

Л. М. ЛЮБЧИК, д-р техн. наук, проф., НТУ "ХПИ", г. Харьков,
А. А. МИРОШНИЧЕНКО, ХНАГХ, г. Харьков

ДИАГНОСТИКА РАЗЛАДКИ В СТРУКТУРЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ СИНГУЛЯРНО-СПЕКТРАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

Запропонована методика діагностики зміни структури часових рядів, заснована на використанні сингулярно-спектрального аналізу. Приведені результати експериментальних досліджень на основі тестового прикладу застосування вказаної методики в задачі виявлення зміни структури полігармонійного часового ряду.

Предложена методика диагностики изменения структуры временных рядов, основанная на использовании сингулярно-спектрального анализа. Приведены результаты экспериментальных исследований на основе тестового примера применения указанной методики в задаче обнаружения изменения структуры полигармонического временного ряда.

The method of structure changing diagnostic of time series, based on singular-spectral analysis, is proposed. The results of experimental researches are presented using test example of the indicated method application in the task of structure changing detection for multi-harmonic time series.

Введение и анализ состояния проблемы. Одной из важных составляющих задачи мониторинга состояния сложных технических систем является обнаружение моментов изменения динамических свойств объекта наблюдения. Формализацией подобной проблемы является известная "задача о разладке", суть которой состоит в обнаружении моментов изменения свойств случайного процесса по наблюдаемым реализациям, в качестве которых обычно используются временные ряды наблюдений за переменными, характеризующими состояние процесса. Вопросам изучения математических моделей временных рядов сложной структуры были посвящены работы Дж. Бокса и Г. Дженкинса [1], Д. Бриллинджера [2], М. Кендалла и А. Стюарта [3,4], Н.Е Кобринского [5], Ю.П. Лукашина [6], Р. Отнеса и Л. Энкса [7], Э. Хеннана [8] и других исследователей. Математические методы решения "задачи о разладке" были рассмотрены в работах [9-11]. Необходимо отметить, что успех решения задачи во многом предопределяется удачным выбором модели временного ряда, что является самостоятельной достаточно сложной проблемой. На практике, как правило, используются достаточно простые модели типа "тренд плюс шум", либо модели авторегрессии – скользящего среднего. Их применение в тех случаях, когда "разладка" связана с изменением свойств временного ряда сложной структуры, например, волновых или хаотических процессов, может приводить к неудовлетворительным результатам.

Возникает необходимость в разработке достаточно универсальных методов обнаружения "разладок", не требующих задания точной априорной модели ряда. В настоящей работе решение указанной задачи осуществляется на основе метода сингулярно-спектрального анализа (SSA) [12].

Постановка задачи и идея метода. В настоящей работе рассматривается задача диагностики "разладки" в структуре временных рядов, состоящих из аддитивных периодических составляющих с произвольными некрратными периодами. Подобная модель позволяет описывать ряды достаточно сложной структуры, по виду подобные хаотическим процессам. Предполагается, что "разладка" связана с возникновением в структуре ряда новых гармоник с априори неизвестными параметрами. Таким образом, задача состоит в обнаружении по наблюдениям за временным рядом момента появления новых гармоник.

Для рассматриваемой задачи обосновано применение метода сингулярно-спектрального анализа [12], основанного на преобразовании одномерного временного ряда $F_N = \{f_1, \dots, f_N\}$ в матрицу X (траекторную матрицу), исследовании ее с помощью анализа главных компонент (сингулярного разложения), разложении временного ряда на аддитивные структурные компоненты и восстановлении ряда по выбранным наиболее значимым главным компонентам.

Разложение включает в себя этапы вложения (формирование траекторной матрицы при выбранной длине окна L) и сингулярного разложения (формирование собственных троек и разложение траекторной матрицы на сумму элементарных матриц). Восстановление включает в себя группировку собственных троек и разделение аддитивных компонент ряда.

