

**В.О.ПОВГОРОДНИЙ**, канд.техн.наук, мл.науч.сотр.,  
ИПМаш НАН Украины, Харьков

## **ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИН, ВЫПОЛНЕННЫХ ИЗ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

Розглянуто проблеми ідентифікації теплофізичних та механічних властивостей прямокутних пластинок. Наведено їх класифікацію та постанови. Також у даній статті розглядаються питання термопружності плит з пористих матеріалів.

The problems of the identification thermophysical and mechanical parameters of rectangular's plates. Kvalifications are discussed. This article is devoted to the problem of thermoelasticity of the plate. These plates are constructed from the porous materials.

Математическая модель однородной изотропной теории термоупругости, сформированная в 19 веке, была основана на положении, что свойства упругости характеризуются двумя упругими постоянными (модуль Юнга и коэффициент Пуассона, которые определяются из простых макроэкспериментов). Эта модель сыграла огромную роль в становлении на научную основу расчетов на прочность, устойчивость и колебания различных конструкций и сооружений [1].

Поскольку само изделие из пористого материала выполняется методами прессования, то ясно, что плотность материала и, следовательно, пористость распределяется по массиву самого материала неравномерно. Возникает изначальное нарушение гипотез сплошности и однородности материала, принимаемых в механике твердого деформируемого тела как основные.

Но поскольку все чаще требуются решения задач механики деформируемого твердого тела именно для таких материалов, приходится возвращаться к гипотезе сплошности, но учитывать пористость введением поправок в исходные зависимости состояния материала, то есть подходить к решению задач механики деформируемого твердого тела с позиции механики неоднородных тел.

На рис. 1 представлены экспериментальные кривые пористого железа по значениям теплофизических и механических характеристик в зависимости от пористости.

Кроме того, основная «скелетная» составляющая материала имеет свойства, зависящие от температуры. На основании сказанного и опираясь на экспериментальные данные, для дальнейших решений принята следующая физико-механическая модель состояния материала:

- 1 Принимаем материал идеально упругим, термочувствительным и подчиняющимся закону Гука.
- 2 Предлагается следующая эмпирическая зависимость для модуля Юнга от температуры  $T$  и пористости  $P$

