УДК 17.27

І. С. БЄЛОВ, канд. фіз.-мат. наук, доц., НТУ «ХПІ»

ПРО ОДНУ ТЕОРЕМУ У. Х. ЯНГА

Розглянуті косинус – многочлени $Y_n(a) = a + \sum_{k=1}^{n} (1/k)\cos k\theta \geq 0$, невід'ємні при $a \geq 1$ (теорема Янга). Встановлена невід'ємність $Y_4\left(4/5\right)$, $Y_5\left(4/5\right)$, $Y_6\left(4/5\right)$.

Рассмотрены косинус – многочлены $Y_n(a) = a + \sum_{k=1}^{n} (1/k)\cos k\theta \geq 0$, неотрицательные при $a \geq 1$ (теорема Янга). Установлена неотрицательность $Y_4\left(4/5\right)$, $Y_5\left(4/5\right)$, $Y_6\left(4/5\right)$.

Cosine polynomials $Y_n(a) = a + \sum_{k=1}^{n} (1/k)\cos k\theta \geq 0$, nonnegative at $a \geq 1$ (theorem of W.H.Young) are considered. Nonnegative of $Y_4\left(4/5\right)$, $Y_5\left(4/5\right)$, $Y_6\left(4/5\right)$ is proved.

Вступ. Тригонометричний многочлен $P(\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta$ називається *невід'ємним* в $[c, d]$, якщо $P(\theta) \geq 0 \quad (c \leq \theta \leq d)$.

Теорема Фейєра – Ріса. *Для невід'ємності косинус – многочлена*

$$P(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\theta$$

у $[-\pi, \pi]$ *необхідно і достатньо існування параметрів* $P(x_0, x_1, ..., x_n)$ *таких, що*

$$a_0 = \sum_{k=0}^{n} {x_k}^2 \ ; \ a_k = \sum_{i=0}^{n-k} x_i x_{k+i} \quad (1 \leq k \leq n).$$

Існують різні причини цікавитися проблемою конструювання і вивчення властивостей невід'ємних тригонометричних многочленів. Історично одним з перших прикладів невід'ємного ряду Фур'є було ядро Пуассона. (також Гаус, ненадруковане [7])

$$1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos k\theta = \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2}, \qquad (-1 < \rho < 1). \qquad (1)$$

Нехай $\rho \to 1$ в (1). Тоді отримуємо формальний тригонометричний ряд

$$1+2\sum_{k=1}^{\infty}\cos k\theta$$

для дельта - функції Дірака $\delta(\theta)$. Тепер є класичною формула Пуассона

$$f\left(\rho e^{i\theta}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\rho e^{i\varphi}\right)\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}d\varphi$$

і в теорії узагальнених функцій строго доводиться, що досить "хороші" функції можуть бути представлені як згортки з певними ядрами.

Розглянемо властивості цих ядер. З вище сказаного інтуїтивно ясно, що вони повинні наслідувати деякі з властивостей ядра Пуассона і дельта - функції Дірака. Отже, парне позитивне ядро є будь-яка послідовність $k_n(\theta)$ парних, невід'ємних, неперервних 2π – періодичних функцій, таких що $k_n(\theta)$ нормалізовані умовою

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_n(\theta)\,d\theta=1$$

і рівномірно збігаються до нуля на будь-якій замкнутій підмножині $[-\pi,\pi]$.

Наскільки відомо, Фейєр [1] був першим, хто усвідомив викладені вище факти приблизно біля 1900 р. Він довів, що косинус - многочлени

$$F_n(\theta)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\cos k\theta$$

є невід'ємними, і встановив їх компактну форму $F_n(\theta)=\dfrac{\sin^2(n+1)\frac{\theta}{2}}{(n+1)\sin^2\frac{\theta}{2}}$.