В процессе сингулярного разложения формируется набор собственных троек: $\sqrt{\lambda_i}, U_i, V_i$, где i - номер собственной тройки сингулярного разложения, λ_i - собственные числа матрицы $R = XX^T$, U_i - собственные векторы матрицы $R = XX^T$ (левые сингулярные векторы), $V_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} X^T U_i$ -

факторные векторы (правые сингулярные векторы). Каждое собственное число λ_i характеризует уровень значимости структурной компоненты ряда, восстановленной по данной собственной тройке. Поскольку каждая матричная компонента сингулярного разложения полностью определяется соответствующей сингулярной тройкой $(\sqrt{\lambda_i}, U_i, V_i)$, то чем больше сингулярное число $\sqrt{\lambda_i}$ в собственной тройке, тем больше вклад компоненты ряда, восстановленной по данной собственной тройке.

Очевидно, что изменение структуры ряда приводит к изменению спектра матрицы $R = XX^T$. Таким образом, введенные выше сингулярные числа

являются информативными параметрами, которые и предлагается использовать для обнаружения моментов появления новых компонент. Достоинством такого подхода является отсутствие необходимости задания априорных моделей анализируемых компонент временного ряда.

Методика решения задачи. Основываясь на вышесказанном, предлагается следующая методика диагностики "разладки". Выбираем диапазон просмотра исследуемого временного ряда D . Выбор диапазона осуществляется на основе предварительного анализа временного ряда или использования априорной информации о периодах гармонических составляющих ряда. Желательно выбрать длину диапазона просмотра, как минимум вдвое превосходящую наибольший период.

Далее с помощью метода сингулярно-спектрального анализа проводится разложение фрагмента временного ряда, попавшего внутрь диапазона просмотра, и анализируется полученный в результате разложения набор собственных троек. На каждом последующем шаге границы диапазона просмотра смещаются на один элемент временного ряда (рис.1). Границы диапазона просмотра устанавливаются следующим образом: на первом шаге $t \in [1; D]$, на i -м шаге $t \in [i; D+i-1]$.

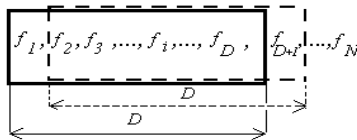


Рис.1. Установление границ диапазона просмотра

Поскольку каждая собственная тройка однозначно определяет компоненту разложения, то анализ изменений в структуре собственных троек сингулярного разложения фрагмента ряда внутри диапазона просмотра дает возможность выявить структурные изменения временного ряда. Так появление новых собственных троек свидетельствуют о том, что во временном ряду появились новые структурные составляющие. Следует учитывать, что каждая гармоническая компонента порождает две собственные тройки с близкими сингулярными числами, поэтому о появлении новой гармонической составляющей в структуре ряда свидетельствует новая пара собственных троек в сингулярно-спектральном разложении очередного фрагмента ряда внутри диапазона просмотра. Исчезновение собственных троек в сингулярно-спектральном разложении свидетельствует о том, что соответствующие структурные компоненты более не присутствуют во временном ряду. Увеличение или уменьшение значений сингулярных чисел в собственных тройках говорит об изменении значимости соответствующих им компонент разложения. Если речь идет о гармонических структурных составляющих временного ряда, то изменение значений

сингулярных чисел может свидетельствовать об изменении амплитуды колебаний (об усилении или уменьшении воздействующего фактора, обуславливающего появление компоненты в структуре временного ряда).

Извлечение из диагностируемого ряда структурных компонент, имеющих большой уровень значимости, позволяет получить ряд остатков, анализ которых позволяет получить дополнительную информацию о моменте структурной "разладки".

Практическая реализация изложенной методики представлена на приведенном ниже тестовом примере.

Тестовый пример. В качестве тестового примера в данной работе по описанной методике исследуется временной ряд $F_N = \{f_1, \dots, f_N\}$ длины $N = 91$, представленный на рис.2.