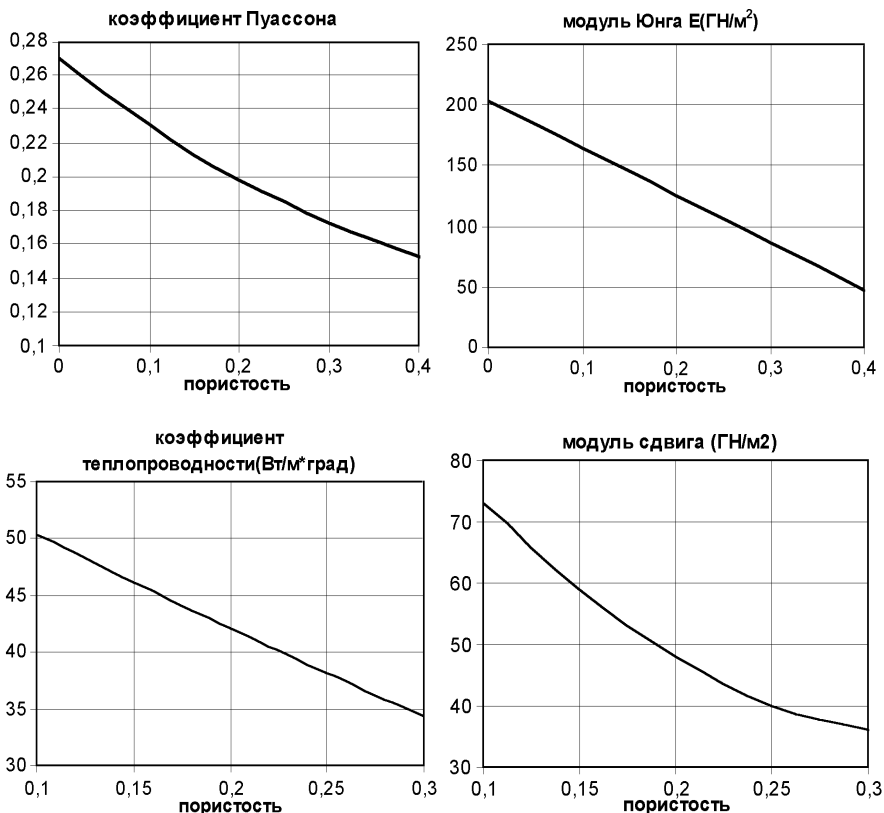


Рисунок 1 – Влияние пористости на характеристики пористого железа

$$E(T, P) = E_0(1 + a_1P + a_2P^2)(1 + b_1T + b_2T^2 + \dots). \quad (1)$$

- 3 На основе экспериментальных данных получаем эмпирическую формулу для коэффициента Пуассона

$$\mu(P) = \mu_0(1 + c_1P + c_2P^2 + c_3P^3). \quad (2)$$

- 4 Коэффициент линейного расширения материала  $\alpha(T)$  является функцией температуры и не зависит от пористости. Основанием для такого утверждения служит тот факт, что от теплового воздействия расширяется лишь «скелетная часть» материала как сплошное тело. На основе экспериментальных данных получаем формулу

$$\alpha(T) = \alpha_0(1 + \alpha_1T + \alpha_2T^2 + \dots). \quad (3)$$

- 5 Коэффициент теплопроводности материала считаем зависящим от температуры и пористости. На основе экспериментальных данных была получена следующая зависимость

$$\lambda(T, P) = \lambda_0 \sqrt{(1-P)^3} (1 + \beta_1 T + \beta_2 T^2 + \dots). \quad (4)$$

- 6 Пористость  $P$  является функцией координат точек тела и не зависит от температуры
- 7 Принимаем приближенно, что пористость тела не зависит от напряженного состояния тела.
- 8 На основании гипотетической независимости пористости от напряженного состояния тела принимаем условие, что пористый материал одинаково сопротивляется растяжению-сжатию, то есть  $E_{раст} = E_{сж}$ .
- 9 Полагаем, что при изготовлении изделия из пористого материала методом порошковой металлургии начальные (технологические) напряжения отсутствуют.
- 10 В случае внутреннего тепловыделения для мощности теплового источника принимается зависимость

$$W(T, P) = W_0 (1-P) (1 + \gamma_1 T + \gamma_2 T^2 + \dots). \quad (5)$$

Коэффициенты в (1), (2), (3), (4), (5) определялись методом наименьших квадратов путем обработки экспериментальных данных.

Приближенные гипотезы, описывающие физико-механическое состояние материала, позволяют подходить к решению задач с позиций хорошо развитой механики неоднородных материалов сплошных тел, свойства которых скорректированы на пористость.

Объектами исследования являются балка-стенка, круглая и прямоугольная пластины. Для них решены задачи теплопроводности и термоупругости. Полагаем поле температур в пластине одномерным. Пластины могут содержать или не содержать источники тепла. Тепловые граничные условия могут быть 1-ого рода или приводимые к ним. По контуру пластинки могут быть как свободными, так и закрепленными.

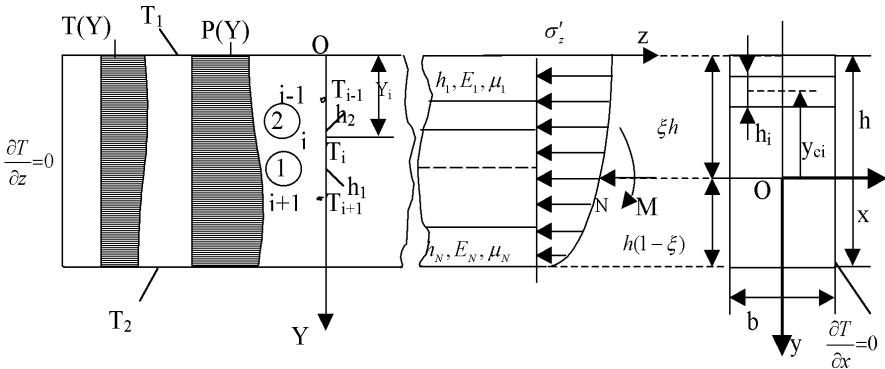


Рисунок 2 – Схема балки-плиты в одномерном поле температур

Решение задачи теплопроводности пластин сводится к интегрированию нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left[ \lambda(T, P) \frac{\partial T}{\partial Y} \right] + W(T, P) = 0 \quad (6)$$

при удовлетворении граничным условиям  $T = T_1$  при  $Y = 0$ ,  $T = T_2$  при  $Y = h$ .