З цього безпосередньо випливає, що $F_n(\theta)$ є ядром сумування. Відомо, що відповідна згортка

$$F_n(f,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(\theta)f(x-\theta)\,d\theta$$

співпадає з *середнім по Чезаро* ряду Фур'є функції $f(x)$,

$$F_n(f,x)=\frac{S_0(f,x)+S_1(f,x)+...+S_n(f,x)}{n+1}.$$

Тут $S_n(f,x)$ означає n - ту частинну суму ряду Фур'є функції $f(x)$.

Інша причина, з якої Фейєр цікавився невід'ємними тригонометричними многочленами – це *явище Гіббса*. Ми відсилаємо читача до класичної книги [Zygmund 4, Глава 9] і змістовного огляду E. Hewitt і R. E. Hewitt [5] для більш детальної інформації на цю тему. Цей інтерес Фейєра приводить його в 1910 р. до здогадки, що частинні суми

$$\sum_{k=1}^{n}(1/k)\sin k\theta$$

синус - ряду Фур'є функції $(\pi-\theta)/2$, продовженої як непарна функція, невід'ємні в $(0,\pi)$.

Джексон і Гронуолл довели гіпотезу Фейєра незалежно, з різницею в декілька місяців. Нині нерівність

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin k\theta, \qquad (0<\theta<\pi)$$

називається *нерівністю Фейєра - Джексона - Гронуолла*.

Продовжуючи ці дослідження У. Х. Янг в 1913 р. [6, т.2, с. 92] встановив аналогічний факт для косинус - многочленів:

$$1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cos k\theta \ge 0,\ [-\pi<\theta<\pi].$$

Постановка задачі. Зрозуміло, що в розвиненні невід'ємного косинус - многочлена

$$P(\theta)=a_0+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos k\theta$$

$a_0>0$ і при збільшенні вільного члена a_0 значення $P(\theta)$ залишається невід'ємним. Тому деякий інтерес становить знаходження найменшого значення $a_0=E(a_1,a_2,...,a_n)$, при якому $P(\theta)$ є невід'ємним. Будемо говорити, що відповідний косинус – многочлен має *нормальну форму*. Метою статті є дослідження нормальної форми многочленів Янга

$$Y_n(a_0)=a_0+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cos k\theta\,. \qquad (2)$$

Розв'язок задачі. Ми розглянемо многочлени (2) при початкових значеннях n і використовуючи відповідний процес математичного моделювання [2], побудуємо невід'ємні многочлени Янга зі значеннями $a_0<1$. Для цього використаємо теорему Фейєра - Ріса і будемо виконувати випадковий пошук у просторі параметрів $P(x_0, x_1, ..., x_n)$. Випадковий пошук був здійснений у середовищі «Matlab2010». Сформулюємо отримані результати.

1. $n = 1$. Зрозуміло, що $E\left(\frac{1}{1}\right) = 1$.

2. $n = 2$. Легко перевірити, що $E\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

3. $n = 3$. Більш детальний аналіз встановлює, що $E\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{6}$.

При $n \geq 4$ знаходження точного значення $E\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}\right)$ виглядає проблематичним, тому є цікавими його оцінки.

4. $n = 4$. Розглянемо в просторі параметрів точки $P_1(1,1,1,1,1)$, $P_2(1,0,-1,0,1)$, $P_3(1,1,1,0,0)$, $P_4(0,1,0,0,1)$, $P_5(0,10,0,-1)$.

