

А. Л. ГРИГОРЬЕВ, А. И. ДЕРИЕНКО

## РАСЧЁТ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРУЖИНЫ ПРИ АСИММЕТРИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ И УЧЕТЕ ФАКТОРОВ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Розроблено чисельно-аналітичний підхід до врахування нелінійних факторів та асиметрії крайових умов. При його реалізації використовується складена раніше лінійна математична модель коливань циліндричної пружини стискання при симетричних умовах закріплення крайніх витків, яка враховує повну групу позовжних (а в опорних витках – й поперечних) переміщень перерізу гвинтового стрижня при 3-х (або 6-ти) степенях свободи. Розв'язки рівнянь цієї моделі представлено у формі інтегралів із різницевиими ядрами типу Коші (для перехідних процесів) або Фредгольма (для сталих коливань). Асиметрія та нелінійності враховані як малі додаткові силові дії, що виникають в процесі коливань. Таким чином, наприклад, вдалося врахувати нелінійних спротив середовища при установці пружини у вузькому каналі, який заповнений в'язкою рідиною, а також співударяння витків та сухе тертя в опорах. При врахуванні вказаних факторів використано методи суперпозиції розв'язків та простої ітерації.

**Ключові слова:** циліндрична пружина стискання, умови закріплення пружини; модель гвинтового стрижня, згорткові інтеграли, співударяння витків, нелінійне зовнішнє тертя, сухе тертя у опорах.

Разработан численно-аналитический подход к учёту нелинейных факторов и асимметрии граничных условий. При его реализации используется составленная ранее линейная математическая модель колебаний цилиндрической пружины сжатия при симметричных условиях закрепления крайних витков, учитывающая полную группу продольных (а в опорных витках – и поперечных) перемещений сечения винтового стержня при 3-х (или 6-ти) степенях свободы. Решения уравнений этой модели представлены в форме интегралов с разностными ядрами типа Коши (для переходных процессов) или Фредгольма (для установившихся колебаний). Асимметрия и нелинейности учитываются как малые дополнительные силовые воздействия, возникающие в процессе колебаний. Таким способом, например, удается учесть нелинейное сопротивление среды при установке пружины в узком канале, заполненном вязкой жидкостью, а также соударения витков и сухое трение в опорах. При учете указанных факторов используются методы суперпозиции решений и простой итерации.

**Ключевые слова:** цилиндрическая пружина сжатия, условия закрепления пружины; модель винтового стержня, сверточнє интегралы, соударения витков, нелинейное внешнее трение, сухое трение в опорах.

A numerical-analytical approach to accounting for nonlinear factors and asymmetry of boundary conditions is developed. For implementing the approach the linear mathematical model of oscillations of a cylindrical compression spring with symmetric conditions of fixed extreme coils taking into account a full group of longitudinal (and for the supporting coils also transverse) displacements of a section of a screw rod with 3 (or 6) degrees of freedom is used. The solutions of the equations of this model are represented in the form of integrals with Cauchy-type (for transient processes) or Fredholm (for steady-state oscillations) difference kernels. Asymmetry and nonlinearities are taken into account as small additional force effects arising in the process of oscillations. In this way, for example, it is possible to take into account the nonlinear resistance of the medium when installing the spring in a narrow channel filled with viscous liquid, as well as the impact of the coils and dry friction in the supports. When these factors are taken into account, the methods of superposition of solutions and simple iteration are used.

**Key words:** cylindrical compression spring, spring fastening conditions; model of a screw rod, convolution integrals, collisions of coils, nonlinear external friction, dry friction in supports.

**Введение и постановка задачи.** При работе цилиндрической пружины сжатия в механическом, гидромеханическом или электромеханическом устройстве источником вынужденных колебаний витков является перемещение её опор. При этом, как правило, одна из опор остаётся неподвижной, а вторая перемещается в направлении оси пружины по периодической или (на переходных режимах работы устройства) почти периодической закономерности. В некоторых устройствах движутся обе опоры; этот случай учитывается методом наложения колебаний и в отдельном рассмотрении не нуждается. В других конструкциях наряду с осевым перемещением опоры происходит её поворот на некоторый (небольшой) угол, т.е. наблюдаются продольные качания опоры. Поэтому при разработке универсального метода расчёта [1, 2] предусмотрена возможность произвольного перемещения опоры по трём координатам  $\nu$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$ , определяющим группу продольных деформаций (рис. 1).

Поперечные деформации  $\beta$ ,  $u$ ,  $w$  учитываются только в опорных витках. В пружинах, опирающихся на подогнутый торцевой виток, продольные вынужденные колебания могут рассчитываться независимо от поперечных колебаний, что делает расчёт поперечных колебаний необязательным.

Разработанный метод расчёта вынужденных колебаний пружин учитывает все известные виды трения (внутреннее, внешнее и в опорах), а также соударения рабочих и опорных витков; большинство указанных факторов являются нелинейными, и в работах [1, 2], где решение представлялось в форме интегральных операторов с разностными ядрами Коши или Фредгольма, они не рассматривались. Учёт нелинейных факторов имеет практическую ценность не для всех пружин; кроме того, при изложении теоретических основ метода авторы предпочитают двигаться в направлении от простого материала к сложному. Поэтому о действительных возможностях метода и его универсальной силе можно судить после знакомства с материалами этой статьи, а также примерами его практического применения, рассмотренными в [3].

Задача с несимметричными условиями является актуальной, например, в конструкции пружин вагонных тележек, где один из концов жёстко закреплён в опоре, а второй выполнен с опиранием на подогнутый шлифованный торец (рис. 2). Другим важным для практики примером является динамический анализ пружин, у которых движущаяся опора имеет большую податливость, чем неподвижная.

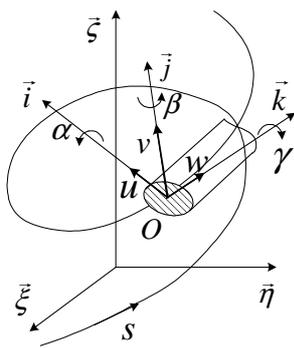


Рис. 1 – Координаты сечения.

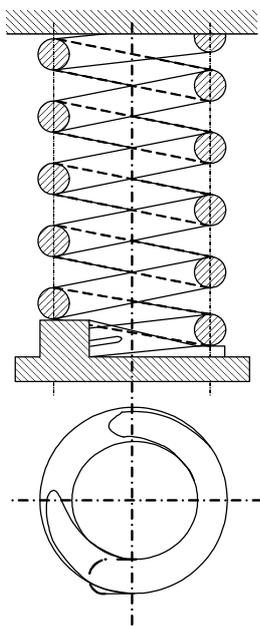


Рис. 2 – Пружина подвески вагона.



Рис. 3 – Блок-схема численно-аналитического алгоритма решения задачи.

**Численно-аналитический подход к учёту нелинейных факторов и асимметрии граничных условий.**

Общий порядок учёта нелинейных факторов при динамическом анализе пружины проиллюстрирован на рис. 3. На каждом этапе расчёта используется линейная модель колебаний однородного упругого континуума, опирающаяся на алгебраический метод [4] нахождения спектра колебаний (его результаты для конкретной пружины показаны на рис. 4) и аппроксимирующая исходную (нелинейную) модель колебаний пружины за счёт усреднения её переменных коэффициентов и/или уточнения граничных условий.

После нахождения спектра могут быть определены собственные формы и выполнены все этапы алгоритма, о которых шла речь выше. До учета трения результат расчета неустановившихся колебаний имеет вид интегралов Дюамеля:

$$\vec{x}(t, \theta) = \vec{x}h(\theta) \cdot h(t) + \int_0^t \vec{K}_x^v(t - \zeta, \theta) d\dot{h}(\zeta); \vec{q}(t, \theta) = z \cdot \vec{q}h(\theta) \cdot h(t) + \int_0^t \vec{K}_q^v(t - \zeta, \theta) d\dot{h}(\zeta),$$

причём ядра Коши вычисляются по формуле

$$\begin{pmatrix} \vec{K}_x^v(t, \theta) \\ \vec{K}_q^v(t, \theta) \end{pmatrix} = \sum_1^\infty (-\phi_k) \cdot \frac{\sin(\omega_k \cdot t)}{\omega_k} \cdot \begin{pmatrix} \vec{x}_k(\theta) \\ \vec{q}_k(\theta) \end{pmatrix}.$$

где  $\vec{x}_k(\theta), \vec{q}_k(\theta)$  – собственные формы перемещений  $\vec{x}$  и упругих сил (или моментов сил)  $\vec{q}$ , отвечающие круговой собственной частоте  $\omega_k$ ;  $t$  – время;  $\theta$  – координата поперечного сечения пружины.

