

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК СО СЛОЖНОЙ ФОРМОЙ ПЛАНА

Курпа Л. В., д. т. н., профессор, Шматко Т. В., к. т. н., доцент

*Национальный технический университет «ХПИ»,
ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, 61002, Украина*

L.Kurpa@mail.ru, ktv_ua@yahoo.com

В работе предлагается метод исследования геометрически нелинейных колебаний функционально-градиентных пологих оболочек с различной формой плана. Постановка задачи выполнена в рамках уточненной нелинейной теории пологих оболочек первого порядка. Используемый алгоритм базируется на предложенных ранее идеях, в основу которых положены теория R-функций, вариационные методы и метод Рунге-Кутты. Выполнено тестирование предложенного подхода и исследованы функционально-градиентные пологие оболочки со сложной формой плана.

Ключевые слова: геометрически нелинейные колебания, функционально-градиентные материалы, пологие оболочки, теория R-функций, сложная геометрия.

ДОСЛІДЖЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ ФУНКЦІОНАЛЬНО- ГРАДІЄНТНИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК ІЗ СКЛАДНОЮ ФОРМОЮ ПЛАНУ

Курпа Л. В., д. т. н., професор, Шматко Т. В., к. т. н., доцент

*Національний технічний університет «ХПІ»,
вул. Фрунзе, 21, м. Харків, 61002, Україна*

L.Kurpa@mail.ru, ktv_ua@yahoo.com

У роботі пропонується метод дослідження геометрично нелінійних коливань функціонально-градієнтних пологих оболонок з різною формою плану. Постановка задачі виконана у рамках уточненої нелінійної теорії пологих оболонок першого порядку. Використовуваний алгоритм базується на запропонованих раніше ідеях, в основу яких покладені теорія R-функцій, варіаційні методи і метод Рунге-Кутта. Виконано тестування запропонованого підходу і досліджені функціонально-градієнтні пологі оболонки із складною формою плану.

Ключові слова: геометрично нелінійні коливання, функціонально-градієнтні матеріали, пологі оболонки, теорія R-функцій, складна геометрія.

INVESTIGATION OF GEOMETRICALLY NONLINEAR VIBRATIONS OF THE FUNCTIONALLY-GRADED SHALLOW SHELLS WITH COMPLEX PLANFORM

Kurpa L. V., D. of Technical Science, Professor,
Shmatko T. V., D. of Technical Science, Associate Professor

*National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»,
Frunze str., 21, Kharkiv, 61002, Ukraine*

Kharkiv, Ukraine

The method for studying the geometrically nonlinear vibrations of functionally-graded shallow shells with a complex planform is proposed. Formulation of the problem is carried out using the refined geometrically nonlinear theory of shallow shells of the first order (Timoshenko's type). The R-functions theory, variational and Runge-Kutta methods are used in the developed approach. Test and new problems have been solved for FG shallow shells with elliptical and complex plan form.

Key words: geometrically nonlinear vibrations, functionally-graded materials, shallow shells, R-functions theory, complex geometry.

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании и изготовлении современных аэрокосмических объектов широко используются различные композиты и, в частности, функционально-градиентные материалы (ФГМ). Учитывая, что основные применения ФГМ связаны с работой в

высокотемпературных средах, отметим, что первоначально большинство публикаций были посвящены исследованию температурных напряжений и деформаций. Позже в работах [1-6] были подняты проблемы прочности, колебаний и устойчивости ФГ объектов, связанные с влиянием на них механических воздействий. Достаточно полный обзор по нелинейному статическому и динамическому поведению пластин и оболочек из ФГМ представлен в работах [1, 5]. Следует заметить, что в основном для расчета ФГ пластин и оболочек используются приближенные методы, и наиболее применяемым является метод конечных элементов (МКЭ). Если же используются вариационные методы, то авторы ограничиваются прямоугольной формой плана и, как правило, одним типом граничных условий вдоль всей границы области (жесткое защемление или шарнирное опирание). Учитывая возможности теории R-функций, в настоящей работе предложен подход, позволяющий исследовать нелинейные колебания ФГ оболочек с практически произвольной формой плана и различными граничными условиями.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем рассматривать композитные оболочки, изготовленные из смеси керамики и металла. При этом, как и в работе [9], примем степенной закон изменения объемной доли керамики:

$$V = \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^k, \quad (1)$$

где h – толщина оболочки, k – показатель степени объемной доли материала, который может изменяться от 0 до бесконечности, т.е. ($0 \leq k \leq \infty$). При этом, если $k = 0$, то структура является полностью керамической, если же $k = \infty$, то – металлической. В общем случае материальные свойства ФГМ (модуль Юнга, коэффициент теплового расширения и др.) могут быть представлены как

$$P = \sum_{j=1} P_j V_j,$$

где P и V_j – материальные свойства и объемная доля составляющего материала. Следует заметить, что ФГ структуры используются, как правило, в высокотемпературных средах, следовательно, механические свойства материалов могут существенно изменяться с изменением температуры. Поэтому эта зависимость должна приниматься в расчет для получения более точного решения. Воспользуемся этими зависимостями, приведенными в работах [4, 5]

$$P_j = P_0 (P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3),$$

где $P_0, P_{-1}, P_1, P_2, P_3$ – коэффициенты, определяемые для каждого конкретного материала. Таблица значений этих коэффициентов для некоторых материалов представлена в работах [1, 4, 5]. Механические свойства смеси из двух составляющих определяются следующим образом:

$$P(z, T) = (P_c(T) - P_m(T)) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + P_m(T). \quad (2)$$

Выражение (2) представляет собой общую формулу для определения модуля упругости E , коэффициента Пуассона ν и плотности ρ композита; P_c, P_m – соответствующие характеристики керамики и металла. Обозначим перемещения в любой точке оболочки через u_1, u_2, u_3 . Согласно нелинейной теории пологих оболочек первого порядка, учитывающей деформации сдвига, перемещения u_1, u_2, u_3 могут быть представлены как [2, 4]:

$$u_1 = u + z\Psi_x, \quad u_2 = v + z\Psi_y, \quad u_3 = w,$$

где u , v и w – перемещения оболочки в срединной поверхности в направлении осей Ox , Oy , Oz соответственно; Ψ_x , Ψ_y – углы поворота нормали к срединной поверхности относительно осей Oy и Ox . Соотношения для деформаций $\varepsilon = \{\varepsilon_{11}; \varepsilon_{22}; \varepsilon_{12}\}^T$, $\chi = \{\chi_{11}; \chi_{22}; \chi_{12}\}^T$ выражаются с помощью следующих формул:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^L + \varepsilon_{ij}^{ND}, \quad (i, j = 1, 2),$$

где

$$\varepsilon_{11}^L = u_{,x} + w/R_x, \quad \varepsilon_{22}^L = v_{,y} + w/R_y, \quad \varepsilon_{12}^L = u_{,y} + v_{,x},$$

$$\varepsilon_{11}^{ND} = \frac{1}{2}w_{,x}^2, \quad \varepsilon_{22}^{ND} = \frac{1}{2}w_{,y}^2, \quad \varepsilon_{12}^{ND} = w_{,x}w_{,y},$$

$$\varepsilon_{13} = w_{,x} + \Psi_x, \quad \varepsilon_{23} = w_{,y} + \Psi_y, \quad \chi_{11} = \Psi_{x,x}, \quad \chi_{22} = \Psi_{y,y}, \quad \chi_{12} = \Psi_{x,y} + \Psi_{y,x}.$$

В настоящей работе будем рассматривать материалы, для которых коэффициент Пуассона не зависит от температуры и будет одинаковым для керамики и металла, т.е., $\nu_m = \nu_c$. В этом случае усилия $N = (N_{11}, N_{22}, N_{12})^T$ и моменты $M = (M_{11}, M_{22}, M_{12})^T$ в рамках теории пологих оболочек первого порядка (типа теории Тимошенко) с учетом степенного закона (1) определяются как:

$$N = \{N_{11}; N_{22}; N_{12}\}^T = \frac{1}{1-\nu^2} [C] (E_1 \varepsilon + E_2 \chi), \quad M = \{M_{11}; M_{22}; M_{12}\}^T = \frac{1}{1-\nu^2} [C] (E_2 \varepsilon + E_3 \chi),$$

где

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \left(E_m + \frac{E_c - E_m}{k+1} \right) h, \quad E_2 = \frac{(E_c - E_m) k h^2}{2(k+1)(k+2)},$$

$$E_3 = \left(\frac{E_m}{12} + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4(k+4)} \right) \right) h^3.$$

