибка не перевищує декількох відсотків. При розрахунку режиму з підвищеним рівнем насичення інтеграл у виразі електромагнітного моменту можна визначити в процесі затування струмів в обмотках машини [1].

Електромагнітний момент визначимо виразом

$$0,5[i]_l \cdot \frac{\partial(L)}{\partial\theta} \cdot [i],$$

де всі матриці відповідають матрицям системи (1). Враховуючи залежність від кута  $\theta$ , запишемо

$$\begin{aligned} M_e = & 0,5 \cdot [i_r]_l \cdot \left[ \frac{\partial(L_{rs})}{\partial\theta} \cdot [i_s] + \frac{\partial(L_{rsz})}{\partial\theta} \cdot [i_{sz}] + \right. \\ & + \frac{\partial(L_{rsa})}{\partial\theta} \cdot [i_{sa}] + [i_s]_l \cdot \left[ \frac{\partial(L_{srz})}{\partial\theta} \cdot [i_{rz}] + \frac{\partial(L_{sra})}{\partial\theta} \cdot [i_{ra}] + \right. \\ & + [i_{rz}]_l \cdot \left[ \frac{\partial(L_{rzs})}{\partial\theta} \cdot [i_{sz}] + \frac{\partial(L_{rzs})}{\partial\theta} \cdot [i_{sa}] + \right. \\ & + [i_{ra}]_l \cdot \left[ \frac{\partial(L_{rasa})}{\partial\theta} \cdot [i_{sa}] + \frac{\partial(L_{rasz})}{\partial\theta} \cdot [i_{sz}] + \right. \\ & + 0,5 \cdot [i_r] \cdot \left[ \frac{\partial(L_{sr})}{\partial\theta} \cdot [i_s] + \frac{\partial(L_{srz})}{\partial\theta} \cdot [i_{sz}] + \frac{\partial(L_{sra})}{\partial\theta} \cdot [i_{sa}] + \right. \\ & + [i_s] \cdot \left[ \frac{\partial(L_{rzs})}{\partial\theta} \cdot [i_{rz}] + \frac{\partial(L_{ras})}{\partial\theta} \cdot [i_{ra}] + \right. \\ & + [i_{rz}] \cdot \left[ \frac{\partial(L_{szz})}{\partial\theta} \cdot [i_{sz}] + \frac{\partial(L_{sarz})}{\partial\theta} \cdot [i_{sa}] + \right. \\ & + [i_{ra}] \cdot \left. \left. \frac{\partial(L_{sara})}{\partial\theta} \cdot [i_{sa}] + \frac{\partial(L_{szra})}{\partial\theta} \cdot [i_{sz}] \right] \right]. \end{aligned}$$

Для спрощення виразу електромагнітного моменту необхідно провести заміну змінних аналогічно з перетвореннями для системи рівнянь електричної рівноваги [2], приймаючи до уваги, що

$$[i_k] = [C_k] \cdot [\bar{i}_k]; \quad [\bar{i}_k] = [C_k^*] \cdot [i_k]; \quad [C_k^*] = [C_k]^{-1};$$

$$[C_k]^{-1} \cdot [L_{kn}] \cdot [C_n] = [\bar{L}_{kn}]; \quad [\bar{L}_{nk}] = [\bar{L}_{kn}^*];$$

$$j \cdot A^* - j \cdot A = 2 \cdot \text{Im}(A);$$

$$[C_r]^{-1} \cdot \frac{\partial([C_r])}{\partial\theta} \cdot [C_r] = -j \cdot v \cdot [1]; \quad \frac{\partial([C_r]^{-1})}{\partial\theta} \cdot [C_r] = j \cdot v \cdot [1]$$

де  $A$  – комплексне число;  $\text{Im}$  – уявна частина; індекси  $k, n$  приймають значення  $s, sz, sa, rz, ra, r$ . Перетворений вираз електромагнітного моменту, що дозволяє досліджувати динамічні режими, мають наступний вигляд.

