

УДК 621.165

В.П. СУББОТОВИЧ, канд. техн. наук; проф. НТУ «ХПИ», г. Харьков
А.Ю. ЮДИН, канд. техн. наук; с.н.с. НТУ «ХПИ», г. Харьков
С.А. ТЕМЧЕНКО, м.н.с. НТУ «ХПИ», г. Харьков

МЕТОД РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЯ В ОСЕРАДИАЛЬНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ КАНАЛАХ

Розглянута пряма задача про вісесиметричний потік ідеального газу у вісерадіальному кільцевому каналі. У якості початкових даних задаються розподіли вздовж вхідного або вихідного перетинів каналу масової витрати робочого тіла, повного тиску, повного питомого об'єму та тангенційної складової швидкості потоку. Задача складається з незалежних задач розрахунку течії в будь-яких окремих перетинах каналу. Ці незалежні задачі можуть розв'язуватись як послідовно, одна за одною, так і одночасно.

In this paper we consider the direct problem of axially symmetric flow of ideal gas in an annular axial-radial passage. Distributions of the mass flow rate of working fluid, total pressure, total specific volume, and tangential component of flow velocity over an inlet or outlet cross-section of the passage are taken as the initial data. The problem consists of independent flow calculation problems for any single cross-section of the passage. These independent problems can be solved both successively, one after another, and simultaneously.

КПД турбомашин во многом определяется газодинамической эффективностью их проточных частей, важными элементами которых являются переходные и выходные каналы. Информацию о газодинамической эффективности осерадиального кольцевого канала можно получить с помощью физического эксперимента или современных CFD программ. Однако экспериментальные исследования невозможны без привлечения значительных средств и времени, а CFD программы требуют верификации с физическим экспериментом. Это усложняет решение проблемы улучшения аэродинамических характеристик таких каналов. Поэтому повышение эффективности осерадиальных кольцевых каналов обуславливает необходимость не только автоматизации процесса проектирования, но и пересмотра подходов к самому процессу проектирования, используя качественно новые методы расчета течения.

Методы решения прямой, обратной и смешанной (гибридной) задач, которые были разработаны авторами для осевого кольцевого канала, приведены в работах [1–3].

В данной статье приведен метод решения прямой задачи в осерадиальном кольцевом канале в осесимметричной постановке. При этом сжимаемое рабочее тело полагается невязким, течение установившимся, адиабатическим и безотрывным, а полная энтальпия, энтропия и показатель изоэнтропы остаются постоянными вдоль линии тока. Исходная система координат – неподвижная цилиндрическая (φ, r, z) , где φ – окружное направление, r – радиальное направление, z – осевое направление, совпадающее с осью канала. Используется следующая система уравнений:

1) уравнение сохранения энергии вдоль линии тока

$$i_0^* = i + \frac{C^2}{2}; \quad (1)$$

2) уравнение изобарного процесса вдоль линии тока

$$pv^k = \text{const}; \quad (2)$$

3) уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{C_r r}{v} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{C_z r}{v} \right) = 0; \quad (3)$$

4) уравнение количества движения, записанное в скалярной форме:

$$C_r \frac{\partial C_r}{\partial r} + C_z \frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{C_u^2}{r} = -v \frac{\partial p}{\partial r}; \quad (4)$$

$$C_r \frac{\partial C_u}{\partial r} + C_z \frac{\partial C_u}{\partial z} + \frac{C_u C_r}{r} = 0; \quad (5)$$

$$C_r \frac{\partial C_z}{\partial r} + C_z \frac{\partial C_z}{\partial z} = -v \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (6)$$

Поскольку в свободном кольцевом канале поток осесимметричный, то для решения прямой задачи достаточно определить поля параметров рабочего тела в меридиональной плоскости. При этом сделаем переход от координатных направлений r и z к новым ортогональным координатным направлениям m и n , как показано на рисунке. Оси m и n повернуты на угол α , $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$, который отсчитывается от координатного направления z . Начало направлений m и n лежит на оси z , но его можно и считать в радиальном направлении.

