

## УЗЛОВЫЕ ЛИНИИ ЗАЦЕПЛЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЧЕРВЯЧНЫХ ПЕРЕДАЧАХ

Уточнення умов існування вузлових ліній зацеплення в циліндричних черв'ячних передачах із черв'яком, профіль витків якого обкреслений довільною кривою в осьовому перерізі.

The conditions of existence of nodal lines of a linkage in cylindrical worm's transfers with a worm are updated, the structure of which coils is outlined by any curve in an axial cut.

Червячные передачи с цилиндрическим червяком имеют широкое распространение в приводах современных машин. В зацеплении червячной пары возможно появление узловых линий зацепления [1], что создает неблагоприятные условия контакта рабочих поверхностей [1,2]. Исключение этих линий из области рабочего зацепления или обеспечение их благоприятного расположения в рабочей области поверхности зацепления приводит к увеличению нагрузочной способности червячных передач. Решение этой задачи неразрывно связано с проблемой повышения технического уровня приводов машин.

Исследованию положения узловых линий в поле зацепления червячных передач посвящены работы [1,2]. Однако, полученные в этих работах результаты требуют уточнения применительно к червячным передачам с различными видами червяков, чему посвящено содержание данной работы.

Рассмотрим червячную передачу с червяком, уравнение поверхности витков которого в связанной с ним системе координат (ось  $O_1Z_1$  направлена по оси червяка) имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(\lambda) - r_w \cos \mu, \\ y_1 &= f_2(\lambda) - r_w \sin \mu, \\ z_1 &= f_2(\lambda) + P\mu, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $f_1(\lambda), f_2(\lambda)$  – произвольные функции, зависящие от параметра  $\lambda$  (в дальнейшем  $\lambda$  в обозначениях этих функций и их производных будем опускать);  $\mu$  – угол, определяющий положение сечения витков червяка относительно плоскости  $X_1O_1Z_1$ ;  $r_w$  – радиус начального цилиндра червяка;  $P$  – параметр винта.

В неподвижной системе координат (ось  $OZ$  направлена по оси червяка) с использованием (1) уравнение поверхности витков червяка запишем в виде

$$\begin{aligned} x &= f_1(\lambda) - r_w \cos \theta, \\ y &= f_2(\lambda) - r_w \sin \theta, \\ z &= f_2(\lambda) + P\mu, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\theta = \mu + \varphi_1$ ;  $\varphi_1$  – угол поворота червяка.

Используя результаты работы [1], получаем координаты орта нормали к поверхности витков червяка в неподвижной системе координат

$$\begin{aligned} l_x &= \frac{1}{n} \left[ f_1'(\lambda) - r_w \cos \theta - f_1'(\lambda) P \sin \theta \right], \\ l_y &= \frac{1}{n} \left[ f_2'(\lambda) - r_w \sin \theta + f_1'(\lambda) P \cos \theta \right], \\ l_z &= -\frac{1}{n} \cdot f_2'(\lambda), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $f_1', f_2'$  – первые производные функций  $f_1$  и  $f_2$  по  $\lambda$ ;  $n = \sqrt{f_1'(\lambda)^2 + f_2'(\lambda)^2} + f_2'(\lambda)$  –

модуль вектора нормали к поверхности витков червяка.

Положение нижних узловых линий (узловых точек) определяется из уравнений (при правом направлении витков червяка) (3) (с использованием (3)), угол скрещивания осей червяка и червячного колеса равен  $0,5\pi$

$$\begin{aligned} x &= -r_w, \\ f_2'(\lambda) - r_w \cos \theta - f_1'(\lambda) P \sin \theta &= 0, \\ -\frac{f_2'(\lambda) - r_w \cos \theta - f_1'(\lambda) P \sin \theta}{f_2'(\lambda) - r_w \sin \theta + f_1'(\lambda) P \cos \theta} &= \operatorname{ctg} \lambda_w, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\lambda_w$  – угол подъема витков червяка на начальном цилиндре.