Непосредственное решение нелинейной задачи затруднено, поэтому воспользуемся схемой итераций, согласно которой исходная краевая задача заменяется решением серии линейных задач:

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left[ \lambda^{(m-1)}(Y) \frac{\partial T^{(m)}}{\partial Y} \right] + W^{(m-1)}(Y) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где  $\lambda^{(m)}(Y)$ ,  $W^{(m)}(Y)$  – характеристики, полученные из предыдущего приближения.

Сформулированную краевую задачу заменяем эквивалентной ей вариационной с поиском экстремума следующего функционала

$$J_{(m)} = \int_0^h \left\{ \frac{\lambda^{(m-1)}(Y)}{2} \left[ \frac{\partial T^{(m)}}{\partial Y} \right]^2 - T^{(m)} W^{(m-1)}(Y) \right\} dY. \quad (8)$$

Рассматривается балка-стенка. Согласно МКЭ разбиваем пластину по толщине (или высоте балки-стенки) на отдельные слои-суперэлементы (с условно постоянными, усредненными характеристиками) и аппроксимируем функцию температуры линейным сплайном. В конечном итоге получаем линейную алгебраическую систему уравнений вида

$$T_i^{(m)} = \frac{1}{\frac{\lambda_1^{(m-1)}}{h_1} + \frac{\lambda_2^{(m-1)}}{h_2}} \left\{ \frac{\lambda_1^{(m-1)}}{h_1} T_{i+1}^{(m)} + \frac{\lambda_2^{(m-1)}}{h_2} T_{i-1}^{(m)} + \frac{1}{2} [W_1^{(m-1)} h_1 + W_2^{(m-1)} h_2] \right\}, \quad (9)$$

Решение системы (9) ищется итерационным методом Гаусса-Зейделя до сходимости с заданной точностью.

Для поиска нормальных температурных напряжений в балке-стенке исходим из посылки, что длина бруса велика, и краевыми эффектами можно пренебречь. В этом случае с достаточной точностью можно использовать прием, основанный на принципе освобожденности от связей (принцип Сен-Венана).

Суть приема решения заключается в том, что вначале балка-стенка жестко защемляется и для такого ее состояния определяются нормальные напряжения в торцах, приводящихся к равнодействующей силе  $N$  и моменту  $M$ . Для получения действительного поля напряжений к пластинке прикладываются торцевые усилия обратного направления.

Для получения численного решения балка-стенка представляется в виде пакета отдельных слоев (суперэлементов), подчиняющихся общепринятым

гипотезам (плоских сечений, одноосного напряженного состояния и условию совместности деформаций).

Получены расчетные формулы для температурных напряжений в стержне при различных способах его закрепления.

Формула (10) отображает состояние балки-стенки в случае, когда пластина свободна от связей

$$\sigma_z(y) = -E(y)\alpha(T)T(y) + \frac{N}{A_i \sum_{k=1}^n \frac{E_k A_k}{E_i A_i} + \sum_{i=1}^n E_i \left[ \frac{bh_i^3}{12} + bh_i y_{ci}^2 \right]}. \quad (10)$$

При наличии подвижной заделки, разрешающей осевое перемещение, но запрещающей поворот, в формуле (10) убирается последнее слагаемое. В случае жесткой заделки в формуле (10) остается лишь первое слагаемое.

