

# СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Пигнастый О.М. [pom7@bk.ru](mailto:pom7@bk.ru)

Моделирование технологических процессов (ТП) производственно-технических систем (ПТС) является эффективным методом их исследования [1,2]. Закономерности функционирования ТП во многом подобны тем, которые имеют место в термодинамических системах. Они столь глубоки, что провозглашены в качестве общих принципов: Ле Шателье-Самуэльсона, Карно-Хикса и др.[2]. На основании этих принципов ТП может быть представлен в виде стохастического процесса [1,2].

**1.Описание ТП на микроуровне.** Состояние ТП определим как состояние числа  $N$  предметов труда (ПрТ). Под ПрТ понимается элемент ТП, на который при воздействии технологического оборудования переносится стоимость труда, материалов и орудий труда. Состояние ПрТ описано суммой затрат  $S_j$  (грн) и затратами в единицу времени  $\mu_j$  (грн/час), перенесенными оборудованием на  $j$ -й ПрТ. Состояние ТП определено, если известны  $S_j, \mu_j$ , а в любой другой момент времени найдено из уравнений состояния ПрТ:

$$dS_j/dt = \mu_j, \quad d\mu_j/dt = f_j(t, S), \quad 0 < j < N, \quad (1)$$

где  $f_j(t, S)$  - производственная функция ТП [2]. Если количество ПрТ много больше единицы, то решить систему из  $2N$ -уравнений невозможно, что требует перехода от микро-описания ТП к макро-описанию с элементами вероятностной природы. Для этого введем функцию распределения ПрТ по микросостояниям  $\chi(t, S, \mu)$  в фазовом технологическом пространстве (ФТП):

$$\int_0^{\infty} dS \cdot \int_0^{\infty} d\mu \cdot \chi(t, S, \mu) = N. \quad (2)$$

Условие нормировки (2) представляет закон сохранения числа ПрТ в ТП.

**2.Кинетическое уравнение ТП.** Разобьем ФТП  $(S, \mu)$  на такое число ячеек, чтобы их размеры были малы и содержали внутри себя большое число ПрТ. Будем приближенно характеризовать состояние ТП числом ПрТ в ячейке. Так как, величина  $\chi \cdot dS \cdot d\mu$  представляет число ПрТ в бесконечно малой ячейке  $\Delta S \cdot \Delta \mu$ , можно по изменению фазовой координаты  $S$  и скорости  $\mu$  со временем судить об изменении

самой функции  $\chi$  [1]:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial S} \cdot \mu + \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \cdot f = J(t, S, \mu), \quad \frac{dS}{dt} = \mu, \quad \frac{d\mu}{dt} = f(t, S). \quad (3)$$

Функция  $J(t, S, \mu)$  определяется характеристиками ТП [1], стремится при  $t \rightarrow \infty$  свести распределение ПрТ в ФТП к равновесному. При перемещении по технологическому маршруту оборудование воздействует на ПрТ, изменяя его качественно и количественно. Функция  $\psi(\mu)$  определяет процесс воздействия оборудования на ПрТ, задана паспортными данными оборудования. Нормировочное

свойство функции  $\psi(\mu)$  может быть получено, представляя вероятность перехода в любое состояние равную единице:

$$\int_0^{\infty} \psi(\mu) \cdot d\mu = 1. \quad (4)$$

Число ПрТ, испытавших в единицу времени воздействие со стороны оборудования, расположенного с плотностью  $\lambda(S)$ , есть произведение потока  $\chi(t, S, \mu) \cdot \mu$  на вероятность испытать воздействие в элементе  $dS \cdot d\mu$ . Число ПрТ испытавших воздействие и принявшие значение  $\mu$  в пределах  $(\tilde{\mu}; \tilde{\mu} + d\tilde{\mu})$  есть  $\psi(\tilde{\mu}) \cdot \lambda(S) \cdot \mu \cdot \chi(t, S, \mu) \cdot d\tilde{\mu} \cdot dS \cdot d\mu$ . В элемент  $dS \cdot d\mu$  поступают ПрТ с  $dS \cdot d\tilde{\mu}$  путем обратного перехода:  $\psi(\mu) \cdot \lambda(S) \cdot \tilde{\mu} \cdot \chi(t, S, \tilde{\mu}) d\tilde{\mu} dS d\mu$ . Общее число ПрТ в элементе  $dS d\mu$  изменяется в единицу времени на  $dS d\mu J : J = \lambda(S) \int_0^{\infty} \{\psi(\mu) \tilde{\mu} \chi(t, S, \tilde{\mu}) - \psi(\tilde{\mu}) \mu \chi(t, S, \mu)\} d\tilde{\mu}. \quad (5)$

В большинстве практических случаях функция  $\psi(\mu)$  не зависит от состояния ПрТ до испытания воздействия, откуда:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial S} \cdot \mu + \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \cdot f = \lambda(S) \cdot \{\psi(\mu) \cdot [\chi]_{\perp} - \mu \cdot \chi\}. \quad (6)$$

**3. Описание ТП на макроуровне.** Нулевой  $[\chi]_0$  и первый  $[\chi]_{\perp}$  моменты функции распределения имеют производственную интерпретацию: заделы и темп движения ПрТ по технологическому маршруту. Умножив уравнение (6) на  $\mu^k$  и проинтегрировав по всему диапазону  $\mu$ , получим замкнутые уравнения балансов ТП [2]. Возможность получить замкнутую систему уравнений основана на свойствах функции  $\psi(\mu)$  и наличии малого параметра  $Kv \ll 1$  [1,2], характеризующих ТП. В нулевом приближении по параметру  $Kv \ll 1$  из уравнения балансов (7) может быть получена замкнутая много-моментная система уравнений ТП

$$\frac{\partial [\chi]_0}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_{\perp}}{\partial S} = 0; \quad \frac{\partial [\chi]_k}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_{k+1}}{\partial S} = k \cdot f \cdot [\chi]_{k-1}, \quad k = 1, 2.. \quad (7)$$

Уравнения балансов ТП (2) в одномоментном описании представляют собой уравнения системной динамики для сети материальных потоков [3].

### Литература

1. ПИГНАСТЫЙ О.М. Статистическая теория производственных систем. Х.: ХНУ, 2007г. – 388 с.
2. ФОРРЕСТЕР Д. Основы кибернетики предприятия. М.: Прогресс, 1961. – 341 с.
3. ПИГНАСТЫЙ О.М. О взаимосвязи микро- и макро-описания производственно-технических систем / О. М. Пигнастый, В.Я.Заруба // Управление большими системами: труды Международной научно-практической конференции (Москва 17-19 ноября 2009). – Москва: ИПУ РАН, 2009. - С. 255-258.