МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

І. Л. Красніков, А. К. Бабіченко,
А. І. Дзевочко, А. М. Переверзєва

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТА СИСТЕМ

Навчально-методичний посібник
для студентів спеціальності
174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані
технології та робототехніка»

Затверджено
редакційно-видавничою
радою НТУ «ХПІ»
протокол № 1 від 16.02.23

Харків
2023

УДК 681.5.004 (95)
К63

Затверджено редакційно-видавничою радою НТУ «ХПІ».
(протокол № 1 від 16 лютого 2023 р.)

Авторський колектив:
І. Л. Красніков, А. К. Бабіченко, А. І. Дзевочко, А. М. Переверзєва

Рецензенти:

В. О. Панасенко, д-р техн. наук, професор, начальник науково-технічного відділу ДУ «Державного науково-дослідного інституту основної хімії»;

А. О. Зуєв, канд.техн.наук, доцент, завідувач кафедри автоматики та управління в технічних системах Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут"

К63 **Комп'ютерне моделювання процесів та систем:** навч.-метод. посіб. для студентів спец. 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» / уклад. І. Л. Красніков, А. К. Бабіченко, А. І. Дзевочко, А. М. Переверзєва. − Харків. Видавець : О. А. Мірошниченко, 2023. − 108 с.

ISBN 978-617-8130-31-2.

Складається з лабораторних робіт для практичного освоєння методів комп'ютерного моделювання об'єктів керування типових технологічних процесів, що відповідають дисципліні «Комп'ютерне моделювання процесів та систем». Супроводжується необхідними теоретичними положеннями для виконання лабораторних робіт у середовищі пакета прикладних програм МАТЛАБ.

Навчально-методичний посібник призначено для здобувачів вищої освіти які навчаються за спеціальністю 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка».

УДК 681.5.004 (95)

ISBN 978-617-8130-31-2

© Колектив авторів, 2023
© НТУ «ХПІ», 2023

ЗМІСТ

ВСТУП

Комп'ютерне моделювання є методом розв'язання задач аналізу або синтезу досліджуваної системи, процесу та явища, що базується на використанні обчислювальної техніки. Одним із найбільш ефективних методів створення та дослідження систем є математичне їх моделювання. Сутність комп'ютерного моделювання полягає у визначенні кількісних і якісних результатів з використанням створеної математичної моделі. Така комп'ютерна модель процесу та системи має якомога повніше відображати всі основні фактори і взаємозв'язки, що характеризують реальні ситуації, критерії та обмеження. До того ж модель має бути настільки універсальною, щоб охоплювати якнайширше коло близьких за призначенням об'єктів, та настільки ж простою, щоб сприяти виконанню необхідних досліджень із мінімальними витратами.

Лабораторні роботи наведені у даному посібнику дозволяють студентам отримати практичні навички комп'ютерного моделювання технологічних об'єктів керування і процесів у програмному середовищі MatLab. У посібнику наведені основні теоретичні положення, необхідні для виконання лабораторних робіт. Дані приклади їх виконання.

Виконання лабораторних робіт передбачає оформлення звіту, який має включати такі складові: назву та мету лабораторної роботи, опис методики моделювання, лістинги програм, результати досліджень у вигляді графіків чи таблиць та висновки.

Навчально-методичний посібник призначений для здобувачів вищої освіти денної та заочної форм навчання спеціальности 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка».

Лабораторна робота №1
РІШЕННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЧИСЕЛЬНИМИ МЕТОДАМИ

Мета роботи: отримання навичок рішення диференціальних рівнянь об'єктів керування в системі *MatLab* чисельними методами.

1.1 Загальні положення

Математичні моделі динаміки об'єктів керування зручно представляти у вигляді лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + ... + a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 x(t). \tag{1.1}$$

Диференціальні рівняння виду (1.1) є звичайними диференціальним рівнянням (ЗДР).

Задача розв’язку ЗДР з заданими початковими умовами називається ***задачею Коші***.

Задача Коші для ЗДР *n*-го порядку полягає в знаходженні функції, що задовольняє диференціальному рівнянню виду

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', ..., y^{(n\text{-}1)}). \tag{1.2}$$

і початковим умовам

$$y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1, y''(t_0) = y_2, ..., y^{n-1}(t_0) = y_{n-1}.$$

Перед рішенням рівняння (1.1) має бути записано у вигляді системи ЗДР першого порядку

$$y'(t) = F(t, y),\ y(0) = y_0, \tag{1.3}$$

де y – функція, а y_0 – її початкове значення.

Якщо задана система диференціальних рівнянь деякі (або всі) рівняння якої мають порядок другий і вище, то перед рішенням в *MatLab* її слід привести до виду 1.3.

Для розв'язку задачі Коші (1.2) *MatLab* пропонує сім функцій: ode23, ode45, odell3, odel5s, ode23s, ode23t і ode23tb. Методика їх використання однакова, включаючи способи завдання вхідних і вихідних аргументів. У загальному випадку виклик функції для розв'язку задачі Коші проводиться таким чином

[T, Y] = solver(odefun, ,[t_0, t_{end}], y_0, options),

де solver − одна з семи функцій *MatLab*, odefun – функція, що реалізує обчислення функції $F(t, y)$ − правої частини системи рівнянь (1.2). Функція F повинна мати не менше двох вхідних аргументів;

$[t_0,\ t_{end}]$ − діапазон зміни незалежної змінної (початкове і кінцеве значення);

y_0 − вектор початкових значень функції, що досліджується;

options – необов’язковий параметр, що задає точність обчислень (за замовченням абсолютна точність розрахунків дорівнює 10^{-6}).

Функція solver повертає масив *T* з координатами значень незалежної змінної, в яких знайдено рішення, і матрицю рішень *Y*, кожен стовпець якої є значенням компоненти функції ***y*** рішення в знайдених точках. Значення функцій розташовані по стовпцях матриці, в першому стовпці − значення першої шуканої функції, в другому − другої і т. д. Кожен рядок матриці *Y* представляє вектор рішення, який відповідає відповідному значенню незалежної змінної з вектора *T*.

1.2 Порядок виконання роботи

Для вирішення рівнянь виду (1.1) найбільш ефективними є процедури, що реалізують метод Рунге-Кутта четвертого-п’ятого порядку точності. Цей метод є найпоширенішим на практиці, так як забезпечує високу точність і в той же час відрізняється порівняльною простотою. Для рішення диференціальних рівнянь і систем цим методом в *MatLab* використовується функція ode45.

1.2.1 Алгоритм методу Рунге-Кутта для диференціального рівняння першого порядку

Передбачаються заданими рівняння $y' = f(x, y)$, початкова умова $y(x_0) = y_0$ і відрізок інтегрування $[x_0; x_0 + a]$.

Крок 1. Задаємо число n точок поділу відрізка $[x_0; x_0 + a]$ та обчислюємо крок $h = \frac{a}{n}$. Вважаємо відомими x_0, y_0 та переходимо до кроку 2.

Крок 2. Нехай знайдені x_k, y_k. Визначаємо

$$a_{1k} = f(x_k; y_k),\ a_{2k} = f(x_k + \frac{h}{2}; y_k + a_{1k}\frac{h}{2}),$$

$$a_{3k} = f(x_k + \frac{h}{2}; y_k + a_{2k}\frac{h}{2}),\ a_{4k} = f(x_k + h; y_k + a_{3k}h),$$

$$a_k = \frac{1}{6}\left(a_{1k} + 2a_{2k} + 2a_{3k} + a_{4k}\right),$$

$$y_{k+1} = y_k + a_k h,\ x_{k+1} = x_k + h.$$

Якщо $x_{k+1} = x_0 + a$ при *(k+1=n),* то процес закінчений. Числа $y_0, y_1, ..., y_n$ представляють наближені значення шуканого розв’язку в точках $x_0, x_1, ..., x_n$.

Якщо ж $x_{k+1} < x_0 + a$ при *(k+1<n)*, то повторюємо крок 2, вважаючи вихідними значеннями x_{k+1}, y_{k+1}.

Приклад 1. **Рішення ЗДР 1-го порядку у пакеті *MatLab***

Розв'язати диференціальне рівняння, що описує об'єкт керування аперіодичною ланкою першого порядку.

Вихідне рівняння має вигляд:

$$Ty'(t) + y(t) = kx(t)\,.$$

Для розв'язку в *MatLAB* рівняння потрібно перетворити до вигляду:

$$y'(t) = \frac{kx(t) - y(t)}{T},$$

або при одиничному вхідному впливі $x(t)=1$ отримаємо наступний вигляд рівняння

$$y'(t) = \frac{k - y(t)}{T}.$$

Створюємо функцію *MatLab*. Вона повинна містити перший аргумент − ім'я незалежної змінної, навіть якщо він не використовується при формуванні функції.

```
function dy=odefn1(t,y);
global k T
dy=(k-y)/T;
```

Для розв'язання задачі Коші використовуємо наступний код.

```
 function primer1
```

```
global k T
k=0.5;
T=20;
[t,Y]=ode45(@odefn1, [0, 100], 0);
plot(t,Y); grid on
xlabel('t,c')
ylabel('y')
```

Розв'язок отримуємо у вигляді графіка (рис.1.1).

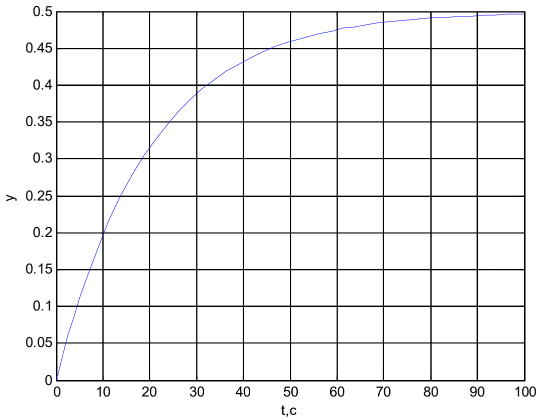


Рис. 1.1. До прикладу 1

Приклад 2. **Рішення ЗДР 2-го порядку у пакеті *MatLab***

Вихідне рівняння, що описує об'єкт керування другого порядку має вигляд:

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + y(t) = kx(t).$$

Для розв'язку в *MatLAB* потрібно перетворити диференціальне рівняння 2-го порядку до системи двох диференціальних рівнянь 1-го порядку.

Позначимо $y_1(t) = y(t),\ y_2(t) = y'(t)$.

Переходимо до наступної задачі

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_2(t) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = \dfrac{kx(t)}{a_2} - \dfrac{y_1(t)}{a_2} - \dfrac{a_1 y_2(t)}{a_2} \end{cases} \qquad (1.4)$$

Задавши нульові початкові умови $y_1(t) = 0,\ y_2(t) = 0$ отримуємо задачу Коші.

Створюємо функцію, яка обчислює праву частину системи рівнянь (1.4). При одиничному вхідному впливі $x(t)$=1.

```
function F=pr2(t,y)
global a1 a2 k
F=[y(2);k*1/a2-y(1)/a2-(a1/a2)*y(2)]
```

Код рішення знаходиться у функції *primer*2

```
function primer2
global a1 a2 k
k=0.5;
T1=30;
T2=100;
a2=T1*T2;
a1=T1+T2;
[t,y] = ode45(@pr2,[0 300],[0 0]);
plot(t,y);
grid on
```

Розв’язок отримуємо у вигляді графіка (рис.1.2).

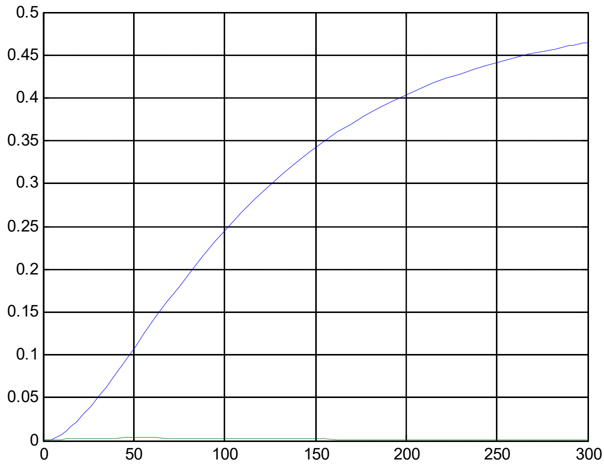


Рис. 1.2. До прикладу 2

1.3 Завдання до виконання лабораторної роботи

Розв’язати задачу Коші для рівнянь. Рішення представити у вигляді графіка.

1) 1. $z''(t)+\dfrac{1}{5}z'(t)+z(t)=0$, початкові умови $z(0)=0,\ z'(0)=1$

2) 2. $x''(t)+x^3(t)=\sin(t)$, початкові умови $x(0)=0,\ x'(0)=0$

3) 3. Розв’язати задачу Коші для системи рівнянь

$$\begin{cases} x'(t)=y(t) \\ y'(t)=-x^3(t)+x(t) \end{cases}$$ початкові умови $x(0)=0, y(0)=0.1$

Контрольні питання

1) Що таке звичайне диференціальне рівняння?

2) Як формулються задача Коші?

3)Які початкові умови використовуються в задачі Коші?

4) Як розв’язати ЗДР поряку вище першого?

Лабораторна робота № 2

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛООБМІННОГО АПАРАТУ ТИПУ «ПЕРЕМІШУВАННЯ - ПЕРЕМІШУВАННЯ»

Мета роботи: Вивчення методики комп'ютерного моделювання теплообмінного апарату із зосередженими параметрами та отримання практичних навичок роботи в системі *MatLab.*

2.1 Загальні положення

Теплообмінні апарати є невід'ємними елементами технологічних схем в багатьох галузях промисловості. Найбільш поширені рекуперативні теплообмінні апарати, в яких процес передачі тепла здійснюється крізь металеву стінку.

Математичний опис процесу переносу тепла в теплообмінних апаратах має враховувати зміну температури теплоносіїв у часі, обумовлену, по-перше, рухом потоку, і, по-друге, теплопередачею.

Математичну модель теплообмінника можна спростити, якщо зробити припущення, що структури потоків теплоносіїв відповідають гідродинамічним моделям ідеального витіснення або ідеального перемішування.

Якщо припустити, що структура потоків обох теплоносіїв відповідає моделі ідеального перемішування, то за основу математичної моделі можна вибрати гідродинамічну модель такого виду:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\upsilon}{V}(C_{\text{вх}} - C), \qquad (2.1)$$

де C – концентрація; υ – об'ємна швидкість потоку; V – об'єм зони ідеального перемішування.

Замінивши в рівнянні (2.1) концентрацію C на температуру T і помноживши ліву і праву частини рівняння на величину теплопровідності c_T і густини ρ, отримаємо рівняння, що враховує зміну температури внаслідок руху теплоносія:

$$Vc_T\rho\frac{dT}{dt} = \upsilon c_T\rho(T_{\text{вх}} - T)\,. \tag{2.2}$$

Щоб врахувати зміну температури внаслідок теплопередачі необхідно розрахувати інтенсивність теплообміну в реакційному об'ємі Vq_T.

$$Vc_T\rho\frac{dT}{dt} = \upsilon c_T\rho(T_{\text{ВХ}} - T) + Vq_T\,. \tag{2.3}$$

Для рекуперативних теплообмінників величина Vq_T розраховується за такою формулою

$$Vq_T = kF\overline{\Delta T}_{\text{ср}}\,, \tag{2.4}$$

де k – коефіцієнт теплопередачі крізь стінку;

F – поверхня теплопередачі;

$\overline{\Delta T}_{\text{СР}}$ − середня різниця температур.

Схема теплообмінника типу «перемішування - перемішування» наведена на рис. 2.1.

З урахуванням вищесказаного математична модель рекуперативного теплообмінника типу «перемішування-перемішування» має наступний вигляд:

$$
\begin{cases}
V_1 c_{1T} \rho_1 \dfrac{dT_1}{dt} = \upsilon_1 c_{1T} \rho_1 (T_{1H} - T_1) - kF(T_1 - T_2), \\
V_2 c_{2T} \rho_2 \dfrac{dT_2}{dt} = \upsilon_2 c_{2T} \rho_2 (T_{2H} - T_2) + kF(T_1 - T_2),
\end{cases} \tag{2.5}
$$

де T_1 и T_2 мають постійні значення в кожній точці об'ємів ідеального перемішування. $T_{1к}= T_1;\ T_{2к}= T_2$.

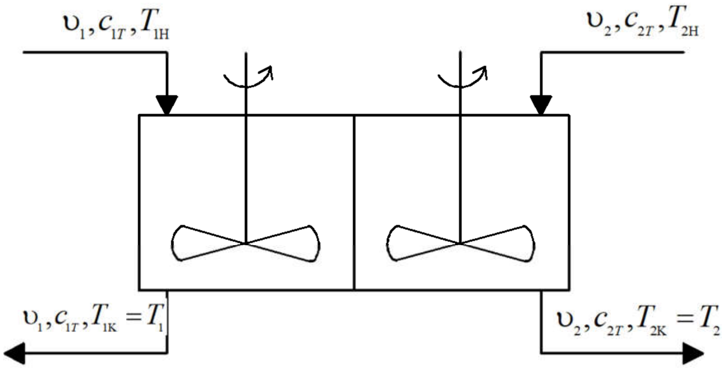


Рис. 2.1. Схема теплообмінnику типа «перемішування - перемішування»

2.2 Порядок виконання роботи

1) Оберіть індивідуальні дані із таблиці вихідних даних.

2) Запишить систему рівнянь математичної моделі теплообмінника для стаціонарного режиму та отримайте початкові умови температур гарячого і холодного теплоносіїв на виході теплообмінника.

3) Приведіть математичну модель теплообмінника (2.5) до вигляду задачі Коши.

4) Розв'яжить отриману систему рівнянь методом Рунге-Кутта 4-5 порядку точності за допомогою функції ODE45 у *MatLab* (див. Лабораторну роботу №1).

5) Отримайте перехідні характеристики теплообмінника за каналами:

«витрата гарячого теплоносія – температура гарячого теплоносія на виході», «витрата холодного теплоносія – температура гарячого теплоносія на виході».

6) Розрахуйте коефіцієнти підсилення за кожним із каналів.

2.3 Приклад виконання лабораторної роботи

Вихідні дані для моделювання:

В протиточному кожухотрубному теплообміннику відбувається охолодження суміші «бензол + толуол». Холодний теплоносій – вода. Приймемо індекс «1» для гарячого теплоносія (бензол + толуол), індекс «2» − для холодного теплоносія (вода).

- начальна температура суміші на вході $T_{1H} = 115^0 C$;

- начальна температура хладоагента (води) на вході $T_{2H} = 10^0 C$;

- c_{1T}=3175 Дж/(кг град) і c_{2T}=3140 Дж/(кг град) – питомі теплоємності суміші і води відповідно;

- витрата гарячого теплоносія $\upsilon_1 = 4{,}12 \times 10^{-3}$ м^3/с;

- витрата води $\upsilon_2 = 5{,}43 \times 10^{-3}$ м^3/с;

- густина суміші $\rho_1 = 850$ кг/м^3,

- густина води $\rho_2 = 920$ кг/м^3;

- поверхня теплопередачі $F = 4$ м^2;

- коефіцієнт теплопередачі $k = 4360$ Вт/(м^{2}град);

- об’єм міжтрубного простору V_1=2,5 м^3;

- об’єм трубного простору V_2=2,5 м^3.

Для розв’язання системи рівнянь (2.5) приводимо його до стандартного виду задачі Коши

$$
\begin{cases}
\dfrac{dT_1}{dt} = \dfrac{\upsilon_1}{V_1}(T_{1H} - T_1) - \dfrac{kF}{V_1 c_{1T}\rho_1}(T_1 - T_2) \\
\dfrac{dT_2}{dt} = \dfrac{\upsilon_2}{V_2}(T_{2H} - T_2) + \dfrac{kF}{V_2 c_{2T}\rho_2}(T_1 - T_2)
\end{cases}
\tag{2.6}
$$

Початкові умови, тобто температури теплоносіїв на виході теплообмінника в сталому стані $T_{1K} = T_1$; $T_{2K} = T_2$ отримуємо із системи рівнянь теплообмінника (2.5) для стаціонарного режиму

$$
\begin{cases}
\upsilon_1 c_{1T}\rho_1 (T_{1H} - T_1) - kF(T_1 - T_2) = 0 \\
\upsilon_2 c_{2T}\rho_2 (T_{2H} - T_2) + kF(T_1 - T_2) = 0
\end{cases}
\tag{2.7}
$$

Розв'язуючи систему рівнянь (2.7) відносно невідомих T_1 и T_2 отримуємо початкові умови $T_1(0)$ и $T_2(0)$.

Приклад розв'язання системи лінійних рівнянь в *MatLab*

$$
\begin{cases}
5x_1 - 2x_2 = -50 \\
4x_1 + 2x_2 = 5
\end{cases}
$$

A=[5 -2;4 2];

b=[-50;5];

x=inv(A)*b

```
function klab2 %знаходження початкових умов теплообмінника
T1_vx=115; T2_vx=10;
ro1=850; ro2=920;
ct1=3175; ct2=3140;
G1=4.12e-3; G2=5.43e-3;
K=4360;
F=4;
A1=G1*ro1*ct1;
A2=G2*ro2*ct2;
B=K*F;
```

```
Y=[-A1-B B;B -A2-B];
X=[-A1*T1_vx;-A2*T2_vx];
x=inv(Y)*X
```

В результаті розрахунку отримуємо вектор початкових умов (температури гарячого і холодного теплоносіїв на виході)

```
x =
    70.2502
    41.7200
```

Математична модель теплообмінника (2.6) являє собою систему звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) з постійними коефіцієнтами. Рішення таких систем можна проводити чисельними методами, наприклад за допомогою функції ODE45 (див. Лабораторну роботу №1).