Учитывая (2) из соотношений (4) получаем равенства для определения положения нижних узловых линий

$$\begin{aligned}
 x &= -r_w, \\
 y &= -\left(\frac{f_2'}{f_1'}\right) r_w \operatorname{ctg} \lambda_w, \\
 \frac{f_2'^2}{f_1'^2} \operatorname{ctg}^2 \lambda_w + \frac{r_w^2}{r_w^2} &= 1.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Из последнего равенства (5) следует, что узловые линии зацепления в червячной передаче отсутствуют при

$$\frac{f_2'}{f_1'} \operatorname{ctg} \lambda_w > 1, \tag{6}$$

а при  $\frac{f_2'}{f_1'} \operatorname{ctg} \lambda_w = 0$  положение единственной узловой линии определяется при  $f_1 = 0$ , и ее координаты

в торцевой плоскости червяка равны

$$\begin{aligned}
 x &= -r_w, \\
 y &= 0.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Рассмотрим червячные передачи с архимедовым и эвольвентным червяками, а так же с червяками, профили витков которых в осевом сечении очерчены дугой окружности.

**1. Червячная передача с архимедовым червяком.** Уравнение осевого сечения витков архимедова червяка запишем в виде

$$\begin{aligned}
 f_2 &= f_1 \operatorname{tg} \alpha, \\
 f_2' &= \operatorname{tg} \alpha, \\
 f_1' &= 1,
 \end{aligned} \tag{8}$$

где  $\alpha$  - угол профиля витков червяка в осевом сечении.

Из неравенства (6) в этом случае следует, что червячная передача с архимедовым червяком не имеет узловых линий зацепления при  $\lambda_w < \alpha$ . Если же  $\lambda_w > \alpha$ , червячная передача имеет узловые линии зацепления. Из последнего уравнения (5)

$$f_1 = r_w \left( 1 \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \lambda_w}} \right). \tag{9}$$

Действительно, при выполнении неравенства (6) соотношение (9) не имеет решений и узловые линии отсутствуют, а при  $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \lambda_w = 1$   $f = \pm \infty$  и из второго равенства (5)  $y = \mp \infty$ , т.е. узловые линии удалены по оси  $OY$  в бесконечность. При  $\lambda_w > \alpha$  имеется две узловые линии зацепления с координатами в торцевой плоскости червяка (с использованием (5))

$$\begin{aligned}
 x &= -r_w \\
 y &= \mp \frac{r_w \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \lambda_w}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \lambda_w}}
 \end{aligned} \tag{10}$$

**2. Червячная передача с эвольвентным червяком.** Уравнение осевого сечения витков червяка такой передачи имеет вид

$$\begin{aligned}
 f_1 &= r_w - \frac{r_o}{\cos \lambda}, \\
 f_2 &= -p \operatorname{tg} \lambda,
 \end{aligned} \tag{11}$$

где  $\lambda$  - параметр;  $r_o$  - радиус основного цилиндра червяка.

Производные функций (11) по  $\lambda$  равны

$$\begin{aligned}
 f_1' &= -r_o \frac{\sin \lambda}{\cos^2 \lambda}, \\
 f_2' &= p \operatorname{tg}^2 \lambda
 \end{aligned} \tag{12}$$

С учетом значений (11) и (12) следует, что последнее равенство (5) выполняется только при  $r_o = r_w$ .

Тогда второе равенство (5) имеет вид

$$y = r_w \operatorname{tg} \lambda, \tag{13}$$

т.е. передача не имеет узловых линий зацепления.

### 3. Червячная передача с червяком, профиль витков которого в осевом сечении очерчен дугой окружности.

#### 3.1 Червяк с вогнутым профилем витков (рис. 1).

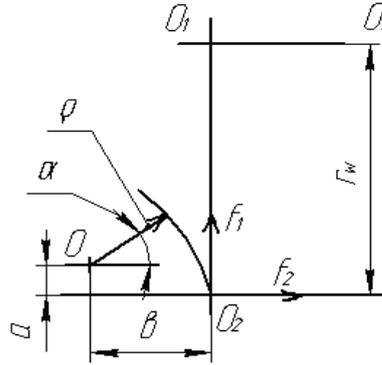


Рис. 1. Вогнутый профиль витков червяка ( $O_1O_2$  – ось червяка,  $O$  – центр окружности с радиусом  $\rho$ )

