Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Хацько Наталія Євгенівна – кандидат технічних наук, старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (066) 198-80-58; e-mail: n.khatzko@gmail.com.

Хацько Наталья Евгеньевна – кандидат технических наук, старший преподаватель, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (066) 198-80-58; e-mail: n.khatzko@gmail.com.

Khatsko Natalia Evgenievna – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (066) 198-80-58; e-mail: n.khatzko@gmail.com.

УДК 539.3

Е. Г. ЯНЮТИН, Н. И. ВОРОПАЙ, П. А. ЕГОРОВ

ПРИМЕНЕНИЕ РАЗЛОЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ В РЯДЫ ШЛЕМИЛЬХА ДЛЯ АНАЛИЗА НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕМБРАНЫ

На основі теорії рядів Шльомільха та операційного числення запропоновано підхід до аналізу нестаціонарних коливань мембрани, викликаних кінематичними збуреннями. Він дозволяє знайти коефіцієнти в відповідних розвиненнях шуканих функцій, що описують коливання мембран у випадку вісесиметричних кінематичних навантажень. Зазначений підхід використовує інтегральне перетворення Лапласа у часі в процесі пошуку згаданих коефіцієнтів. Наведені приклади визначення поведінки мембрани в результаті різних початкових умов, які приєднані до рівняння нормальних (по відношенню до площини мембрани) переміщень точок на мембрані.

Ключові слова: мембрана, коливання, ряди Шльомільха, операційне числення.

На основе теории рядов Шлемильха и операционного исчисления предложен подход к анализу нестационарных колебаний мембраны, вызванных кинематическими возмущениями. Он позволяет определить коэффициенты в соответствующих разложениях искомых функций, которые описывают колебания мембраны в случае осесимметричных кинематических нагружений. Указанный подход использует интегральное преобразование Лапласа во времени в процессе поиска упомянутых коэффициентов. Приведены примеры определения поведения мембраны в результате различных начальных условий, которые присоединены к уравнению нормальных (по отношению к плоскости мембраны) перемещений точек на мембране.

Ключевые слова: мембрана, колебания, ряды Шлемильха, операционное исчисление.

Based on the Schlömilch series theory and operational calculus an approach to the analysis of non-stationary vibrations of a membrane caused by kinematic perturbations is proposed. It allows to determine the coefficients in the corresponding expansions of the unknown functions, which describe the vibrations of the membrane in the case of axisymmetric kinematic loadings. This approach uses the integral Laplace transformations in time in the process of searching for the mentioned coefficients. Examples of determining the behavior of the membrane as a result of various initial conditions that are attached to the equation of normal (with respect to the plane of the membrane) displacements of points on the membrane are given.

Key words: membrane, vibrations, Schlömilch series, operational calculus.

Введение и краткое описание рядов Шлемильха. Задачи об осесимметричных колебаниях круглых в плане мембран, пластин и пологих сферических оболочек исследованы очень хорошо. Имеется набор способов решения прямых задач для таких объектов и так называемых обратных задач. Описание этих задач отражено, например, в монографиях [1, 2] и многочисленных статьях. Для решения задач такого рода, как правило, применяется *теория рядов Фурье – Бесселя* и *Дини*. В случае рассмотрения пластин и пологих сферических оболочек можно вводить дополнительные (неизвестные) нагрузки, обеспечивающие удовлетворение полного набора граничных условий на их торцах. При решении задачи о колебаниях неограниченной мембраны используется в [3] *метод интегральных преобразований* (*Лапласа* и *Ханкеля*).

К теории рядов Фурье – Бесселя примыкает *теория рядов Шлемильха* вида $\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0(mx)$, у которых x – вещественная переменная, аргумент у бесселевых функций пропорционален номеру членов, величины a_m $(m = 0, 1, 2, ...)$ – числовые коэффициенты. Свойства рядов Шлемильха описаны, например, в [4].