Листинг програми моделювання теплообмінного апарату наведено нижче

```
global a1 b1 a2 b2 T1_vx T2_vx;
tk=2000; %час інтегрування
%Початкові умови
T1_0=70.25;%Температура холодного теплоносія на виході
T2_0=41.72;%Температура гарячого теплоносія на виході
%Вихідні дані
T1_vx=115; %начальна температура гарячого теплоносія на вході
T2_vx=10; %начальна температура холодного теплоносія на вході
ro1=850; ro2=920;% густина
ct1=3.175e3; ct2=3.14e3;% питомі теплоємності
G1=4.12e-3; G2=5.43e-3;% витрати холодоагентів
K=4360;%коефіцієнт теплопередачі
F=4;%поверхня теплопередачі
V=2.5; % об’єм зони ідеального перемішування
a1=G1/V; a2=G2/V;
b1=K*F/(ro1*ct1*V); b2=K*F/(ro2*ct2*V);
[time,T]=ode45(@func4_T,[0 tk],[T1_0 T2_0]);
%plot(time,T(:,2),'LineWidth',2.0);
plot(time,T,'LineWidth',2.0)
```

```
xlabel('Час, с','FontSize',14)
ylabel('Температура, оС','FontSize',14)
title('Зміна температури теплоносіїв на виході
теплообмінника','FontSize',14)
grid on
hold on
gtext('T1','FontSize',14),gtext('T2','FontSize',14)
```

Функція для розрахунку правих частин системи диференціальних рівнянь (2.6)

```
function [ dT ] = func4_T(time,T)
global a1 b1 a2 b2 T1_vx T2_vx;
dT=[a1*(T1_vx-T(1))+b1*(T(2)-T(1));a2*(T2_vx-
T(2))+b2*(T(1)-T(2))]
end
```

Результати розрахунку роботи теплообмінника у стаціонарному режимі наведені на рис.2.2.

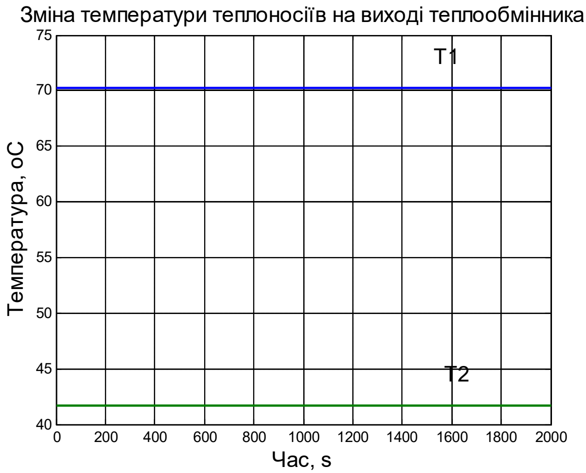


Рис.2.2. Стаціонарний режим роботи теплообмінника

Отримуємо перехідні характеристики за каналами: «витрата гарячого теплоносія – температура гарячого теплоносія на виході» та «витрата гарячого теплоносія – температура холодного теплоносія на виході».

Для цього збільшуємо витрату гарячого теплоносія на 30%: `G1=1.3*4.12e-3.` Отримані перехідні характеристики наведені на рис.2.3.

Перехідна характеристика теплообмінника за каналом «витрата холодного теплоносія на вході – температура гарячого теплоносія на виході», яка отримана при збільшенні витрати холодного теплоносія на 30%, наведена на рис.2.4.

Розрахуємо коефіцієнти підсилення за кожним з каналів:

за каналом «витрата гарячого теплоносія – температура гарячого теплоносія на виході»

$$k_{G1T1} = \frac{\Delta T_1}{\Delta G_1}.$$

$$k_{G1T1} = \frac{76,8-70}{1,3*0,00412\text{-}0,00412} = 5501 \ \frac{{}^0\text{C}}{\text{м}^3/\text{с}}$$

Коефіцієнти підсилення у безрозмірному виді

$$k_{G1T1} = \frac{T1\text{к} - T1\text{н}}{T1\text{н}} \frac{G1\text{н}}{G1\text{к} - G1\text{н}}.$$

$$k_{G1T1} = \frac{76,8-70}{70} \frac{0,00412}{1.3*0.00412-0.00412} = 0,32$$

за каналом «витрата холодного теплоносія – температура гарячого теплоносія на виході»

$$k_{G_2T_1} = \frac{67-70}{70} \cdot \frac{0,00543}{1.3 \cdot 0,00543 - 0,00543} = -0,14.$$

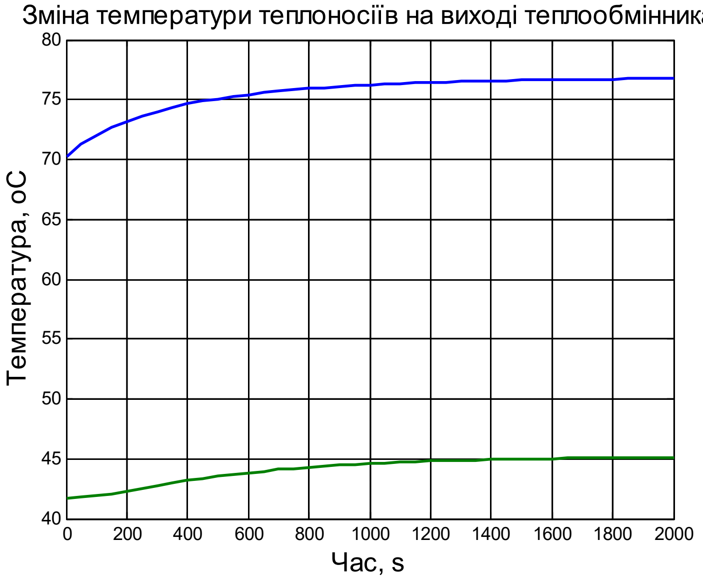


Рис.2.3. Перехідні характекристики теплообмінника при збільшенні витрати гарячого теплоносія

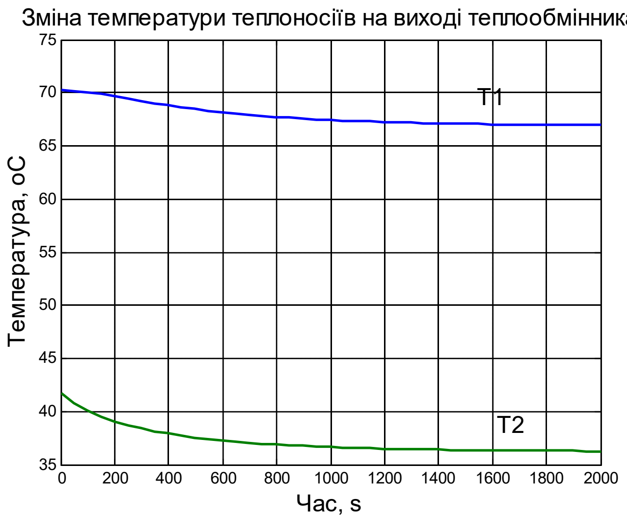


Рис.2.4. Перехідні характекристики теплообмінника при збільшенні витрати холодного теплоносія

Контрольні питання

1) Які існують типові гідродинамічні моделі?

2) Які гідродинамічні моделі є математичними моделями із зосередженими параметрами?

3) Які початкові умови використовуються при моделюванні теплообмінника «перемішування – перемішування»?

4) Що показує коефіцієнт підсилення теплообмінного апарату за певним каналом?

Вихідні дані для виконання лабораторної роботи роботи 2

№ вар.	V_1, м^3	V_2, м^3	F, м^2	ρ_1, ρ_2 кг/м^3	c_{1T}, c_{2T}, Дж/(кг град)	υ_1, υ_2, м^3/с	T_{1H}, °С	T_{2H}, °С	k, Вт/(м^{2}град)
1	1,1	0,8	4,4	800	4120	$4,5 \cdot 10^{-3}$	250	10	4360
2	1,5	1,3	3,2	612	5220	$3,18 \cdot 10^{-3}$	160	15	3650
3	2,5	2,2	5,5	200	7080	$5,23 \cdot 10^{-3}$	180	18	5650
4	1,5	2,8	2,4	710	4050	$3,91 \cdot 10^{-3}$	150	10	2020
5	2,1	1,4	4,5	100	9140	$6,88 \cdot 10^{-3}$	120	10	1110
6	0,8	0,5	3,8	300	6380	$4,66 \cdot 10^{-3}$	430	15	3470
7	1,2	0,9	6,5	520	4970	$7,88 \cdot 10^{-3}$	260	12	5720
8	5,2	0,9	2,5	800	4120	$4,51 \cdot 10^{-3}$	340	12	4590
9	6,5	0,9	4,5	612	5220	$3,18 \cdot 10^{-3}$	410	15	3210
10	4,6	0,9	3,6	200	7080	$5,23 \cdot 10^{-3}$	270	10	6320

Лабораторна робота № 3
МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛООБМІННОГО АПАРАТУ ТИПУ «ТРУБА В ТРУБІ»

Мета роботи: Вивчення методики моделювання теплообмінного апарату з розподіленими параметрами та отримання практичних навичок роботи в системі *MatLab*

3.1 Загальні положення

В теплообміннику типу «труба в трубі» гарячий і холодний теплоносії можуть рухатися паралельно (прямотоком), або назустріч один одному (протитоком). Структура потоків в теплообміннику типу «труба в трубі» відповідає режиму ідеального витіснення.

Модель ідеального витіснення. В основі моделі лежать наступні припущення:

• сталість температури у поперечному перерізі труби;

• відсутність поздовжнього перемішування.

Математичний опис моделі має такий вигляд

$$S_B \rho c_T \frac{dT}{dt} = -\upsilon \rho c_T \frac{dT}{dl} \pm \frac{F}{L} K_T \Delta T \,, \tag{3.1}$$

де S_B − площа поперечного перерізу, м^2; L − довжина зони ідеального витіснення, м; l − просторова координата, що змінюється від 0 до L; ρ − густина теплоносія, кг/м^3; c_T − питома теплоємність теплоносія, Дж/(кг град); υ − об'ємна швидкість потоку, м^3/с; F − поверхня теплообміну, м^2; K_T − коефіцієнт теплопередачі, Вт/(м^2 град); $\Delta T = T_1$ - T_2 − різниця температур (при цьому T_1 і T_2 змінюються за довжиною зони ідеального витіснення); t − час, с.

Перший член правої частини рівняння (3.1) описує гідродинаміку потоку, а другий – вплив теплообміну. Знак (-) ставлять, коли теплоносій віддає тепло, а знак (+) – якщо теплоносій підігрівається.

Коефіцієнт теплопередачі можна розрахувати за формулою

$$K_T = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta_{\text{СТ}}}{\lambda_{\text{СТ}}} + R}, \qquad (3.2)$$

де: α_1 и α_2 – коефіцієнти тепловіддачі, Вт/(м^2 град); $\lambda_{\text{СТ}}$ – теплопровідність матеріалу стінки, Вт/(м град); δ_{CT} – товщина стінки, м; R – термічний опір забруднень, (м^2 град)/Вт.

3.1.1 Моделювання теплообмінника «труба в трубі» з режимом прямотоку

На рис.3.1 показана схема теплообмінника з прямотоком.

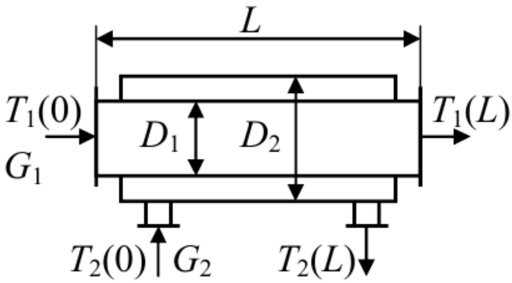


Рис. 3.1. Схема прямоточного теплообмінника типу «труба в трубі»

Якщо позначити індексом «1» параметри теплоносія, який віддає тепло, а індексом «2» параметри теплоносія, який підігрівається, то повна математична модель динаміки теплообмінника матиме вигляд

$$
\begin{cases}
S_{B1}\rho_1 c_{T1}\dfrac{\partial T_1}{\partial t} = -\upsilon_1\rho_1 c_{T1}\dfrac{\partial T_1}{\partial l} - \dfrac{F}{L}K_T(T_1 - T_2) \\
S_{B2}\rho_2 c_{T2}\dfrac{\partial T_2}{\partial t} = -\upsilon_2\rho_2 c_{T2}\dfrac{\partial T_2}{\partial l} + \dfrac{F}{L}K_T(T_1 - T_2)
\end{cases}
\tag{3.3}
$$

При стаціонарному процесі теплообміну $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$ отримуємо математичну модель статики теплообмінника

$$
\begin{cases}
\upsilon_1\rho_1 c_{T1}\dfrac{\partial T_1}{\partial l} = -\dfrac{F}{L}K_T(T_1 - T_2) \\
\upsilon_2\rho_2 c_{T2}\dfrac{\partial T_2}{\partial l} = \dfrac{F}{L}K_T(T_1 - T_2)
\end{cases}
\tag{3.4}
$$

З урахуванням того, що поверхня труби $F = \pi DL$ отримаємо систему рівнянь (3.5).

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial T_1}{\partial l} = -\dfrac{K_T\pi D_1}{\upsilon_1\rho_1 c_{T1}}(T_1 - T_2) \\
\dfrac{\partial T_2}{\partial l} = \dfrac{K_T\pi D_1}{\upsilon_2\rho_2 c_{T2}}(T_1 - T_2)
\end{cases}.
\tag{3.5}
$$

Математична модель теплообмінника (3.5) являє собою систему звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) з постійними коефіцієнтами.

3.1.2 Моделювання теплообмінника «труба в трубі» з режимом протитоку

Схема теплообмінника з протитоком показана на рис.3.2.

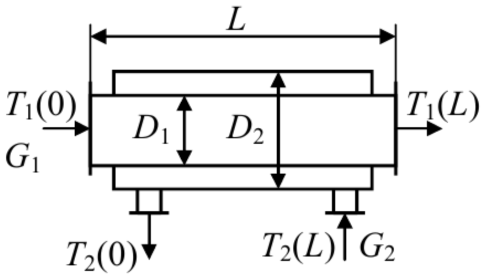


Рис. 3.2 . Схема протиточного теплообмінника типу «труба в трубі»

Теплові процеси в протиточному теплообміннику підпорядковані тим самим закономірностям, що і в прямоточному. Однак, при цьому одна температура змінюється по довжині труби від 0 до L, а друга − від L до 0.

Математична модель протиточного теплообмінника при стаціонарному режимі роботи має такий вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T_1}{\partial l} = -\dfrac{K_T \pi D_1}{\upsilon_1 \rho_1 c_{T1}}(T_1 - T_2) \\ \dfrac{\partial T_2}{\partial(-l)} = \dfrac{K_T \pi D_1}{\upsilon_2 \rho_2 c_{T2}}(T_1 - T_2) \end{cases} \qquad (3.6)$$

Спільне інтегрування системи рівнянь (3.6) можливо лише в одному з напрямків. При цьому в будь-якому випадку обумовлена лише одна початкова умова, друга залишається невідомою. Відомо лише, яке значення в кінці рішення повинна мати друга змінна. Розв'язати таку задачу можна методом «проб і помилок».

3.1.3 Алгоритм пошуку початкової умови

1) Вихідними даними для розрахунку є: початкова умова для першого теплоносія $T_1(0)$ і гранична умова для другого теплоносія $T_2(L)$.

2) Довільно задаємося значенням $T_2(L)$ і розв'язуємо систему рівнянь (3.5).

3) Порівнюємо отримане в результаті розв'язання значення $T_2(L)$ з заданим в п.1.

4) Якщо різниця між заданим і отриманим значеннями більше заданої точності, то повертаємося до п.2 та корегуємо значення $T_2(L)$, якщо менше − то розв’язуємо систему (3.6) як і для прямоточного теплообмінника.

3.2 Порядок виконання лабораторної роботи

1) Оберіть індивідуальні дані із таблиці вихідних даних.

2) Запишить систему рівнянь математичної моделі теплообмінника для умов прямотоку при стаціонарному режимі його роботи.

3) У пакеті прикладних програм *MatLab* розв’яжить систему ЗДР методом Рунге-Кутта із використанням функції ode45.

4) Результати розрахунків наведіть у вигляді графіків розподілу температури теплоносіїв по довжині труби.

5) Запишить систему рівнянь математичної моделі теплообмінника для умов протитоку при стаціонарному режимі його роботи.

6) Методом «проб і помилок» розрахуйте початкове значення температури холодного теплоносія з індексом 2.

7) Розв’язавши систему рівнянь (3.6), отрмайте графіки розподілу температур теплоносіїв по довжині теплообмінника.

8) Зробіть висновок яка модель руху теплоносіїв є більш ефектиною і поясніть чому.

3.3 Приклад виконання лабораторної роботи

Вихідні дані для моделювання

Параметри гарячого теплоносія	Параметри холодного теплоносія
Об’ємна витрата υ_1=2,21*10^{-4} м^3/с;	Об’ємна витрата υ_2=5,75*10^{-4} м^3/с;
Густина ρ_1=890 кг/м^3 ;	Густина ρ_2=910 кг/м^3 ;
Теплоємність c_{T1}=3350 Дж/(кг град);	Теплоємність c_{T2}=4190 Дж/(кг град);
Діаметр внутрішньої труби D_1=0.1 м	Діаметр зовнішньої труби D_2=0.3 м
Початкова температура T_1^0=170 ^{0}C	Початкова температура T_2^0=15 ^{0}C
Довжина труб *L*= 1 м	
Коефіцієнт теплопередачі K_T = 5050 Вт/(м^{2}град)	

Розв’язуємо систему рівнянь (3.5) за допомогою функції ode45. Для нашого випадку вона приймає такий вигляд

[dlina,T]=ode45(@func_Tr1,[0 L],[T10 T20]),

де @func_Tr1 – функція правих частин системи (3.4); [dlina,T] – матриця рішення (залежність температури від довжини теплообмінника); [0 L] – інтервал інтегрування (довжина теплообмінника); [T10 T20] – початкові умови.

3.3.1 Моделювання теплообмінника з режимом прямотоку

Створюємо два *m*-файли. В в першому файлі задають вихідні дані, початкові умови і функцію ode45. В другому файлі задається функція для розрахунку правих частин диференціальних рівнянь (3.5).

```
global b1 b2
L=1; %Довжина теплообміннику
%Початкові умови
T10=160; %Температура гарячого теплоносія на вході
```

```
T20=15; % Температура холодного теплоносія на вході
r01=890; r02=910;% Густина
D1=0.1; %Діаметр внітрішньої труби
ct1=3250; ct2=4150;%Теплоємніть
v1=2.21e-4; v2=5.75e-4;% Об'ємна витрата
K=5050;%Коефіцієнт теплопередачі
b1=K*pi*D1/(r01*ct1*v1);
b2=K*pi*D1/(r02*ct2*v2);
%Розв'язання системи диференціальних рівняня методом Рунге-Кута
[L,T]=ode45(@func3_T,[0 L],[T10 T20]);
%Вивід результатів розрахунків на графік
plot(L,T(:,1),L,T(:,2))
xlabel('Довжина труб теплообмінника, м','FontSize',16)
ylabel('Температура, оС','FontSize',16)
grid on
hold on
gtext('T1','FontSize',16),gtext('T2','FontSize',16)
grid on
zoom on

%Функція правих частин диференціальних рівнянь
function [dT]=func3_T(L,T)
global b1 b2;
dT=[b1*(T(2)-T(1));b2*(T(1)-T(2))];
end
```

Результати розрахунків наведені на рис. 3.3.