Здесь имеем

$$N = -b \int_{-\xi h}^{h(1-\xi)} \sigma'_z(y) dy, \quad M = -b \int_{-\xi h}^{-h(1-\xi)} \sigma'_z(y) y dy. \quad (11)$$

Решение задачи дало ряд новых результатов, что свидетельствует о необходимости более тщательного исследования НДС пористых тел по сравнению со сплошными.

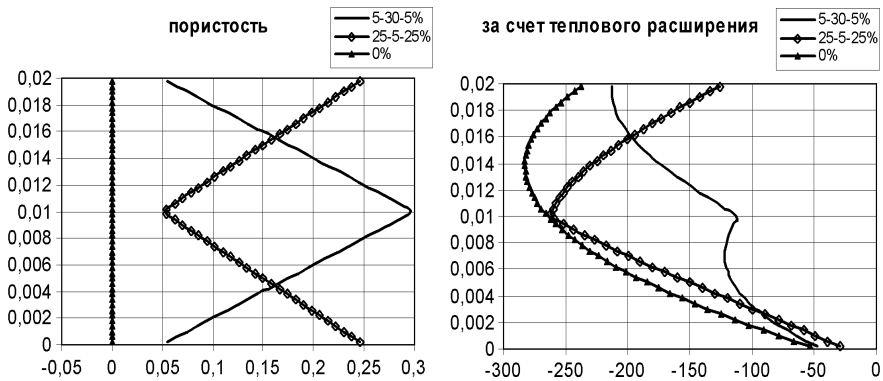


Рисунок 3 – Графики пористости и напряжений защемленной балки-стенки из пористого железа

На практике балка-стенка используется, например, в качестве токонесущей шины в случае одностороннего механического контакта с одним или несколькими токоъемниками.

На рис. 4 представлена характерная картина распределения пограничных температур по длине шины определенных эмпирически с помощью термопар.

Технически закрепление шины осуществляется по схеме скользящей за-

делки, разрешающей осевое ее смещение и запрещающей поворот.

Для решения задачи термоупругости данной конструкции предлагается приближенный метод, основанный на суб- и суперэлементной интерпретациях.

Протяженность субэлемента соответствует зоне постоянного уровня пограничной температуры, то есть ширины токоъемника или участков шины между токоъемниками.

В поперечных сечениях (в средней зоне) субэлементов тепловые условия становятся близкими к теплоизоляции, что позволяет для субэлемента приближенно считать распределение температуры одномерным вдоль координаты  $y$  и использовать для решения описанную методику.

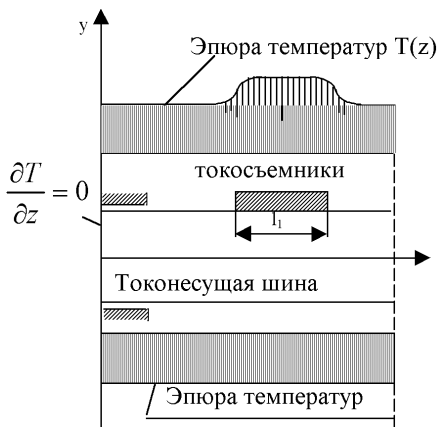


Рисунок 4 – Схема токонесущей шины

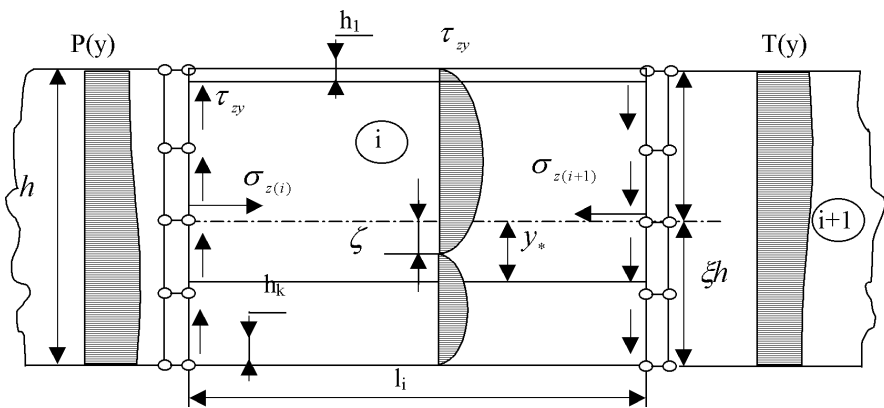


Рисунок 5 – Схема  $i$ -го субэлемента

Формулы нормальных напряжений в субэлементе имеют вид

$$\sigma_z(y) = -E(y)\alpha(T)\Gamma(y) + \frac{N}{A_i \sum_{k=1}^n \frac{E_k A_k}{E_i A_i}}. \quad (12)$$