Уравнение профилирующей виток червяка в осевом сечении окружности в системе координат  $f_2O_2f_1$  имеет вид

$$\begin{aligned} f_1 &= \rho \sin \alpha + a \\ f_2 &= \rho \cos \alpha - b, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\rho$  – радиус профилирующей окружности;  $\alpha$  – текущий угол профиля витка червяка в осевом сечении;  $a, b$  – координаты центра окружности в системе координат  $f_2O_2f_1$ .

Производные функций (14) по  $\alpha$  равны

$$\begin{aligned} f_1' &= \rho \cos \alpha, \\ f_2' &= -\rho \sin \alpha. \end{aligned} \quad (15)$$

С учетом (14) и (15) третье и второе равенства (5) запишем в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \lambda_w + \frac{r_w^2}{\rho^2 \sin^2 \alpha + a^2 - r_w^2} &= 1, \\ y &= \rho \sin \alpha + a - r_w \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \lambda_w. \end{aligned} \quad (16)$$

При заданных  $\rho$  и  $r_w$ , и числе витков червяка решение первого уравнения (16) зависит от «а», определяющего положение центра профилирующей окружности относительно образующей начального цилиндра червяка. Из первого соотношения (16) имеем

$$a = -\rho \sin \alpha + r_w \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \lambda_w}} \right) \quad (17)$$

Отсюда получаем, что действительные значения «а» соответствуют изменению « $\alpha$ » в пределах  $-\lambda_w < \alpha < \lambda_w$ . При этом в передаче имеется одна, две или ни одной узловых линий зацепления. Значение «а» единственной узловой линии можно найти, определяя максимум его значения. Для этого находим  $\alpha_1$  из уравнения

$$\frac{da}{d\alpha} = -\rho \cos \alpha_1 - \frac{r_w \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{ctg}^2 \lambda_w}{\rho^2 \sin^2 \alpha_1 \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_1 \operatorname{ctg}^2 \lambda_w}} = 0, \quad (18)$$

и из (17) определяем максимальное значение  $a_{max}$ . Координата единственной узловой линии определяется из второго равенства (16) при  $\alpha = \alpha_1$  и  $a = a_{max}$ . При  $a > a_{max}$  передача не имеет узловых линий, поскольку при этом первое уравнение (16) не имеет решений. При  $a < a_{max}$  первое уравнение (16) имеет два корня, и передача имеет две узловые линии зацепления.

Пример. Рассмотрим червячную передачу с параметрами:

$r_w = 4$ ;  $\rho = 4$ ;  $\operatorname{ctg} \lambda_w = 4$  (линейные размеры в долях модуля). В этом случае соотношения (17) и (18) принимают вид

$$a = -4 \sin \alpha + 4 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - 16 \operatorname{tg}^2 \alpha}} \right), \quad (19)$$

$$4 \cos \alpha_1 + \frac{64 \operatorname{tg} \alpha_1}{\cos^2 \alpha_1 \sqrt{1 - 16 \operatorname{tg}^2 \alpha_1}} = 0. \quad (20)$$

При этом  $-14,04^\circ < \alpha < 14,04^\circ$ . Значения  $a > 0$  лежат в отрицательной области значений  $\alpha$ . Обе узловые линии в этом случае имеют из второго соотношения (16) координату  $y > 0$ . Из (20) получаем  $\alpha_1 \cong -3^\circ$ , а из (19)  $a_{\max} = 0,1184$ , и единственная узловая линия имеет координату  $y = 0,8574$ . При  $a < 0$  координаты двух узловых линий зацепления имеют разные знаки. Если  $a = 0$ , то одна узловая линия соответствует значению  $\alpha = 0$  и ее координата  $y = 0$ . При  $a > a_{\max}$  передача не имеет узловых линий зацепления.