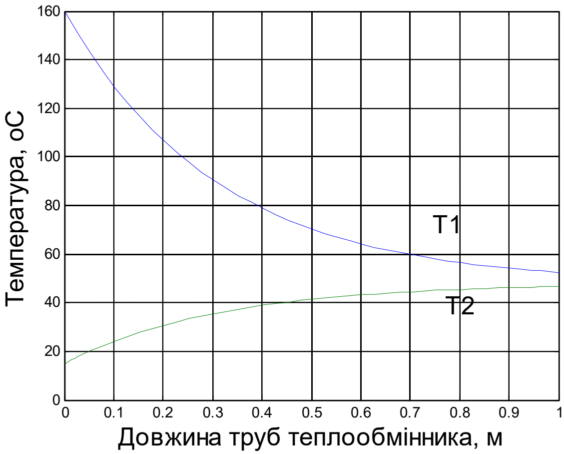


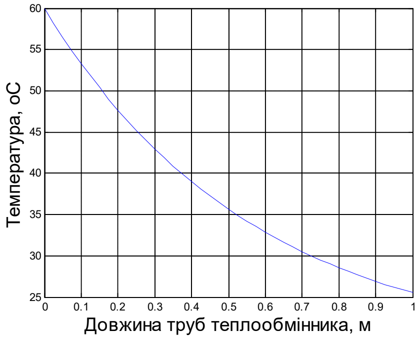
Рис.3.3. Розподіл температур теплоносіїв по довжині теплообмінника з режимом прямотоку

3.3.2 Моделювання теплообмінника типу «труба в трубі» з режимом протитоку

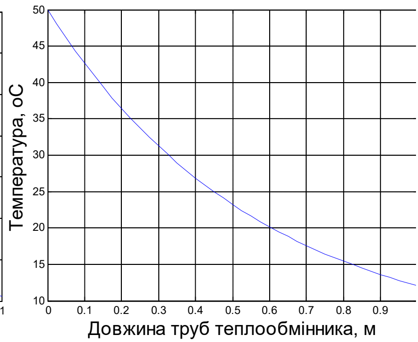
Вихідні дані для моделювання

Параметри гарячого теплоносія Об'ємна витрата υ_1 =2,21*10^{-4} м^3/с; Густина ρ_1=890 кг/м^3 ; Теплоємність C_{T1}=3250 Дж/(кг град); Діаметр внутрішньої труби D_1=0.1 м Початкова температура T_1^0=170 ^{0}С	Параметри холодного теплоносія Об'ємна витрата υ_2 =5,75*10^{-4} м^3/с; Густина ρ_2=910 кг/м^3 ; ТеплоємністьC_{T2}=4150 Дж/(кг град); Діаметр зовнішньої труби D_2=0.3 м Кінцева температура $T_2^к$=15 ^{0}С
Довжина труб *L*= 1 м	
Коефіцієнт теплопередачі K_T = 5050 Вт/(м^{2}град)	

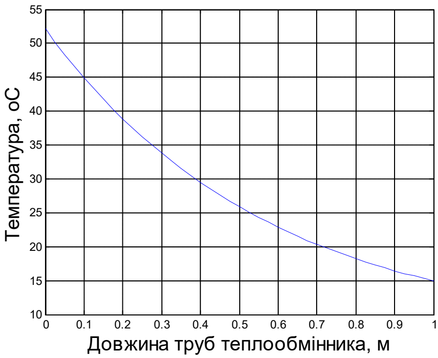
Визначаємо початкову температуру, для чого змінюємо температуру холодного теплоносія T_2^0 доки температура $T_2^к$ не стане дорівнювати 15°С. Результати пошуку наведені на рис.3.4.



а)



б)



в)

Рис.3.4. Гріфіки пошуку початкові умови T_2^0 для холодного теплоносія в умовах протитоку

Довільно задаємося температурою $T_2^0 = 60°C$. Як можна побачити на рис.3.4,а кінцева температура $T_2^к$ трохи більша за 25°С, що більше очікуваного значення $T_2^к$=15 ^{0}С. Прийнявши температуру $T_2^0 = 50°C$ бачимо на рис.3.4,б, що кінцева температура менша за необхідну. Робимо висновок, що потрібна нам температура знаходиться в інтервалі між 50°С і 60°С. Провівши більш детальні дослідження всередині обраного інтервалу отримуємо необхідне значення температури $T_2^0 = 52,15°C$, при якій (див. рис. 3.4,в) вихідна температура холодного теплоносія досягає заданого значення в 15 ^{0}С.

Програма для розрахунку протиточного теплообмінника відрізняється від програми для режиму прямотоку тільки початковими умовами.

```
Функція правих частин ситеми рівнянь (3.5)
function [ dT ] = func3_T(L,T)
global b1 b2;
dT=[b1*(T(2)-T(1));b2*(T(2)-T(1))];
end
```

Результати розрахунку протиточного теплообмінника наведені на рис.3.5.

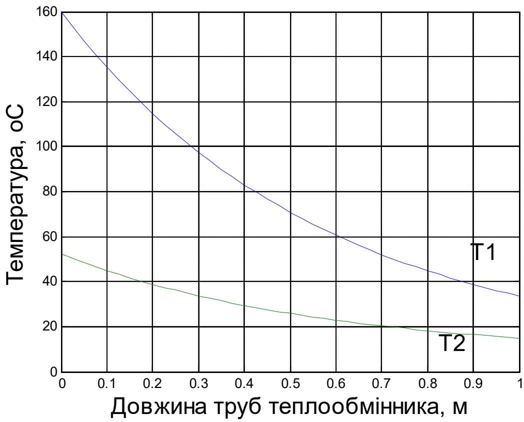


Рис.3.5. Результати розрахунку протиточного теплообмінника типу «труба в трубі»

Контрольні питання

1) Яка передавальна функція відповідає моделі ідеального витиснення?

2) Які гідродинамічні моделі є математичними моделями з розподіленими параметрами?

3) Які гідродинамічні моделі є математичними моделями із зосередженими параметрами?

4) Який режим руху теплоносіїв є більш ефективним: прямоток чи протиток?

Вихідні дані для виконання лабораторної роботи 3

№	D_1, м	ρ_1, кг/м^3	ρ_2, кг/м^3	c_{T1}, Дж/(кг град)	c_{T2}, Дж/(кг °С)	υ_1, м^3/с	υ_2, м^3/с	L, м	$T_1(0)$, °С	$T_2(0)$, °С	$T_2(L)$, °С	K, Вт/(м^2 *град*)
1	0,01	900	750	4350	5140	$2,08 \cdot 10^{-5}$	$4,12 \cdot 10^{-5}$	1	212		15	4818
2	0,02	600	450	3270	5230	$3,44 \cdot 10^{-5}$	$5,21 \cdot 10^{-5}$	1,5	193		25	2022
3	0,03	200	480	1020	3120	$2,92 \cdot 10^{-4}$	$2,45 \cdot 10^{-4}$	2	620		15	1460
4	0,015	515	200	3270	4780	$5,22 \cdot 10^{-4}$	$2,74 \cdot 10^{-3}$	3,2	500		10	34600
5	0,025	700	960	3920	4770	$5,48 \cdot 10^{-4}$	$6,18 \cdot 10^{-4}$	1,8	450		18	41600
6	0,035	800	300	2560	2660	$3,12 \cdot 10^{-5}$	$4,05 \cdot 10^{-5}$	2,5	670		25	10350
7	0,01	890	740	4400	5100	$2,29 \cdot 10^{-5}$	$4,06 \cdot 10^{-5}$	1	215		14	4850
8	0,02	610	460	3290	5270	$3,5 \cdot 10^{-5}$	$5,3 \cdot 10^{-5}$	1,5	195		25	2050
9	0,03	220	500	1040	3100	$2,86 \cdot 10^{-4}$	$2,48 \cdot 10^{-4}$	2	600		15	1500
10	0,025	415	200	3470	4880	$5,22 \cdot 10^{-4}$	$2,74 \cdot 10^{-3}$	3,2	500		12	34000

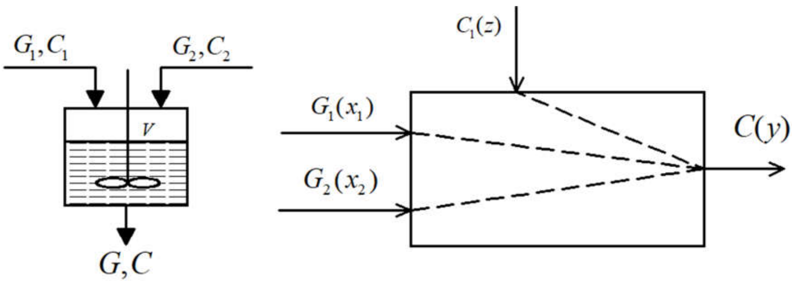
Лабораторная работа 4
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗМІШУВАЧА

Мета роботи: придбання навичок побудови аналітичної математичної моделі об’єкту керування, дослідження та вибір каналу керування.

4.1 Загальні положення

4.1.1 Опис об'єкта моделювання

Об'єкт моделювання – змішувач постійного об'єму V, який забезпечує ідеальне перемішування рідини. У змішувач подаються дві рідини, витрати та концентрації яких відповідно дорівнюють G_1, C_1 і G_2, C_2. Вихідною величиною змішувача є склад рідини C у змішувачі та на виході з нього, а вхідними змінними – величини потоків на вході G_1, G_2, а також концентрація C_1. Концентрація C_2 стала. Причому дотримується умова $C_1 > C > C_2$. Схема змішувача наведена на рис.4.1.



а б

Рис.4.1. Схема змішувача двох рідин (а) та його структурна схема (б)

4.2. Методика складання математичної моделі

Припустимо, що структура потоків речовин у змішувачі, що розглядається, відповідає моделі ідеального перемішування. Ця модель передбачає що потік, який надходить до апарату, миттєво поширюється по всьому об'єму. При цьому концентрація речовини у всіх точках апарату та в потоці на виході апарата однакова.

Повний матеріальний баланс змішувача має вигляд

$$G_1 + G_2 = G. \qquad (4.1)$$

Запишемо рівняння матеріального балансу моделі ідеального перемішування з урахуванням концентрації речовини у кожному потоці

$$V\frac{dC}{dt} + (G_1 + \mathrm{G}_2)\,\mathrm{C} = G_1C_1 + G_2C_2 \qquad (4.2)$$

Рівняння (4.2) нелінійно. Лінеарізуємо його, для чого замінимо кожну змінну на суму базисного значення та приросту $C=C_0+\Delta C$; $C_1=C_{10}+\Delta C_1$; $G_1=G_{10}+\Delta G_1$; $G_2=G_{20}+\Delta G_2$

Отримаємо:

$$\begin{aligned} &V\frac{d\Delta C}{dt} + G_{10}\mathrm{C}_0 + G_{10}\Delta C + C_0\Delta G_1 + G_{20}\mathrm{C}_0 + G_{20}\Delta C + C_0\Delta G_2 = \\ &= \mathrm{G}_{10}\mathrm{C}_{10} + \mathrm{G}_{10}\Delta C_1 + C_{10}\Delta G_1 + \mathrm{G}_{20}\mathrm{C}_2 + C_2\Delta G_2. \end{aligned} \qquad (4.3)$$

Рівняння змішувача у рівноважному стані має вигляд

$$G_{10}\mathrm{C}_0 + G_{20}\mathrm{C}_0 = G_{10}\mathrm{C}_{10} + \mathrm{G}_{20}\mathrm{C}_2\,. \qquad (4.4)$$

Запишемо рівняння змішувача у прирощеннях. Для цього віднімемо з рівняння (4.3) рівняння (4.4), враховуючи, що $\mathrm{G}_{10}+\mathrm{G}_{20} = \mathrm{G}_0$.

$$V\frac{d\Delta C}{dt} + G_0\Delta C = G_{10}\Delta C_1 + (C_{10} - C_0)\Delta G_1 - (C_0 - C_2)G\mathrm{F}_2 \qquad (4.5)$$

Із рівняння (4.5) випливає, що концентрація речовини C у змішувачі зростає зі збільшенням C_1 і G_1, т.к. $C_{10} > C_0$, і знижується із збільшенням G_2, так як $C_0 > C_2$ за умовою.

Запишемо рівняння динаміки змішувача у безрозмірному вигляді, для чого підставимо у рівняння (4.4) відносні величини

$$y = \frac{\Delta C}{C_0}; \quad z = \frac{\Delta C_1}{C_{10}}; \quad x_1 = \frac{\Delta G_1}{G_{10}}; \quad x_2 = \frac{\Delta G_2}{G_{20}}.$$

Отримаємо рівняння у безрозмірноми вигляді

$$VC_0 \frac{dy}{dt} + G_0 C_0 y = G_{10} \Delta C_{10} z + (C_{10} - C_0) G_{10} x_1 - (C_0 - C_2) G_{20} x_2 \tag{4.6}$$

Запишемо рівняння динаміки змішувача в канонічному вигляді, для чого розділимо всі доданки рівняння (4.6) на множник при вихідній величині у – G_0C_0.

$$T_0 \frac{dy}{dt} + y = k_1 z + k_2 x_1 - k_3 x_2, \tag{4.7}$$

де $T_0 = V/G_0$ – постійна часу об'єкту;

k_1,k_2 і k_3 – коефіцієнти посилення за каналами C_1—C, G_1—C та G_2 —C відповідно:

$$k_1 = \frac{G_{10} C_{10}}{G_0 C_0}; \quad k_2 = \frac{G_{10}(C_{10} - C_0)}{G_0 C_0}; \quad k_3 = \frac{G_{20}(C_0 - C_2)}{G_0 C_0}.$$

Рівняння динаміки змішувача в операторній формі:

$$(T_0 p + 1) y = k_1 z + k_2 x_1 - k_3 x_2. \tag{8}$$

Передавальні функції об'єкта по кожному каналу мають вигляд:

$$W_1(p) = \frac{k_1}{T_0 p + 1}; \quad W_2(p) = \frac{k_2}{T_0 p + 1}; \quad W_3(p) = -\frac{k_3}{T_0 p + 1}.$$

4.3 Порядок виконання лабораторної роботи

Вихідні дані для виконання лабораторної роботи знаходяться в табл.4.1.

Завдання до лабораторної роботи. Побудувати перехідні характеристики по кожному з каналів керування, використовуючі аналітичне рівняння перехідної характеристики для аперіодичної ланки першого порядку без запізнювання $h(t_i) = k(1 - e^{-\frac{t_i}{T}})$.

Обрати найбільш ефективний канал керування.

Таблиця 4.1 Вихідні дані до виконання лабораторної роботи 4

№ п.п	Витрата першої рідини, G_1, м^3/с	Концентрація першої рідини, C_1, кг/кг	Витрата другої рідини, G_2, м^3/с	Концентрація першої рідини, C_2, кг/кг	Об'єм змішувача, V, м^3
1	0,1	0,1	50	10	2
2	0,1	0,1	40	10	2
3	0,025	0,005	50	20	1
4	0,25	0,05	60	20	5
5	0,5	0,3	60	30	5
6	0,4	0,2	80	40	6
7	0,2	0,1	55	25	5
8	0,2	0,1	25	15	4
9	0,25	0,05	60	15	4
10	0,5	0,3	70	30	6

Контрольні питання

1) Яка гідродинамічна модель лежить в основі математичної моделі змішувача?

2) Який алгоритм побудови аналітичної математичної моделі змішувача?

3) Які методи лінеарізації рівнянь динаміки ви знаєте?

4) Що таке каноничний вигляд рівняння динаміки?

5) Як обирається найбільш ефективний канал керування об’єкта керування?

Лабораторна робота № 5
ПОПЕРЕДНЯ ОБРОБКА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ

Мета роботи: придбання навичок інтерполяції і згладжування експериментальних характеристик об'єкта керування в системі *MatLab*.

5.1 Загальні положення

5.1.1 Інтерполяція експериментальних даних

В результаті проведення експерименту по зняттю експерементальної статичної або динамічної характеристики об’єкта керування ми отримуємо так звану табличну функцію, тобто таблицю, у якій для деяких дискретних значень аргументу x_i, розташованих у порядку зростання, задані відповідні значення функції y_i.

У розрахунковій практиці інженера часто виникають задачі знайти значення функції для аргументів, які відсутні в таблиці. Такі задачі називаються задачами інтерполяції або екстраполювання. Задача інтерполяції функції (або задача інтерполяції) полягає у тому, щоб знайти значення y_k табличної функції в будь-якій проміжній точці x_k, розташованій усередині інтервалу [x_0, x_n].

При обробці експериментальних часових характеристик зручно, щоб вихідні дані були отримані через рівні проміжки часу. Однак при проведенні експерименту на реальному об’єкті цього не завжди можна досягти. В цьому випадку отримані експериментальні дані необхідно інтерполювати.

Інтерполяція – це знаходження проміжних значень величин за наявним дискретним набором відомих значень.

Для здійснення інтерполяції необхідно побудувати інтерполяційну функцію, яка проходитиме через усі експериментальні точки. Існує безліч різних методів інтерполяції: поліноміальна, тригонометрична, експоненціальна і т.ін. Одним з найпростіших є метод поліноміальної інтерполяції. В цьому випадку інтерполяційний поліном має наступний вигляд

$$\varphi(x) = P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + \ldots + P_i x^i + \ldots + P_{n-1} x^{n-1} + P_n x^n.$$

В *Matlab* одномірна таблична інтерполяція здійснюється за допомогою процедури linterp1, що має наступний синтаксис:

vq = interp1 (x, v, xq,<metod>),

де vq – вектор, що повертає інтерпольовані значення одномірної функції в конкретних точках запиту з використанням лінійної інтерполяції. Вектор x містить точки виборки, а v − відповідні значения v(x). Вектор xq містить координати точок запиту, method може приймати значення**:** 'nearest', 'pchip', 'cubic' або 'spline'.

5.1.2 Згладжування експериментальних даних

При дослідженні динамічних характеристик промислових об'єктів на останні діють не враховані збурення. Таким чином, експериментальна перехідна характеристика $z(t)$ складається з корисного сигналу $h(t)$ і сигналу перешкоди $f(t)$. Тобто експериментальна перехідна характеристика має вигляд

$$z(t) = h(t) + f(t).$$

Сигнали перешкод $f(t)$ можуть з'являтися внаслідок різних причин, таких як:

1) Неточність вимірювання вихідної величини;
2) Вплив на вихідну величину неврахованих збурень;
3) Помилка вимірювальних приладів та ін. причини.

Вид перехідної характеристики з перешкодами наведено на рис.5.1.

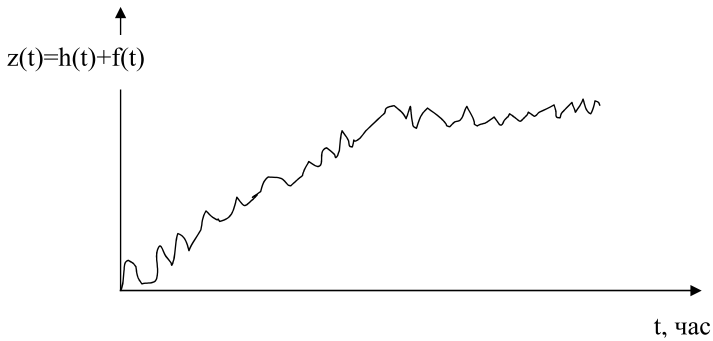


Рис.5.1. Перехідна характеристика з перешкодами

Для виділення корисного сигналу з отриманих результатів експерименту необхідно відфільтрувати сигнал перешкоди, тобто провести згладжування характеристики. Для цього використовується ряд методів, найбільш простий серед яких – метод послідовного (ковзного) середнього.

5.2.2.1 Метод ковзного середнього

Суть методу полягає в наступному: на деякому інтервалі часу $L\Delta t$ (де L ціле парне число) проводиться послідовне усереднення ординат $Z_i (i = 0,1,2,...,n)$ за формулою

$$h^*_{i+L/2} = \frac{1}{L+1}\sum_{\beta=0}^{L} z_{i+\beta}, \qquad (5.1)$$

де h^* – ординати усредненої характеристики; $Z_{i+\beta}$ – ордината експериментальної точки; i – порядковий номер точки.

Точність усереднення залежить від вибору величини L. Дуже маленьке значення L веде до недостатнього вирівнювання експериментальних даних, а збільшення L – до спотворення істотних особливостей перехідної характеристики.

На практиці обирають L=2 або L=4 і візуально оцінюють якість згладжених характеристик.

При L=2 маємо метод лінійного згладжування по трьох точках. В цьому випадку будуть втрачені ординати першої і останньої точок перехідної характеристики, які розраховують за особливими, менш точними формулами.

$$
\begin{aligned}
&h_i^* = (z_{i-1} + z_i + z_{i+1}) / 3,\\
&h_1^* = (5z_0 + 2z_1 - z_2) / 6, \quad i = 2,3...,n\text{-}1\\
&h_n^* = (5z_n + 2z_{n-1} - z_{n-2}) / 6.
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

При L=4 отримують метод лінійного згладжування по п'яти точках. В цьому випадку будуть втрачені дві перші і дві останні ординати перехідної характеристики. Згладження проводиться за наступними залежностями

$$
\begin{aligned}
&h_i^* = (z_{i-2} + z_{i-1} + z_i + z_{i+1} + z_{i+2}) / 5, \qquad i = 3,4...,n\text{-}3\\
&h_0^* = (3z_0 + 2z_1 + z_2 - z_4) / 5,\\
&h_1^* = (4z_0 + 3z_1 + 2z_2 + z_3) / 10,\\
&h_{N-1}^* = (4z_N + 3z_{N-1} + 2z_{N-2} + z_{N-3}) / 10\\
&h_N^* = (3z_N + 2z_{N-1} + z_{N-2} - z_{N-4}) / 5.
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

5.2.2.2 Згладжування за допомогою вбудованих функцій MatLab

В MatLab алгоритм ковзного середнього реалізовано за допомогою функції smooth (гладкий). Синтаксис оператора наступний:

```
yy = smooth(y, span)
```

де yy – вектор згладжених даних, span – інтервал згладжування (за замовчуванням дорівнює 5).

Функція smooth працює за наступним алгоритмом:

yy(1) = y(1)

yy(2) = (y(1) + y(2) + y(3))/3

yy(3) = (y(1) + y(2) + y(3) + y(4) + y(5))/5

yy(4) = (y(2) + y(3) + y(4) + y(5) + y(6))/5

……………

5.2 Порядок виконання роботи

1) Виконайте лінійну інтерполяцію експериментальних даних (згідно завдання викладача) в *Matlab*. Побудуйте графік.
2) Виконайте інтерполяцію використовуючи методи '*nearest*' та '*spline*'.
3) Використовуючи алгоритм лінійного згладжування даних по трьох точкам, побудуйте таблицю згладжених даних. Відобразіть на одному графіку вихідні та згладжені дані.
4) Проведіть лінійне згладжування по п'яти точкам, побудуйте графіки вихідних і згладжених даних.
5) Проведіть згладжування даних з використанням вбудованой функції *Matlab* smooth(y,span). Порівняйте ці результати з отриманими раніше.
6) Збережіть згладжені дані в текстовий файл.
7) Оберіть метод, що забезпечує найкраще згладжування перехідної характеристики.