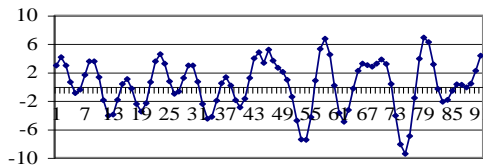


Рис.2. Исследуемый временной ряд

Исследуемый временной ряд получен путем сложения двух следующих гармоник: $y_1 = 3 \sin(\frac{2\pi}{7}t)$, $y_2 = 2 \sin(\frac{2\pi}{20}t)$, $t = 1, 2, \dots, 91$ (рис.3). В момент времени $t = 46$ в исследуемом временном ряду происходит структурное изменение, выраженное в появлении третьей структурной составляющей $y_3 = 5 \sin(\frac{2\pi}{11}t)$, $t = 46, \dots, 91$ (рис.3).

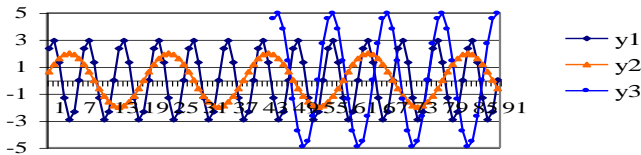


Рис. 3. Структурные компоненты временного ряда F_N

Для анализа структурных изменений выбрана длина диапазона просмотра $D = 40$, длина окна для сингулярно-спектрального разложения фрагмента ряда внутри диапазона просмотра выбрана $L = D/2 = 20$. Сингулярно-спектральное разложение исследуемого ряда проводилось с помощью программного продукта "Caterpillar" [13]. Результаты последовательных вычислений собственных чисел сингулярного разложения представлены на рис.4.

Анализируя результаты, представленные на рис. 4, следует отметить, что до момента времени попадания в диапазон просмотра точки "разладки" ($t = 46$), наблюдались две пары собственных троек с номерами 1, 2 и 3, 4 (и собственных чисел соответственно), определяющих структурные компоненты временного ряда y_1 и y_2 . При попадании точки "разладки" в диапазон просмотра появляется новая пара собственных чисел с номерами 5, 6 (и собственных троек соответственно), а также наблюдается "разладочная" (или "сигнальная") компонента, появление которой свидетельствует о том, что в диапазон просмотра попал момент времени возникновения структурного изменения временного ряда. На рис. 4 "разладочной" компоненте соответствует группа собственных троек с номерами от 7 до 20 (сумма собственных чисел $\lambda_i \neq 0, i = 7, \dots, 20$). Следует отметить, что при выходе точки "разладки" из диапазона просмотра "разладочная" компонента более не наблюдается (собственные числа $\lambda_i = 0, i = 7, \dots, 20$).

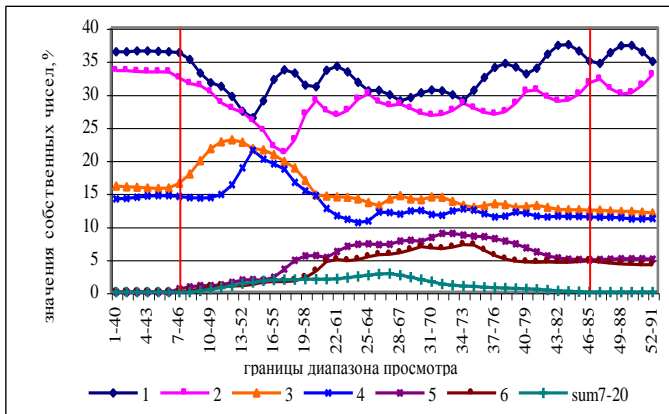


Рис.4. Динамика собственных чисел сингулярного разложения

В процессе перемещения окна просмотра пока оно содержит точку "разладки", в связи с появлением новой компоненты y_3 , изменяются уровни значимости компонент y_1 и y_2 . При выходе точки "разладки" из диапазона просмотра, расположение структурных компонент в зависимости от уровня значимости (выражено в значениях собственных чисел) меняется. На первое место выходит новая структурная компонента y_3 (имеет наибольшую амплитуду $A = 5$ и соответственно наибольший уровень значимости - λ_1, λ_2), далее следует компонента y_1 ($A = 3, \lambda_3, \lambda_4$) и y_2 ($A = 2, \lambda_5, \lambda_6$) (рис.4).