Симметрия граничных условий позволяет расщеплять задачу на деформационную и вибрационную части, имеющие свои спектры (табл. 1, 2), что упрощает решение, а асимметрии приводит к значительным вычисли-

тельным проблемам. Поэтому представляется целесообразным разработать такой метод решения, который позволил бы учесть асимметрию путем несложной корректировки алгоритма.

Рассмотрим задачу расчета вынужденных колебаний пружины

$$M \cdot (\ddot{\bar{x}}) = ((\partial/\partial\theta) \cdot I - B) \cdot \bar{q} ; C \cdot \bar{q} = ((\partial/\partial\theta) \cdot I + B^T) \cdot \bar{x} ; \bar{x}(\theta_0) + G_+ \cdot \bar{q}(\theta_0) = 0 ; \bar{x}(-\theta_0) + G_- \cdot \bar{q}(-\theta_0) = \bar{x}_0(t) ,$$

где  $M, C$  – диагональные матрицы, составленные из инерционных коэффициентов и коэффициентов податливости сечения пружинной проволоки;  $I, B$  – единичная матрица и матрица связей координат;  $G_{\pm}$  – матрицы податливости опор; и предположим, что матрицы  $G_{\pm}$  не удовлетворяют условию симметрии

$$G_+ \cdot J = -J \cdot G_- , J = \text{diag}(1, -1, 1) .$$

Образует матрицу  $\bar{G}_- = -J \cdot G_+ \cdot J$ , симметричную матрицу  $G_+$ , и преобразуем граничные условия к виду

$$\bar{x}(\theta_0) + G_+ \cdot \bar{q}(\theta_0) = 0 ; \bar{x}(-\theta_0) + \bar{G}_- \cdot \bar{q}(-\theta_0) = \bar{x}_0(t) + \Delta G \cdot \bar{q}(-\theta_0) , \tag{1}$$

где матрица  $\Delta G = \bar{G}_- - G_-$ .

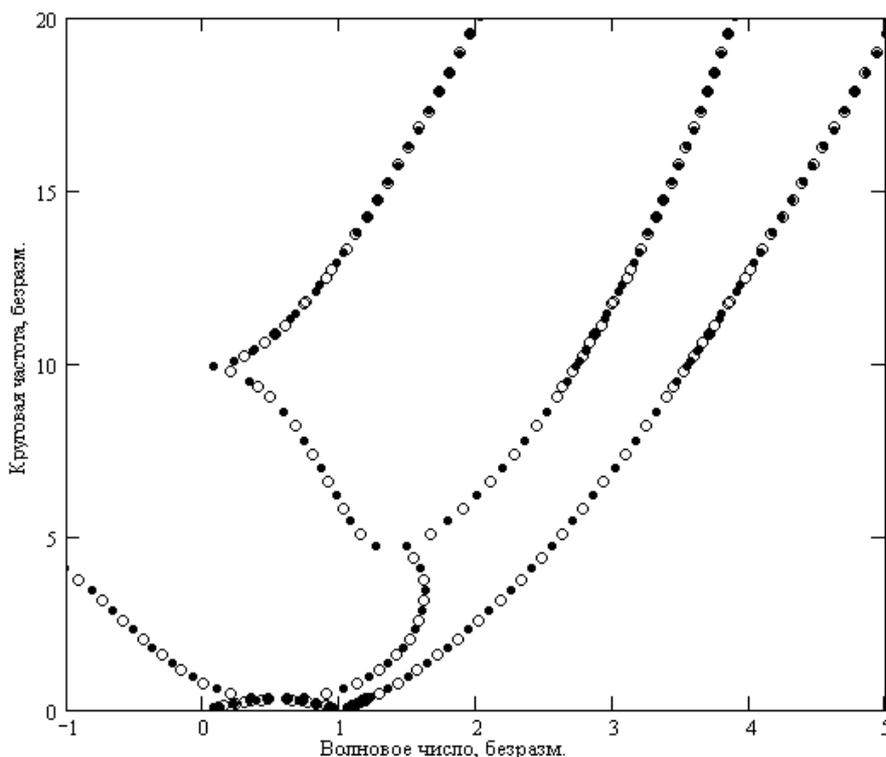


Рис.4 – Распределение собственных частот на ветвях векового уравнения для пружины с числом рабочих витков 6,5 и индексом 7 .

Частоты деформационной части спектра закрашены; для комплексно сопряженных волновых чисел по оси абсцисс отложена сумма и разность их вещественной и мнимой части.

Таблица 1 – Выполнение равенства Парсеваля при расчете реакции на мягкий удар для деформационной части спектра, %

Форма перемещения опоры	Число учитываемых гармоник							
	1	2	3	4	5	6	7	8
продольная	11,47	79,23	79,47	86,21	86,21	86,70	91,27	93,83
изгибная	88,47	89,66	92,33	92,37	92,57	92,63	97,67	99,44
крутильная	21,82	69,90	84,79	93,72	95,61	96,14	99,20	99,32

Таблица.2 – Выполнение равенства Парсеваля для вибрационной части спектра, %

Форма перемещения опоры	Число учитываемых гармоник							
	1	2	3	4	5	6	7	8
продольная	90,37	90,43	92,72	94,34	94,38	95,28	96,00	97,00
изгибная	8,38	15,00	46,73	65,28	72,35	77,43	83,12	93,97
крутильная	77,22	93,14	96,36	96,49	96,51	97,69	99,63	99,79

Будем предполагать, что матрица  $\Delta G$  является малой; в примерах, рассмотренных ниже, такое предполо-

жение вполне оправдывается. Построим итерационный алгоритм, позволяющий решить задачу с условиями (1).

На первом шаге алгоритма условия (1) заменяем следующими:

$$\bar{x}(\theta_0) + G_+ \cdot \bar{q}(\theta_0) = 0; \quad \bar{x}(-\theta_0) + \bar{G}_- \cdot \bar{q}(-\theta_0) = \bar{x}_0(t), \tag{2}$$

решаем полученную задачу с симметричными граничными условиями известным методом [4], получаем вектор обобщённых сил  $\bar{q}(-\theta_0)$  и корректируем движение опоры:

$$\bar{x}_{кор}(t) = \bar{x}_0(t) + \Delta G \cdot \bar{q}(-\theta_0). \tag{3}$$

На втором и последующих шагах условия (2) имеют вид:

$$\bar{x}(\theta_0) + G_+ \cdot \bar{q}(\theta_0) = 0; \quad \bar{x}(-\theta_0) + \bar{G}_- \cdot \bar{q}(-\theta_0) = \bar{x}_{кор}(t),$$

а для корректировки правой части используется формула (3).

Итерационный процесс выполняется до установления. На практике, если необходимая точность остаётся невыполненной за 2 – 3 шага алгоритма, от дальнейших итераций нужно отказываться и переходить к разработанному ранее общему методу нахождения спектра [4].

**Примеры влияния граничных условий на динамику пружины.** В статьях [1, 2] указывалось, что при работе дизеля динамические напряжения в пружине форсунки превышают статическую нагрузку в 3 ... 4 раза. Причина столь существенного расхождения – колебания витков пружины. В табл.3 проиллюстрировано влияние различных форм колебаний и условий закрепления пружины на уровень максимальных касательных напряжений в её витках. Расчёты выполнялись для форсуночных пружин производства *ПО "Волгадизельмаш"*, при эксплуатации которых были выявлены случаи поломок или усадок. Модель эквивалентного стержня описывает только продольные колебания витков; в рамках этой модели касательные напряжения пропорциональны сближению витков. Модель прямого бруса учитывает реальную пространственную форму пружины, а винтового бруса – ещё и моменты инерции кручения и изгиба. В рамках последней, наиболее точной, модели учитывалось также влияние длины опорных (так называемых *мёртвых*) витков и качество прилегания шлифованного торца к опорной поверхности.