Автор работы [4] *Г. Н. Ватсон* пишет: "Ряды этого типа были впервые исследованы Шлемильхом. Для физика они не имеют такого значения, как ряды Фурье – Бесселя, хотя как показал Релей (ссылка на соответствующую работу 1911 года), они естественно возникают при исследовании периодического поперечного колебания двумерной мембраны, если это колебание слагается из бесконечного множества одинаковых одномерных поперечных колебаний, равномерно распределенных по обоим направлениям мембраны".

Укажем, что в настоящем исследовании предпринята попытка анализа нестационарных колебаний в полярной системе координат для области мембраны в случае ее осесимметричных колебаний, причем исследование основывается на использовании разложений искомых функций в ряды Шлемильха.

В работе [4] изложена основная теорема рядов Шлемильха, суть которой содержится в следующем. Функция $\varphi(x)$, которая задана при $0 \le x \le \pi$, допускает разложение в ряд

$$\varphi(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m J_0(mx), \qquad (1)$$

где $a_0=2\varphi(0)+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2}u\varphi'(u\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}u$; $a_m=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2}u\varphi'(u\sin\varphi)\cos mu\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}u$.

При этом требуется, чтобы $\varphi'(x)$ была непрерывна и имела ограниченное полное изменение при $0\le x\le\pi$.

Коэффициенты в формуле (1) можно записать в виде

$$a_0=2\varphi(0)+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u\int_0^1\frac{\varphi'(u\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}u ;$$

$$a_m=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u\cos mu\int_0^1\frac{\varphi'(u\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}u . \qquad (2)$$

Постановка задачи. Рассматриваем нестационарные осесимметричные колебания неограниченной мембраны, а точнее – ее части, ограниченной окружностью с радиусом R_0 . Исследование будем осуществлять в полярной системе координат, центр которой совпадает с центром указанной окружности.

Осесимметричные колебания мембраны описываются уравнением [5]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u , \qquad (3)$$

где u – перемещения точки мембраны в поперечном направлении по отношению к плоскости мембраны (эта функция зависит от двух переменных r и t); r – размерная переменная в полярной системе координат; t – размерное время; a – скорость распространения волн колебаний ($a=\sqrt{T/\rho}$); T – поверхностное натяжение мембраны; ρ – поверхностная плотность материала мембраны; $\Delta(\,)$ – оператор Лапласа, который в полярной системе координат для осесимметричного случая имеет вид $\Delta(\,)=\frac{\partial^2(\,)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\,)}{\partial r}$.

Введем безразмерные переменные $x=\pi r/R_0$, $\tau=bt$, где $b=a\pi/R_0$.

Уравнение (3) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} . \qquad (4)$$

К одномерному уравнению (4) присоединим начальные условия – значения перемещений и скоростей точек мембраны в момент времени $\tau=0$ при $0\le x\le\pi$:

$$u(x,0)=f(x) ; \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=F(x), \qquad (5)$$

где $f(x)$ и $F(x)$ являются заданными функциями, удовлетворяющими условиям возможности их разложения в ряды Шлемильха по переменной x . Указанная теорема для рядов Шлемильха гарантирует единственность разложения функций на интервале $0\le x\le\pi$. Для значений $x>\pi$ разложения функций в ряды Шлемильха на основе формул (1) – (3), в принципе, не определены [4], хотя соответствующие ряды на этом интервале могут быть сходящимися. Поэтому необходимо более подробно описать область применения намечаемых к получению решений.

Заметим также, что, если функции, которые входят в (5), не удовлетворяют условиям основной теоремы теории рядов Шлемильха, то возможны серьезные усложнения при построении решений задачи, определяемой соотношениями (4), (5).