5.3 Приклад виконання лабораторної роботи

Приклад 1 Лінійна інтерполяція в MATLAB

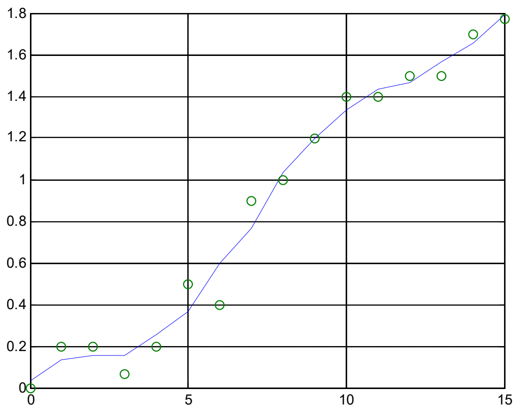
```
clc
clear all
t=(0:1:15)';
z=[0 0.2 0.2 0.065 0.2 0.5 0.4 0.9 1.0 1.2 1.4 1.4 1.5
1.5 1.7 1.77]';
% Інтерполяція
tj=(0:0.5:15)';
y=interp1(t,z,tj);
figure (1);
plot(t,z,'ro')
hold on
plot(tj,y,'b-*')
```

```
yn=interp1(t,z,tj,'nearest');
figure (2);
hold on
plot(t,z,'ro')
plot(tj,yn,'b-*'),grid

z55=interp1(t,z,5.5)
Z55N=interp1(t,z,5.5,'nearest')
```

Приклад 2. Згладжування в *MatLab* методом ковзного середнього по 3-м точкам

```
clc
clear all
t=(0:1:15)';
z=[0 0.2 0.2 0.065 0.2 0.5 0.4 0.9 1.0 1.2 1.4 1.4 1.5
1.5 1.7 1.77]';
n=length(z);% число експериментальнх точок
%згладжування по 3-м точкам
h3(1)=(5*z(1)+2*z(2)-z(3))/6;
h3(n)=(5*z(n)+2*z(n-1)-z(n-2))/6;
for j = 2:n-1
  h3(j)=(z(j-1)+z(j)+z(j+1))/3;
end
plot(t,h3,t,z,'o'),grid
```



Таблиця 5.1 Вихідні дані до виконання лабораторної роботи 5

t, хв	h1(t)	h2(t) t)	h3(t)	h4(t)	h5(t)	h6(t)	h7(t)	h8(t)	h9(t)	h10(t)
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0.19	0.28	0.06	0.19	0.10	0.18	0.46	0.04	0.16	0.13
3	0.05	0.25	0.45	0.29	0.07	0.04	0.61	0.24	0.08	0.22
4	0.30	0.81	0.74	0.42	0.54	0.53	0.61	0.07	0.16	0.06
5	0.33	0.59	1.61	0.51	0.92	0.37	0.85	0.21	0.77	0.43
6	0.68	0.87	1.53	0.65	1.17	1.31	1.53	0.79	0.78	0.77
7	1.03	1.47	1.74	1.03	1.08	1.57	1.52	0.67	0.71	1.09
8	1.00	1.63	2.03	1.09	1.98	1.97	1.87	1.35	1.11	0.84
9	1.48	1.28	2.10	1.28	1.33	2.45	1.77	1.16	1.01	1.15
10	1.49	1.65	2.81	1.67	2.25	2.18	2.34	1.27	1.36	1.23
11	1.51	1.95	2.67	1.89	2.08	2.20	2.11	1.96	1.75	1.42
12	1.64	2.02	2.65	2.17	2.46	2.75	2.32	2.12	1.65	1.62
13	1.70	1.56	2.94	1.51	2.92	2.81	2.82	1.58	1.49	1.51
14	1.72	2.18	2.78	1.86	2.62	2.68	2.81	1.80	1.78	1.87
15	1.75	2.01	2.8	1,75	2,75	2,72	2.62	2.24	1.63	1.86

Контрольні питання

1) Для чого проводиться інтерполяція експриментальнх даних?

2) За дпомогою якої функції проводиться одномірна таблична інтерполяція в пакеті MatLab?

3) Суть алгоритму ковзнього середнього?

4) Як алгоритм ковзнього серднього реалізовний у пакеті MatLab?

Лабораторна робота 6
АПРОКСИМАЦІЇ СТАТИЧНИХ І ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБ'ЄКТА КЕРУВАННЯ

Мета роботи: освоєння методики апроксимації статичних і динамічних характеристик технологічного об'єкта керування в *MatLab*

6.1 Загальні положення

Математична модель об'єкта керування повинна описувати його статичні та динамічні режими роботи.

Статична характеристика об'єкта керування являє собою функціональну залежність вихідних величин від вхідних при статичному (стаціонарному, сталому) режимі роботи, тобто при значеннях вхідних і вихідних величин, що не змінюються в часі.

Статичні характеристики дозволяють визначити значення керованих параметрів, положення регулюючих органів, витрати речовин або енергії та інші дані для будь-якого усталеного стану досліджуваного об'єкта. Ці характеристики використовують при розрахунках автоматчних систем керування, розрахунках оптимальних режимів, при оцінці лінійності об'єктів, при технологічних і економічних розрахунках.

Динамічні характеристики являють собою залежності між змінами вхідних і вихідних величин в динамічному режимі (у часі). Вони можуть бути представлені у вигляді диференціальних рівнянь, передавальних функцій, часових або частотних характеристик. Маючи динамічну характеристику, представлену в будь-якому вигляді, неважко перетворити її і представити в будь-якому іншому (з перерахованих вище) вигляді.

Динамічні характеристики дають інформацію про інерційні властивості об'єктів керування (систем, елементів систем), і таким чином, є вихідними даними при синтезі автоматичних систем керування.

6.1.1 Апроксимація статичних характеристик

При експериментальному дослідженні статичних характеристик деякого об'єкта керування отримано m значень вхідної x_i и виходної y_i величин. Потрібно знайти функціональну залежність, $\hat{y} = f(x,a)$, яка найкращим чином описує експериментальні дані, де a − вектор параметрів функції. Для цієї мети досить часто використовується метод найменших квадратів. Відповідно до цього методу вводиться функція, що характеризує ступінь близькості експериментальних і розрахункових даних:

$$S = \sum_{i=1}^{m} (y_i - \widehat{y_i})^2 .$$

При використанні методу найменших квадратів задаються видом функції і вектором параметрів цієї функції. Часто в якості апроксимуючої функції $\hat{y} = f(x,a)$ використовують поліном виду

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots .$$

Задача пошуку апроксимуючої функції (вектора параметрів) математично еквівалентна задачі безумовної багатовимірної оптимізації: потрібно знайти вектор параметрів a, що забезпечує мінімум функції S.

$$S = \sum_{i=1}^{m} (y_i - \widehat{y_i})^2 \to \min .$$

В *MatLab* задача апроксимації експериментальних даних, заданих векторами x і y, поліномом вирішується за допомогою процедури `polyfit(x,y,n)`. Тут n порядок апроксимуючого полінома. Процедура повертає вектор довжиною (n+1), що складається з коефіцієнтів апроксимуючого полінома.

Обчислити значення полінома в заданих точках в MatLab можна за допомогою процедури `polyval(a,x)`. Тут a – вектор коефіцієнтів поліному; x – вектор розрахункових точок полінома**.**

6.1.2 Апроксимація перехідних характеристик за допомогою Toolbox ident

Пакет *System Identification Toolbox* дозволяє користувачеві створювати математичні моделі лінійних динамічних об'єктів на основі експериментальних вхідних та вихідних даних.

Отриманий під час експерименту масив даних завантажується в робочу область *Matlab.* Потім з допомогою команди *ident* викликається графічний інтерфейс користувача пакета *System Identification Toolbox* (див. рис.6.1).

За допомогою командного блоку *import data* завантажуємо експериментальні дані в графічний редактор і будуємо графіки вхідних та вихідних сигналів об'єкта, що досліджується.

Потім переходимо до побудови математичної моделі об'єкта. У командному блоці *Estimate* вибираємо тип та структуру математичної моделі. Щоб переконатися, що модель побудована правильно, будуємо кілька різних моделей і порівнюємо їх похибки.

6.2 Порядок виконання лабораторної роботи

6.2.1 Порядок виконання статичної апроксимації

1) Знайдіть значення апроксимуючих поліномів в точках вектора x за допомогою функції `polival(a,x)` для свого варіанту віихідних даних (див. табл.6.1)**.**
2) Побудуйте експериментальні точки і апроксимуючі поліноми 1-го і 2-го ступеня.

6.2.2 Порядок виконання апроксимації динамічного об'єкту

1) У робочій області *Matlab* сформуйте масиви експериментальних точок *x* і *y* та вектор часу *t* відповідно до заданого варіанту (див. табл.6.2).
2) За допомогою команди *ident* запустіть пакет *System Identification Toolbox.*
3) Командою *import data – Time domain data* завантажте вихідні дані (*x*, *y* і *t*).
4) Побудуйте графіки залежності вхідних та вихідних сигналів від часу.
5) Вкажіть структуру математичної моделі у вигляді лінійної передавальної функції командою *Estimate – Process Models.*
6) Виконайте процедуру апроксимації для всіх можливих структур передавальної функції та оцініть точність кожної моделі.

6.3 Приклад виконання лабораторної роботи

6.3.1 Приклад апроксимації статичної характеристики

```
clear all
clc
%вихідні дані
x=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9]';
y=[3.0 5.1 7.4 9.9 12.6 15.5 18.6 21.9 25.4 29.9]';
% коефіцієнти поліному 1-го порядку
R1=polyfit(x,y,1);
% коефіцієнти поліному 2-го порядку
.........................................................................................
%Значення поліному 1-го порядку в заданих точках
f1=polyval(R1,x);
%Значення поліному 2-го порядку в заданих точках

.........................................................................................

%Графік апроксимації вихідних даних поліномом 1-го
порядку
figure(1);
subplot(2,1,1);
plot(x,y,'o',x,f1,'-')
title('Апроксимація поліномом 1-го
порядку','FontSize',14)
xlabel('Вхідна величина x','FontSize',12)
```

```
ylabel('Вихідна величина y','FontSize',12)
%Графік апроксимації вихідних даних поліномом 2-го
порядку

subplot(2,1,2);
```

....

```
%Порівняння точності апроксимації поліномами 1-го і 2-го
порядків
table=[x y f1 f2 f1-y f2-y]
```

Графік апроксимації статичної характеристики поліномом 1-го порядку наведено на рис.6.1.

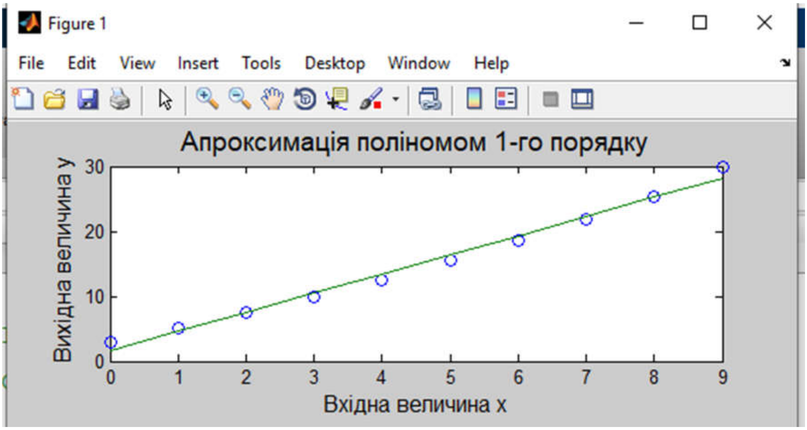


Рис.6.1. Апроксимації статичної характристики поліномом першого порядку

6.3.2 Приклад апроксимації динамічної характеристики

Створюємо скрипт із вихідними даними

```
%Вихідні дані
y=[50 50 50.25 50.25 50.75 51 51.25 52 52 53 53.5 53.75
53.75 54.25 54.75 55 55 55.75 56 55.5 56.25 56 56.25 56.5
56.25 56.25]';
%Вихідні дані в прирощенях
y=y-50;
%Вхідні дані
```

```
x=[15 15 15 15 15 15 15 15 15 15 15 15 15 15 15 15 15 15
15 15 15 15 15 15 15 15]';
%Час перехідного процесу
t=[0:1:25]';
%Виклик пакету Toolbox ident
ident
```

Імпортуємо вихідні дані, як показано на рис.6.2.

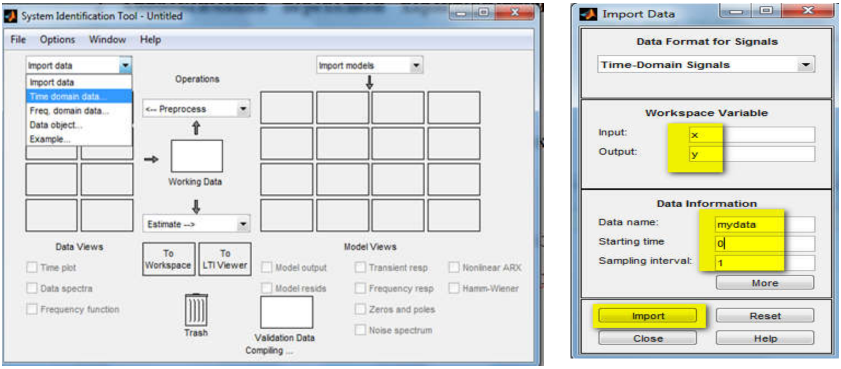


Рис. 6.2. Імпорт вихідних даних

Виводимо на екран графік перехідного процесу (див. рис.6.3).

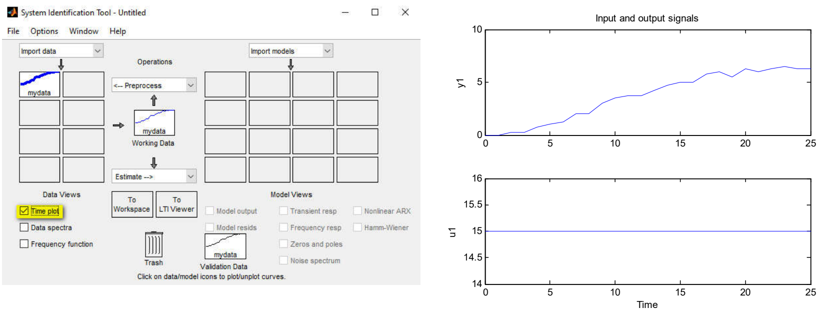


Рис. 6.3. Побудова графіку залежності вихідни даних від часу

Задаємо структуру математичної моделі командою *Estimate – Process Models* (рис.6.3). Обираємо математичну модель у вигляді аперіодичної ланки першого порядку із запізнюванням (рис.6.4). Обираємо нульові начальні умови (*Initial condition: Zero*) і запускаємо виконання (*Estimate*).

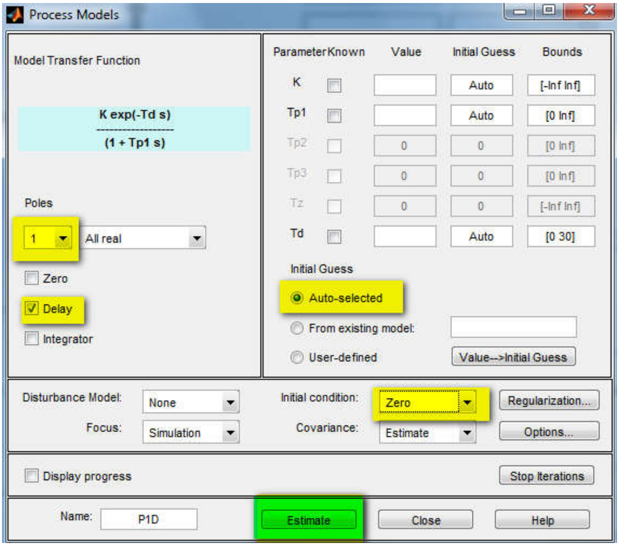


Рис.6.4. Вибір структури передавальної функції

Результати розрахунку представлені на рис.6.5. Як видно з рисунку ступінь співпадіння віхідної і розрахункової кривих становить 89,71 %.

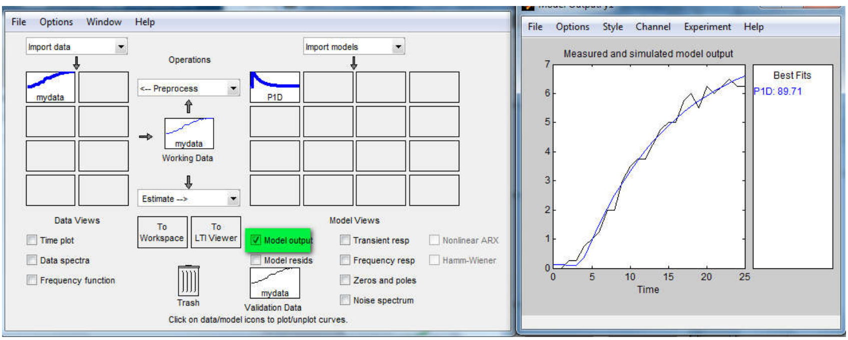


Рис.6.5. Результати апроксимації перехідної характеристики аперіодичною ланкою першого порядку із запізнюванням

В результаті отримуємо передавальну функцію, що показана на рис.6.6.

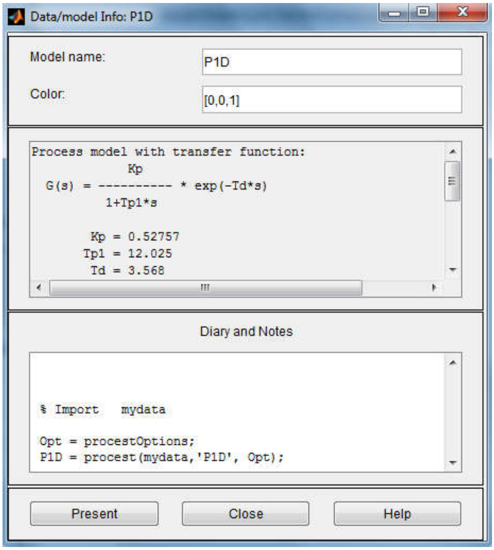


Рис.6.6. Передавальна функція першого порядку із запізнюванням

Аналогічно виконуємо апроксимацію аперіодичними ланками другого і третього порядку.

Контрольні питання

1) Що дозволяють визначити статичні характеристики?

2) Які динамічні характеристики ви знаєте?

3) Які значення повертає процедура `polyfit` у пакеті *MatLab*?

4) Що обчислює процедура `polyval` у пакеті *MatLab*?

5) Яка структура математичної моделі обирається командою *Estimate – Process Models?*

Таблиця 6.1. Варіанти експериментальних статичних характеристик

1	x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	3.0	5.1	7.4	9.9	12.6	15.5	18.6	21.9	25.4	29.1
2	x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	6.0	7.9	9.6	11.1	12.4	13.5	14.4	15.1	15.6	15.9
3	x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	4.0	6.8	9.2	11.2	12.8	14.0	14.8	15.2	15.2	14.8
4	x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	5.0	10.1	14.4	17.9	20.6	22.5	23.6	2.9	23.4	22.1
5	x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y_i	35.0	34.3	33.0	31.1	28.6	25.5	21.8	17.5	12.6	7.1
6	x_i	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
	y_i	3.0	5.1	7.4	9.9	12.6	15.5	18.6	21.9	25.4	29.1
7	x_i	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
	y_i	6.0	7.9	9.6	11.1	12.4	13.5	14.4	15.1	15.6	15.9
8	x_i	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
	y_i	4.0	6.8	9.2	11.2	12.8	14.0	14.8	15.2	15.2	14.8
9	x_i	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
	y_i	5.0	10.1	14.4	17.9	20.6	22.5	23.6	2.9	23.4	22.1
10	x_i	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
	y_i	35.0	34.3	33.0	31.1	28.6	25.5	21.8	17.5	12.6	7.1
11	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y_i	3.0	5.1	7.4	9.9	12.6	15.5	18.6	21.9	25.4	29.1
12	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y_i	6.0	7.9	9.6	11.1	12.4	13.5	14.4	15.1	15.6	15.9
13	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y_i	4.0	6.8	9.2	11.2	12.8	14.0	14.8	15.2	15.2	14.8
14	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y_i	5.0	10.1	14.4	17.9	20.6	22.5	23.6	2.9	23.4	22.1
15	x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y_i	35.0	34.3	33.0	31.1	28.6	25.5	21.8	17.5	12.6	7.1

Таблиця 6.2 Варіанти експериментальних перехідних характеристик

1	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	h(t)	0	0	0	0.07	0.23	0.43	0.64	0.84	1.03	1.19	1.33	1.45	1.55	1.64	1.71	1.77
2	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	h(t)	0	0	0	0.09	0.29	0.53	0.77	0.99	1.19	1.35	1.49	1.61	1.69	1.76	1.82	1.86
3	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	h(t)	0	0	0	0.13	0.43	0.79	1.15	1.49	1.78	2.03	2.23	2.40	2.54	2.64	3.72	2.79
4	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	h(t)	0	0	0.14	0.46	0.84	1.19	1.52	1.81	2.05	2.24	2.4	2.52	2.63	2.71	2.79	2.82
5	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	h(t)	0	0	0.098	0.31	0.56	0.80	1.02	1.21	1.36	1.49	1.60	1.69	1.75	1.81	1.85	1.88
6	t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
	h(t)	0	0	0	0.07	0.23	0.43	0.64	0.84	1.03	1.19	1.33	1.45	1.55	1.64	1.71	1.77
7	t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
	h(t)	0	0	0	0.09	0.29	0.53	0.77	0.99	1.19	1.35	1.49	1.61	1.69	1.76	1.82	1.86
8	t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
	h(t)	0	0	0	0.13	0.43	0.79	1.15	1.49	1.78	2.03	2.23	2.40	2.54	2.64	3.72	2.79
9	t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
	h(t)	0	0	0.14	0.46	0.84	1.19	1.52	1.81	2.05	2.24	2.4	2.52	2.63	2.71	2.79	2.82
10	t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
	h(t)	0	0	0.098	0.31	0.56	0.80	1.02	1.21	1.36	1.49	1.60	1.69	1.75	1.81	1.85	1.88
11	t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5
	h(t)	0	0	0	0.07	0.23	0.43	0.64	0.84	1.03	1.19	1.33	1.45	1.55	1.64	1.71	1.77
12	t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5
	h(t)	0	0	0	0.09	0.29	0.53	0.77	0.99	1.19	1.35	1.49	1.61	1.69	1.76	1.82	1.86
13	t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5
	h(t)	0	0	0	0.13	0.43	0.79	1.15	1.49	1.78	2.03	2.23	2.40	2.54	2.64	3.72	2.79
14	t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5
	h(t)	0	0	0.098	0.31	0.56	0.80	1.02	1.21	1.36	1.49	1.60	1.69	1.75	1.81	1.85	1.88

Лабораторна робота 7

АПРОКСИМАЦІЯ ПЕРЕХІДНОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕТОДОМ СИМОЮ

Мета роботи: засвоєння методики апроксимації перехідної характеристики об'єкту керування методом Симою.