Таблица 3 – Максимальные расчётные значения касательных напряжений, Мпа

Пружина дизельной форсунки	Статический расчёт		Модель эквивал. стержня	Модель прямого бруса	Модель винтового бруса				
	При рабочей деформации	При смыкании витков			Жёсткая заделка			Цилиндрическая заделка	Сферическая заделка
					Длина мёртвого опорного витка				
					0	1/4	1/3		
21-140709	380	790	630	890	920	920	930	930	960
0110.24.008	350	970	700	780	830	840	840	840	930
Г66-140707	370	1000	720	900	960	960	1000	990	1100
51М.12.101	370	1270	700	950	990	1000	1010	1020	1060

В целом данные табл. 3 свидетельствуют о том, что представленные пружины были спроектированы правильно. При соблюдении условий жёсткой заделки максимальные рабочие напряжения не превышают величину  $0,75 \cdot \sigma_g$ , что, с учетом обязательной *процедуры заневоливания*, является общепринятыми для пружин данного типа. Поэтому причины имевших место усадок и поломок пружин форсунок следует искать в недоработках технологического процесса, к которому указанный уровень напряжений предъявляет высокие требования. Попытки упростить технологию изготовления форсуночных пружин или снизить уровень максимальных касательных напряжений в их витках приводят к значительному увеличению установочных размеров и при модернизации серийно выпускаемых образцов не приемлемы. Вместе с тем, опыт отечественных и зарубежных предприятий, выпускающих топливную аппаратуру, позволяет выработать конкретные рекомендации по параметрам технологического процесса [5] и обеспечить необходимые свойства пружин при рабочих напряжениях  $\tau_{max} = 0,75 \cdot \sigma_g$ .

**Формула для определения коэффициента внешнего трения.** Как отмечено выше, для цилиндрической пружины разработаны современные динамические модели, анализирующие не только продольные, но и крутильные, радиальные, тангенциальные и др. формы колебания витков. Для уравнений этих моделей удалось получить т.н. численно-аналитические общие решения, позволяющие за минимальное время определять основные динамические характеристики пружины при конкретном законе её деформирования. Опыт работы с этими моделями показал, что они могут быть полезны при проведении прочностного анализа проектируемых пружин ди-

зельной топливной аппаратуры (особенно — для форсуночных), поскольку учёт крутильных колебаний существенно повышает уровень максимальных касательных напряжений. Вместе с тем, влияние этих колебаний на силу пружины клапана и форсунки невелико, и при выполнении гидродинамического расчёта целесообразно ограничиться моделью эквивалентного стержня.

Внутреннее трение нужно учитывать при динамическом анализе всех пружин, а внешнее – тех, которые погружены в жидкость, оказывающую существенное сопротивление перемещению витков. Заметим, что если пружина погружена в жидкость с высокой вязкостью, то её динамический анализ становится не актуальным. Для пружины, помещённой в свободный резервуар с маловязкой жидкостью (например, бензином или дизельным топливом), наблюдается другая крайность – учёт внешнего трения не приводит к заметному уточнению результатов расчёта. Исключение из этого правила составляет анализ резонансных колебаний пружины, а также её установка в тесном канале (рис. 5), что приводит к значительному увеличению лобового сопротивления, возникающего при движении витка. Сила лобового сопротивления пропорциональна квадрату скорости витка, поэтому внешнее трение нелинейно. Однако, как и для любого другого слабого фактора, непрерывно зависящего от характеристик движения, влияние внешнего трения удаётся линеаризовать. Именно в таком, линеаризованном, виде оно рассматривалось в [6] и многих др. работах по динамике пружин.

При учете внешнего трения о среду в уравнении колебаний пружины [2] появляется слагаемое, пропорциональное скорости:

$$\partial^2 \bar{x} / \partial t^2 + \mu \cdot \partial \bar{x} / \partial t = L_{\theta}[\bar{x}], \quad (1)$$

где  $\bar{x}$  – вектор обобщённых координат сечения (рис. 1), составленный из продольного перемещения  $x_1 \sim v$  и углов изгиба и кручения  $x_2 \sim \alpha$ ,  $x_3 \sim \gamma$ ;  $L_{\theta}$  – линейный дифференциальный оператор второго порядка по координате сечения  $\theta$ , отвечающий силам упругости и внутреннего трения.

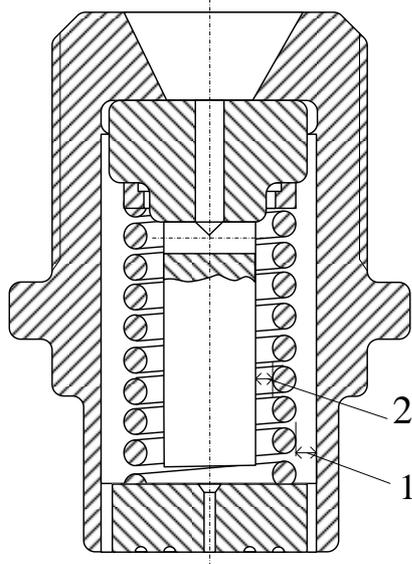


Рис. 5 – Установка пружины в клапане топливного насоса:  
1, 2 – радиальные зазоры

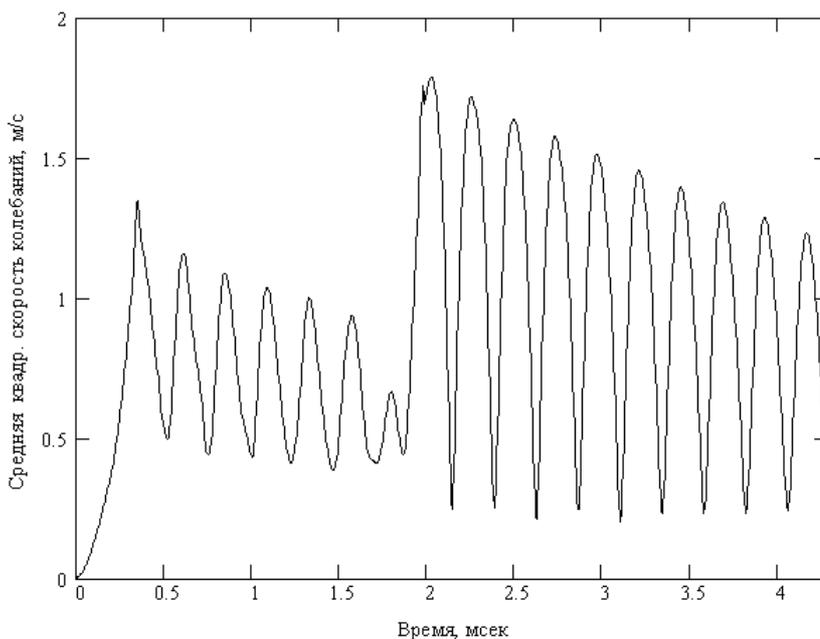


Рис. 6 – Изменение средней скорости витков при колебаниях пружины клапана.

Значение коэффициента внешнего трения  $\mu$  можно найти линеаризацией формулы для силы сопротивления движению обтекаемого тела из [7]:

$$\mu = k c \rho_{cp} V_{cp} / (\pi \rho D_{cp}), \quad k \approx 0.8;$$

где  $c$ ,  $D_{cp}$  – индекс и средний диаметр пружины;  $\rho_{cp}$ ,  $\rho$  – плотности окружающей среды и материала пружины, соответственно;  $V_{cp}$  – средняя квадратичная скорость движения витков относительно среды.

На рис. 6 приведен график изменения средней (по длине пружины) скорости  $V_{cp}$ , полученный для пружины клапана дизельной топливной аппаратуры. Характерное значение скорости составляет 1 м/с, и это значение  $V_{cp}$  использовано в расчёте после корректировки соответствующих ядер (рис. 2).

Заметим, что если пружина установлена в тесном канале с неподвижными стенками, то величина  $V_{cp}$  суще-

ственно превосходит скорость  $V_a$  движения витков, и её величина может быть вычислена по формуле:

$$V_{cp} = 0.5 \cdot V_a \cdot d \cdot (\Delta d_1^{-1} + \Delta d_2^{-1}),$$

где  $d$  – диаметр проволоки;  $\Delta d_1, \Delta d_2$  – диаметральные зазоры между пружиной и стенками канала (рис. 3).