Пусть x^* – некоторая точка на мембране, причем $x^*\in(0,\pi)$. Поскольку в случае моделирования на основе уравнения (4) колебательный процесс распространяется с конечной скоростью (уравнение (4) гиперболично), и неизвестно какие функции будут формироваться рядами Шлемильха при $x>\pi$, то намечаемое решение, соответствующее выбранной точке x^* , должно быть справедливым лишь для моментов времени, удовлетворяющих условиям $0\le\tau\le\pi-x^*$. Если, например, волновой процесс колебаний распространяется от некоторой области, прилегающей к началу системы координат ($x=0$), вдоль мембраны, то решение будет справедливым для всех точек мембраны $0\le x<\pi$. В точке $x=\pi$ может начать формироваться *условно отраженная* волна колебаний, которая будет распространяться к началу координат. Эта волна колебаний порождается начальными условиями неизвестного вида, которые отвечают рядам Шлемильха при $x>\pi$. Решение в этом случае считаем не корректным.

Способ решения задачи. Решение уравнения (4) будем записывать в виде

$$u(x,\tau)=\frac{b_0(\tau)}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}b_m(\tau)J_0(mx). \qquad (6)$$

Начальные условия (5), как это уже отмечалось, являются заданными при $0\le x\le\pi$:

$$f(x)=\frac{a_0^f}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m^f J_0(mx);\quad F(x)=\frac{a_0^F}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m^F J_0(mx). \qquad (7)$$

Подчеркнем, что в (7) разложение в ряды Шлемильха функций $f(x)$ и $F(x)$ формально уже произведено, то есть в (7) a_0^f , a_0^F , a_m^f , a_m^F предполагаются заданными числами.

Осуществляется подстановка разложения (6) в уравнение (4).

В результате несложных преобразований с учетом формы *уравнения Бесселя* для функции $J_0(x)$, а именно – $y''+1/x\cdot y'+y=0$, получим

$$\frac{\ddot{b}_0(\tau)}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\ddot{b}_m(\tau)+m^2b_m(\tau)\right]J_0(mx)=0. \qquad (8)$$

Соотношение (8) для неизвестных величин $b_m(\tau)$ $(m=0,1,2,...)$ будет удовлетворяться, если принять, что

$$\ddot{b}_0(\tau)=0;\quad \ddot{b}_m(\tau)+m^2b_m(\tau)=0\quad (m=0,1,2,...). \qquad (9)$$

Уравнения (9) представляют собой несвязанную систему уравнений для величины $b_m(\tau)$.

Получить решения уравнений для функций времени $b_m(\tau)$ элементарно, если принять, что

$$b_0(0)=a_0^f;\quad \dot{b}_0(0)=a_0^F;\quad b_m(0)=a_m^f;\quad \dot{b}_m(0)=a_m^F. \qquad (10)$$

Правые части у всех выражений (10) суть коэффициенты разложений, входящих в (7).

Построить решение уравнений (9) с начальными условиями (10) можно с использованием *преобразования Лапласа* [6] или каким-либо другим способом. Будем предполагать, что $B_m^L(s)\dot{\rightarrow}b_m(\tau)(m=0,1,2,...)$. С использованием стандартных правил операционного исчисления можно записать на основе уравнений (9), что

$$B_0^L(s)=\frac{a_0^f}{s}+\frac{a_0^F}{s^2};\quad B_m^L(s)=\frac{sa_m^f}{s^2+m^2}+\frac{a_m^F}{s^2+m^2}. \qquad (11)$$

В пространстве оригиналов соотношения (11) запишутся следующим образом:

$$b_0(\tau)=a_0^f H(\tau)+a_0^F\tau;\quad b_m(\tau)=a_m^f\cos(m\tau)+a_m^F\sin(m\tau)/m, \qquad (12)$$

где $\tau\ge 0$, $H(\tau)$ – *единичная функция Хевисайда*.

Далее рассмотрим несколько примеров.