7.1. Загальні положення

Метод Симою є універсальним методом апроксимації, що дозволяє отримати апроксимуючі вирази будь-якого порядку. Цей метод дуже зручний для обробки на ЕОМ, він легко алгоритмізується та відрізняється великою точністю.

Апроксимуючою залежністю є дробно-раціональна передавальна функція виду:

$$W(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + ... + b_1 p + 1}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + 1}. \tag{7.1}$$

Невідомі коефіцієнти a_i і b_i визначають із наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} a_1 = F_1 + b_1 \\ a_2 = F_2 + b_2 + b_1 F_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_i = F_i + b_i + \sum\limits_{j=1}^{i=1} b_j F_{i-j} \end{cases} \tag{7.2}$$

Коефіцієнти F_i в системі рівнянь (7.2) розраховуються по формулам:

$$
\begin{cases}
F_1 = \int_0^\infty (1-h)dt \\
F_2 = F_1^2 \int_0^\infty (1-h)(1-\theta)\,d\theta \\
F_3 = F_1^3 \int_0^\infty (1-h)\left(1-2\theta+\frac{\theta^2}{2!}\right)d\theta \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
F_i = F_1^i \int_0^\infty (1-h)\left[\frac{-(\theta)^{i-1}}{(i-1)!}+\frac{(-\theta)^{i-2}}{(i-2)!}+\sum_{j=0}^{i-3}\frac{F_{i-j-1}(-\theta)^j}{F_1^{i-j-1}}\right]\theta \\
\theta = \frac{t}{F}
\end{cases}
\tag{7.3}
$$

Коефіцієнти F_i зв`язані з перехідною характеристикою інтегральними залежностями, як показано на рис.7.1.

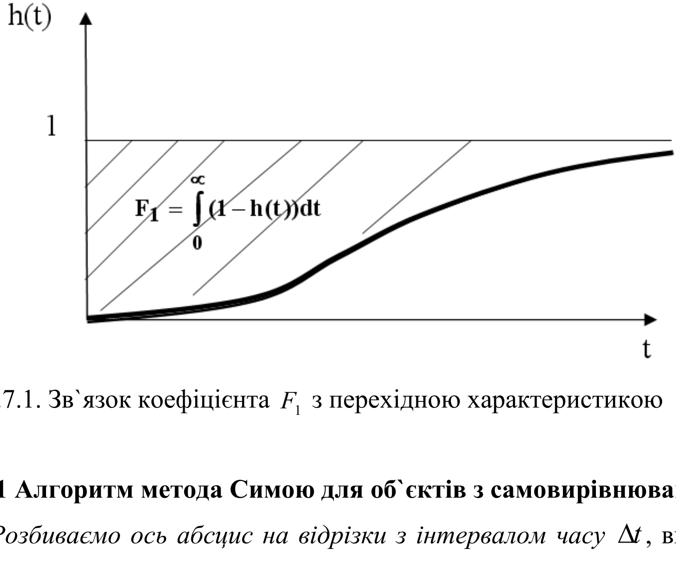


Рис.7.1. Зв`язок коефіцієнта F_1 з перехідною характеристикою

7.1.1 Алгоритм метода Симою для об`єктів з самовирівнюванням

1) *Розбиваємо ось абсцис на відрізки з інтервалом часу* Δt, виходячи із умови, що на протязі усього графіка функція $y_{вих}$ в діапазоні $2\Delta t$ мало відрізняється від прямої.

2) *Значення* $\Delta y_{вих}$ *в кінці кожного інтервалу* Δt *ділимо на* $\Delta y_{вих}(\infty)$. Таким чином, функція приведена к нормалізованому (безрозмірному) виду.

3) *Отримуємо площі* F_i *по приблизним формулам.*

На практиці, як правило, обмежуються першими трьома коефіцієнтами:

$$
\begin{aligned}
F_1 &= {}_{\Delta}t\left\{\sum_{i=0}^{n}\left[1-h\left(i_{\Delta}t\right)\right]-0,5\left[1-h\left(0\right)\right]\ \right\};\\
F_2 &= F_1^2{}_{\Delta}\theta\left\{\sum_{i=0}^{n}\left[1-h\left(i_{\Delta}t\right)\right]\left[1-i_{\Delta}\theta\right]-0,5\left[1-h\left(0\right)\right]\right\};\\
F_3 &= F^3_1{}_{\Delta}\theta\left\{\sum_{i=0}^{n}\left[1-h\left(i_{\Delta}\theta\right)\right]\left[1-2i_{\Delta}\theta+\frac{\left(i_{\Delta}\theta\right)^2}{2}\right]-0,5\left[1-h\left(0\right)\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$

4) *Обираємо тип передавальної функції*, виходячи із таких міркувань.

Якщо значення вихідної величини в момент часу t = 0 дорівнює нулю, а похідна не дорівнює нулю, (Див. рис. 6.2) то в передаточній функції порядок чисельника на одиницю менше порядку знаменника.

$$
W(p)=\frac{b_{n-1}p^{n-1}+\ldots+b_1p+1}{a_np^n+\ldots+a_1p+1}. \tag{7.5}
$$

Якщо вихідний параметр і його перша похідна в момент часу $t=0$ дорівнює нулю, то порядок чисельника, по крайній мірі, на дві одиниці менше чим знаменника. У більшості випадків при цьому можна вибрати передавальну функцію виду:

$$
W(p)=\frac{1}{a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+1}, \tag{7.6}
$$

звідки $a_1=F_1$, $a_2=F_2$, $a_3=F_3$. Коефіцієнти a_i мають розмірність часу у відповідному ступені.

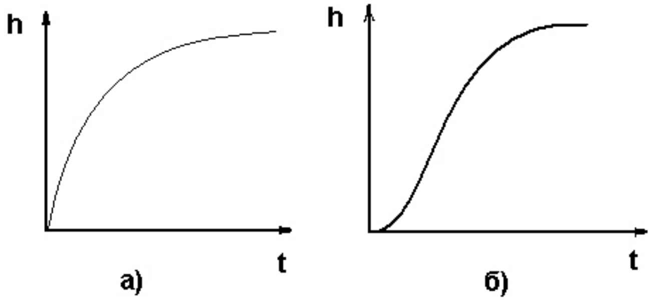


Рис.7.2. До визначення типу передавальної функції

Якщо при цьому деякі площі F будуть від`ємними, то необхідно обрати передавальну функцію з більш високим порядком чисельника.

5) Визначаємо коефіцієнти передавальної функції із системи рівнянь (7.4).
6) Записуємо передавальну функцію в розмірному виді:

$$W(p) = \frac{a}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + 1} \left[\frac{\text{од.вих.величини}}{\text{од.вх.величини}} \right] \tag{7.7}$$

де $k = \dfrac{\Delta \mathrm{Y}(\infty)}{\Delta \mathrm{X}(\infty)}$ – коефіцієнт передачі об`єкта.

7.1.2 Алгоритм апроксимації об`єктів із запізнюванням

1) Час запізнювання визначаємо по графіку перехідної характеристики, як час, на протязі якого функція $\Delta Y(вих)$ в інтервалі від $t = 0$ до $t = \tau$ не перевищує 0.001 $\Delta Y(\infty)$.
2) Визначаємо передавальну функцію як перемноження двох передавальних функцій: $W_1(p) = e^{-p\tau}$, що відповідає часу запізнювання, і $W_2(p)$, що відповідає функції $\Delta Y_1 = \Delta Y_{вих}(t-\tau)$, для якої за початок відліку прийнятий час $t = \tau$.

Таким чином передавальна функція об`єкта із запізнюванням має вигляд:

$$W(p) = W(p)_1 W(p)_2 = \frac{ke^{-p\tau}}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + 1}. \qquad (7.8)$$

7.2 Порядок ввиконання лабораторної роботи

Вихідні данні для розрахунку наведені в табл. 7.1.

Проводимо обчислення задаючись різними значеннями порядків чисельника і знаменника передавальної функції.

Обираємо передавальну функцію, яка найбільш вдало апроксимує експерементальні дані і має як найменьшу похибку.

7.3 Приклад виконання лабораторної роботи

Підпрограма-функція обчислення полощин методом Симою має вигляд

```
function [ S, mas_X ] = Simau( n, m ,y_norm, t)
for k = 1:n+m;
    Sdd = 0;
    for i=0:k-2
        Sdd =  Sdd+(S(k-1-i)*(-t).^i/factorial(i));
    end
    rX = (1 - y_norm).*(Sdd + (-t).^(k-1)/factorial(k-1));
    Sx = trapz(t, rX);
    S(k) = Sx;
end
mas_A = zeros(n+m,n+m);
for i = 1:n+m
    for j = 1:n+m
        if j <= m
            if(i == j)
                mas_A(i,j) = 1;
            elseif(i>j)
                mas_A(i,j) = S(i-j);
            end
        elseif(i == j-m)
            mas_A(i,j) = -1;
        end
    end
end
mas_B = -S';
mas_X = (mas_A\mas_B)';
end
```

Приклад програми розрахунку

```
clc
clc
clear
close all
%Ввод вихідних даних
t=(0:5:80);
y_exp=[0 0 1.5 3.5 4 5 5.5 6.2 7 7.5 7.5 7.8 8 8.3 9 9
9];
n_tochek = length(t);
n_y=length(y_exp);
%Задаємося структурою передавальної функції
m=input('Введітю порядок чисельника передавальної
функції: ');
n=input('Введіть порядок знаменника передавальної
функції: ');
plot(t, y_exp,'o') % виведення на графік
експериментальних точок
grid on
hold on
% Приводимо перехідну криву до безрозмірного вигляду
(нормуємо)
y_norm=y_exp/y_exp(n_tochek);
% Виклик підпрограми методу Симою
[ S, mas_X ] = Simau( n, m ,y_norm, t);
%Аппроксимуюча передавальна функція
num_apr = [mas_X(m:-1:1), 1];
den_apr = [mas_X(n+m:-1:m+1), 1];
Wp_apr = tf(num_apr, den_apr)
y_kon_norm = step(Wp_apr, t); % в нормованому вигляді
y_kon=y_kon_norm*y_exp(n_tochek); % в прирощенях
plot(t, y_kon, 'black','linewidth', 3) % графік
аппроксимуючої кривої
% Розрахунок похибки аппрксимації
delta = 0;
for i=1:n_tochek
delta = delta + (abs(y_kon_norm(i) -y_norm(i)));
end
delta = (delta/n_tochek)*100
annotation('textbox', [.65 .65 .1 .1],...
    'string', ['\delta = ' num2str(delta) ' %'],...
    'backgroundcolor', [.1 .9 .8]);
```

Результати розрахунку представлені на рис.7.3.

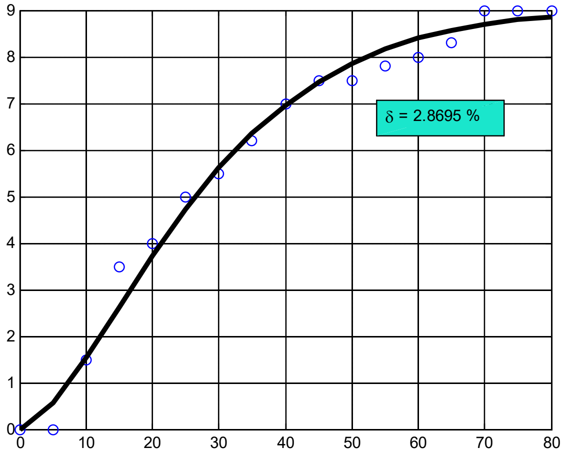


Рис. 7.3. Апроксимація перехідної характеристики дробно-раціональною передавальною функцією

Wp_apr =

1.531 s + 1

249.4 s^2 + 29.14 s + 1

delta = 2.8695

Continuous-time transfer function.

Якщо об'єкт має час чистого запізнювання, враховуємо це, переносячи початок координат.

Записуємо передавальну функцію із запізнюванням у вигляді

$$W(s)=\frac{ke^{-s\tau}}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + 1}.$$

Для наших вихідних даних передавальна функція має наступний вигляд

$$W(s) = \frac{1.531s + 1}{248,4s^2 + 29,12 + 1} e^{-10s} .$$

Контрольні питання

1) Який вид апроксимуючої залежності дозволяє отримати метод Симою?
2) Як враховується час запізнювання в методі Симою?
3) Чому метод Симою називають методом площин?
4) Яку розмірність мають коефіцієнти апрксимуючої передавальної функції?

Таблиця 7.1. Варіанти експериментальних перехідних характеристик

	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	h(t)	0	0	0	0.07	0.23	0.43	0.64	0.84	1.03	1.19	1.33	1.45	1.55	1.64	1.71	1.77
2	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	h(t)	0	0	0	0.09	0.29	0.53	0.77	0.99	1.19	1.35	1.49	1.61	1.69	1.76	1.82	1.86
3	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	h(t)	0	0	0	0.13	0.43	0.79	1.15	1.49	1.78	2.03	2.23	2.40	2.54	2.64	3.72	2.79
4	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	h(t)	0	0	0.14	0.46	0.84	1.19	1.52	1.81	2.05	2.24	2.4	2.52	2.63	2.71	2.79	2.82
5	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	h(t)	0	0	0.098	0.31	0.56	0.80	1.02	1.21	1.36	1.49	1.60	1.69	1.75	1.81	1.85	1.88
6	t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
	h(t)	0	0	0	0.07	0.23	0.43	0.64	0.84	1.03	1.19	1.33	1.45	1.55	1.64	1.71	1.77
7	t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
	h(t)	0	0	0	0.09	0.29	0.53	0.77	0.99	1.19	1.35	1.49	1.61	1.69	1.76	1.82	1.86
8	t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
	h(t)	0	0	0	0.13	0.43	0.79	1.15	1.49	1.78	2.03	2.23	2.40	2.54	2.64	3.72	2.79
9	t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
	h(t)	0	0	0.14	0.46	0.84	1.19	1.52	1.81	2.05	2.24	2.4	2.52	2.63	2.71	2.79	2.82
10	t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
	h(t)	0	0	0.098	0.31	0.56	0.80	1.02	1.21	1.36	1.49	1.60	1.69	1.75	1.81	1.85	1.88
11	t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5
	h(t)	0	0	0	0.07	0.23	0.43	0.64	0.84	1.03	1.19	1.33	1.45	1.55	1.64	1.71	1.77
12	t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5
	h(t)	0	0	0	0.09	0.29	0.53	0.77	0.99	1.19	1.35	1.49	1.61	1.69	1.76	1.82	1.86
13	t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5
	h(t)	0	0	0	0.13	0.43	0.79	1.15	1.49	1.78	2.03	2.23	2.40	2.54	2.64	3.72	2.79
14	t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5
	h(t)	0	0	0.098	0.31	0.56	0.80	1.02	1.21	1.36	1.49	1.60	1.69	1.75	1.81	1.85	1.88

Лабораторна работа 8
ЛІНІЙНА ПАРНА РЕГРЕСІЯ

Мета роботи: Вивчення методики побудови математичної моделі лінійної парної регресії та оцінки її у пакеті *MatLab*

8.1 Загальні положення

Регресія – це метод, який використовується для моделювання та аналізу відносин між змінними, а також для того, щоб побачити, як ці змінні разом впливають на отримання певного результату.

Парна лінійна регресія – це модель, що дозволяє моделювати взаємозв'язок між значеннями однієї вхідної незалежної та однієї вихідної залежної змінними за допомогою лінійної моделі, наприклад, прямої.

Ідентифікація рівняння регресії зводиться до оцінки її параметрів. Для лінійних за невідомими параметрами регресій застосуємо метод найменших квадратів (МНК), що дозволяє знайти оцінки, що мінімізують суму квадратів відхилень фактичних (експериментальних) значень результативної ознаки *y* від теоретичних.

Рівняння парної лінійної регресії має вигляд

$$y^p = a + bx. \tag{8.1}$$

Параметри *a* і *b* рівняння регресії (8.1) знаходять із умови МНК

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i^p)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2 \to \min. \tag{8.2}$$

Скориставшись необхідною умовою екстремуму функції

$$\begin{cases} \partial S / \partial a = 0, \\ \partial S / \partial b = 0. \end{cases} \tag{8.3}$$

Отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \partial S / \partial a = 2\sum_{i=1}^{2}(y_i - a - bx_i)(-x_i), \\ \partial S / \partial b = 2\sum_{i=1}^{2}(y_i - a - bx_i)(-1). \end{cases} \tag{8.4}$$

Запишемо систему лінійних рівнянь у нормальному вигляді, коли невідомі перебувають у лівій частині, а відомі величини у правій частині рівнянь

$$\begin{cases} 2a + b\sum_{i=1}^{2} x_i = \sum_{i=1}^{2} y_i, \\ a\sum_{i=1}^{2} x_i + b\sum_{i=1}^{2} x_i^2 = \sum_{i=1}^{2} x_i y_i. \end{cases} \tag{8.5}$$

Рорзв'язавши систему (8.5) одним з відомих методів отримаємо значення коефіцієнтів a і b рівняння (8.1).

$$b = \frac{\overline{yx} - \overline{y} \cdot \overline{x}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2},$$
$$a = \overline{y} - b \cdot \overline{x}.$$

де $\overline{yx}, \overline{y}, \overline{x}, \overline{x^2}$ – середні значення відповідних величин

Параметр b називається коефіцієнтом регресії. Його величина показує середню зміну результату y зі зміною фактора x на одну одиницю.

У *MatLab* значення коефіцієнтів a і b можна знайти за допомогою команди polyfit(x,y,n), яка повертає коефіцієнти полінома p(x) n-го ступеня (при n=1 це рівняння прямої), який найкраще підходить за МНК для даних y. Коефіцієнти p

зазначені у спадному ступені, а довжина *p* дорівнює *n*+1 (2 для лінійного поліному).

8.1.1 Оцінка значущості параметрів лінійної регресії та кореляції

Після того, як рівняння лінійної регресії знайдено, проводиться оцінка значущості, як рівняння в цілому, так і окремих його параметрів.

Оцінити кількісно тісноту лінійного зв'язку між фактором *x* і вихідною величиною *y* можна за допомогою коефіцієнта лінійної кореляції r_{yx} за формулою Пирсона

$$r_{yx} = \frac{\sum_{u=1}^{N}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{u=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2 (y_i - \overline{y})^2}}, \tag{8.6}$$

де $\overline{x}$, $\overline{y}$ – середні значення величин; N – об’єм виборки (кількість експериментальних точок).

Рівняння (8.4) можна також представити у наступному виді

$$r_{yx} = b\frac{\sqrt{\sum_{u=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}}{\sqrt{\sum_{u=1}^{N}(y_i - \overline{y})^2}}, \tag{8.7}$$

де b – коефіцієнт регресії.

Лінійний коефіцієнт кореляції r_{yx} змінюється від -1 до +1. При цьому що ближче r_{xy} до нуля, то слабкіше кореляція, що ближче r_{xy} до (-1) чи (+1), тим більше кореляція, тобто залежність *x* та *y* близька до лінійної. Про наявність суттєвого лінійного зв'язку між змінними у них, можна говорити при значенні $|r_{yx}| > 0,5 - 0,6$.