Решение уравнения (1) получено в [2] в форме интегралов Дюамеля с ядрами Коши и Фредгольма. В частности, для неустановившихся колебаний пружины получена зависимость

$$\vec{q}(t, \theta) = h_0(t) \cdot \vec{q}_0(\theta) + \int_0^t \dot{h}_0(\tau) d(\vec{z}_{кол}(t - \tau, \theta)),$$

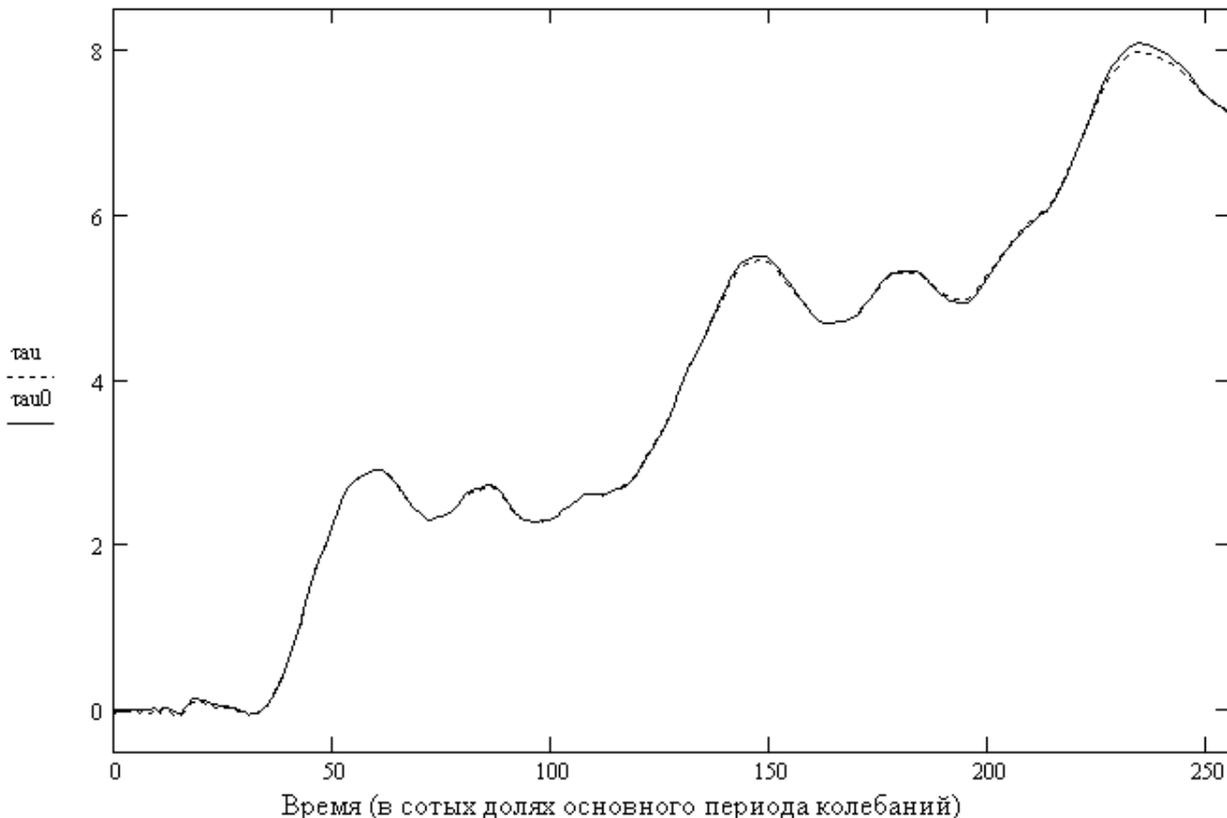


Рис. 7 – Влияние внешнего трения на касательное напряжение в витках пружины (без учета трения – сплошная линия, с учетом трения – пунктир).

где  $\vec{q}$  – вектор обобщённых сил, компоненты которого пропорциональны перерезывающей силе, моментам изгиба и кручения;  $\vec{z}_{кол}(t, \theta)$  – ядро Коши.

Влияние внешнего трения на динамические характеристики пружины дизельной форсунки проиллюстрировано на рис. 5. Моделируемая пружина установлена в тесном канале с зазором  $\Delta d_1 \approx 0.05 \cdot d$ , что привело к высокой скорости обтекания пружины дизельным топливом  $V_{cp} \approx 20$  м/с и соответствующему декременту затухания колебаний  $d_1 = 0.08$ . Тем не менее, корректировка ядра оказалась незначительной, что подтверждает вывод о том, что рассмотренный нелинейный фактор является слабым.

**Учёт соударения витков.** Для пружины, опирающейся на подогнутый торцевой виток, характерно неравномерное изменение межвиткового зазора (рис. 8), что связано с особенностями её изготовления (рис. 9) [5]. Поэтому для таких пружин место соударения витков известно – у опор. При этом удар происходит сразу на отрезке витка, составляющем 0.6 ... 0.7 его длины.

На практике количество ударов может быть достаточно большим. Разработанный подход позволяет учесть все соударения; при этом каждый удар обрабатывается независимо от других.

Импульс скорости, сообщаемой движущемуся витку, имеет треугольную форму (рис. 10). Импульс раскладывается в *обобщённый ряд Фурье* по собственным формам пружины  $\vec{x}_k$ , что даёт полный набор начальных условий для расчёта свободного дополнительного колебания, которое накладывается на вынужденное колебание пружины, вызванное движением опоры.

Расчёт дополнительных перемещений и сил выполняется по формулам:

$$\vec{x}_{don}(\theta, t) = \sum \vec{x}_k(\theta) \cdot hud_k(t); \quad \vec{q}_{don}(\theta, t) = \sum \vec{q}_k(\theta) \cdot hud_k(t),$$

где функции  $hud_k(t)$  удовлетворяют уравнению затухающих колебаний элементарного осциллятора

$$\ddot{h}_k + (\mu + f \cdot \omega_1 \cdot \omega_k) \dot{h}_k + \omega_k^2 h_k = 0.$$

При моделировании установившихся колебаний интегралами с ядрами Фредгольма учитывается, что в силу периодичности каждый удар влияет не только на последующие, но и на «предыдущие» соударения. Для этого выполняется последовательный расчёт нескольких циклов деформации (рис. 3); до момента установления колебаний (при допустимой погрешности).

При расчёте пружины с малым межвитковым зазором наблюдаются серии слабых множественных ударов, которыми в рамках принятой модели фактически описывается неупругий удар. Серии таких ударов попеременно происходят у обоих концов и приводят к значительному увеличению общего уровня вибрации пружины. Графики рис. 11 свидетельствуют о правильной локализации ударов: близкие к этим отрезкам сечения прекращают своё сближение с опорой, и расширение зоны соударения не происходит.

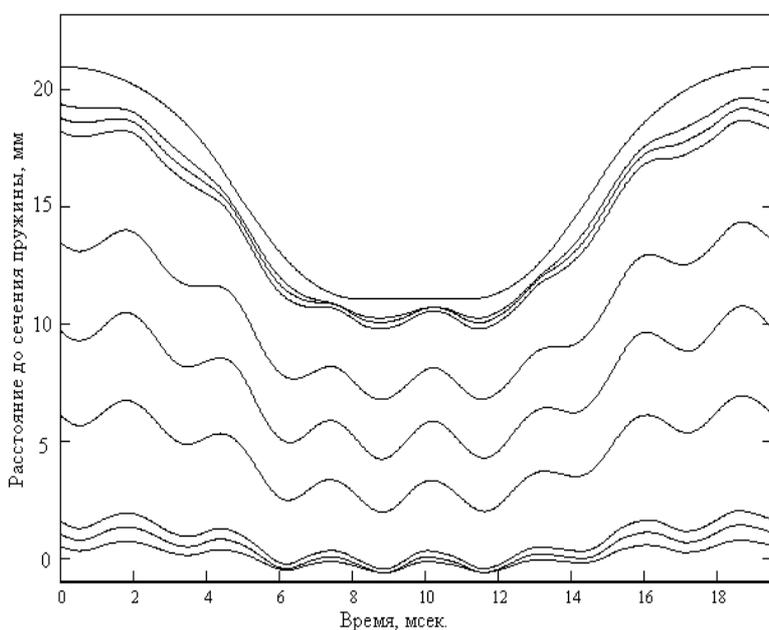


Рис. 8 – Изменение межвиткового зазора пружины плунжера топливного насоса на номинальном режиме работы дизеля СМД-31.