Пример первый. Пусть функция $F(x)\equiv 0$ при $0\le x\le\pi$. Функция $f(x)$, входящая в начальные условия, должна быть функцией, у которой $f'(x)$ непрерывна. Будем для простоты предполагать, что $f(x)=const=u_0$, где u_0 – величина, имеющая размерность длины ($[u_0]=$м). Легко увидеть, что на основе (2) $a_0^F=a_m^F=0$. Величины $a_m^f=0$, если $m=1,2,3,...$, а $a_0^f=2u_0$. Следовательно $b_0(\tau)=2u_0H(\tau)$. Значит $u(x,\tau)=u_0H(\tau)$. Указанное относится, в принципе, также для $0\le x\le\pi$. Однако, полученный результат, по-видимому, справедлив и для всех положительных значений x, в том числе и при $x>\pi\,(r>R_0)$.

Пример второй. Пусть функция $F(x)\equiv 0$ (в начальный момент времени в области мембраны $0\le x\le\pi$ нормальные скорости точек отсутствуют). А функция $f(x)$ есть функция, у которой непрерывна первая производная при $0\le x\le\pi$. В этом случае $a_0^F=a_m^F=0$, а величины $a_m^f\,(m=0,1,2,3,...)$ вычисляются по формулам (2).

Примем, что $f(x)=u_0x$, где $[u_0]=$м при $0\le x\le\pi$. Формулы (2) могут быть записаны в более простом виде

$$a_0^f=\frac{2u_0}{\pi}\int_0^{\pi}u\int_0^1\frac{d\xi du}{\sqrt{1-\xi^2}};\quad a_m^f=\frac{2u_0}{\pi}\int_0^{\pi}u\cos mu\int_0^1\frac{d\xi du}{\sqrt{1-\xi^2}}. \qquad (13)$$

Легко понять, что величина a_0^f , вычисленная на основе первой формулы из (13), будет равна $u_0\pi^2/2$, то есть $a_0^f=u_0\pi^2/2$.

Интеграл в (13) по переменной u вычисляется с помощью интегрирования по частям. Подробнее

$$a_m^f=\frac{2u_0}{\pi}\int_0^{\pi}u\cos mu du\arcsin\xi\Big|_0^1=u_0\int_0^{\pi}u\cos mu du.$$

В результате выполнения операции интегрирования получим

$$u(x,\tau)=\frac{\pi^2}{4}u_0+u_0\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\left((-1)^m-1\right)\cos m\tau J_0(mx). \tag{14}$$

Приведенную формулу (14) можно рассматривать как окончательную для вычисления перемещений точек мембраны с переменными x, τ.

В работе [7] приводятся формулы для сумм следующих тригонометрических рядов:

$$\sum_{m=1}^{\infty}-\frac{\cos m\tau}{m^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi\tau}{2}+\frac{\tau^2}{4},\ 0\le\tau\le 2\pi;\ \ \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos m\tau}{m^2}(-1)^{m-1}=\frac{\pi^2}{12}-\frac{\tau^2}{4},\ -\pi\le\tau\le\pi. \tag{15}$$

На основе формул (14), (15) можно получить, что

$$u(0,\tau)=u_0\frac{\pi}{2}\tau. \tag{16}$$

В точке, отвечающей началу системы координат, наблюдается равномерное перемещение во времени со скоростью $\partial u(0,\tau)/\partial\tau=u_0\cdot\pi/2$. Укажем, что здесь размерность скорости точки не равна м/с, поскольку переменная τ, по которой вычисляется первая производная от перемещения, безразмерная. Полученный результат можно проверить следующим образом. Примем, что в уравнении (4) $0\le x<+\infty$. Рассмотрим это уравнение в пространстве – *трансформант по Ханкелю* [8]. Примем, что

$$u^H(\lambda,\tau)=\int_0^{\infty}xu(x,\tau)J_0(\lambda x)\mathrm{d}x. \tag{17}$$

Уравнение (4) преобразуется к виду

$$\frac{\mathrm{d}^2u^H(\lambda,\tau)}{\mathrm{d}\tau^2}+\lambda^2u^H(\lambda,\tau)=0. \tag{18}$$