Для оцінки статистичної значущості коефіцієнтів кореляції та регресії використовується t-критерій Стьюдента. З табличним значенням порівнюється відношення значення коефіцієнта та його випадкової помилки.

$$t_a = \frac{|a|}{m_a},\; t_b = \frac{|b|}{m_b},\; t_r = \frac{|r|}{m_r}. \tag{8.8}$$

Випадкові помилки параметрів лінійної регресії та коефіцієнта кореляції визначаються за формулами:

$$m_a = \sqrt{\frac{\sum_{u=1}^{N}(y_u - y^p)^2}{N-2} \cdot \frac{\sum_{u=1}^{N} x_u{}^2}{N\sum_{u=1}^{N}(x_u - \bar{x})^2}},$$

$$m_b = \sqrt{\frac{\sum_{u=1}^{N}(y_u - y^p)^2 / (N-2)}{\sum_{u=1}^{N}(x_u - \bar{x})^2}}, \tag{8.9}$$

$$m_{r_{yx}} = \sqrt{\frac{1 - r_{yx}^2}{N-2}}.$$

Табличне значення $t_{\text{Т}}$ знаходять по таблицям розподілення Стьюдента для обраного рівня значимості α (в техниці α=5%) та числа ступеней вільності $f = N - 2$. Розрахункові значення t_a, t_b і t_r повинні бути більше табличного значення t_T.

Оцінка значущості рівняння регресії в цілому здійснюється за допомогою F-критерію Фішера. При цьому висувається нульова гіпотеза, що коефіцієнт регресії дорівнює нулю b=0, тобто фактор x не спричиняє впливу на результат y. Для перевірки нульової гіпотези фактичне значення критерію Фішера порівнюють із табличним (критичним) критерієм Фішера.

Фактичне значення критерія Фішера дорівнює відношенню питомих (розрахованих на один ступінь свободи) факторної та залишкової дисперсій:

$$F_{факт} = \frac{\sum_{u=1}^{N}(y_u^p - \overline{y})^2 \Big/ n}{\sum_{u=1}^{N}(y_u - y_u^p)^2 \Big/ (N-n-1)} = \frac{r_{yx}^2}{1-r_{yx}^2}(N-2), \qquad (8.10)$$

де N – об'єм виборки, n – кількість факторів.

Табличне значення критерія Фішера F_T – це максимально можливе значення F-критерію при заданому рівні значущості α і числі степеней вільності.

F-критерій Фішера має 2 ступеня вільності:

$f_1 = n$ – кількість факторів у рівнянні регресії (для парної регресії $f_1 = 1$);

$f_2 = n$ – кількість спостережень у виборці мінус число факторів (для парної регресії $f_2 = N$ - 2.

Рівень значущості α – можливість відкинути правильну гіпотезу. Стандартне значення α = 0,05.

Якщо $F_{факт} > F_T$, то нульова гіпотеза відхиляється, а рівняння регресії є статистично значимим та надійним. В іншому випадку при $F_{факт} < F_T$ говорять про статистично незначимість та ненадійність знайденого рівняння.

8.2 Порядок виконання лабораторної роботи

8.2.1 Обираємо вихідні дані з табл.8.1 згідно свого варіанту.

Розраховуємо коефіцієнти *a* і *b* рівняння (8.1) у *Matlab* за домопогою функції `polyfit`

```
p = polyfit(x,y,1)
```

8.2.2 Записуємо рівняння регресії із знаденими числовими параметрами (у векторі p коефіцієнти зазначені у спадному ступені, а довжина p дорівнює 2).

$$y^p = a + bx\,.$$

8.2.3 Розраховуємо лінійний коефіцієнт кореляції r_{yx} за формулами 8.6 та 8.7 (значення коефіцієнтів повинні співпадати).

8.2.4 Проводимо оцінку значущості коефіцієнтів кореляції та регресії за допомогою *t*-критерія Стьюдента. Для чого порівнюємо значення, знайдені за формулами (8.5) та (8.9), із табличними даними (см. додаток А) при рівні значущості α =0,05 для ступеня вільності $f = N - 2$.

8.2.5 Проводимо оцінку значущості рівняння регресії в цілому за критерієм Фішера (рівняння 8.10).

8.2.6 Робимо вивод про придатність нашого рівняння регресії для практичних розрахунків.

8.3 Приклад виконання лабораторної роботи

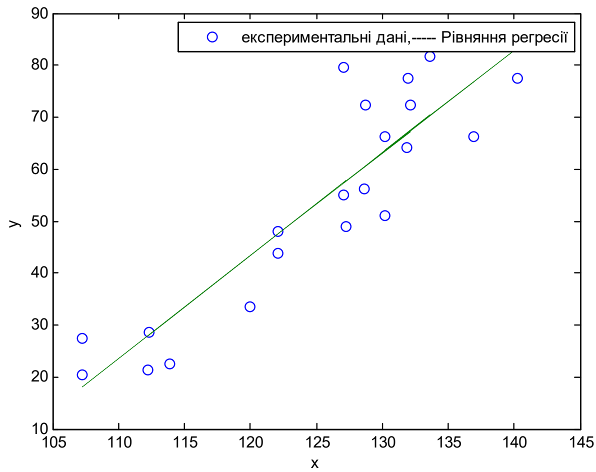
Задаємося вихідними даними

```
clc
% Дані
x = [120 112.3 107.25 107.25 127.25 112.2 113.85 122.1
122.1 132.1 127.05 127.05 128.7 132 133.65 128.6 140.25
130.25 130.25 131.9 136.9];
y = [33.6 28.56 20.4 27.54 48.96 21.42 22.44 43.86 47.94
72.42 79.56 55.08 72.42 77.52 81.6 56.1 77.52 51 66.3
64.26 66.3];
N=length(x); %Кількість даних у виборці
% Побудова рівняння регресії методом найменших квадратів
coefficients = polyfit(x, y, 1);
a = coefficients(2); % Коефіцієнт a
b = coefficients(1); % Коефіцієнт b
y_regression = polyval(coefficients, x);
% Виведення рівняння регресії
fprintf('Рівняння регресії: y = %.4fx + %.4f\n', b, a);
```

```
Рівняння регресії: y = 1.9769x + -193.8370
```

Будуємо графік знайденого рівняння та експериментальні значення

```
% Побудова графіку
plot(x,y,'o',x,y_regression,'-')
legend('експериментальні дані,--- Рівняння регресії')
xlabel('x');
ylabel('y');
```




```
% Знаходимо коефіцієнт парної кореляціїї (формула 8.4)
xsr=sum(x)/N;
ysr=sum(y)/N;
s12=sum((x-xsr).*(y-ysr));
SX=sqrt(sum((x-xsr).^2));
SY=sqrt(sum((y-ysr).^2));
ryx=s12/(SX*SY);
```

```
xsr =  124.9048
ysr =  53.0857
s12 = 3.5830e+03
SX =  42.5730
SY =  93.3799
ryx = 0.9013
```

Знаходимо значення коефіцієнту парної кореляціїї за формулою 8.7

Значення коефіцієнтів повинні співпадати

Проводимо превірку значущості коефіцієнтів за критерієм Стьюдента

```
%Сума квадратов відхілень регресії
SSE=sum((y-y_regression).^2);
%Сума квадратов відхілень x від середнього значення
SST=sum((x-xsr).^2);
%Стандартна похибка коефіцієнта a
ma1=SSE/(N-2);
ma2=(sum(x.^2))/(N*SST);
ma=sqrt(ma1*ma2);
%Стандартна похибка коефіцієнта регресії b
MSE=(sum((y-y_regression).^2))/(N-2);
mb=sqrt(MSE/SST);
%Стандартна похибка коефіцієнта кореляції
mr=sqrt((1-ryx)/(N-2));
% Розрахункові значення t-критеріїв
ta=abs(a)/ma;
tb=abs(b)/mb;
tr=abs(ryx)/mr;
```

```
ta =  7.0992
tb =  9.0684
tr =  12.5042
```

Знаходимо табличне значення критерія Стьюдента для рівня значущості p = 0,05 та ступеня вільності f = 21-2=19.

$$t_T = 2{,}093$$

Так як розрахункові значення t-критеріїв перевищують табличне значення, гіпотезу про несуттєвість коефіцієнтів регресії можна відхилити. Тобто усі коефіцієнти є значущими.

Проводимо превірку за критерієм Фішера

```
% Перевірка за критерієм Фішера
Ffakt=(ryx^2/(1-ryx^2))*(N-2)
```

```
Ffakt = 82.2363
```

Знаходимо табличне значення критерія Фішера (Додаток А) для рівня значущості α = 0,05 та ступенів вільності f_1= 1 і f_2 = 19.

F_T **=4,38**

Фактичне значення критерію Фішера значно перевищує табличне значення. Таким чином, можна зробити висновок, що зв'язок між змінними в регресійному рівнянні суттєвий. Та отримане рівняння можна використовувати для практичних розрахунків.

Контрольні питання

1) Що таке регресія?

2) Назвіть суть методу найменьщих квадратів?

3) За яким критерієм проводиться оцінка значущості коефіцієнтів регресії?

4) Що обчислює процедура `polyfit` у пакеті *MatLab*?

5) Що показує коефіцієнт парної кореляції*?*

Вихідні дані до лабораторної роботи 8

Варіант 1
x1 = 1.5 2.2 3.3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 20
y =7.5 4.2 5.5 2.5 1 6.7 7 8.5 9 10 15 18 12.7 12 11 18 17 18 18.5 20 18
Варіант 2
x2 = 267.30 252.57 231.71 234.07 278.86 251.23 249.35 271.42 260.41 289.20 276.21 273.20 285.17 291.52 294.16 277.58 313.06 287.95 285.35 290.27 300.13
y2 = 25.20 21.42 15.30 20.65 36.72 16.06 16.83 32.89 35.95 54.31 59.67 41.31 54.31 58.14 61.20 42.07 58.14 38.25 49.72 48.19 49.72
Варіант 3
x3 = -254.14 -219.29 -233.49 -196.38 -237.36 -218.77 -222.89 -269.17 -230.83 -85.00 -276.73 -246.74 -262.82 -252.25 -252.15 -240.04 -282.12 -248.37 -252.72 -246.87 -260.25
y3 = 13.44 11.42 8.16 11.01 19.58 8.56 8.97 17.54 19.17 28.96 31.82 22.03 28.96 31.00 32.64 22.44 31.00 20.40 26.52 25.70 26.52
Варіант 4
x4 = -252.01 -213.96 -190.76 -213.22 -237.98 -211.97 -235.15 -233.13 -247.49 -238.64 -248.15 -227.30 -256.28 -250.03 -261.40 -276.04 -285.76 -246.33 -254.67 -271.19 -274.78

y4= 13.44 11.42 8.16 11.02 19.58 8.57 8.98 17.54 19.18 28.97 31.82 22.03 28.97 31.01 32.64 22.44 31.01 20.40 26.52 25.70 26.52

Варіант 5

x5= 2874.20 2893.28 2841.55 2734.37 3291.44 2898.77 2836.92 3109.23 2946.90 3401.93 3023.36 3034.18 3128.30 3009.85 3482.54 3258.94 3418.25 3431.56 3044.02 3286.97 3408.10

y5= 5.38 4.57 3.26 4.41 7.83 3.43 3.59 7.02 7.67 11.59 12.73 8.81 11.59 12.40 13.06 8.98 12.40 8.16 10.61 10.28 10.61

Варіант 6

x6= 2191.30 2084.40 2115.82 2007.79 2507.66 2286.87 2436.48 2410.95 2166.74 2749.49 2758.92 2697.29 2598.62 2646.42 2758.57 2534.83 2851.48 2579.08 2444.07 2299.17 2740.81

y6= 2.15 1.83 1.31 1.76 3.13 1.37 1.44 2.81 3.07 4.63 5.09 3.53 4.63 4.96 5.22 3.59 4.96 3.26 4.24 4.11 4.24

Варіант 7

x7= 243.35 224.85 215.56 212.60 256.21 225.18 225.39 244.28 243.30 264.42 253.60 253.72 255.33 263.35 268.83 260.69 278.18 265.25 263.55 264.14 273.20

y7= 13.44 11.42 8.16 11.02 19.58 8.57 8.98 17.54 19.18 28.97 31.82 22.03 28.97 31.01 32.64 22.44 31.01 20.40 26.52 25.70 26.52

Варіант 8

x8= 57.39 54.14 55.21 53.39 64.73 54.18 53.66 62.57 63.44 69.31 60.46 60.85 61.40 65.92 65.59 66.93 67.21 61.64 65.54 68.34 66.84

y8= 13.44 11.42 8.16 11.02 19.58 8.57 8.98 17.54 19.18 28.97 31.82 22.03 28.97 31.01 32.64 22.44 31.01 20.40 26.52 25.70 26.52

Варіант 9

x9= -62.53 -56.45 -56.90 -53.59 -61.97 -55.66 -60.74 -62.12 -61.65 -62.42 -61.70 -63.64 -61.73 -68.09 -67.52 -61.47 -67.12 -63.66 -64.14 -67.12 -66.96

y9= 13.44 11.42 8.16 11.02 19.58 8.57 8.98 17.54 19.18 28.97 31.82 22.03 28.97 31.01 32.64 22.44 31.01 20.40 26.52 25.70 26.52

Варіант 10

x10= -50.48 -43.20 -42.05 -39.48 -52.18 -42.97 -43.16 -51.54 -48.37 -48.05 -50.48 -51.75 -50.11 -53.63 -52.13 -51.84 -56.15 -50.72 -48.01 -51.40 -49.81

y10= 13.44 11.42 8.16 11.02 19.58 8.57 8.98 17.54 19.18 28.97 31.82 22.03 28.97 31.01 32.64 22.44 31.01 20.40 26.52 25.70 26.52

Лабораторна робота 9
МНОЖИННА ЛІНІЙНА РЕГРЕСІЯ

Мета роботи: Вивчення методики побудови математичної моделі множинної лінійної регресії та оцінки її у пакеті *MatLab*

9.1 Основні теоретичні положення

При моделюванні технологічних об'єктів у багатьох випадках зв'язок між вихідним параметром y та вхідними параметрами (факторами) x можна апроксимувати лінійною залежністю (поліномом) виду

$$y^P = b_0 + b_1 x_2 + \ldots + b_n x_n. \qquad (9.1)$$

Такий поліном називається рівнянням множинної лінійної регресії. Для ідентифікації об'єкта необхідно визначити значення коефіцієнтів регресії $b_0, b_1 \ldots b_n$.

Основна мета множинної регресії – побудувати модель з великою кількістю факторів, визначивши при цьому вплив кожного з них окремо, а також сукупну дію на результативний показник.

Фактори, що включаються в множинну регресію повинні бути кількісно вимірюваними та не повинні корелювати між собою і тим більше знаходитися у функціональній залежності.

Класичний підхід до оцінювання параметрів лінійної регресії заснований на методі найменших квадратів. Метод найменших квадратів (МНК) дозволяє отримати такі оцінки параметрів $b_0, b_1, b_2, \ldots b_n$, при яких сума квадратів відхилень фактичних значень результативної ознаки у від розрахункових (теоретичних) мінімальна:

$$\sum_{u=1}^{N} (y_i - b_0 - b_1 x_{1i} - \ldots - b_n x_{ni})^2 \rightarrow \min. \qquad (9.2)$$

Для того, щоб знайти мінімум функції (9.2), треба розрахувати частінні похідні за кожним з параметрів $b_0, b_1, b_2, ...b_m$ і прирівняти їх до нуля.

Для рівняння виду (9.1) система нормальних рівнянь має такий вид

$$\begin{cases} Nb_0 + b_1\sum x_1 + b_2\sum x_2 + ... + b_n\sum x_n = \sum y, \\ b_0\sum x_1 + b_1\sum x_1^2 + b_2\sum x_1x_2 + ... + b_n\sum x_1x_n = \sum yx_1, \\ .... \\ b_0\sum x_n + b_1\sum x_1x_n + b_2\sum x_2x_n + ... + b_n\sum x_n^2 = \sum yx_n. \end{cases}$$

Рівняння множинної лінійної регресії у матричній формі має вигляд

$$Y = BX,$$

де $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_N \end{pmatrix}$ – вектор-стовпчик розмірності фактичних значень вихідної величини;

$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & ... & x_{n1} \\ 1 & x_{12} & ... & x_{n2} \\ ... & & & \\ 1 & ... & ... & ... \\ 1 & x_{1n} & ... & x_{Nn} \end{pmatrix}$ – матриця значень факторів (перший стовбчик значень одиниць пов’язаний з наявністю у рівнянні регресії вільного члена);

$B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$ – вектор-стовпчик параметрів моделі.

Умова МНК у матричній формі записується так

$$F = (Y - XB)^T (Y - XB) \to \min. \tag{9.3}$$

Диференціюючи (9.3) по вектору B і прирівнюючи перші часткові похідні по B до нуля отримаємо наступне рівняння.

$$\frac{\partial F}{\partial B} = -2X^T Y + 2X^T YXB = 0.$$

Звідси отримаємо формулу для знаходження вектору параметрів моделі.

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y. \tag{9.4}$$

Практична значущість рівняння множинної регресії оцінюється за допомогою коефіцієнту детермінації R^2, який характеризує тісноту лінійного кореляційного зв'язку між однією випадковою величиною y та деякою множиною випадкових величин x_i. Коефіцієнт детермінації показує частку дисперсії результативної ознаки y, яка пояснюється регресією, у загальній дисперсії результативної ознаки.

$$R^2 = \frac{D_{\text{поясн}}}{D_{\text{заг}}} = 1 - \frac{\sum (y - y^p)^2}{\sum (y - \bar{y})^2}. \tag{9.5}$$

Коефіцієнт детермінації приймає значення від 0 до 1. При R^2=1 існує функціональній зв’язок. Якщо R^2=0, то рівняння регресії нічого не пояснює. Що ближче R^2 до одиниці, то вище частка пояснення, яке дає рівняння регресії.

Значущість рівняння множинної регресії в цілому оцінюється за допомогою F-критерію Фішера.

Вважається, що рівняння регресії адекватно описує досліджуваний процес, якщо залишкова дисперсія $D^2_{\text{ЗАЛ}}$ вихідної величини, розрахованої за рівнянням регресії щодо експериментальних даних y не перевищує статистичного сенсу помилки досліду $D^2_{\text{Д}}$.

Залишкова дисперсія обчислюється за формулою

$$D^2_{\text{ЗАЛ}} = \frac{m}{f}\sum_{u=1}^{N}(\overline{y_u} - y_u^p)^2,$$

де m – кількість паралельних дослідів; $f = (Nm - n - 1)$ – число ступеней вільності лінійного поліному; N – кількість дослідів.

Щоб визначити дисперсію досліду $D^2_{\text{Д}}$ (дисперсію відтворюваності), необхідно мати кілька значень вихідного параметра, виміряні за однакових умов (за тих же значень факторів). Для цього проводяться паралельні досліди.

Лінійне рівняння регресії адекватно описує об`єкт дослідження, якщо виконується нерівність

$$F = \frac{D^2_{\text{ЗАЛ}}}{D^2_{\text{Д}}} < F_{T(f_1, f_2)},$$

де F_T – значення критерію Фішера, яке знаходиться по таблиці розподілення Фішера для обраного рівня значущості α (в технічних дослідження $\alpha = 0{,}95$), степенів вільності чисельника $f_1 = (Nm - n - 1)$ і знаменника $f_2 = N(m-1)$.

Якщо паралельні досліди провести не вдається (m=1), то розрахувати дисперсію досліду неможливо. Тоді замість перевірки адекватності отриманого рівняння регресії проводиться оцінка якості апроксимації дослідних точок прийнятим рівнянням регресії. Така перевірка досягається порівнянням залишкової дисперсії $D^2_{\text{ЗАЛ}}$ та дисперсії відносно середнього $D^2_{\text{у}}$, яка розраховується за формулою

$$D^2_{\text{у}} = \frac{1}{N-1}\sum_{u=1}^{N}(y_u - \overline{y})^2,$$

де y_u – експериментальні значення вихідного параметра; $\overline{y}$ – середнє значення вихідного параметра в N дослідах.

Рівняння регресії має сенс, якщо дисперсія відносно середнього $D^2_{\text{у}}$ суттєво більше, чим залишкова дисперсія $D^2_{\text{ЗАЛ}}$. Тобто повинна виконуватись наступна умова

$$F = \frac{D^2_{\text{у}}}{D^2_{\text{Д}}} > F_{T(f_1, f_2)},$$

де $F_{T(f_1, f_2)}$ значення критерію Фішера, яке знаходиться по таблиця розподілення Фішера для ступенів вільності чисельника $f_1 = N - 1$ і $f_2 = N - n - 1$ для обраного рівня значущості α.

Якщо умова $F > F_T$ виконується, то рівняння регресії має сенс, та як дисперсії $D^2_{\text{у}}$ і $D^2_{\text{ЗАЛ}}$ відрізняються не випадково, а значимо. Чим більше значення F перевищує F_T тим більш ефективним є рівняння регресії.

9.2 Порядок виконання роботи

9.2.1 Визначити коефіцієнти лінійного рівняння регресії матричним методом.

9.2.2 Оцінити значущість рівняння множинної регресії за допомогою коефіцієнту детермінації R^2.

9.2.3 Перевірити якість рівняння за критерієм Фішера.

9.2.4 Зробити висновок про можливість практичного застосування отриманого рівняння.