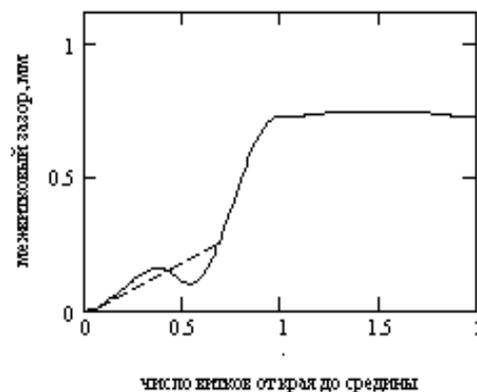


Рис. 9 – Начальный межвитковый зазор (пунктир – после заневольвания).

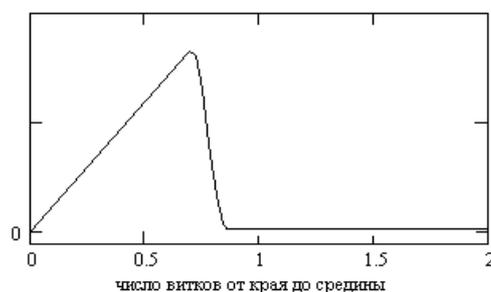


Рис. 10 – Форма дополнительного импульса скорости.

**Уточнение граничных условий с учётом трения в опорах.** В работе [8] в результате проведения экспериментального исследования стальной цилиндрической пружины сжатия, опирающейся на подогнутый торцевой виток, было выявлено существенное влияние сухого трения в опорах на демпфирование её колебаний. Декремент затухания колебаний, связанный с этим видом трения, зависит от амплитуды колебаний, и при высокой амплитуде колебаний исследуемой форсуночной пружины он составил 0.03 ... 0.04, что примерно соответствовало вкладу внутреннего гистерезисного трения. Ранее на необходимость учёта сухого трения в опорах пружины указывалось в монографии [9].

При моделировании граничных условий для пружин такого типа в [10] получено матричное соотношение

$$\begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{q} \\ \vec{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где вектор  $\vec{y}$  объединяет группу координат, отвечающую поперечным колебаниям пружины ( $y_1$  – угол качания  $\beta$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  – радиальное  $u$  и тангенциальное  $w$  перемещения сечения);  $A = [A_{ij}]$  – матрица податливости с квадратными блоками  $A_{ij}$ ;  $i, j = 1, 2$ ; вектор обобщённых сил  $\vec{f}$  отвечает группе поперечных колебаний.

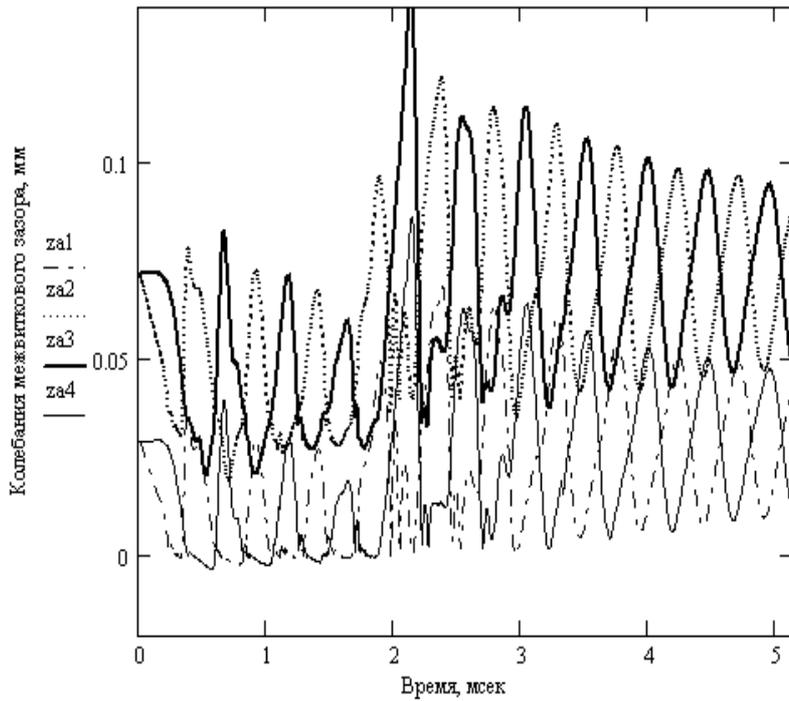


Рис. 11 – Изменение зазоров вблизи опорных витков при соударениях.

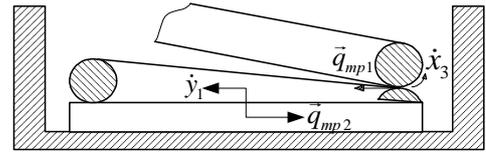


Рис. 12 – Силы и моменты сил, действующие в опорном витке.

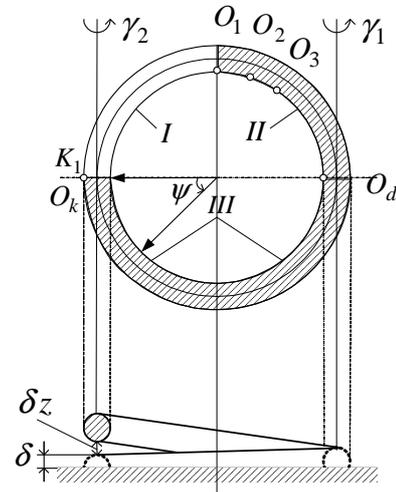


Рис. 13 – Схема опорного витка: I – висящая, II – падающая, III – лежащая части; шлифованная часть заштрихована.

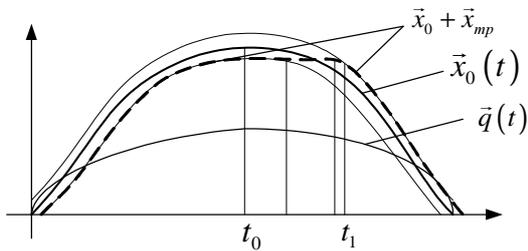


Рис. 14 – График перемещения без учета и с учетом силы трения.

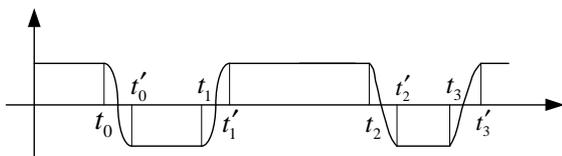


Рис. 15 – График силы трения.

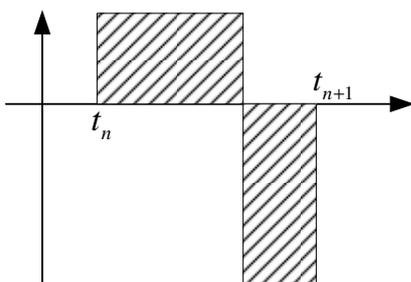


Рис. 16 – График ускорения.