Плотность композита ρ определяется с помощью следующей формулы:

$$\rho = \left(\rho_m + \frac{\rho_c - \rho_m}{k+1} \right) h.$$

Потенциальная и кинетическая энергия определяются следующим образом:

$$U = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_{11} \varepsilon_{11} + N_{22} \varepsilon_{22} + N_{12} \varepsilon_{12} + M_{11} \chi_{11} + M_{22} \chi_{22} + M_{12} \chi_{12}) d\Omega + \\ + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (Q_x (w_{,x} + \Psi_x) + Q_y (w_{,y} + \Psi_y)) d\Omega,$$

$$T = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} I_0 (u_{,t}^2 + v_{,t}^2 + w_{,t}^2) + 2I_1 (u_{,t} \Psi_{x,t} + v_{,t} \Psi_{y,t}) + I_2 (\Psi_{x,t}^2 + \Psi_{y,t}^2) dx dy,$$

где

$$I_0 = \left(\rho_m + \frac{\rho_c - \rho_m}{k+1} \right) h, \quad I_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) z dz = \frac{(\rho_c - \rho_m)k}{2(k+1)(k+2)} h^2,$$

$$I_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) z^2 dz = \left(\frac{\rho_m}{12} + (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4(k+4)} \right) \right) h^3.$$

Перерезывающие силы Q_x , Q_y определяются как:

$$Q_x = K_s^2 A_{33} \varepsilon_{13}, \quad Q_y = K_s^2 A_{33} \varepsilon_{23},$$

где K_s^2 – корректирующий коэффициент сдвига, который ниже принимается равным 5/6.

Применяя метод Остроградского-Гамильтона можно получить уравнения движения, которые дополняются граничными условиями, определяемыми способом закрепления краев оболочки. Начальные условия принимаются в виде:

$$w|_{t=0} = w_{\max}, \quad \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Предлагаемый метод исследования геометрически нелинейных колебаний ФГ пологих оболочек предусматривает на первом шаге решение линейной задачи. Для её решения используется вариационно-структурный метод (RFM), базирующийся на применении теории R-функций и вариационных методах, в данном случае – методе Ритца. Метод решения линейных задач ФГ пологих оболочек описан в работе [9]. При решении нелинейной задачи будем игнорировать силами инерции в плоскости пластины. Представим неизвестные функции в виде разложения по собственным функциям $w_1^{(c)}(x, y)$, $u_1^{(c)}(x, y)$, $v_1^{(c)}(x, y)$, $\psi_{x1}^{(c)}(x, y)$, $\psi_{y1}^{(c)}(x, y)$, соответствующим основной форме колебаний:

$$w = y(t)w_1^{(c)}(x, y), \quad \psi_x = y(t)\psi_{x1}^{(c)}(x, y), \quad \psi_y = y(t)\psi_{y1}^{(c)}(x, y), \quad (4)$$

$$u = y(t)u_1^{(c)}(x, y) + y^2(t)u_{11}, \quad v = y(t)v_1^{(c)}(x, y) + y^2(t)v_{11}.$$

Коэффициенты этого разложения представляют собой функцию $y(t)$, зависящую от времени, а функции u_{11} , v_{11} должны быть решениями следующей системы дифференциальных уравнений:

$$L_{11}(u_{11}) + L_{12}(v_{11}) = -Nl_1^{(2)}(w_1^{(c)}, w_1^{(c)}), \quad (5)$$

$$L_{21}(u_{11}) + L_{22}(v_{11}) = -Nl_2^{(2)}(w_1^{(c)}, w_1^{(c)}),$$

где

$$Nl_1^{(2)}(w_1^{(c)}, w_1^{(c)}) = w_1^{(c)}{}_{,x} L_{11} w_1^{(c)} + w_1^{(c)}{}_{,y} L_{12} w_1^{(c)},$$

$$Nl_2^{(2)}(w_1^{(c)}, w_1^{(c)}) = w_1^{(c)}{}_{,x} L_{21} w_1^{(c)} + w_1^{(c)}{}_{,y} L_{22} w_1^{(c)}.$$

Операторы $L_{11}, L_{22}, L_{12}, L_{21}$ в уравнениях (5) определяются как:

$$L_{11} = \frac{E_1}{1-\nu^2} \left(()_{,xx} + \frac{1-\nu}{2} ()_{,yy} \right), \quad L_{22} = \frac{E_1}{1-\nu^2} \left(\frac{1-\nu}{2} ()_{,xx} + ()_{,yy} \right), \quad L_{12} = L_{21} = \frac{E_1}{2(1-\nu)} ()_{,xy}.$$