9.3 Приклад виконання лабораторної роботи

Віхідні дані

N п/п	*y*	*x1*	*x2*
1	2	11	3
2	1	10	2

3	3	12	4
4	8	18	10
5	7	15	11
6	5	13	6
7	4	13	35
8	6	15	7
9	7	16	10
10	7	1	12

Вводимо вектор-стовпець вихідних даних *y* та матрицю факторів *X*

```
clc
clear all
% Вихідні дані
y=[2; 1; 3; 8; 7; 5; 4; 6; 7; 7];
x1=[11 10 12 18 15 13 13 15 16 17]';
x2=[3 2 4 10 11 6 5 7 10 12]';
X= [x1, x2]
% Додаємо до масиву X стобчик одиниць
X = [ones(size(X, 1), 1), X]
N=length(y); %Кількість експериментальних точок
n=2; %Кількість факторів
```

Розраховуємо коефіцієнти рівняння регресії (9.1) матричним методом за формулою (9.4)

```
B=inv(X'*X)*X'*y
b0=B(1);
b1=B(2);
b2=B(3);
```

```
B = -4.8740
     0.5854
     0.2398
```

Записуємо регресійне рівняння

```
x1=X(1:N,2);
x2=X(1:N,3);
yp=b0+b1*x1+b2*x2
```

```
yp =   2.2846
       1.4593
       3.1098
       8.0610
       6.5447
       4.1748
       3.9350
```

```
    5.5854
    6.8902
    7.9553
```

Оцінюємо тісноту лінійного зв'язку між вихідною величиною y і факторами x

```
%Сума квадратов відхілень регресії
SSE=sum((y-yp).^2);
%Сума квадратов відхілень y від середнього значення
ysr=sum(y)/N;
SST=sum((y-ysr).^2);
%Коефіцієнт детермінації
R2=1-SSE/SST
```

```
R2 = 0.9558
```

Оцінюємо якість отриманого рівняня регресії за критерієм Фішера

```
%Дисперсія відносно середнього
SY2=SST/(N-1);
%Залишкова дисперсія
f=N-n-1;
SZ2=SSE/f;
% Умова Фішера
F=SY2/SZ2
```

```
F =  17.6094
```

Знаходимо табличне значення значення критерію Фішера $F_{T(f_1,f_2)}$ (див. Додаток А) для ступеня вільності чисельника $f_1 = 9$ і $f_2 = 7$ для обраного рівня значущості $\alpha = 0{,}05$.

```
Fт =  3.7
```

Так як виконується умова $17{,}6 > 3{,}7$ то рівняння регресії має сенс.

Висновок

Значення критерія детермінаціїї R2 = 0.9558 >0.8, а фактичне значення критерію Фішера значно перевищує табличне значення. Таким чином, можна зробити висновок, що зв'язок між змінними в регресійному рівнянні суттєвий. Та отримане рівняння можна використовувати для практичних розрахунків.

Контрольні питання

1) Що можна оцінити за коефіцієнтом детермінації?

2) Як оцінюється значущість рівняння множинної регресії в цілому?

3) Як можна оцінити адекватність оівняння регресії, якщо відсутні паралельні досліди?

4) Що відбувається при виконанні наступної команди `X = [ones(size(X, 1), 1), X]`?

5) В якому випадку рівняння регресії має сенс*?*

Вихідні дані до лабораторної роботи 9

B1	x1	11.0	9.66	12.09	7.7	15	13.1	13	15.2	16.2	16.9
	x2	3.05	1.81	3.73	10.18	11	5.98	5.18	7.12	10.0	12.25
	y	2	1	3	8	7	5	4	6	7	7
B2	x1	13.04	10.5	10.48	16.56	17.63	9.45	12.9	10.7	18.2	18.89
	x2	3	1.84	-1.46	11.27	6.17	0.89	5.17	4.91	10.9	13.48
	y	10.1	5.05	15.15	40.4	35.35	25.25	20.2	30.3	35.35	35.35
B3	x1	15.46	6.4	14.33	18.52	19.29	15.78	17.66	14.31	15.23	22.24
	x2	-8	-0.62	-2.6	8.01	14.37	10.29	-0.27	4.55	10.71	10.48
	y	4.1	2.05	6.15	16.4	14.35	10.25	8.2	12.3	14.35	14.35
B4	x1	10.59	12.36	11.27	18.49	15.99	13.12	14.32	15.48	14.82	14.29
	x2	40	20	600	100	140	100	80	120	140	140
	y	40	20	600	100	140	100	80	120	140	140
B5	x1	10.22	11.41	12.7	18.59	14.34	13.24	12.58	14.76	15.57	16.23
	x2	2.31	1.84	2.72	10.45	10.91	6.52	5.2	7.37	8.88	11.23
	y	-5	-2.5	-7.5	-20	-17.5	-12.5	-10	-15	-17.5	-17.5
B6	x1	17.57	11.17	31.5	21.34	34.69	5.22	18.66	12.2	22.45	23.85
	x2	1.36	1	2.91	10.3	12.1	5.75	5.6	7.4	9.2	12.29
	y	6	3	9	24	21	15	12	18	21	21
B7	x1	-0.84	33.88	11.48	43.77	8.3	22.28	12	-16	0.53	26.6
	x2	2.95	1.16	3.53	10.18	10.25	6.73	4.51	8.35	9.19	12.15
	y	6	3	9	24	21	15	12	18	21	21
B8	x1	-12.9	-1.39	2.65	24.3	29.8	17.7	7.1	27.8	28.5	18.9
	x2	89	64	-144	124	-88	-85	31	-39	-9.8	101
	y	6	3	9	24	21	15	12	18	21	21
B9	x1	11.13	10.07	16.45	17.8	13.9	13.4	13.5	15.1	14.7	14.55
	x2	3.63	-0.68	1.93	12.66	10.16	5.71	6.79	6.39	12.06	11.3
	y	6	3	9	24	21	15	12	18	21	21
B10	x1	15.05	12.5	11.1	14.5	10.8	11.9	11.24	13.36	19.93	15.8
	x2	8.28	0.93	5.94	8.95	11.35	7.94	4.17	6.12	14	13.9
	y	6	3	9	24	21	15	12	18	21	21

Лабораторна робота 10
НЕЛІНІЙНА ПАРНА РЕГРЕСІЯ

Мета роботи: Вивчення методики побудови математичної моделі нелінійної парної регресії та оцінки її якості у пакеті *MatLab*

10.1 Загальні положення

Якщо при моделюванні не вдається використати лінійну форму рівняння регресії, переходять до нелінійної форми зв'язку. Розрізняють два класи нелінійних парних регресій:

1) Регресії нелінійні відносно фактора, але лінійні за параметрами;
2) Регресії нелінійні за параметрами

До першої групи відносяться: гіпербола, логарифмічна функція та парабола.

гіпербола $$y = a_0 + \frac{a_1}{x} \qquad (10.1)$$

логарифмічна функція $$y = a_0 + a_1 Ln(x) \qquad (10.2)$$

парабола $$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \qquad (10.3)$$

До другої групи відноситься експонента, степенева функція і показникова функція

експонента $$y = a_0 e^{a_1 x} \qquad (10.4)$$

степенева функція $$y = a_0 \cdot x^{a_1} \qquad (10.5)$$

показникова функція $$y = a_0 \cdot a_1^x \qquad (10.6)$$

При знаходженні коефіцієнтів гіперболи, експоненти та логарифмічної функції їх перетворюють до лінійного виду $y = a_0 + a_1 x$ простою заміною змінної. Ріняння другої групи також можна привести до лінійного виду після проведення логарифмування. Усі наведені рівняння першої і другої групи відносяться до класу внутрішньо лінійних рівнянь і для них можна застововувати метод найменьших квадратів (МНК).

10.1.1 Гіперболична регресія

Для приведення рівняння виду (10.1) до лінійного вигляду вводимо нову змінну $z = \frac{1}{x}$, тоді рівняння гіперболи приймає лінійний вид $y = a_0 + a_1 z$.

Згідно МНК

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i^{розр})^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 \cdot z)^2 \to \min$$

Система нормальних рівнянь для визначення параметрів a_0 і a_1 рівняння лінійної регресії має такий вигляд:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} z_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} z_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i z_i \end{cases} \tag{10.7}$$

Із системи рівнянь (10.7) отримуємо наступні формули для розрахунку коефіцієнтів a_0 і a_1.

$$a_1 = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} y_i z_i\right) - \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} z_i}{n\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)^2}, \tag{10.8}$$

$$a_0 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - a_1 \sum_{i=1}^{n} z_i\right). \tag{10.9}$$

10.1.2 Логаріфмічна регресія

Логарифмічну функцію $y = a_0 + a_1 Ln(x)$ можна привести до лінійного виду

$$y = a_o + a_1 z,$$

де z=Ln(x)

Система нормальних рівнянь згідно МНК має вигляд (10.8).

10.1.3 Параболічна регресія

У параболі другого степеня $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, замінивши $x_1=x$ та $x_2=x$, отримаємо двофакторну лінійну регресію

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 . \qquad (10.10)$$

Застосувавши до рівняння (10.10) МНК отримуємо наступну систему нормальних рівнянь

$$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum_{i=u}^{n} x_u + a_2 \sum_{u=1}^{n} x_u^2 = \sum_{u=1}^{n} y_u \\ a_0 \sum_{u=1}^{n} x_u + a_1 \sum_{u=1}^{n} x_u^2 + a_2 \sum_{u=1}^{n} x_u^3 = \sum_{u=1}^{n} y_u x_u \\ a_0 \sum_{u=1}^{n} x_u^2 + a_1 \sum_{u=1}^{n} x_u^3 + a_2 \sum_{u=1}^{n} x_u^4 = \sum_{u=1}^{n} y_u x_u^2 \end{cases} \qquad (10.11)$$

Розв’язати її відносно параметрів a_0, a_1 і a_2 можна, наприклад, методом зворотньої матриці. Для цього потрібно записати систему (10.11) у матричному виді

AX=b,

де

$$A = \begin{pmatrix} n & \sum_{u=1}^{n} x_u & \sum_{u=1}^{n} x_u^2 \\ \sum_{u=1}^{n} x_u & \sum_{u=1}^{n} x_u^2 & \sum_{u=1}^{n} x_u^3 \\ \sum_{u=1}^{n} x_u^2 & \sum_{u=1}^{n} x_u^3 & \sum_{u=1}^{n} x_u^4 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} \sum_{u=1}^{n} y_u \\ \sum_{u=1}^{n} y_u x_u \\ \sum_{u=1}^{n} y_u x_u^2 \end{pmatrix}.$$

Рішення системи (10.11) знаходимо за формулою

$$X = A^{-1}b,$$

де A^{-1} – зворотня матриця.

У наступному прикладі показана реflізація метода зворотньої матриці у програмі *MatLab*

```
%Метод зворотньої матриці для системи (10.11)
A=[N sum(x) sum((x).^2);sum(x) sum((x).^2)
sum((x).^3);sum((x).^2) sum((x).^3) sum((x).^4)] %Матриця
лівих коефіцієнтів системи (10.11)
b=[sum(y); sum(y.*x); sum(y.*(x.^2))] %Матриця правих
коефіцієнтів системи (10.11)
a=inv(A)*b; %Вектор коефіцієнтів регресії
```

10.1.4 Експоненційна регресія

Для приведення до лінійного вигляду рівняння експоненти $y = a_0 e^{a_1 x}$ проведемо логарифмування

$$\ln y = \ln\left(a_0 e^{a_1 x}\right);$$

$$\ln y = \ln a_0 + \ln\left(e^{a_1 x}\right);$$

$$\ln y = \ln a_0 + a_1 x .$$

Введемо додаткові змінні $b_0 = \ln a_0$ і $b_1 = a_1$, тоді $\ln y = b_0 + b_1 x$, звідки випливає, що можна застосовувати формули (10.8) и (10.9), в яких замість значень y_i треба використовувати $\ln y_i$, а z замінити на x.

$$b_1 = \frac{n\left(\sum [\ln y_i]\, x_i\right) - \sum \ln y_i \sum x_i}{n\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2}; \tag{10.12}$$

$$b_0 = \frac{1}{n}\left(\sum \ln y_i - b_1 \sum x_i\right). \tag{10.13}$$

При цьому ми отримаємо чисельні значення коефіцієнтів b_0 і b_1, від яких треба перейти до a_0 і a_1, що використовуються в моделі експоненти. Виходячи з введених позначень та визначення логарифму, отримуємо

$$a_0 = e^{b_0},$$

$$a_1 = b_1.$$

10.1.5 Степенева регресія

Після логарифмування рівняння (10.5)

$$y = a_0 \cdot x^{a_1},$$

отримуємо наступне рівняння

$$\ln y_i = \ln a_0 + a_1 \ln x_i.$$

Застосувавши МНК отримуємо таку систему рівнянь

$$\begin{cases} n \cdot \ln a_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} \ln x_1 = \sum_{i=1}^{n} \ln y_i, \\ \ln a_0 \sum_{i=1}^{n} \ln x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} \ln^2 x_i = \sum_{i=1}^{n} \ln y_i \ln x_i. \end{cases}$$

Для того, щоб отримати значення параметра a_0 необхідно провести процедуру потенціювання.

$$a_0 = e^{\ln a_0}.$$

10.1.6 Показникова регресія

Рівняння регресії в показниковій формі має такий вид

$$y = a_0 \cdot a_1^{x}.$$

Дане рівняння є неленійним по коефіцієнту a_1, але його можна привести до лінійного виду шляхом логарифмування

$$\ln y = \ln a_0 + x \ln a_1 .$$

Нормальні рівняння методу найменших квадратів (МНК) для показникової регресії:

$$\begin{cases} n \cdot \ln a_0 + \ln a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \ln y_i \\ \ln a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln y_i \end{cases}$$

Для визначення параметрів a_0 і a_1 проводимо процедуру потенціювання.

$$a_0 = e^{\ln a_0},$$
$$a_1 = e^{\ln a_1}.$$

Дослідження рівнянь регресії

Якість отриманного рівняння регресії перевіряють за допомогою наступних показників.

Тісноту нелінійного зв'язку двох випадкових величин оцінює індекс кореляції η

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{s_{\text{ост}}^2}{s_{\text{у}}^2}} = \sqrt{1 - \frac{\sum_{u=1}^{N} (y_u - y_u^p)^2}{\sum_{u=1}^{N} (y_u - \bar{y})^2}} .$$

$$0 \le \eta \le 1$$

Адекватність рівняння регресії оцінює коефіцієнт детермінації R^2 та середня похибка апроксимації $\overline{A}$.

Коефіцієнт детермінації R^2 характеризує частку дисперсії, що пояснюється регресією у загальній дисперсії.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{u=1}^{N}(y_u - y_u^p)^2}{\sum_{u=1}^{N}(y_u - \overline{y})^2}.$$

Середня похибка апроксимації $\overline{A}$ оцінює середнє відхилення розрахункових значень від фактичних.

$$\overline{A} = \frac{1}{n}\sum_{u=1}^{n}\left|\frac{y_u - y_u^p}{y_u}\right| \cdot 100\%.$$

Допустима межа значень $\overline{A}$ не більше 8-10%.

Знаходження коефіцієнтів лінійного полінома у MatLab

В пакеті приклaних програм *MatLab* коефіцієнти лінійного полінома можна знайти з використанням функцій `regress`, що має наступний синтаксис

```
b=regress(y,X).
```

Функція `regress` повертає вектор `b`, який містить значення коефіцієнтів лінійного рівняння регресії. Матрица факторов `X`, яка повинна включати першу колонку одиниць.

Приклад розрахунку гіперболичної регресії в *MatLab*

```
z=1./x;
Z=[ones(size(z)) z];%Додаємо в матрицю факторів колонку одиниць
b=regress(y,Z);
a0=b(1);
```

```
a1=b(2);
fgipa = a0 + a1*z; %рівняння гіперболи
```

10.2 Порядок виконання лабораторної роботи

Вихідні дані до роботи наведені в табл.10.1.

1. Привести рівняння гіперболи (10.1) до лінійного виду, замінивши 1/x на z.
2. Розрахувати коефіцієнти лінеаризованого рівняння за допомогою функції `regress` у пакеті *MatLab* (або методом зворотньої матриці для параболи)
3. Записати отримане рівняння регресії.
4. Побудувати графік рівняння регресії, що містить експериментальні точки.
5. Знайти значення індекса детерминації η і коефіцієнта детермінації R^2.
6. Розрахувати середню похибку апроксимації $\overline{A}$.
7. Занести отримані результати в табл.10.2.
8. Виконати аналогічні розрахунки для рівнянь (10.2) – (10.6)
9. Обрати найбільш ефективне рівняння регресії.

10.3 Приклад виконання лабораторної роботи

Приклад 1. Визначити коефіцієнти параболічної регресії та оцінити якість отриманої моделі.

Обираємо вихідні дані

```
x=[500 750 1000 1250 1500 1750 2000 2250 2500 2750 3000
3250 3500 3750 4000]';
y=[2055 3060.2 5180 5160.4 5609.9 6750 6809.9 7859.4 7900
9900 10880.2 11620.1 14500.1 15539.8 15960]';
```

Приводимо рівняння параболи (10.3) до лінійного виду, виконавши заміни: x_1=x та x_2=x

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 .$$

У відповідності до МНК записуємо систему нормальних рівнянь

$$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 \end{cases}$$

Знаходимо коефіцієнти регресії a_0, a_1 і a_2 методом зворотньої матриці

```
%ПАРАБОЛА
%Метод зворотньої матриці
N=length(x);
A=[N sum(x) sum((x).^2);sum(x) sum((x).^2)
sum((x).^3);sum((x).^2) sum((x).^3) sum((x).^4)];
b=[sum(y); sum(y.*x); sum(y.*(x.^2))];
c=inv(A)*b;
a0=c(1)
a1=c(2)
a2=c(3)
```

Отримуємо такі значення коефіцієнтів

a0 = 2.0697e+03
a1 = 1.4082
a2 = 5.3740e-04

Записуємо рівняння регресії

```
fpar=a0+a1*x+a2*x.^2;
```

Для наших вихідних даних рівняння має вид

fpar = 2069,7 + 1,4082*x + 0,0005374*x^2;

Будуємо графік параболи разом з експериментальними точками

```
figure(4)
plot(x, y,'o')
xlabel('x');
ylabel('y  парабола');
grid on
hold on
plot(x, fpar)
```

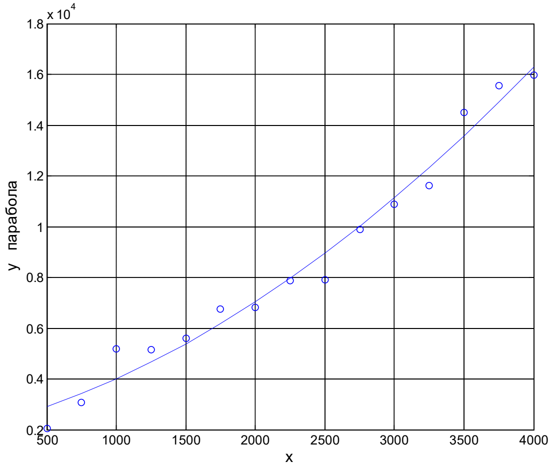


Рис.10.1. Параболічна регресія

Знаходимо значення індекса детерминації η, коефіцієнта детермінації R^2 та середню похибку апроксимації $\overline{A}$.

```
N=length(y); %кількість експериментальних точок
ysr=sum(y)/N;
r1=sum((y-fpar).^2);
r2=sum((y-ysr).^2);
nu_parfb=sqrt(1-r1/r2) %індекс детермінації
Rparab=sum((fpar-ysr).^2)/sum((y-ysr).^2)%коефіцієнт детермінації
A=(1/N)*sum(abs((y-fpar)./y))*100% середня похибка апроксимації
```

```
nu_parab = 0.9888
Rparab = 0.9778
A = 9.1800
```

Записуємо результати розрахунку в табл.10.2

Приклад 2. Визначити коефіцієнти парної показникової регресії $y = a_0 \cdot a_1^x$ та оцінити якість отриманої моделі.

Приводимо рівняння регресії до лінійного виду за допомогою логарифмування

$$\ln y = \ln a_0 + x \ln a_1 .$$

Визначаемо числові значення коефіцієнтів регресії методом МНК використовуючі функцію `regress`.

```
% ПОКАЗНИКОВА РЕГРЕСІЯ
X = [ones(size(x)) x]; ];%Додаємо в матрицю факторів
колонку одиниць
b = regress(log(y),X);
b0=b(1);
b1=b(2);
```

Отримуємо коефіцієнти лінеарізованого рівняння регресії

```
b0 = 7.7785
b1 = 5.0562e-04
```

Отримуємо коефіцієнти показникового рівняння регресії проводячі процедуру потенціювання

```
a0=exp(b(1))
a1=exp(b(2))
Pokazn=a0*a1.^x;
```

Остаточний вид рівняння показникової регресії

$$f_{pok} = 2388 \cdot 1{,}0005^x$$

Будуємо графік показникової функції разом з експериментальними точками

```
figure(5)
plot(x, y,'o')
xlabel('x');
```

```
ylabel('y  Показникова ф-я ');
grid on
hold on
plot(x, Pokazn)
```

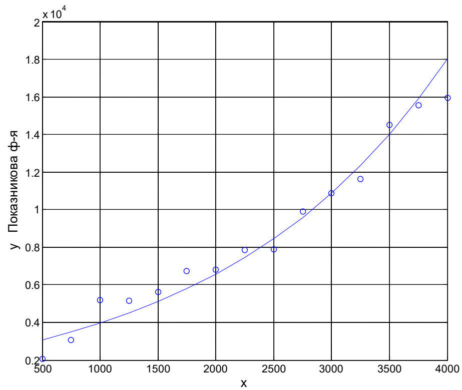


Рис.10.2. Показникова регресія

Перевіряємо якість отриманого рівняння

```
r1=sum((y-Pokazn).^2);
r2=sum((y-mean(y)).^2);
nu_pok=sqrt(1-r1/r2)
Rpok=1-r1/r2
A=(1/N)*sum(abs((y-Pokazn)./y))*100
```

```
nu_pok = 0.9806
Rpok =  0.9616
A =  11.1732
```

Отримані дані заносимо в табл.10.2.