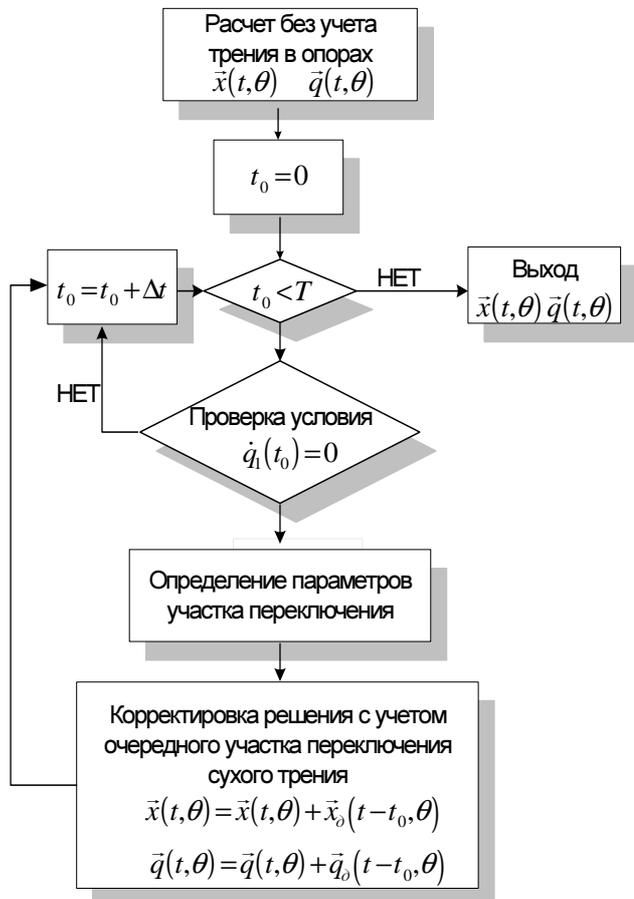


Рис. 17 – Алгоритм учета сухого трения в опорах.

В [10] было принято, что в точках контакта движущегося и опорного витка имеет место качение цилиндри-

ческих поверхностей, а опорная тарелка (или шайба) пружины перемещается в плоскости, перпендикулярной оси пружины, без сопротивления. Ясно, что такие допущения идеализируют реальную картину, и поэтому соответствующее граничное условие

$$\bar{x} + A_{11} \cdot \bar{q} = \bar{0} \quad (3)$$

в [1] названо *идеальным*. В действительности при существенной амплитуде колебаний вместо качения поверхностей наблюдается скольжение, что требует учёта трения (рис. 12). Сила трения  $q_{mp1}$  создаёт одинаковые моменты по кручению и изгибу. В результате условие (3) приобретает иной вид:

$$\bar{x} + A_{11} \cdot (\bar{q} - \bar{q}_{mp}) = \bar{0}, \quad (4)$$

где

$$\bar{q}_{mp} = \chi \cdot (N_1 / c) \cdot \text{sign}(\dot{q}_1) \cdot (0 \ 1 \ 1)^T; \quad (5)$$

$N_1 \approx 0.5 q_1$  – прижимающая сила;  $\chi$  – коэффициент сухого трения;  $c$  – индекс пружины.

При выводе формулы (5) было принято, что изменение знака углового ускорения  $\dot{\omega}$  совпадает с моментом достижения экстремума перерезывающей силы  $\dot{q}_1$ , действующей в крайнем рабочем сечении пружины.

Кроме того, между тарелкой пружины и корпусом действует трение, направление которого противоположно движению опоры. Результаты, полученные в [10], позволяют определить направление перемещения опоры. Используя матричное уравнение при значении  $\bar{f} \approx \bar{0}$ , получаем

$$\bar{y} \approx -A_{21} \cdot \bar{q}.$$

Анализ этого соотношения показывает, что перерезывающая сила не оказывает влияния на поперечную деформацию; кроме того  $y_3 \approx 0$ .

Следовательно, опора перемещается в радиальном направлении и поворачивается вокруг оси, проходящей через точку контакта  $K_1$  (рис. 13). Среднее плечо силы трения для остальных контактных точек приближённо равно радиусу витка пружины  $R$ , а суммарная реакция –

$$N_2 \approx 0.5 \cdot q_1$$

В результате получена приближённая формула для соответствующей силы и момента сил трения:

$$\bar{f}_{mp} = f \cdot q_1 \cdot \text{sign}(\dot{q}_1) (0,5 \ 1 \ 0)^T. \quad (6)$$

Подстановка (6) вместо вектора  $\bar{f}$  в уравнение

$$\bar{x} + A_{11} \cdot \bar{q} + A_{12} \cdot \bar{f} = \bar{0}$$

приводит к новому граничному условию:

$$\bar{x} + A_{11} \cdot \bar{q} = -A_{12} \cdot f \cdot q_1 \cdot \text{sign}(\dot{q}_1) \cdot (0,5 \ 1 \ 0)^T. \quad (7)$$

Объединяя результаты (4) и (7), получаем:

$$\bar{x} + A_{11} \cdot \bar{q} = \bar{x}_{mp}(t), \quad (8)$$

где

$$\bar{x}_{mp} = f \cdot q_1 \cdot \text{sign}(\dot{q}_1) \cdot \left[ c^{-1} \cdot A_{11} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - A_{12} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (9)$$

**Порядок учёта трения.** Таким образом, влияние сухого трения удалось свести к учёту дополнительного (условного) движения опоры. Это движение включает в себя перемещение по трём координатам и его «направление» в пространстве продольных координат  $x_1, x_2, x_3$  определяется вектором

$$\bar{v} = c^{-1} \cdot A_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - A_{12} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

При скольжении поверхностей величина  $\chi$  постоянна ( $\chi = \chi_{mp}$ ), величина  $q_1 \approx const$ , поэтому  $\bar{x}_{mp} \approx const$ . В результате график изменения  $\bar{x}$  после учета трения начинает "отставать" от прежнего графика  $\bar{x}_0$  (без учета трения), причем он отстает на одинаковую величину, но в разные стороны (рис. 14).

График  $\bar{x}_{mp}(t)$  имеет, в основном, вид кусочно-постоянной линии, отдельные "полочки" которой соедине-

ны переходными участками (рис. 15).

Заметим, что на переходных участках  $(t_n, t'_n)$  коэффициент трения  $f < f_{mp}$  и сила трения определяется условием отсутствия скольжения трущихся поверхностей, то есть перемещение практически постоянно. Кроме того, длина этих участков, как правило, не велика, и поэтому условие  $\ddot{x} \approx const$  эквивалентно такому:

$$\ddot{x}_{mp}(t) = A_{11} \cdot \ddot{q}_{mp}(t_n) = const, \tag{11}$$

где в момент времени  $t_n$ :

$$q_1(t_n) = 0 \text{ и } \dot{x}_{mp}(t_n) = \vec{0}.$$

Условие (11) выполняется на большей части переходного участка, но в конце этого участка знак ускорения меняется на противоположный (рис. 16).

Амплитуды ускорений выбираются так, что к концу переходного участка производная  $\dot{x}_{mp}(t'_n) = \vec{0}$ .