Система (5) дополняется соответствующими граничными условиями. Решение этой задачи также выполняется с помощью вариационного метода Ритца и RFM. В результате такого выбора функций $u_{11}(x, y)$ и $v_{11}(x, y)$, после подстановки выражений (4) в уравнения движения и применения процедуры Бубнова-Галеркина, получим обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$y''(t) + \omega_L^2 y_1(t) + y_1^2(t)\beta + y_1^3(t)\gamma = 0. \quad (6)$$

Выражения для коэффициентов этого уравнения получены в аналитическом виде и выражены через двойные интегралы от известных функций:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{-1}{m_1 \|w_1^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega_{11}} \left(N_{11}^{(L)}(w_1^{(c)})_{,xx} + N_{22}^{(L)}(w_1^{(c)})_{,yy} + 2N_{12}^{(L)}(w_1^{(c)})_{,xy} + \right. \\ &\quad \left. + M_{11}^{(NL)}_{,xx} + M_{22}^{(NL)}_{,yy} + 2M_{12}^{(NL)}_{,xy} - k_1 N_{11}^{(NL)} - k_2 N_{22}^{(NL)} \right) w_1^{(c)} d\Omega, \\ \gamma &= -\frac{1}{m_1 \|w_1^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} \left(N_{11}^{(NL)}(u_{11}, v_{11}, w_1^{(c)})(w_1^{(c)})_{,xx} + N_{22}^{(NL)}(u_{11}, v_{11}, w_1^{(c)})(w_1^{(c)})_{,yy} + \right. \\ &\quad \left. + 2N_{12}^{(NL)}(u_{11}, v_{11}, w_1^{(c)})(w_1^{(c)})_{,xy} \right) w_1^{(c)} d\Omega, \end{aligned}$$

где

$$N^{(L)} = \{N_{11}^{(L)}; N_{22}^{(L)}; N_{12}^{(L)}\}^T = \frac{1}{1-\nu^2} [C] (E_1 \varepsilon^{(L)} + E_2 \chi),$$

$$N^{(NL)} = \{N_{11}^{(NL)}; N_{22}^{(NL)}; N_{12}^{(NL)}\}^T = \frac{E_1}{1-\nu^2} [C] \varepsilon^{(NL)}, \quad M^{(NL)} = \{M_{11}^{(NL)}; M_{22}^{(NL)}; M_{12}^{(NL)}\}^T = \frac{E_3}{1-\nu^2} [C] \varepsilon^{(NL)},$$

$$\varepsilon^{(L)} = \varepsilon^{(L)}(u_1^{(c)}, v_1^{(c)}, w_1^{(c)}) = \left\{ (u_1^{(c)})_{,x} + k_1 w_1^{(c)}; (v_1^{(c)})_{,y} + k_2 w_1^{(c)}; \left((u_1^{(c)})_{,y} + (v_1^{(c)})_{,x} \right) \right\}^T,$$

$$\varepsilon^{(NL)} = \varepsilon^{(NL)}(u_{11}, v_{11}, w_1^{(c)}) = \left\{ (u_{11})_{,x} + \frac{1}{2} \left((w_1^{(c)})_{,x} \right)^2; (v_{11})_{,y} + \frac{1}{2} \left((w_1^{(c)})_{,y} \right)^2, \right.$$

$$\left. (u_{11})_{,y} + (v_{11})_{,x} + (w_1^{(c)})_{,x} (w_1^{(c)})_{,y} \right\}^T.$$

Для решения уравнения (6) с начальными условиями (3) воспользуемся методом Рунге Кутты.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Задача 1. С целью проверки достоверности предложенного подхода рассмотрим решение некоторых тестовых задач.

Исследуем нелинейные свободные колебания сферической жестко защемленной оболочки, опирающейся на эллиптический план. В работе [9] эта задача была решена только в линейной постановке, и выполнено сравнение для двух сплавов:

FG1: $Al / Al_2O_3 : E_m / E_c = 70 / 380 GPa; \nu_m = \nu_c = 0,3; \rho_m / \rho_c = 2707 / 3800 kg / m^3;$

FG2: $Al / ZrO_2 : E_m / E_c = 70 / 151 GPa; \nu_m = \nu_c = 0,3; \rho_m / \rho_c = 2707 / 3000 kg / m^3.$

На рис. 2 представлены зависимости отношения нелинейной частоты к линейной от прогиба для материала FG2 и значений параметра $k = 10$, $k = 100$. Сравнение скелетных кривых с результатами работы [6] подтверждает достоверность предложенного подхода. В рамках точности графика полученные результаты практически совпадают. Максимальное отклонение не превышает 1,5%.

