

Расчеты последующих коэффициентов разложения могут быть выполнены аналогично. Заметим, что для практических целей это разложение проще и удобнее реализовать численно.

Выводы. В работе предложена методика оценки эффективности компьютерной сети, на вход которой поступает суперпозиция потоков групповых заявок. С использованием марковской модели функционирования системы получены аналитические соотношения для расчета распределения вероятностей состояний системы. Рассмотрен пример применения метода.

Список литературы: 1. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. –М.: Наука, 1971. -383с. 2. Казаков В.А. Введение в теорию марковских процессов. –М.: «Сов. Радио», 1973. - 231с. 3. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. –М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. -496с. 4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. –М.: Наука, 1971. -509с.

Поступила в редколлегию 01.12.05

УДК 519.152

Л.Г. РАСКИН, д-р. техн. наук, *О.В. СЕРАЯ*, канд. техн. наук

МАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ СМО С НЕМАРКОВСКИМ ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ

Розглянуто методику марковського опису функціонування системи обслуговування з немарковським входним потоком, для апроксимації якого використовується потік Ерланга.

1. Введение. Анализ литературы. Эффективность аналитического исследования систем массового обслуживания в значительной мере определяется качеством моделей распределений случайных величин, определяющих параметр функционирования системы. При выборе моделей этих распределений руководствуются, в основном, двумя следующими соображениями. Во-первых, модель должна адекватно отображать реальные процессы, протекающие в системе. Во-вторых, эта модель должна быть простой в той мере, чтобы используемые ею соотношения обеспечивали возможность проведения исследования и получения результатов в замкнутой форме. Для многих реальных систем идеальной моделью распределения случайных величин, удовлетворяющей обоим требованиям, является экспоненциальное распределение, приводящее к хорошо и всесторонне изученным марковским моделям. К сожалению, для других реальных систем эта модель не является адекватной. Так, например, многочисленные

исследования процессов передачи данных в компьютерных сетях, показывают [1,2], что плотности распределения интервалов между пакетами и продолжительности пакетов описываются специфическими медленно затухающими функциями, порождающими распределения с «тяжелыми хвостами». В частности этим свойством обладает трехпараметрическое распределение [3], имеющее вид

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{A} \cdot \frac{2 \exp \left\{ -\frac{(\theta - \theta_1)^2}{2\theta_2^2} (1 + \theta_3 \operatorname{sign}(\theta - \theta_1)) \right\}}{\theta_2 \sqrt{2\pi} (\sqrt{1 + \theta_3} + \sqrt{1 - \theta_3})}, & \theta \geq 0 \\ 0, & \theta < 0 \end{cases} \quad (1)$$

где

$$A = \int_0^{\infty} \frac{2}{\theta_2 \sqrt{2\pi} (\sqrt{1 + \theta_3} + \sqrt{1 - \theta_3})} \exp \left\{ -\frac{(\theta - \theta_1)^2}{2\theta_2^2} (1 + \theta_3 \operatorname{sign}(\theta - \theta_1)) \right\} d\theta,$$

θ - случайная продолжительность интервала между заявками,

θ_1 - параметр распределения, задающий математическое ожидание θ ,

θ_2^2 - параметр, задающий дисперсию θ ,

θ_3 - параметр, определяющий асимметрию распределения.

Возможности этого распределения изучены и рассмотрены в [3]. Там же показано, что распределение (1) хорошо аппроксимирует многие классические распределения случайных величин: экспоненциальное, релеевское, Вейбулла-Гнеденко, лог-нормальное (усеченное нормальное распределение является частным случаем (1) при $\theta_3 = 0$). В связи с этим понятно, что с использованием распределения (1) можно задавать статистические описания входящих потоков в широком и разнообразном их спектре. С другой стороны, отрицательная асимметрия распределений реальных случайных интервалов между заявками входящего потока мотивирует исследование возможности приближения $\varphi(\theta)$ обобщенным распределением Эрланга, возникающего в результате просеивания пуассоновского потока и конструктивно обладающего этим же свойством. Функция распределения для потока Эрланга n -го порядка имеет вид

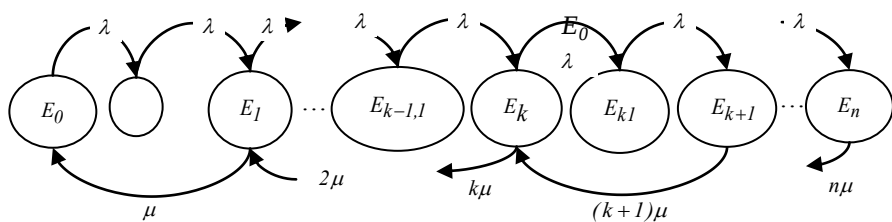
$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!},$$

а соответствующая плотность определяется выражением

$$f(t) = \lambda (\lambda t)^{n-1} e^{-\lambda t}.$$

2. Цель статьи – исследовать эффективность приближения распределения (1) эрланговским распределением надлежащего порядка и, с учетом основного свойства этого распределения, разработать методику построения марковской модели функционирования системы с немарковским входящим потоком.