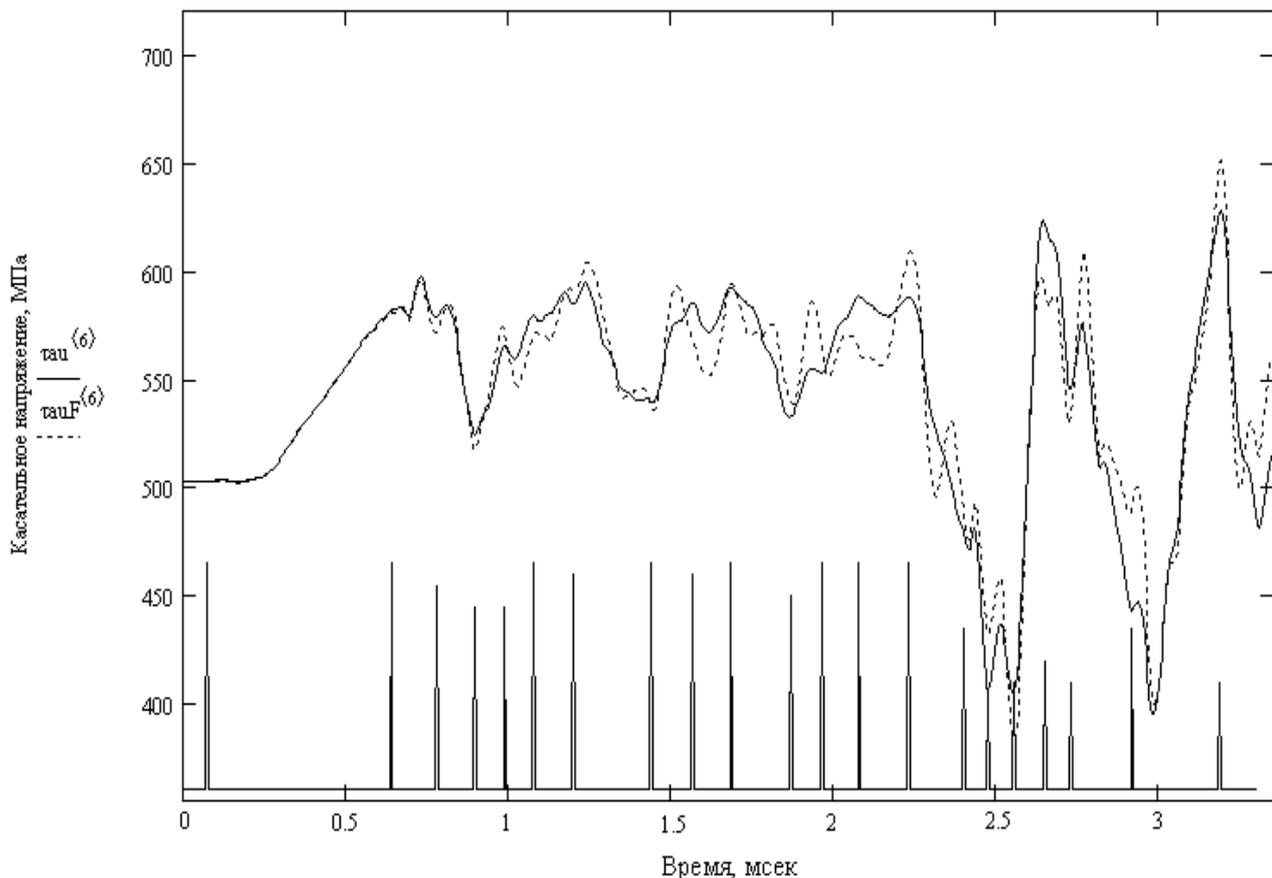


Рис. 18 – Влияние сухого трения на расчетные касательные напряжения у неподвижной опоры пружины форсунки дизеля ЯМЗ-238 (столбиками отмечены моменты переключения силы трения).

Алгоритм решения задачи проиллюстрирован на рис. 14, где дополнительные перемещения и силы находятся по формулам:

$$\vec{x}_0(t, \theta) = x_{mp}(t) \cdot \vec{x}h_{mp}(\theta) + \ddot{x}_{mp}(t) \cdot \vec{x}w_{mp}(\theta) + \int_0^t \vec{K}_{x_{mp}}^w(t - \tau, \theta) d\ddot{x}_{mp}(\tau);$$

$$\vec{q}_0(t, \theta) = z \cdot x_{mp}(t) \cdot \vec{q}h_{mp}(\theta) + \frac{m}{3} \cdot \ddot{x}_{mp}(t) \cdot \vec{q}w_{mp}(\theta) + \int_0^t \vec{K}_{q_{mp}}^w(t - \tau, \theta) d\ddot{x}_{mp}(\tau); \quad x_{mp} = f \cdot q_1 \cdot \text{sign}(\dot{q}_1),$$

а ядра статических, квазистатических и динамических составляющих, используемые в этих формулах, получают в результате взвешенного суммирования ядер, отвечающих отдельным видам движения опоры:

$$\vec{x}h_{mp} = (\vec{x}_1h_{mp} \quad \vec{x}_2h_{mp} \quad \vec{x}_3h_{mp}) \cdot \vec{v}, \quad \vec{q}h_{mp} = (\vec{q}_1h_{mp} \quad \vec{q}_2h_{mp} \quad \vec{q}_3h_{mp}) \cdot \vec{v}, \text{ и т.д.}$$

Данные ядра, как и все другие ядра разработанного метода, вычисляются в начале работы программы, а используются многократно. Кроме того, при расчёте установившихся колебаний моделирование одного цикла деформации также приходится выполнять многократно:

$$\vec{x}h_{mp} = (\vec{x}_1h_{mp} \quad \vec{x}_2h_{mp} \quad \vec{x}_3h_{mp}) \cdot \vec{v}, \quad \vec{q}h_{mp} = (\vec{q}_1h_{mp} \quad \vec{q}_2h_{mp} \quad \vec{q}_3h_{mp}) \cdot \vec{v}, \text{ и т.д.}$$

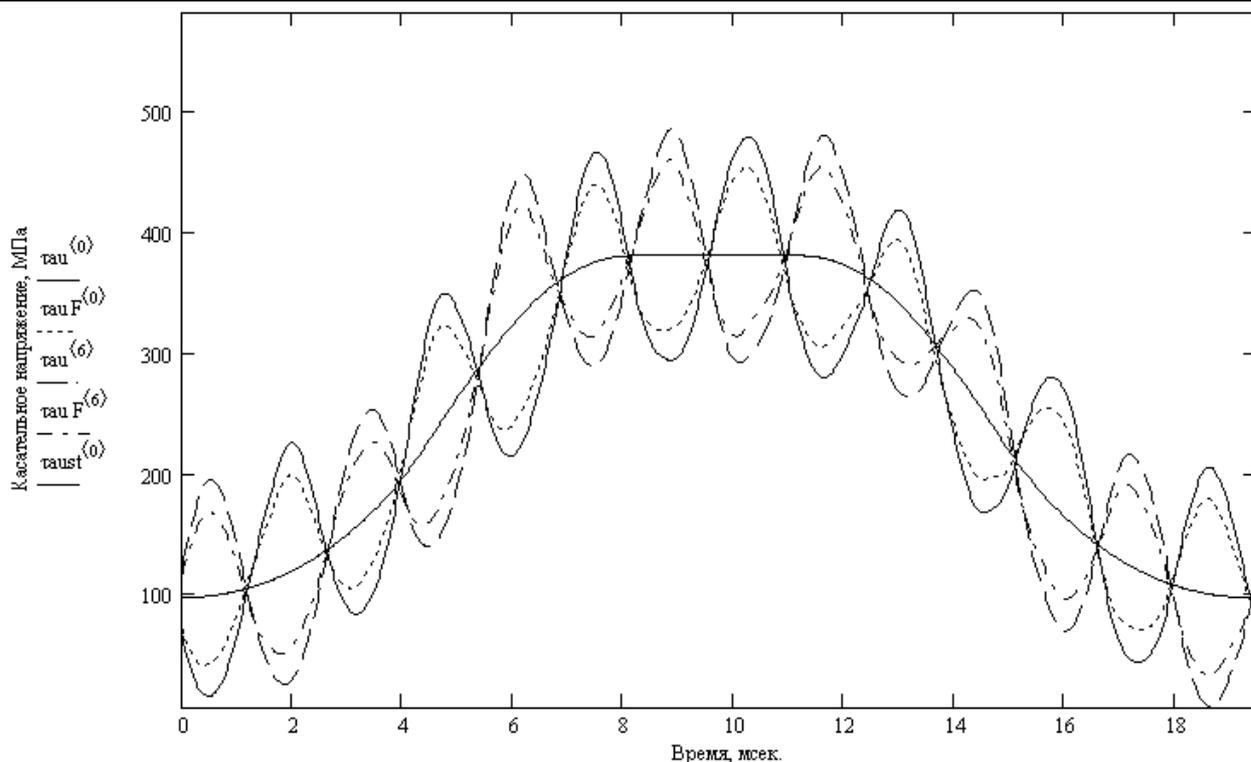


Рис. 19 – Влияние сухого трения на касательные напряжения у подвижной опоры (индекс 6) и неподвижной опоры (индекс 0) пружины плунжера топливного насоса дизеля СМД-31. Сплошной линией показан результат квазистатического расчета.

Данные ядра, как и все другие ядра разработанного метода, вычисляются в начале работы программы, а используются многократно. Кроме того, при расчёте установившихся колебаний моделирование одного цикла деформации также приходится выполнять многократно.

Результат применения метода для расчёта пружины форсунки (установившиеся колебания) и пружины плунжера (установившиеся колебания) показаны на рис. 18, 19. Заметим, что в случае установившихся колебаний можно воспользоваться известным *методом гармонической линеаризации* сухого трения; тем более, что правомочность такого решения подтверждается формой расчетных кривых рис. 19, на которых, фактически, присутствует только лишь одна гармоника, а остальные малы. Однако указанный переход нецелесообразен, поскольку задача колебаний пружины пусть и останется линейной, но её граничные условия не будут порождать самосопряженный дифференциальный оператор [11], и мы не сможем использовать его собственные формы.