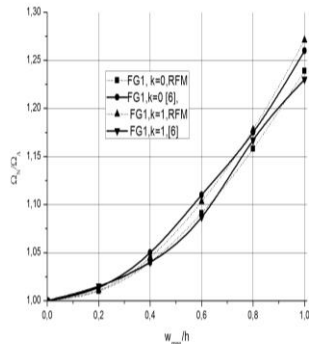


Рис. 1

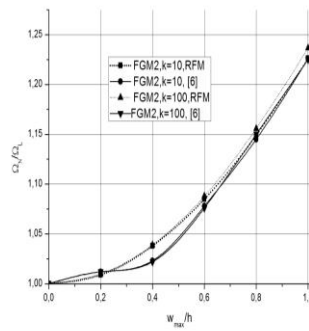


Рис. 2

Задача 2. Для иллюстрации возможностей разработанного подхода, рассмотрим аналогичную задачу для сферических оболочек, план которых представлен на рис. 3. Предполагается, что оболочка полностью жестко закреплена. Для построения системы координатных функций будем использовать следующие структурные формулы:

$$u = \omega\Phi_1, \quad v = \omega\Phi_2, \quad w = \omega\Phi_3, \quad \psi_x = \omega\Phi_4, \quad \psi_y = \omega\Phi_5.$$

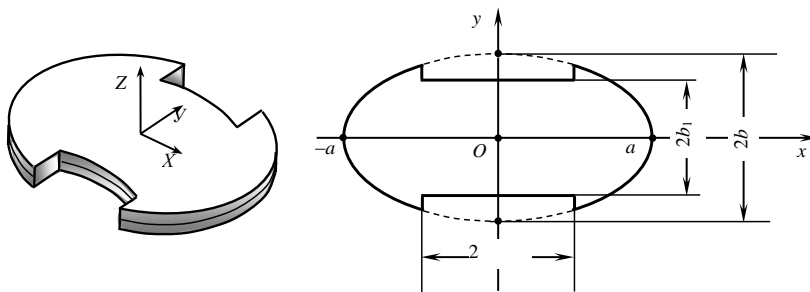


Рис. 3

Уравнение границы области $\omega = 0$ построим с помощью теории R-функций:

$$\omega = (f_1 \vee_0 f_2) \wedge_0 f_3,$$

где f_1 , f_2 , f_3 определяют следующие множества точек:

$$f_1 = \left((x^2 - a_1^2) / 2a_1 \right) \geq 0; \quad f_2 = \left((b_1^2 - y^2) / 2b_1 \right) \geq 0; \quad f_3 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \geq 0.$$

Символы \wedge_0 , \vee_0 определяют R-операции: R-конъюнкцию и R-дизъюнкцию соответственно [10]. Неопределенные компоненты в структурных формулах аппроксимировались с учетом симметрии поставленной задачи относительно осей Ox и Oy . Интегрирование выполнялось

по 1/4 области. Результаты решения линейной задачи для материалов FG1 и FG2 представлены на рис. 4, 5. в виде зависимостей линейной частоты $\Omega_L = \lambda_1 a^2 h \sqrt{\rho_c / E_c}$ от значений показателя κ -объемной доли керамики.

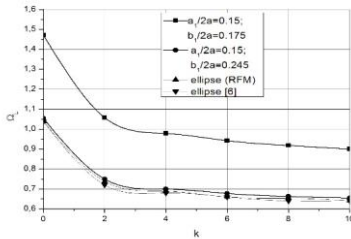


Рис. 4

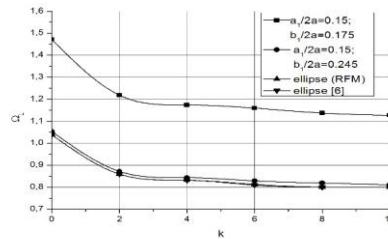


Рис. 5

При этом было принято, что $b_1/2a = 0,175$; $a_1/2a = 0,15$. Наряду с такими значениями была решена задача для отношений $b_1/2a = 0,245$; $a_1/2a = 0,15$. В последнем случае геометрическая форма плана (рис. 3) стремится к эллиптической, и результаты можно сравнить с результатами работы [6]. Из приведенных графиков видно, что они практически совпадают, что подтверждает достоверность решения линейной задачи в случае сложной геометрии.