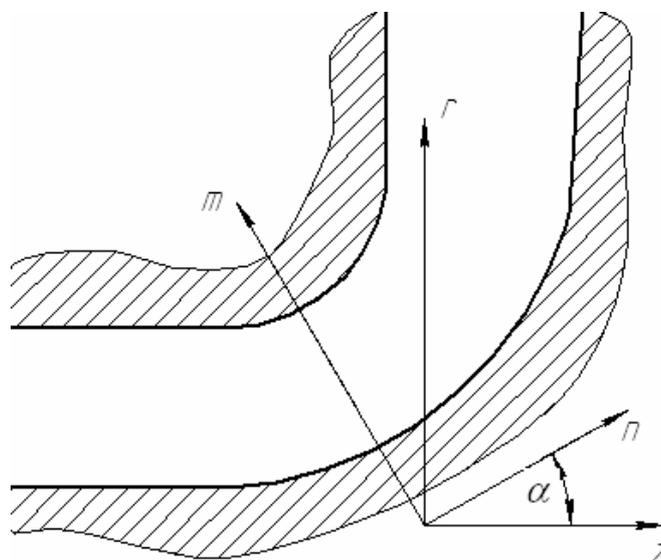


Рис. Координатные направления в меридиональной плоскости

$$\begin{aligned} r &= n \cdot \sin \alpha + m \cdot \cos \alpha; & C_z &= C_n \cdot \cos \alpha - C_m \cdot \sin \alpha; \\ z &= n \cdot \cos \alpha - m \cdot \sin \alpha; & C_r &= C_n \cdot \sin \alpha + C_m \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_r}{\partial z} &= -\frac{\partial C_r}{\partial m} \sin \alpha + \frac{\partial C_r}{\partial n} \cos \alpha; & \frac{\partial C_z}{\partial z} &= -\frac{\partial C_z}{\partial m} \sin \alpha + \frac{\partial C_z}{\partial n} \cos \alpha; \\ \frac{\partial C_r}{\partial r} &= \frac{\partial C_r}{\partial m} \cos \alpha + \frac{\partial C_r}{\partial n} \sin \alpha; & \frac{\partial C_z}{\partial r} &= \frac{\partial C_z}{\partial m} \cos \alpha + \frac{\partial C_z}{\partial n} \sin \alpha. \end{aligned}$$

Задачу расчета течения в кольцевом канале сформулируем следующим образом. Вдоль входного или выходного сечений канала заданы распределения массового расхода, полного давления, полного удельного объема и окружной составляющей скорости потока, а также координаты внутренней m_k и наружной m_p границ канала. Найти в любой точке меридиональной плоскости внутри канала параметры рабочего тела.

Обозначим проекции скорости потока на направления m и n как C_m и C_n . Введем функцию тока $\Psi = G\bar{\Psi}$, где G – массовый расход через канал, кг/с, а $\bar{\Psi} \in [0, 1]$ – безразмерная функция тока, и уравнение неразрывности (3) заменим эквивалентной системой уравнений:

$$C_n = \frac{v}{2\pi(m \cos \alpha + n \sin \alpha)} \frac{\partial \Psi}{\partial m}; \quad C_m = -\frac{v}{2\pi(m \cos \alpha + n \sin \alpha)} \frac{\partial \Psi}{\partial n}; \quad \operatorname{tg} \delta = -\frac{\partial \Psi}{\partial n} / \frac{\partial \Psi}{\partial m}. \quad (7)$$

При этом проекции уравнения количества движения на координатные направления (4) и (6) заменим проекциями уравнения количества движения на направления m и n :

$$\begin{cases} -v \frac{\partial p}{\partial n} = \left[C_r \frac{\partial C_r}{\partial r} + C_z \frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{C_u^2}{r} \right] \sin \alpha + \left[C_r \frac{\partial C_z}{\partial r} + C_z \frac{\partial C_z}{\partial z} \right] \cos \alpha; \\ -v \frac{\partial p}{\partial m} = \left[C_r \frac{\partial C_r}{\partial r} + C_z \frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{C_u^2}{r} \right] \cos \alpha - \left[C_r \frac{\partial C_z}{\partial r} + C_z \frac{\partial C_z}{\partial z} \right] \sin \alpha, \end{cases} \quad (8)$$

а уравнение (5) – его следствием, а именно: вдоль линии тока $C_u r = \text{const}$.

Из системы уравнений (8), учитывая связь (2) и исключая частную производную функции давления $\frac{\partial p}{\partial n}$, получим уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial m} = f \left(m, p, C_u, \frac{\partial \Psi}{\partial m}, \frac{\partial \Psi}{\partial n}, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial m^2}, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial n^2}, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial m \partial n} \right). \quad (9)$$

Как видно из рисунка, если изменять угол поворота α и положение точки начала координат m и n , тогда можно получить на меридиональной плоскости любое требуемое количество прямых $n = \text{const}$, пересекающих канал. Поэтому будем полагать, что задача расчета течения в канале решена, если внутри канала известны параметры рабочего тела для любой точки на линиях $n = \text{const}$.

Задачу расчета течения в отдельном сечении канала $n = n_i$ назовем частной задачей. Ее сформулируем так. Заданы вдоль входного или выходного сечений канала распределения массового расхода G , полного давления p^* , полного удельного объема v^* и окружной составляющей скорости потока. Заданы координаты внутренней $m_k = m_k(n_i)$ и наружной $m_p = m_p(n_i)$ границ канала и их производных $\frac{dm_k(n_i)}{dn}$, $\frac{dm_p(n_i)}{dn}$, $\frac{d^2 m_k(n_i)}{dn^2}$, $\frac{d^2 m_p(n_i)}{dn^2}$. Необходимо определить в любой точке сечения $n = n_i$ параметры рабочего тела.