### 3.2 Червяк с выпуклым профилем витков (рис. 2).

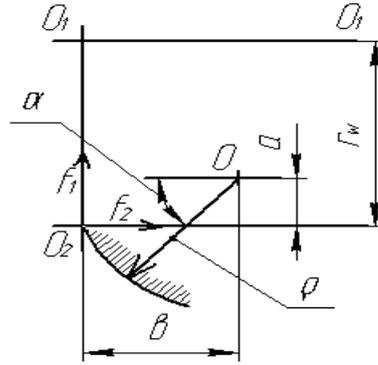


Рис. 2. Выпуклый профиль витков червяка ( $O_1O_1$  – ось червяка,  $O$  – центр окружности с радиусом  $\rho$ )

Уравнение профилирующей окружности в системе координат  $f_2O_2f_1$  представим в виде

$$\begin{aligned} f_1 &= -\rho \sin \alpha + a, \\ f_2 &= b - \rho \cos \alpha. \end{aligned} \quad (21)$$

Производные функций  $f_1$  и  $f_2$  по  $\alpha$  равны

$$\begin{aligned} f_1' &= -\rho \cos \alpha, \\ f_2' &= \rho \sin \alpha. \end{aligned} \quad (22)$$

В этом случае с учетом (5) имеем

$$\operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \lambda_w + \frac{r_w^2}{\rho \sin \alpha + a - r_w} = 1, \quad (23)$$

$$y = \rho \sin \alpha + a - r_w \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \lambda_w$$

Значения «а» и  $\alpha_1$  определяются из соотношений

$$a = \rho \sin \alpha + r_w \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \lambda_w}} \right) \quad (24)$$

$$\rho \cos \alpha_1 - \frac{r_w \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{ctg}^2 \lambda_w}{\cos^2 \alpha_1 \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_1 \operatorname{ctg}^2 \lambda_w}} = 0. \quad (25)$$

Пример. Рассмотрим червячную передачу с параметрами:

$r_w = 4$ ;  $\rho = 4$ ;  $\operatorname{ctg} \lambda_w = 4$  (линейные размеры в долях модуля). Соотношения (24), (25) будут иметь

вид

$$a = 4 \sin \alpha + 4 \left( 1 - \frac{1}{1 - 16 \operatorname{tg}^2 \alpha} \right) \quad (26)$$

$$4 \cos \alpha_1 - \frac{64 \operatorname{tg} \alpha_1}{\cos^2 \alpha_1 \sqrt{1 - 16 \operatorname{tg}^2 \alpha_1}} = 0. \quad (27)$$

При этом  $-14,04^\circ < \alpha < 14,04^\circ$ . Значения  $a > 0$  определяются положительными значениями  $\alpha$ . В этом случае обе узловые линии имеют координату  $y < 0$  (см. второе соотношение (23)). Из (27) получаем  $\alpha_1 \cong 3^\circ$ , а из (26)  $a_{\max} = 0,1184$ , а координата единственной узловой линии  $y = -0,8574$ . При  $a < 0$  координаты двух узловых линий имеют разные знаки, а при  $a > a_{\max}$  передача не имеет узловых линий зацепления.

В заключение заметим, что с учетом изложенного можно обеспечить благоприятное расположение мгновенных контактных линий витков червяка и зубьев колеса относительно вектора скорости скольжения в зацеплении.

**Выводы:** 1. Уточнены условия существования узловых линий зацепления в цилиндрических червячных передачах с червяком, профиль витков которого в осевом сечении очерчен произвольной кривой. В качестве примеров рассмотрены червячные передачи с архимедовым и эвольвентным червяками, а так же передачи с червяками, профили витков которых очерчены дугами окружности в осевом сечении.

2. Полученные результаты могут быть использованы при синтезе и анализе цилиндрических червячных передач с различными профилями витков червяка в осевом сечении.

**Список литературы:** 1. Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений. – М.: Наука, 1968. – 584 с.  
2. Кривенко И.С. Исследование червячных передач с новой геометрией зацепления //сб. Зубчатые и червячные передачи. М., Л.: Машгиз, 1959. – с. 5-73.

Поступила в редакцию 27.04.05