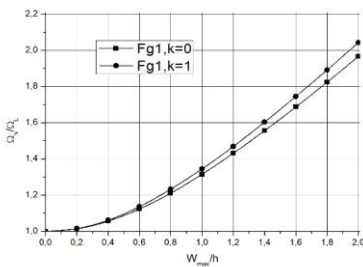


Рис. 6

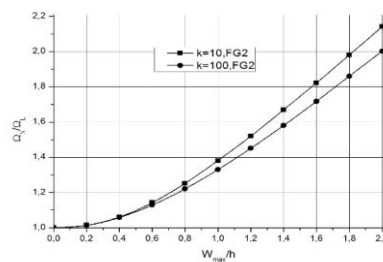


Рис. 7

На рис. 6, 7 изображены скелетные кривые оболочек, изготовленных из смесей FG1 и FG2 соответственно. Геометрические параметры совпадают с параметрами, выбранными для линейной задачи и принято, что $b_1/2a = 0,175$; $a_1/2a = 0,15$. В обоих случаях кривые имеют жесткий характер, монотонно возрастают, что характерно для умеренно толстых жестко закрепленных оболочек ($h/2a = 0,1$).

При проведении вычислительного эксперимента было установлено, что при движении отношения $b_1/2a \rightarrow 0,25$, т.е. $b_1/b \rightarrow 1$ скелетные кривые совпадают с соответствующими кривыми для эллиптического плана, что подтверждает достоверность полученных результатов.

ВЫВОДЫ

В работе предложен метод исследования геометрически нелинейных свободных колебаний функционально-градиентных пологих оболочек со сложной формой плана. Метод основан на использовании теории R-функций, вариационном методе Ритца, процедуры Бубнова-Галеркина и методе Рунге-Кутты. Для уточненной теории пологих оболочек 1-го порядка

предложенный подход реализован в рамках системы POLE-RL. Проведенное тестирование для оболочек, опирающихся на эллиптический план, доказывает достоверность и эффективность предложенного метода, иллюстрация которого выполнена для оболочек со сложной формой плана. В будущем разработанный метод планируется применять не только для граничных условий, отвечающих жестко закрепленным ФГ оболочкам, но и для других, в том числе смешанных. Кроме этого, интересно было бы применить разработанный подход для математической постановки задачи в смешанной форме, а не только в перемещениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alijani F. Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells / F. Alijani, M. Amabili, K. Karagiozis, F. Bakhtiari-Nejad// *Journal of Sound and Vibration*. – 2011. – 330. – P. 1432-1454. Print.
2. Reddy J. N. Vibration of functionally graded cylindrical shells / C.T. Loy, K.Y. Lam, J.N. Reddy // *Int J Mech Sci*. – 1999. – 41. – P. 309-324. Print.
3. Matsunaga H. Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2D higher-order deformation theory / H. Matsunaga // *Composite Structures*. – 2008. – 84. – P. 132-146. Print.
4. Reddy J. N. Analysis of functionally graded plates / J.N. Reddy // *International Journal for numerical methods in engineering*. – 2000. – 47. – P. 663-684. Print.
5. Shen H. S. Functionally Graded Materials of Plates and Shells / H.S. Shen. – Florida : CPC Press, 2009. – 266 p. Print.
6. Chorfi S.M. Non-linear free vibration of a functionally graded doubly-curved shallow shell of elliptical plan-form / S.M. Chorfi, A. Houmat // *Composite Structures*. – 2010. – 92. – P. 2573-2581. Print.
7. Курпа Л. В. Нелинейные свободные колебания многослойных пологих оболочек симметричного строения со сложной формой плана / Л.В. Курпа // *Мат. методы та фіз.-мех. поля*. – 2008. – 51, №2. – С. 75-85.
8. Курпа Л. В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек / Л.В. Курпа. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2009. – 408 с.
9. Курпа Л. В. Свободные колебания функционально-градиентных пологих оболочек со сложной формой плана / Л.В. Курпа, Т.В. Шматко // *Теорет. и прикладная механика*. – 2014. – Вып. 8(54). – С. 77-85.
10. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. – К. : Наук. думка, 1982. – 552 с.