К приведенному уравнению (18) необходимо присоединить два соотношения, вытекающие из условий (5), а именно

$$u^H(\lambda,0)=f^H(\lambda);\ \ \frac{\mathrm{d}u^H(\lambda,0)}{\mathrm{d}\tau}=F^H(x). \tag{19}$$

В конкретном случае при $f(x)=u_0x$, $F(x)=0$ будем иметь

$$u^H(\lambda,0)=u_0\int_0^{\infty}x^2J_0(\lambda x)\mathrm{d}x;\ \ \frac{\mathrm{d}u^H(\lambda,0)}{\mathrm{d}\tau}=0. \tag{20}$$

В работе [7] приводится значение следующего интеграла

$$\int_0^{\infty}x^{\mu}J_{\upsilon}(ax)\mathrm{d}x=2^{\mu}a^{-\mu-1}\frac{\Gamma(1/2+1/2\cdot\upsilon+1/2\cdot\mu)}{\Gamma(1/2+1/2\cdot\upsilon-1/2\cdot\mu)}, \tag{21}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма функция аргумента z.

В рассматриваемом случае ($\mu=2$, $\upsilon=0$) для величины $u^H(\lambda,\tau)$ из уравнения (18) и найденного выражения (21) получается формула такого вида:

$$u^H(\lambda,\tau)=-\frac{u_0}{\lambda^3}\cos(\lambda\tau). \tag{22}$$

Укажем, что аналогичная задача была рассмотрена в работе [3].

Если учесть, что для $\dfrac{\mathrm{d}u^H(\lambda,\tau)}{\mathrm{d}\tau}$ выражение будет таким:

$$\frac{\mathrm{d}u^H(\lambda,\tau)}{\mathrm{d}\tau}=\frac{u_0\sin(\lambda\tau)}{\lambda^2}, \tag{23}$$

то можно воспользоваться формулой из работы [7]

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin(\lambda\tau)}{\lambda}J_0(\lambda x)\mathrm{d}\lambda=\begin{cases}\arcsin(x/\tau),\ x\ge\tau;\\ \pi/2,\ \tau\ge x.\end{cases} \tag{24}$$

Поскольку в точке $x=0$ всегда $\tau\ge x$, то на основе соотношения (23) и формулы (24) после выполнения *обратного преобразования Ханкеля* будем иметь

$$\frac{\partial u(0,\tau)}{\partial\tau}=u_0\frac{\pi}{2}, \tag{25}$$

что полностью совпадает с приведенным ранее выражением скорости точки на мембране в начале системы координат.

Решение уравнения (4) с учетом соответствующих начальных условий, полученное на основе применения интегрального преобразования Ханкеля и справедливое для $0 \le x < +\infty$ является верным для мембраны неограниченных размеров. Решение (14), которое получено для $0 \le x \le \pi$, справедливо лишь для области мембраны, которая ограничена окружностью радиуса R_0 с центром в точке $x = 0$. Однако, поскольку величина R_0 может быть любой, то решение $\partial u(0,\tau)/\partial\tau = u_0\,\pi/2$ также справедливо для всех значений R_0. Поэтому можно утверждать, что сравниваемые решения полностью совпадают в точке $x = 0$ для всех значений времени из двух рассматриваемых диапазонов ($0 \le \tau < +\infty$ и $0 \le \tau \le \pi$).

Пример третий. Пусть функция $f(x) = 0$, а функция $F(x) = V_0\left[H(x) - H(x - x_0)\right]$, где $0 < x_0 < \pi$. Величина V_0 имеет размерность м/с. Понятно, что $a_0^f = 0$, $a_m^f = 0$ согласно формул для коэффициентов рядов Шлемильха. При определении величин a_0^F, a_m^F в этом случае сталкиваемся с более сложной ситуацией. Проблема состоит в том, что функция $F'(x)$ не удовлетворяет условиям основой теоремы. Функция $F'(x)$ относится даже к классу обобщенных функций.