Результаты применения методики определения момента времени возникновения "разладки" путем извлечения значимых структурных компонент для исследуемого временного ряда при диапазоне просмотра $t \in [9, 48]$ приведены на рис.5 (а, б). Извлечение из исходного ряда данных структурной компоненты y_1 (рис.5а), дает ряд остатков (рис.5б), анализ которого позволяет отчетливо идентифицировать момент структурной "разладки". В приведенном тестовом примере это точка, соответствующая моменту времени $t = 46$ (рис.5б).

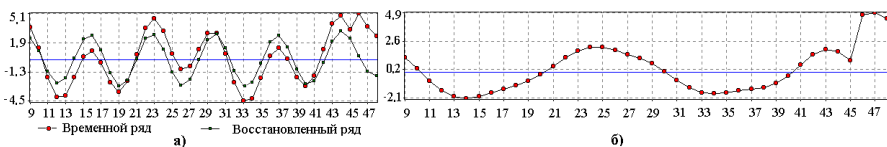


Рис. 5. а). Восстановление исходного временного ряда по первой паре собственных троек (извлечение структурной компоненты y_1)
 б). Ряд остатков после извлечения структурной компоненты y_1

Выводы. На основании полученных результатов экспериментальных исследований можно сделать вывод об эффективности применения изложенной методики диагностики "разладки" в структуре временных рядов на основе анализа собственных чисел сингулярно-спектрального разложения. При этом можно не только идентифицировать структурные изменения временного ряда, но и установить момент времени их возникновения.

Список литературы: 1. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. - М.: Мир, 1974. - 197с. 2. Бриллинджер Д.Р. Временные ряды. Обработка данных и теория. / Пер. с англ. А.В. Годлинского и др; Под ред. А.Н. Колмогорова. - М.: Мир, 1980. - 536с. 3. Кендалл М. Дж., Стюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. / Пер. с англ. Э.Л. Пресмана, В.И. Ротая; Под ред. А.Н. Колмогорова, Ю.В. Прохорова. - М.: Наука, 1976. - 736с. 4. Кендалл М. Дж., Стюарт А. Статистические выводы и связи. / Пер. с англ. Л.И. Гальчука, А.Т. Терехина / Под ред. А.Н. Колмогорова. - М.: Наука, 1973. - 899с. 5. Кобринский Н.Е. Информационные фильтры в экономике. Анализ одномерных временных рядов. - М.: Статистика, 1978, - 287 с., ил. 6. Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования. - М.: Статистика, 1979. - 254с. 7. Отнес Р., Энксон Л. Прикладной анализ временных рядов. Основные методы. / Пер. с англ. В.И. Хохлова; Под ред. Журбенко. - М.: Мир, 1982. - 428с. 8. Хеннан Э. Многомерные временные ряды. / Пер. с англ. А. С.Холево; Под ред. Ю.А. Розанова. - М.: Мир, 1974. - 576с. 9. Ширяев А.Н. Статистический последовательный анализ. Оптимальные правила остановки. Изд. 2-е перераб. М.: Наука, 1976, - 272 с. 10. Никифоров И.В. Последовательное обнаружение изменения свойств временных рядов. М.: Наука, 1983, - 199 с. 11. Дарховский Б.С. Непараметрические методы в задачах о разладке случайной последовательности. // Статистика и управление случайными процессами. - М.: Наука, 1989.- С. 57-70. 12. Главные компоненты временных рядов: метод «Гусеница» // Под ред. Д.Л. Данилова, А.А. Жигляевского. СПб: Пресском, 1997. 13. Программный продукт "Caterpillar", <http://www.gistatgroup.com>

Поступила в редколлегию 10.05. 07