Поскольку введение продольных связей между субэлементами позволяет свободно смещаться двум смежным сечениям в поперечном направлении друг относительно друга, это нарушает условие совместности их деформаций. Для исправления этого недостатка введем касательные напряжения в смежных сечениях и подчиним их уравнению равновесия

$$\tau_{zy} = - \int_{y^*}^{h(1-\xi)} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dy, \quad (13)$$

где  $y^*$  отсчитывается от нейтрального слоя субэлемента  $i$ ,  $-\xi h \leq y^* \leq h(1 - \xi)$ . Интеграл (13) практически вычисляется по квадратурной формуле.

Полученные формулы (13) для определения  $\tau_{zy}$  по сути аналогичны приему, используемому в формуле Журавского по определению касательных напряжений при поперечном изгибе балки.

Аналогично было получено решение для прямоугольной и круглой пластин.

Заметим, что из полученных решений для пористых пластин как частный случай вытекают известные решения (Тимошенко) для однородных тел, что подтверждает достоверность полученного результата.

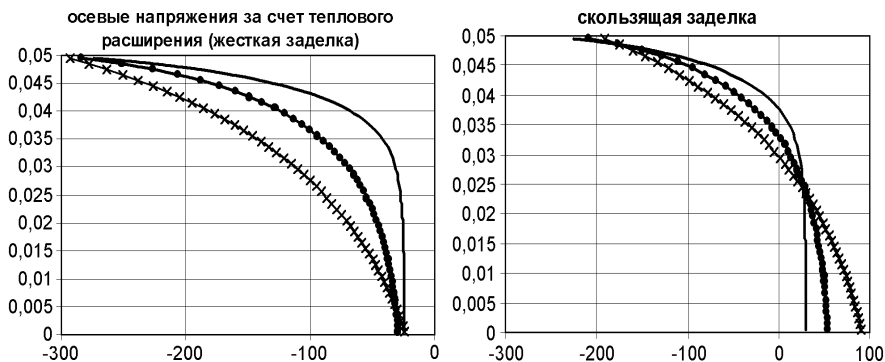


Рисунок 6 – Схема пористого охлаждения пластины в одномерном поле температур

Далее рассмотрим задачу пористого охлаждения прямоугольной пластины (плиты). Рассматриваются случаи наличия внутреннего тепловыделения и его отсутствия.

Нахождение температурного поля внутри прямоугольной и круглой плит

ведется по одинаковой схеме (одномерный режим). Одна из лицевых поверхностей пластины нагрета до высокой температуры  $T_2$ . Охлаждающая жидкость, нагнетаемая сквозь пластину в положительном направлении  $y$ , имеет при  $y = -\infty$  температуру  $T_0$ .

Перенос тепла в такой пластине можно определить как сумму двух составляющих: теплопроводность внутри твердого тела  $-\lambda_s(1-P) \frac{dT_s}{dy}$  и теплообмен твердое тело – жидкость  $dT_f = dq/GC$ . Исходя из этого, количество тепла, отдаваемого твердым телом жидкости, должно быть равно количеству тепла, переносимому за счет теплопроводности.