Легко проверить, что в случае задания $F(x)$ в виде ступенчатой функции, коэффициенты a_0^F, a_m^F будут комплексными числами с ненулевой мнимой частью. Задача построения решения уравнения (4) с помощью использования разложений Шлемильха для варианта ступенчатой функции $F(x)$ (или $f(x)$) является невыполнимой. В принципе, если ограничится приближенным решением (даже для $x \in (0,\pi)$), то можно вместо заданной функции $F(x)$ рассматриваемого типа использовать некоторую несколько "подправленную" функцию $F_\varepsilon(x)$, которая бы уже удовлетворяла основной теореме разложения. Описанную ситуацию, по-видимому, следует относить к *особой* (типа *некорректной*). Специально заниматься здесь такой ситуацией не будем. Укажем только, что естественно в ней рассмотреть последовательность функций, удовлетворяющих условию основной теоремы о существовании разложений функций в ряды Шлемильха и сходящихся к заданной функции $F(x)$. Описание выбора такой последовательности можно найти, например, в [9].

Выводы. Для уравнения гиперболического типа, описывающего нестационарные колебания мембраны в случае осесимметричных кинематических возмущений, разработан подход, который можно относить к численно-аналитическим, и служащий для анализа динамического поведения мембраны. Способ использует прием разложения искомых функций в ряды Шлемильха, которые являются родственными по отношению к рядам Фурье – Бесселя. Способ использует формулы для определения коэффициентов разложений, а также опирается на операционное исчисление. На основе свойств распространения возмущений при их моделировании уравнениями гиперболического типа указывается область применения получаемых решений в рядах Шлемильха по вещественной пространственной переменной. Получаемые коэффициенты в разложениях являются функциями времени. Представлены (сравнительно) простые примеры решения задач для динамики мембраны с заданными начальными условиями.

Подход, который описан, является нестандартным, поскольку использует разложение функций Шлемильха в задачах математической физики, мало применяющихся в моделировании физических задач.

Представляет интерес развитие подхода к решению задач для уравнений с заданной правой частью, а также для динамических объектов типа пластин и пологих сферических оболочек, а также строго выпуклых пологих тонкостенных куполов.

Список литературы

1. *Филиппов А. П.* Колебания деформируемых систем. – М. : Машиностроение, 1970. – 736 с.
2. *Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Воропай А. В., Шарапата А. С.* Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. Монография. – Харьков : ХНАДУ, 2004. – 392 с.
3. *Пикулин В. П., Похожаев С. И.* Практический курс по уравнениям математической физики. – М. : МЦНМО, 2004. – 208 с.
4. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1949. – 799 с.
5. *Араманович И. Г., Левин В. И.* Уравнения математической физики. – М. : Наука, 1969. – 288 с.
6. *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости : Учебное пособие, 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 305 с.
7. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М. : Физматгиз, 1963. – 1100 с.
8. *Жислин Г. М.* Интегральные преобразования в задачах математической физики. Электронное учебно-методической пособие. – Нижний Новгород : Нижегородский госуниверситет, 2012. – 80 с.
9. *Доля П. Г.* Математические методы компьютерной томографии. Дополнение 1. Введение в теорию обобщенных функций. – Харьков : Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, 2012. – 57 с.

References (transliterated)

1. Filippov A. P. *Kolebaniya deformiruemykh system* [Vibrations of deformable systems]. Moscow, Mashinostroeniye Publ., 1970. 736 p.
2. Yanyutin E. G., Yanchevskiy I. V., Voropay A. V., Sharapata A. S. *Zadachi impul'snogo deformirovaniya ehlementov konstruktsiy. Monografiya* [Problems of pulsed deformation of structural elements. Monograph]. Khar'kov, KHNADU Publ., 2004. 392 p.
3. Pikulin V. P., Pokhozhaev S. I. *Prakticheskiy kurs po uravneniyam matematicheskoy fiziki* [Practical course in equations of mathematical physics]. Moscow, MTSNMO Publ., 2004. 208 p.