$$\begin{aligned} M_e = & 2 \cdot v \cdot \text{Im}(\bar{i}_{vr}^* \cdot \bar{L}_{rvs} \cdot \bar{i}_{vs} + \bar{i}_{vr}^* \cdot \bar{L}_{rvsz} \cdot \bar{i}_{vsz} + \bar{i}_{vr}^* \cdot \bar{L}_{rvas} \cdot \bar{i}_{vsa} + \\ & + \bar{i}_{vs}^* \cdot \bar{L}_{svr} \cdot \bar{i}_{vr} + \bar{i}_{vs}^* \cdot \bar{L}_{svsz} \cdot \bar{i}_{vrz} + \bar{i}_{vs}^* \cdot \bar{L}_{svsa} \cdot \bar{i}_{vsa} + \\ & + \bar{i}_{vrz}^* \cdot \bar{L}_{rvsz} \cdot \bar{i}_{vsz} + \bar{i}_{vsa}^* \cdot \bar{L}_{rvsa} \cdot \bar{i}_{vsa} + \bar{i}_{vra}^* \cdot \bar{L}_{rvsa} \cdot \bar{i}_{vsa} + \bar{i}_{vra}^* \cdot \bar{L}_{rvsz} \cdot \bar{i}_{vsz}). \end{aligned} \quad (8)$$

Замінивши симетричні складові просторових векторів часовими комплексами отримуємо можливість розрахувати електромагнітний момент в усталеному режимі роботи з врахуванням струмів еквівалентних

контурів втрат в сталі статора і ротора від вихрових струмів

$$\begin{aligned} M_e = & v \cdot (3 \cdot z_2)^{0,5} \cdot \text{Im}(I_r^* \cdot \bar{L}_{rvs} \cdot i_s) + v \cdot (z_1 \cdot z_2)^{0,5} \cdot \left[ \text{Im}(I_r^* \cdot \bar{L}_{rvsz} \cdot i_{sz}) + \right. \\ & + \text{Im}(I_r^* \cdot \bar{L}_{rvas} \cdot i_{sa}) + v \cdot (3 \cdot z_2)^{0,5} \cdot \left[ \text{Im}(I_s^* \cdot \bar{L}_{svr} \cdot i_{rz}) + \right. \\ & + \text{Im}(I_s^* \cdot \bar{L}_{svsa} \cdot i_{ra}) + v \cdot (z_1 \cdot z_2)^{0,5} \cdot \left[ \text{Im}(I_{sz}^* \cdot \bar{L}_{svsz} \cdot i_{rz}) + \right. \\ & + \text{Im}(I_{sa}^* \cdot \bar{L}_{svsa} \cdot i_{ra}) + \text{Im}(I_{sa}^* \cdot \bar{L}_{svsz} \cdot i_{rz}) + \text{Im}(I_{sz}^* \cdot \bar{L}_{svsa} \cdot i_{ra}) \left. \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Перша складова визначає момент взаємодії струмів ротора і струмів обмотки статора; друга і третя – від взаємодії роторних струмів з еквівалентними струмами втрат в сталі зубців і ярм статора відповідно; четверта і п'ята – від взаємодії статорних струмів з еквівалентними струмами втрат в сталі зубців і ярм ротора відповідно; шоста, сьома, восьма і дев'ята – від взаємодії еквівалентних струмів втрат в сталі зубців і ярм статора і ротора між собою.

## ВИСНОВОК

Отримана система диференціальних рівнянь електричної рівноваги з урахуванням еквівалентних контурів втрат в сталі статора і ротора для комплексних змінних в системі координат, що обертаються синхронно з полем. Отримано вирази електромагнітних моментів для динамічних та статичних режимів.

Представлена математична модель дає змогу досліджувати динамічні і статичні характеристики АД з врахуванням нелінійних електромагнітних параметрів на етапі його проектування для інтенсивних режимів роботи.

## ЛІТЕРАТУРА

- [1] Войтех А.А., Попович А.Н. Моделирование переходных процессов в полюсопереключаемых асинхронных двигателях. – Киев: Наук.думка, 1989. – 152 с.
- [2] Нейман Л.П., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. Т.2. – Л.: Энергия, 1967. – 407 с.
- [3] Попович А.Н. Математическая модель для расчета рабочих характеристик асинхронного двигателя с учетом потерь в стали // Техн.електродинамика. – 1999. – №4. – С. 46-52.

Надійшла 30.08.2005