В качестве безразмерной функции тока будем использовать функцию $\bar{\Psi}(m, n) = \frac{\bar{F}(m, n) + x(m, n) \cdot \bar{F}(m, n)}{1 + x(m, n) \cdot \bar{F}(m, n)}$, где $\bar{F}(m, n)$ – относительная площадь канала.

Функция $x(m, n)$ – некоторая непрерывная дважды дифференцируемая функция с областью изменения $-1 < x(m, n) < \infty$. Если для сечения канала $n = n_i$ ее рассматривать как функцию следующего вида $x(m, n) = f(m, a_0(n), a_1(n), \dots, a_l(n))$, то

$a_0(n_i), a_1(n_i), \dots, a_l(n_i), \frac{\partial a_0(n_i)}{\partial n}, \frac{\partial a_1(n_i)}{\partial n}, \dots, \frac{\partial a_l(n_i)}{\partial n}$ и $\frac{\partial^2 a_0(n_i)}{\partial n^2}, \frac{\partial^2 a_1(n_i)}{\partial n^2}, \dots, \frac{\partial^2 a_l(n_i)}{\partial n^2}$ – вещественные числа, и функция $\bar{\Psi}(m, n)$ – функция $3(l+1)$ вещественных переменных. Например, если $l = 0$, то независимые переменные функции $\bar{\Psi}(m, n)$ равные величинам $a_0(n_i), \frac{\partial a_0(n_i)}{\partial n}$ и $\frac{\partial^2 a_0(n_i)}{\partial n^2}$.

Рассмотрим путь решения частной задачи. Возьмем в сечении $n = n_i$ равноотстоящие точки $m_j, j = \overline{1, N}, m_1 = m_k(n_i), m_N = m_p(n_i)$. Зададим значения независимых переменных функции тока и в точках $m_j, j = \overline{1, N}$ вычислим значения безразмерной функции тока, ее частных производных до второго порядка включительно и окружные составляющие скорости потока C_{uj} .

В точке m_j с номерами $j = 1$ или $j = N$ найдем такое давление p_1 или p_N , которое удовлетворяет уравнению сохранения энергии (1):

$$\frac{2k}{k-1} \left(p_j^* v_j^* - p_j v_j^* \left(\frac{p_j^*}{p_j} \right)^{\frac{1}{k}} \right) = \left[\frac{G v_j^*}{2\pi(m_j \cos \alpha + n_i \cos \alpha)} \left(\frac{p_j^*}{p_j} \right)^{\frac{1}{k}} \right]^2 \left[\left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial m} \right)_j^2 + \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial n} \right)_j^2 \right] + C_{uj}^2. \quad (10)$$

Решение уравнения (9) для сечения $n = n_i$ – решение задачи Коши $\frac{dp}{dm} = f(m, p)$ на интервале $[m_k(n_i), m_p(n_i)]$ для граничного условия: давления p_1 или давления p_N .

Итак, для нулевого вектора X найдены величины давлений p_j во всех точках сечения канала $n = n_i$. При этом условие (10) выполняется только в одной точке: в точке $m_1 = m_k(n_i)$ или $m_N = m_p(n_i)$, т.е. выполнение уравнения сохранения энергии зависит от правильности выбора вектора X . Поэтому частную задачу сформулируем как задачу нелинейного программирования, у которой независимые переменные – компоненты вектора X , а целевая функция – количественная оценка выполнения уравнения (10) во всех точках $m_j, j = \overline{1, N}$: во всех точках массовый расход через канал, вычисленный с помощью уравнения (10) и массовый расход, заданный по условию частной задачи, не должны различаться.

Список литературы: 1. Субботович В.П. Определение параметров осесимметричного потока в торцевом сечении кольцевого канала / В.П. Субботович, С.А. Темченко // Энергетические и теплотехнические процессы и оборудование. Вестник НТУ «ХПИ»: Сб. науч. трудов. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2008. – № 6. – С. 52-55. 2. Субботович В.П. Обратная задача для осевого канала / В.П. Субботович, С.А. Темченко // Энергетические и теплотехнические процессы и оборудование. Вестник НТУ «ХПИ»: Сб. науч. трудов. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2010. – № 3. – С. 56-60. 3. Субботович В.П. О методе проектирования наружной границы выходного диффузора газовой турбины / В.П. Субботович, С.А. Темченко // Системный анализ, управления и информационные технологии. Вестник НТУ «ХПИ»: Сб. науч. трудов. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2010. – № 67. – С. 155-161.

© Субботович В.П., Юдин А.Ю., Темченко С.А., 2011
Поступила в редколлегию 11.03.11