4. Vatson G. N. *Teoriya besselevykh funktsiy* [Theory of Bessel functions]. Moscow, Izd-vo inostrannoy literatury Publ., 1949. 799 p.
5. Aramanovich I. G., Levin V. I. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 288 p.
6. Krasnov M. L., Kiselev A. I., Makarenko G. I. *Funktsii kompleksnogo peremennogo. Operatsionnoe ischislenie. Teoriya ustoychivosti* : *Uchebnoe posobie, 2-e izd., pe-rerab. i dop.* [Functions of complex variable. Operational calculus. Stability theory: training manual, 2nd ed.]. Moscow, Nauka, Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury Publ., 1981. 305 p.
7. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of integrals, sums, series, and products]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963. 1100 p.
8. Zhislin G. M. *Integral'nye preobrazovaniya v zadachakh matematicheskoy fiziki. Ehlektronnoye uchebno-metodicheskoye posobiye* [Integral transforms in the problems of mathematical physics. Electronic teaching and methodological manual]. Nizhniy Novgorod, Nizhegorodskiy gosuniversitet Publ., 2012. 80 p.
9. Dolya P. G. *Matematicheskie metody komp'yuternoy tomografii. Dopolnenie 1. Vvedenie v teoriyu obobshhennykh funktsiy* [Mathematical methods of computer tomography. Complement 1. Introduction to the theory of generalized functions]. Kharkov, Khar'kovskiy natsional'nyy universitet imeni V.N. Karazina Publ., 2012. 57 p.

Поступила (received) 26.10.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Застосування розвинень функцій в ряди Шльомільха для аналізу нестаціонарних коливань мембрани / Є. Г. Янютін, Н. І. Воропай, П. А. Єгоров // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 131 – 136. Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2222-0631.

Применение разложений функций в ряды Шлемильха для анализа нестационарных колебаний мембраны / Е. Г. Янютин, Н. И. Воропай, П. А. Егоров // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 131 – 136. Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2222-0631.

The application of expansions of functions into Schlömilch series for the analysis of nonstationary oscillations of a membrane / Ye. G. Yanyutin, N. I. Voropay, P. A. Yegorov // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 30 (1252). – pp. 131 – 136. Bibliog.: 9 titles. – ISSN 2222-0631.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Янютін Євген Григорович – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (097) 715-58-44; e-mail: e.yanyutin@gmail.com.

Янютин Евгений Григорьевич – доктор технических наук, профессор, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (097) 715-58-44; e-mail: e.yanyutin@gmail.com.

Yanyutin Yevgen Grigorovich – Doctor of Engineering Sciences, Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (097) 715-58-44; e-mail: e.yanyutin@gmail.com.

Воропай Наталя Ігорівна **–** кандидат технічних наук, доцент кафедри інформаційних систем, Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця, м. Харків; тел.: (066) 743-27-97; e-mail: voropay.n@gmail.com.

Воропай Наталья Игоревна – кандидат технических наук, доцент кафедры информационных систем, Харьковский национальный экономический университет имени Семёна Кузнеца, г. Харьков; тел.: (066) 743-27-97; e-mail: voropay.n@gmail.com.

Voropay Natalya Igorivna – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Department of Information Systems, Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics, Kharkov, tel.: (066) 743-27-97; e-mail: voropay.n@gmail.com.

Єгоров Павло Анатолійович – кандидат технічних наук, доцент, Харківськй національний автомобільно-дорожний університет, м. Харків; тел.: (066) 225-33-51; e-mail: egorovpa@online.com.

Егоров Павел Анатольевич – кандидат технических наук, доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, г. Харьков; тел.: (066) 225-33-51; e-mail: egorovpa@online.com.

Yegorov Pavlo Anatoliyovich – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkov; tel.: (066) 225-33-51; e-mail: egorovpa@online.com.