**Выводы.** Разработан численно-аналитический подход к учёту нелинейных факторов и асимметрии граничных условий при расчете установившихся и установившихся колебаний пружины.

В нем использована линейная модель связанных продольно – поперечных колебаний винтового стержня при симметричных условиях закрепления крайних витков.

Решения уравнений этой модели представлены в форме интегралов с разностными ядрами типа Коши или Фредгольма, что позволило сохранить невысокую трудоемкость метода.

Асимметрия граничных условий и/или факторы нелинейности учтены как малые дополнительные силовые воздействия, возникающие в процессе колебаний и уточняемые при использовании метода простой итерации.

Рассмотрены примеры практической реализации такого подхода для учета нелинейное сопротивление среды при установке пружины в узком канале, заполненном вязкой жидкостью, а также соударений витков и сухого трение в опорах, которые доказали его эффективность при решении указанных задач.

#### Список литературы

1. Григорьев А. Л., Деряченко А. И. Методика расчёта неустановившихся колебаний в цилиндрической пружине сжатия // Вісник НТУ «ХП». – Харків, 2005. – № 12. – С. 119 – 128.
2. Григорьев А. Л., Деряченко А. И. Численно-аналитический метод динамического анализа установившихся колебаний пружины // Вісник НТУ «ХП». – Харків, 2005. – № 22. – С. 149 – 160.
3. Григорьев А. Л., Вештак И. А. Проектирование пружин, испытывающих динамические нагрузки // Вестник Харьковского государственного политехнического университета. – Харьков: ХГПУ, 1999. – Вып. 65. – С. 122 – 128.
4. Григорьев А. Л., Деряченко А. И. Алгебраический метод последовательной локализации спектра и расчета частот свободных колебаний винтового цилиндрического стержня // Вісник НТУ «ХП» Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХП», 2014. – № 39 (1082). – С. 45 – 70.
5. Григорьев А. Л., Вештак И. А. Методика определения параметров заневоливания пружин дизельных форсунок // Високі технології в машинобудуванні : Зб. наук. праць. – Харків : ХДПУ, 1999. – С. 93 – 96.
6. Корчемный Л. В. Механизмы газораспределения автомобильного двигателя. – М. : Машиностроение, 1981 – 211 с.

7. Кухлинг Х. Справочник по физике. – М. : Наука, 1982. – 419 с.
8. Григорьев А. Л., Король С. А., Дерієнко А. И. Экспериментальное и расчётное исследование колебаний витков пружины дизельной форсунки // Вісник НТУ «ХПІ». – Харків, 2005. – № 37. – С. 159 – 168.
9. Хвингия М. В. Вибрация пружин. – М. : Машиностроение, 1969 – 287 с.
10. Григорьев А. Л., Дерієнко А. И. Моделирование граничных условий при анализе колебаний пружины со шлифованным торцом // Вісник КДПУ. – Кременчук, 2005. – Вып. № 1 (30). – С. 45 – 52.
11. Наймарк А. М. Линейные дифференциальные операторы. – М. : Наука, 1969. – 528 с.

## References (transliterated)

1. Grigor'ev A. L., Deriyenko A. I. Metodika rascheta neustanovivshikhnya kolebaniy v tsilindricheskoy pruzhine szhatiya [Method of computing transient oscillations of a cylindrical compression spring]. *Visnyk NTU «KhPI»* [Buletting of NTU "KhPI"]. Kharkiv, 2005, no. 12, pp. 119–128.
2. Grigor'ev A. L., Deriyenko A. I. Chislenno-analiticheskiy metod dinamicheskogo analiza ustanovivshikhnya kolebaniy pruzhyny [Numerical-analytical method for dynamical analysis of spring steady-state oscillations]. *Visnyk NTU «KhPI»* [Buletting of NTU "KhPI"]. Kharkiv, 2005, no. 22, pp. 149–160.
3. Grigor'ev A. L., Veshtak I. A. Proektirovaniye pruzhin, ispytyvayushchikh dinamicheskiye nagruzki [Designing springs under dynamical loads]. *Vestnik Khar'kovskogo gosudarstvennogo politekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of the Kharkov State Polytechnic University]. Kharkov, KhGPU Publ., 1999, no. 65, pp. 122–128.
4. Grigor'ev A. L., Deriyenko A. I. Algebraicheskiy metod posledovatel'noy lokatsii spectra i rascheta chastot svobodnykh kolebaniy vintovogo tsilindricheskogo sterzhnya [Algebraic method for sequential localization of spectrum and computing frequencies of free oscillations of cylindrical helical spring]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI», 2014, no. 39 (1082), pp. 45–70.
5. Grigor'ev A. L., Veshtak I. A. Metodika opredeleniya parametrov zanevolivaniya pryzhin dizel'nykh forsunok [Method for determining diesel injector spring hardening parameters]. *Vysoki tekhnologiyi v mashinobuduvanni : Zb. nauk. prats'* [High tech in mechanical engineering: collected scientific works]. Kharkov, KhDPU Publ., 1999, pp. 96–96.
6. Korchemnyy L. V. *Mekhanizmy gazoraspredeleniya avtomobil'nogo dvigatelya* [Automobile engine gas distribution mechanism]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1981. 211 p.
7. Kuhlning Kh. *Spravochnik po fizike* [Handbook in Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 419 p.
8. Grigor'ev A. L., Korol' S. A., Deriyenko A. I. Ekspeimental'noye i raschetnoye issledovaniye kolebaniy vitkov pruzhiny dizel'noy forsunki [Experimental and numerical study of diesel injector spring coil oscillations]. *Visnyk NTU «KhPI»* [Bulletin of NTU "KhPI"]. Kharkiv, 2005, no. 37, pp. 159–168.
9. Khvingiya M. V. *Vibratsiya pruzhin* [Spring vibration]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1969. 287 p.
10. Grigor'ev A. L., Deriyenko A. I. Modelirovaniye granichnykh usloviy pri analize kolebaniy pruzhiny so shlifovanntm tortsom [Modeling boundary conditions when analyzing oscillations of spring with polished end]. *Visnyk KDPU* [Buletting of KSPU]. Kremenychuk, 2005, no. 1 (30), pp. 45–52.
11. Naymark A. M. *Lineynyye differentsial'nyye operatory* [Linear differential operators]. Moscow, Nauka Publ., 1969, 528 p.

*Поступила (received) 27.10.2017*

## Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

**Розрахунок вимушених коливань пружини при асиметрії крайових умов та врахуванні факторів нелінійності / О. Л. Григор'єв, А. І. Дерієнко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 39 – 50. Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2222-0631.**

**Расчёт вынужденных колебаний пружины при асимметрии граничных условий и учете факторов нелинейности / А. Л. Григорьев, А. И. Дерієнко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 30 (1252). – С. 39 – 50. Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2222-0631.**

**Calculation of forced oscillations of a spring with asymmetric boundary conditions taking into account the nonlinearity factors / A. L. Grigoriev, A. I. Deriyenko // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv : NTU «KhPI», 2017. – № 30 (1252). – pp. 39 – 50. Bibliog.: 11 titles. – ISSN 2222-0631.**

## Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Григор'єв Олександр Львович** – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

**Григорьев Александр Львович** – доктор технических наук, профессор, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

**Grigoriev Alexander L'vovich** – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (057) 707-60-35; e-mail: kpi.mmtt@gmail.com.

**Дерієнко Андрій Іванович** – кандидат технічних наук, доцент, Кременчуцький національний університет ім. Михайла Остроградського, м. Кременчук; тел.: (053) 663-00-50; e-mail: andrey.deriyenko@gmail.com.

**Дерієнко Андрей Иванович** – кандидат технических наук, доцент, Кременчугский национальный университет им. Михаила Остроградского, г. Кременчуг; тел.: (053) 663-00-50; e-mail: andrey.deriyenko@gmail.com.

**Deriyenko Andriy Ivanovich** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Kremenchuk Mychailo Ostrohradskiy National University, Kremenchuk, tel.: (053) 663-00-50; e-mail: andrey.deriyenko@gmail.com.