3. Основные результаты. Решение задачи построения марковской модели функционирования с немарковским входящим потоком естественно начать с отыскания параметра λ распределения Эрланга выбранного порядка путем аппроксимации гистограммы для случайных значений интервала между заявками в реальном потоке с этим распределением. Пусть, для простоты, эта аппроксимация получена с использованием распределения Эрланга второго порядка. Для описания функционирования системы с таким входящим потоком и экспоненциальным обслуживанием используем граф состояний и переходов, приведенный на рисунке.



Граф состояний и переходов системы с эрланговским входящим потоком и экспоненциальным обслуживанием

Здесь

E_k - состояние, когда в системе занято ровно k каналов, $k = 0, 1, 2, \dots, n$;

E_{k1} - буферное состояние, соответствующее ситуации, когда в системе занято ровно k каналов и поступила новая заявка, которая будет отсеяна и поэтому не влияет на изменение числа занятых каналов, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$;

λ - интенсивность входящего просеиваемого пуассоновского потока;

μ - интенсивность обслуживания.

Для полученного графа состояний и переходов сформируем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных вероятностей состояний системы. Система уравнений имеет вид:

из которой получим

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \frac{\lambda}{\mu} P_0, \\
 &\dots\dots\dots \\
 P_k &= \frac{\lambda}{k\mu} P_{k-1} = \frac{\lambda^k}{k! \mu^k} P_0, \\
 &\dots\dots\dots \\
 P_n &= \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} P_0.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Заметим теперь, что из второго, четвертого и т.д. уравнений системы (2) следует:

$$P_0 = P_{01}, P_1 = P_{11}, \dots, P_{n-1} = P_{n-1,1}. \tag{6}$$

Соотношения (5) и (6) с учетом условия нормировки позволяют рассчитать значение P_0 . При этом

$$\sum_{k=0}^n P_k + \sum_{k=0}^{n-1} P_{k,1} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} P_k + P_n = P_0 \left[2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k! \mu^k} + \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} \right] = 1.$$

Отсюда

$$P_0 = \frac{1}{2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k! \mu^k} + \frac{\lambda^n}{n! \mu^n}}. \tag{7}$$

Тогда, подставляя (7) в (5), получим

$$P_k = \frac{\frac{\lambda^k}{k! \mu^k}}{2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k! \mu^k} + \frac{\lambda^n}{n! \mu^n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Понятно, что эти соотношения описывают вероятности состояний E_k , $k = 0, 1, \dots, n$, в системе, соответствующей графу, приведенному на рис.1. Вместе с тем, истинная вероятность состояния E_k для системы, на вход которой поступает эрланговский поток второго порядка, равна

$$P_{k\ominus} = P_k + P_{k,1}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

откуда, с учетом (6), имеем

$$P_{k,\Theta} = 2P_k = \frac{2 \frac{\lambda^k}{k! \mu^k}}{2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k! \mu^k} + \frac{\lambda^n}{n! \mu^n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1; \quad (8)$$

$$P_{n,\Theta} = P_n = \frac{\frac{\lambda^n}{n! \mu^n}}{2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k! \mu^k} + \frac{\lambda^n}{n! \mu^n}}. \quad (9)$$

Аналогично проводится анализ системы, на вход которой поступает поток Эрланга l -го порядка. В этом случае в графе состояний и переходов перед каждым истинным состоянием необходимо ввести $(l-1)$ буферных состояний, описывающих переходы системы под воздействием отсеиваемых $(l-1)$ -й заявок, не влияющих на число занятых каналов системы. Поскольку технология получения результирующих соотношений в этом случае аналогична описанной выше, приведем только окончательный результат.

$$P_{k,\Theta} = lP_k = \frac{l \frac{\lambda^k}{k! \mu^k}}{l \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k! \mu^k} + \frac{\lambda^n}{n! \mu^n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (10)$$

$$P_{n,\Theta} = P_n = \frac{\frac{\lambda^n}{n! \mu^n}}{l \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k! \mu^k} + \frac{\lambda^n}{n! \mu^n}}. \quad (11)$$

4. Выводы. Получена методика расчета распределения вероятностей состояний системы обслуживания, на вход которой поступает немарковский поток, в качестве аппроксимации которого используется поток Эрланга надлежащего порядка. Расчет доведен до аналитических соотношений.

Список литературы: 1. Риордан Дж. Вероятностные системы обслуживания: Пер. с англ.-м.: Связь, 1966. – 184 с. 2. Кокс Д., Смит Ч. Теория очередей: Пер. с англ.-м.: Мир, 1966. – 218 с. 3. Серая О.В. Аппроксимация гистограмм трехпараметрическим распределением случайных величин // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті.-Харків: ІКСЗТ, 2001. – н3.-с.81-83.

Поступила в редколлегию 05.12.05