Рівняння кореляції	Індекс детермі нації	Коефі-цієнт детермін ації	Середня похибка апрокси мації $\overline{A}$.
$f_{par} = 2069,7 + 1,4082x + 0,0005374x^2$	0,9888	0,9778	9,18
$f_{pok} = 2388 \cdot 1,0005^x$	0,9806	0,9616	11,17

Контрольні питання

1) Що таке регресії нелінійні відносно фактора і регресії нелінійні за параметрами?

3) Як можна лінеаризувати рівняння нелінійні відносно фактора та параметрами?

4) Що таке процедура потенціювання?

4) Для чого використовується метод зворотньої матриці?

5) Що оцінює індекс кореляції η?

6) Як можна оцінити адекватність рівняння нелінійної регресії?

7) Що показує коефіцієнт детермінації?

Вихідні дані до лабораторної роботи 10

Варіант 1	
x	y
500	2055
750	3060,2
1000	5180
1250	5160,4
1500	5600,9
1750	6750
2000	6809,9
2250	7859,4
2500	7900
2750	9900
3000	10880,2
3250	11620,1
3500	14500,1
3750	15539,8
4000	15960

Варіант 2	
x	y
10050	2055
11050,1	3060,2
10050,1	5180
10050,1	5160,4
10050	5600,9
10050,1	6750
10050,1	6809,9
10050	7859,4
10050	7900
10050,1	9900
12500,1	10880,2
14500,1	11620,1
17000,3	14500,1
18999,7	15539,8
20500,3	15960

Варіант 3	
x	y
10090	2300
10090,1	3100,2
10090,1	5160
10100,1	5160,4
10100	5600,9
10150,1	6800
10200,1	6900,9
10200	7780,4
10200	7959,4
10250,1	9840,4
12000,1	11000,2
14100,1	11900,1
16200,3	14050,1
17999,7	15090,8
19500,3	15600

Варіант 4	
x	y
500	2300
750	3100,2
1000	5160
1250	5160,4
1500	5600,9
1750	6800
2000	6900,9
2250	7780,4
2500	7959,4
2750	9840,4
3000	11000,2
3250	11900,1
3500	14050,1
3750	15090,8
4000	15600

Варіант 5	
x	y
3350	685
3683,37	1020,07
3350,03	1726,67
3350,03	1720,13
3350	1866,97
3350,03	2250
3350,03	2269,97
3350	2619,8
3350	2633,33
3350,03	3300
4166,7	3626,73
4833,37	3873,37
5666,77	4833,37
6333,23	5179,93
6833,43	5320

Варіант 6	
x	y
3363,33	766,667
3363,37	1033,4
3363,37	1720
3366,7	1720,13
3366,67	1866,97
3383,37	2266,67
3400,03	2300,3
3400	2593,47
3400	2653,13
3416,7	3280,13
4000,03	3666,73
4700,03	3966,7
5400,1	4683,37
5999,9	5030,27
6500,1	5200

Варіант7	
x	y
837,5	171,25
920,842	255,017
837,508	431,667
837,508	430,033
837,5	466,742
837,508	562,5
837,508	567,492
837,5	654,95
837,5	658,333
837,508	825
1041,68	906,683
1208,34	968,342
1416,69	1208,34
1583,31	1294,98
1708,36	1330

Варіант 8	
x	y
497.6	2055
752	3060
1003	5180
1256	5160
1499	5610
1741	6750
1996	6810
2255	7559
2495	7900
2753	9900
3000	10880
3255	11620
33000	14500
3750	15039,8
4000	15560,1

Варіант 9	
x	y
497.6	2055
752	3060
1003	5180
1256	5160
1499	5610
1741	6750
1996	6810
2255	7559
2495	7900
2753	9900
3000	10880
3255	11620
33000	14500
3750	15039,8
4000	15560,1

Варіант 10	
x	y
2050,9	10500
3090,2	11000,1
5180	10500,1
5180,4	10500,1
5695,9	10500
6740	10500,1
6749,9	10500,1
7759,4	10500
7759,4	10500
9880,4	10500,1
11080,2	12100,1
11900	14100,1
14000,1	16100,3
15110,8	17999,7
15760,1	19500,3

Лабораторна робота 11
ПОБУДОВА НЕЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЇ МЕТОДОМ БРАНДОНА

Мета роботи: Вивчення методики побудови нелінійної регресійної математичної моделі об'єкта методом Брандона.

11.1 Загальні положення

Метод Брандона призначений для побудови рівняння множинної нелінійної регресії. Якщо на вихідну величину діє кілька факторів, то нелінійну регресійну залежність представляють у вигляді добутку кількох функцій, кожна з яких є функцією лише однієї незалежної змінної

$$y^p = kf_1(x_1)f_2(x_2)...f_n(x_n), \quad (11.1)$$

де k – константа, $f(x)$ – лінійна (найчастіше), параболічна або ступенева функція. При використанні методу Брадона важливе значення має порядок обчислення функцій. Щоб збільшити точність методу, фактори необхідно ранжувати за ступенем їх впливу на вихідний параметр y. Чим сильніший вплив фактора x_i на y, тим меншим має бути номер i.

11.1.1 Алгоритм методу Брандона

1) Константа k приймається рівною середньому значенню всіх реалізацій вихідної величини у

$$k = \overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N} y_u \quad . \quad (11.2)$$

2) Ранжують вхідні фактори за ступенем впливу на вихідну величину (у порядку зменшення) залежно від величини парного коефіцієнта кореляції (В *MatLab* коефіцієнт кореляціії для лінійного поліному розраховується за допомогою функції `corr`)

```
R(1)=corr(x1,y)
```

3) Нормують результати вимірів щодо середнього значення

$$Y_u = \frac{y_u}{\overline{y}}. \qquad (11.3)$$

4) Обирають вид залежності $f_1(x_1)$ від x_1 (лінійна, ступенева іт.п). У найпростішому випадку обираємо лінійну функцію.

$$f_1(x_1) = b_{01} + b_{11}x_1. \qquad (11.4)$$

5) Методом найменших квадратів визначають чисельні значення рівняння регресії.: b_{01} и b_{11}.

Коефіцієнти рівняння виду *y=b0+b1x* в *MatLab* можна знайти за формулами:

```
X = [ones(size(x1)) x1];
a1 = regress(y1,X);
b0=a1(1);
b1=a1(2);
f1=b0+b1*x1;
```

6) Із нормованих значень вихідного параметра Y_u виключають $f_1(x_1)$

$$y_{u1} = \frac{Y_u}{f_1(x_1)}. \qquad (11.5)$$

Параметр y_{u1} не завзалежить від x_1, а визначається лише параметрами $x_2, x_3, \ldots x_n$. $y_1^p = kf_2(x_2)f_3(x_3)\ldots f_n(x_n)$. (11.6)

7) Обираємо рівняння регресії

$$f_2(x_2) = b_{02} + b_{12}x_2. \qquad (11.7)$$

8) Розраховуємо значення коефіцієнтів b_{02} і b_{12} методом МНК

9) Із значень y_{u1} виключають $f_2(x_2)$

$$y_{u2} = \frac{y_{u1}}{f_2(x_2)}. \qquad (11.8)$$

10) Така процедура повторюється доти, доки не буде отримана остання складова функції

$$y_{un} = \frac{y_{u(n-1)}}{f_n(x_n)}. \qquad (11.9)$$

11) Знайдені складові функції включають до рівняння (11.1).

12) Визначають якість математичної модели за допомогою коефіцієнта детермінаціїї

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{u=1}^{N}(y_u - y_u^p)^2}{\sum_{u=1}^{N}(y_u - \overline{y})^2}.$$

11.2 Порядкок виконання лабораторної роботи

1) Обрати експериментальні дані згідно свого варіанту

2) Побудувати рівняння множинної регресіїї обравши лінійний зв'язок між кожним факторм і вихідною величиною.

3) Оцінити якість математичної моделі

4) Зробити висновок щодо можливості використання отриманої математичної моделі для практичних розрахунків.

11.3 Приклад виконання лабораторної роботи

Записуємо вихідні дані

```
%Вихідні дані
x1=[163.5 90 117 97.4 59 228.5 75.5]';
```

```
  x2=[3620.8 3361.4 7539 5883.5 2295 6592.5 3475.5]';
  x3=[9654.5 6942 6557 4235 4142.5 8132.5 7815]';
  x4=[14344.8 14195.4 12891.5 12328.5 8360 16640 15770]';
  x5=[5660.7 4780 4455.5 5425.5 4217.5 4010 4395]';
  y=[18306 19451 23301 17867 11000 22400 17970]';
  N=length(y); %Кількість експериментальних точок
  n=5; %Кількість факторів
  % Парні коефіцієнти лінійної кореляції
  R(1)=corr(x1,y);
R(2)=corr(x2,y);
……...............................................
% Середнє значення y
  ysr=sum(y)/N;
%Нормоване значення величини y
  y1=y/ysr;
% Розраховуємо залежкність f1(x1) методом МНК
X = [ones(size(x1)) x1];
a1 = regress(y1,X);
b0=a1(1);
b1=a1(2);
f1=b0+b1*x1;
%Будуємо график функції f1(x1)
figure(1)
plot(x1,  y1,'o')  %  вівід  на  графік  експериментальних
точок
xlabel('x1');
ylabel('y1  f1');
grid on
hold on
plot(x1, f1)

%  З  нормированих  значень  вихідного  параметра  виключаємо
f1(x1)
y2=y1./f1;
 % знаходимо зплежність f2(x2) методом МНК
X = [ones(size(x2)) x2];
a1 = regress(y2,X);
b0=a1(1);
b1=a1(2);
f2=b0+b1*x2;
```

Аналогічні дії проводимо для всіх факторів

```
    yregr=ysr*f1.*f2.*f3.*f4.*f5
    table(yregr,y);
```

```
% перевірка адекватности
r1=sum((y-yregr).^2);
r2=sum((y-ysr).^2);
nu1=sqrt(1-r1/r2);
nu=1-r1/r2;
```

Контрольні питання

1) Що можна отримати за методом Брандона?

2) Як проходить ранжування факторів у методі Брандону?

3) Як визначається якість рівняння регресії?

4) Що таке коефіцєнт корреляції і як він розраховується у пакеті *MatLab*?

5) Для чого призначена функція `regress(y1,X)`?

Вихідні дані до лабораторної роботи 11

№	Варіант 1					
	X1	X2	X3	X4	X5	y
1	123.5	3320.8	9534.5	14414.8	5748.7	18900.0
2	76.0	3811.4	6802.0	14185.4	4636.0	19400.0
3	117.0	7683.0	6357.0	12811.5	4465.5	23400.0
4	77.0	5813.5	4235.0	12358.5	5505.5	17700.0
5	55.0	2145.0	4482.5	8965.0	4207.5	11100.0
6	212.5	6672.5	8202.5	16745.0	4080.0	22000.0
7	67.5	3375.0	7965.0	15390.0	4275.0	17200.0

№	Варіант 2					
	X1	X2	X3	X4	X5	y
1	143.5	3420.8	9554.5	14314.8	5760.7	18700.0
2	70.0	3861.4	6842.0	14125.4	4680.0	19450.0
3	127.0	7693.0	6457.0	12831.5	4415.5	22400.0
4	90.0	5833.5	4135.0	12308.5	5405.5	17800.0
5	57.0	2245.0	4442.5	8365.0	4257.5	11300.0
6	222.5	6692.5	8232.5	16645.0	4000.0	22500.0
7	87.5	3375.5	7915.0	15780.0	4295.0	17270.0

	Варіант 3					
	X1	X2	X3	X4	X5	y
1	163.5	3620.8	9654.5	14344.8	5660.7	18306.0
2	90.0	3361.4	6942.0	14195.4	4780.0	19451.0
3	117.0	7593.0	6557.0	12891.5	4455.5	22301.0
4	97.4	5883.5	4235.0	12328.5	5425.5	17867.0
5	59.0	2295.0	4142.5	8360.0	4217.5	11000.0
6	228.5	6592.5	8132.5	16640.0	4010.0	22400.0
7	75.5	3475.5	7815.0	15770.0	4395.0	17970.0

	Варіант 4					
	X1	X2	X3	X4	X5	y
1	113.5	3090.8	9434.5	14614.8	5798.7	19000.0
2	106.0	3801.4	6702.0	14195.4	4696.0	19400.0
3	110.0	7680.0	6457.0	12711.5	4475.5	22400.0
4	70.0	5713.5	4135.0	12758.5	5605.5	17800.0
5	65.0	2245.0	4582.5	8995.0	4307.5	12100.0
6	222.5	6772.5	8302.5	16795.0	4180.0	22005.0
7	97.5	3395.0	7865.0	15490.0	4295.0	17210.0

	Варіант 5					
	X1	X2	X3	X4	X5	y
1	103.5	3420.8	9574.5	14414.8	5748.7	18700.0
2	106.0	3891.4	6812.0	14185.4	4636.0	19450.0
3	110.0	7673.0	6358.0	12811.5	4465.5	23450.0
4	65.0	5843.5	4235.0	12358.5	5505.5	17701.0
5	65.0	2215.0	4482.5	8965.0	4507.5	11070.0
6	242.5	6572.5	8202.5	16745.0	4080.0	22090.0
7	60.5	3370.0	7965.0	15390.0	4275.0	17207.0

	Варіант 6					
	X1	X2	X3	X4	X5	y
1	9534.5	14414.8	5748.7	6201.3	1810.6	18900.0
2	6802.0	14185.4	4636.0	4700.6	3788.6	19400.0
3	6357.0	12811.5	4465.5	3607.5	3958.5	23400.0
4	4235.0	12358.5	5505.5	4312.0	6198.5	17700.0
5	4482.5	8965.0	4207.5	4922.5	2667.5	11100.0
6	8202.5	16745.0	4080.0	3612.5	2975.0	22000.0
7	7965.0	15390.0	4275.0	5040.0	8865.0	17200.0

	Варіант 7					
	X1	X2	X3	X4	X5	y
1	9554.5	14314.8	5760.7	6221.3	1910.6	18700.0
2	6842.0	14125.4	4680.0	4770.6	3708.6	19450.0
3	110.0	7680.0	6457.0	12711.5	3908.5	22400.0
4	70.0	5713.5	4135.0	12758.5	6158.5	17800.0
5	65.0	2245.0	4582.5	8995.0	2637.5	12100.0
6	222.5	6772.5	8302.5	16795.0	2995.0	22005.0
7	97.5	3395.0	7865.0	15490.0	8875.0	17210.0

	Варіант 8					
	X1	X2	X3	X4	X5	y
1	9654.5	14344.8	5660.7	6261.3	1950.6	18306.0
2	6942.0	14195.4	4780.0	4790.6	3758.6	19451.0
3	6557.0	12891.5	4455.5	3687.5	3955.5	22301.0
4	4235.0	12328.5	5425.5	4202.0	6239.5	17867.0
5	4142.5	8360.0	4217.5	4802.5	2637.5	11000.0
6	8132.5	16640.0	4010.0	3392.5	3185.0	22400.0
7	7815.0	15770.0	4395.0	5100.0	8695.0	17970.0

	Варіант 9					
	X1	X2	X3	X4	X5	y
1	113.5	3090.8	9434.5	14614.8	1910.6	19000.0
2	106.0	3801.4	6702.0	14195.4	3888.6	19400.0
3	110.0	7680.0	6457.0	12711.5	3908.5	22400.0
4	70.0	5713.5	4135.0	12758.5	6158.5	17800.0
5	65.0	2245.0	4582.5	8995.0	2637.5	12100.0
6	222.5	6772.5	8302.5	16795.0	2995.0	22005.0
7	97.5	3395.0	7865.0	15490.0	8875.0	17210.0

	Варіант 10					
	X1	X2	X3	X4	X5	y
1	103.5	3420.8	9574.5	14414.8	1860.6	18700.0
2	106.0	3891.4	6812.0	14185.4	3788.6	19450.0
3	110.0	7673.0	6358.0	12811.5	3858.5	23450.0
4	65.0	5843.5	4235.0	12358.5	6198.5	17701.0
5	65.0	2215.0	4482.5	8965.0	2697.5	11070.0
6	242.5	6572.5	8202.5	16745.0	3075.0	22090.0
7	60.5	3370.0	7965.0	15390.0	8765.0	17207.0

Список літератури

1. Математичне моделювання об'єктів керування хімічних і фармацевтичних виробництв : навч. посібник / І. Л. Красніков [та ін.] ; ред. А. К. Бабіченко ; Нац. техн. ун-т "Харків. політехн. ін-т". – Харків : ТОВ "С.А.М.", 2015. – 224 с.

2. Комп’ютерне моделювання процесів та систем. Чисельні методи : підручник / С. П. Вислоух, О. В. Волошко, Г. С. Тимчик, М. В. Філіппова. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, Вид-во «Політехніка», 2021. – 228 с

3. Абакумова О. О. Чисельні методи. Комп’ютерний практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 122 «Комп’ютерні науки та інформаційні технології», спеціалізації «Інформаційні технології в біології та медицині» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: О. О. Абакумова. – Електронні текстові данні (1 файл: 2,5 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 69 с.

Додаток А Коефіцієнти розподілу Стьюдента

Таблиця А.1. Значення коефіцієнтів розподілу від кількості вимірювань *n*

Число ступенів свободи (n-1)	Рівень значимості α						
	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,001
1	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66	127,32	636,62
2	1,89	2,92	4,30	6,97	9,93	14,09	31,60
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	7,45	12,94
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	5,60	8,61
5	1,48	2,02	2,57	3,37	4,03	4,77	6,86
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	4,32	5,96
7	1,42	1,90	2,37	3,00	3,50	4,03	5,41
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	3,83	5,04
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	3,69	4,78
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	3,58	4,59
11	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	3,50	4,44
12	1,36	1,78	2,18	2,68	3,06	3,43	4,32
13	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	3,37	4,22
14	1,34	1,76	2,15	2,62	2,98	3,33	4,14
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	3,29	4,07
16	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92	3,25	4,02
17	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90	3,22	3,97
18	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88	3,20	3,92
19	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,17	3,88
20	1,33	1,73	2,09	2,53	2,85	3.15	3,85
21	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83	3,14	3,82
22	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82	3,12	3,79
23	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81	3,10	3,77
24	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80	3,09	3,75
25	1,32	1,71	2,06	2,48	2,79	3,08	3,73
26	1,32	1,71	2,06	2,48	2,78	3,07	3,71
27	1,31	1,70	2,05	3,47	2,77	3,06	3,69
28	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77	3,06	3,69
29	1,31	1,70	2,04	2,46	2,76	3,04	3,66
30	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75	3,03	3,65
40	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70	2,97	3,55
60	1,30	1,67	2,00	2,39	2,66	2,91	3,46
120	1,29	1,66	1,98	2,36	2,62	2,86	3,37
∞	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58	2,81	3,29

ДОДАТОК Б Значення критерію Фішера для рівня значимості α =5%

Число ступенів свободи f_2 для меншої дисперсії	Число ступенів свободи f_1 більшої дисперсії												
	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24	50	100	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	246,5	249,0	251,8	253,3	254
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,43	19,45	19,47	19,49	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,69	8,64	8,58	8,56	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,84	5,77	5,70	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,60	4,53	4,44	4,40	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,92	3,84	3,75	3,71	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,49	3,41	3,32	3,28	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,20	3,12	3,03	2,98	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,98	2,90	2,80	2,76	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,82	2,74	2,64	2,59	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,70	2,61	2,50	2,45	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,60	2,50	2,40	2,35	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,51	2,42	2,32	2,26	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,44	2,35	2,24	2,19	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,39	2,29	2,18	2,12	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,33	2,24	2,13	2,07	2,01
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,18	2,08	1,96	1,90	1,84
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,99	1,89	1,76	1,69	1,662
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,90	1,79	1,66	1,59	1,51
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,85	1,74	1,60	1,52	1,44
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,75	1,63	1,48	1,39	1,28
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,64	1,52	1,35	1,24	1,00

Навчальне видання

КРАСНІКОВ Ігор Леонідович
БАБІЧЕНКО Анатолій Костянтинович
ДЗЕВОЧКО Альона Ігорівна
ПЕРЕВЕРЗЄВА Алевтина Миколаївна

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТА СИСТЕМ

Навчально-методичний посібник
для студентів спеціальності
174 – Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані
технології та робототехніка

ISBN 617-8130-31-2

9 786178 130312

В авторській редакції

Підписано до друку 27.10.23.
Формат 60×84 $^1/_{16}$. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. 6,27. Гарнітура Таймс.
Наклад 50 прим.

Видавець: Мірошниченко Олег Анатолійович
61002, м. Харків, вул. Дарвіна, 16, кв. 25.
Свідоцтво Державного комітету телебачення
і радіомовлення України
серія ДК № 5818 від 28.11.2017 р.
ел. пошта: merash@i.ua

Надруковано у друкарні «Impress»
61002, Харків, вул. Пушкінська, 56
Тел.: (057) 714-42-11, 752-08-38
www.impress.biz.ua