REFERENCES

1. Alijani, F., Amabili, M., Karagiozis, K. and Bakhtiari-Nejad, F. (2011), "Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells" *Journal of Sound and Vibration*, 330, pp. 1432–1454.
2. Reddy, J.N., Loy, C.T. and Lam, K.Y. (1999), "Vibration of functionally graded cylindrical shells", *Int J Mech Sci*, 41, pp. 309-324.
3. Matsunaga, H. (2008), "Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2D higher-order deformation theory", *Composite Structures*, 84, pp. 132-46.
4. Reddy, J.N. (2000), "Analysis of functionally graded plates", *International Journal for numerical methods in engineering*, 47, pp. 663-684.
5. Shen, H.S. (2009), "Functionally Graded Materials of Plates and Shells", CPC Press, Florida.
6. Chorfi, S.M. and Houmat, A. (2010), "Non-linear free vibration of a functionally graded doubly-curved shallow shell of elliptical plan-form", *Composite Structures*, 92, pp. 2573-2581.

7. Kurpa, L.V. (2008), "Nelinejnye svobodnye kolebaniya mnogoslujnyx pologix obolochek simmetrichnogo stroeniya so slozhnoj formoj plana", *Mat. metodi ta fiz.-mex. polya*, 51, no. 2, pp. 75-85.
8. Kurpa, L.V. (2009), "Metod R-funkcij dlya resheniya linejnyx zadach izgiba i kolebanij pologix obolochek", NTU "XPI", Xar'kov.
9. Kurpa, L.V. and Shmatko, T.V. (2014), "Svobodnye kolebaniya funkcional'no-gradientnyx pologix obolochek so slozhnoj formoj plana", *Teoret. i prikladnaya mexanika*, issue 8(54), pp. 77-85.
10. Rvachev, V.L. (1982), "Teoriya R-funkcij i nekotorye ee prilozheniya", Nauk.dumka, Kiev, 1982.

УДК 519.6 (075.8)+536.24

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В ТОПЛИВНОЙ КАССЕТЕ ТВЭЛОВ

^{1,2}Максименко-Шейко К. В., д. т. н., с. н. с., ¹Шейко Т. И., д. т. н., профессор

¹*Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины,
ул. Пожарского, 2/10, Харьков, 61000, Украина*

²*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, Харьков, 61000, Украина*

sheyko@ipmach.kharkov.ua

Целью работы является математическое и компьютерное моделирование сопряженной задачи конвективного теплообмена в решетках ТВЭЛОВ методом R-функций и исследование влияния вида упаковки и формы кассеты на распределение скорости и температуры.

Рассмотрены сопряженные краевые задачи теплообмена для случаев, когда вязкая несжимаемая жидкость движется по каналам неканонического сечения, обтекая пучок стержней. Рассмотрены различные упаковки ТВЭЛОВ и формы кассет. Показано, что метод R-функций является эффективным методом решения задач расчета физических полей в элементах конструкций ядерных энергетических установок сложной формы.

Ключевые слова: теория R-функций; метод Ритца; сопряженная задача; теплообмен; топливная кассета; треугольная, циклическая, прямоугольная упаковки; трансляционная и циклическая симметрии.

ДОСЛІДЖЕННЯ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМІНУ В ПАЛИВНІЙ КАСЕТІ ТВЕЛІВ

^{1,2}Максименко-Шейко К. В., д. т. н., с. н. с., ¹Шейко Т. І., д. т. н., професор

¹*Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України,
вул. Пожарського, 2/10, Харків, 61000, Україна*

²*Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна,
пл. Свободи, 4, Харків, 61000, Україна*

sheyko@ipmach.kharkov.ua

Метою роботи є математичне і комп'ютерне моделювання сполученої задачі конвективного теплообміну в ґратках ТВЕЛІВ методом R-функцій та дослідження впливу вигляду упакування та форми касети на розподіл швидкості та температури.

Розглянуто сполучені крайові задачі теплообміну для випадків, коли в'язка нестислива рідина рухається по каналах неканонічного перерізу, обтікаючи пучок стрижнів. Розглянуто різні упакування ТВЕЛІВ та форми касет. Показано, що метод R-функцій є ефективним методом розв'язання задач розрахунку фізичних полів в елементах конструкцій ядерних енергетичних установок складної форми.

Ключові слова: теорія R-функцій; метод Ритца; сполучена задача; теплообмін; паливна кассета; трикутне, циклічне, прямокутне упакування; трансляційна і циклічна симетрії.