Таким образом, дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет температура пластины без источника тепла, примет вид

$$\frac{d^2 T_s}{dy^2} - \xi_s \frac{dT_s}{dy} = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq y \leq h, \quad \text{где} \quad \xi_s = \frac{GC}{\lambda_s(1-P)}. \quad (14)$$

Тепловой баланс, составленный для жидкости, выглядит следующим образом:

$$\frac{d^2 \theta}{dy^2} - \xi_f \frac{d\theta}{dy} = 0 \quad \text{при} \quad -\infty \leq y \leq 0, \quad \text{где} \quad \xi_f = \frac{GC}{\lambda_f}. \quad (15)$$

Частное решение уравнения (14), которое удовлетворяет граничным условиям  $T = T_1$  при  $y = 0$ ,  $T = T_2$  при  $y = h$ , имеет вид

$$T = T_1 + \frac{(T_2 - T_1)}{(e^{\xi_s h} - 1)} (e^{\xi_s y} - 1) \quad \text{для} \quad 0 \leq y \leq h. \quad (16)$$

Частное решение уравнения (15), удовлетворяющее граничным условиям, принимает вид

$$\theta = T_0 + \frac{(T_2 - T_1)}{(e^{\xi_f h} - 1)} e^{\xi_f y} \quad \text{для} \quad -\infty \leq y \leq 0. \quad (17)$$

Исключая температуру  $T_1$  из уравнений (16) и (17), окончательно получим поле температур в пластине

$$T = T_0 + (T_2 - T_0) e^{-\xi_s h \left(1 - \frac{y}{h}\right)}. \quad (18)$$

В случае присутствия теплового источника  $W$  поле температур по толщине стенки описывается функцией

$$T = T_0 + \left( \frac{1 - e^{-\xi_s h \left(1 - \frac{y}{h}\right)}}{\xi_s h} + \frac{y}{h} \right) \frac{W(1-P)h}{GC_p} \quad \text{для} \quad 0 \leq y \leq h. \quad (19)$$

## Выводы

Получены решения нового класса задач термоупругости пористых пластин и цилиндров на основе метода суперэлементов. В случае двумерного по-



ля температур в балке-пластинке и цилиндре для приближенного определения касательных напряжений предложено использовать аналогию с формулой Журавского при поперечном изгибе бруса.

**Список литературы:** 1. Яхно В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости / В.Г.Яхно. – Новосибирск : Наука, 1990. – 304 с. 2. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач / А.М. Денисов. –М.: Изд-во МГУ, 1994. – 206 с. 3. Ватульян А.О. К формулировке интегральных уравнений в проблеме идентификации предварительного напряженного состояния / А.О. Ватульян // Экологический вестник научных центров ЧЭС 2006. – № 2. – С. 23-25.

*Поступила в редколлегию 28.08.2009.*

УДК 531:629

**С.Ю.ПОГОРЕЛОВ**, канд.техн.наук, доц., НТУ «ХПИ»;

**К.Ю.СЧАСТЛИВЕЦ**, науч.сотр., НТУ «ХПИ»;

**С.И.МАРУСЕНКО**, науч.сотр., НТУ «ХПИ»

## **ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТЕПЛОТВОДА НА ДЕФОРМИРОВАНИЕ РЕЗОНАТОРА ЛАЗЕРНОГО ГИРОСКОПА**

Точність роботи кільцевого лазерного гіроскопа залежить від параметрів температурного поля. У запропонованій роботі досліджено вплив параметрів теплопровідності на деформування призми резонатора лазерного гіроскопа під впливом температурного поля, що змінюється, та стискаючого зусилля, зокрема на величину кутів повороту нормалей до граней резонатора.

The measurement accuracy of ring laser gyros depends from temperature field parameters. In the proposed paper was analyzed the deformation of laser gyroscope resonator with the influence of varying thermal conduction parameters, temperature field and compression force. In particular, the angles of resonator facets turning were obtained.

**Введение.** Навигационные комплексы, применяемые для решения задачи определения местоположения подвижного объекта на местности или в пространстве, основаны, как один из вариантов, на применении бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС). В качестве чувствительных элементов в данном приборе используются кольцевые лазерные гироскопы (ЛГ) [1,3,4].

В составе БИНС резонатор ЛГ смонтирован с помощью механического конструктива, который, помимо крепления ЛГ в приборе, является также основным элементом теплоотвода для ЛГ. В процессе работы ЛГ имеет место выделение тепла на элементах оптического контура, резисторах и катушках индуктивности [3,4]. Тепло отводится от призмы прибора путем целенаправ-