Невід'ємними косинус – многочленами, що відповідають їм за теоремою Фейєра – Ріса, є

$$T_1 = 5 + 8\cos x + 6\cos 2x + 4\cos 3x + 2\cos 4x;$$
$$T_2 = 3 - 4\cos 2x + 2\cos 4x; \; T_3 = 3 + 4\cos x + 2\cos 2x;$$
$$T_4 = 2 + 2\cos 3x; \; T_5 = 2 - 2\cos 3x.$$

Безпосередньо перевіряється, що $Y_4\left(\frac{4}{5}\right)$ є наступна лінійна комбінація з невід'ємними коефіцієнтами многочленів T:

$$Y_4\left(\frac{4}{5}\right) = 0,0833T_1 + 0,0417T_2 + 0,0833T_3 + 0,0021T_4 + 0,0021T_5.$$

Звідси, косинус – многочлен $Y_4\left(\frac{4}{5}\right)$ – невід'ємний, і тому

$$E\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right) \leq \frac{4}{5}.$$

5. $n = 5$. Розглянемо в просторі параметрів точки $P_1(0,1,1,1,0,-1)$, $P_2(1,1,1,1,1,1)$, $P_3(0,1,1,-1,-1,0)$, $P_4(1,0,-1,0,1,1)$, $P_5(1,-1,0,0,0,1)$, $P_6(1,-1,-1,0,1,1)$.

Невід'ємними косинус – многочленами, що відповідають їм за теоремою Фейєра - Ріса є

$$T_1 = 4 + 4\cos x - 2\cos 3x - 2\cos 4x;$$

$$T_2 = 6 + 10\cos x + 8\cos 2x + 6\cos 3x + 4\cos 4x + 2\cos 5x\ ;$$

$$T_3 = 4 + 2\cos x - 4\cos 2x - 2\cos 3x\ ;$$

$$T_4 = 4 + 2\cos x - 4\cos 2x - 2\cos 3x + 2\cos 4x + 2\cos 5x\ ;$$

$$T_5 = 3 - 2\cos x - 2\cos 4x + 2\cos 5x\ ;$$

$$T_6 = 5 + 2\cos x - 4\cos 2x - 4\cos 3x + 2\cos 5x\ .$$

Безпосередньо перевіряється, що $Y_5\left(\frac{4}{5}\right)$ є наступна лінійна комбінація з невід'ємними коефіцієнтами многочленів T:

$$Y_5\left(\frac{4}{5}\right) = 0,0315T_1 + 0,0815T_2 + 0,0278T_3 + 0,0019T_4 + 0,0083T_5 + 0,0833T_6\ .$$

Звідси, косинус – многочлен $Y_5\left(\frac{4}{5}\right)$ – невід'ємний, і тому

$$E\left(\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right) \le \frac{4}{5}\ .$$

6. $n = 6$ Розглянемо в просторі параметрів точки $P_1\left(0,1,1,1,0,-1,-1\right)$, $P_2\left(1,1,1,1,1,1,1\right)$, $P_3\left(0,1,1,-1,-1,0,-1\right)$, $P_4\left(1,0,-1,0,1,1,0\right)$, $P_5\left(1,-1,0,0,0,1,0\right)$, $P_6\left(1,-1,-1,0,1,1,1\right)$, $P_7\left(0,0,0,1,-1,0,-1\right)$.

Невід'ємними косинус – многочленами, що відповідають їм за теоремою Фейєра - Ріса є

$$T_1 = 5 + 6\cos x - 4\cos 3x - 4\cos 4x - 2\cos 5x\ ;$$

$$T_2 = 7 + 12\cos x + 10\cos 2x + 8\cos 3x + 6\cos 4x + 4\cos 5x + 2\cos 6x\ ;$$

$$T_3 = 5 + 2\cos x - 2\cos 2x - 2\cos 4x - 2\cos 5x\ ;$$

$$T_4 = 4 + 2\cos x - 4\cos 2x - 2\cos 3x + 2\cos 4x + 2\cos 5x\ ;$$

$$T_5 = 3 - 2\cos x - 2\cos 4x + 2\cos 5x\ ;$$

$$T_6 = 6 + 4\cos x - 2\cos 2x - 4\cos 3x - 2\cos 4x + 2\cos 6x\ ;$$

$$T_7 = 3 - 2\cos x + 2\cos 2x - 2\cos 3x\ .$$

Безпосередньо перевіряється, що $Y_6\left(\frac{4}{5}\right)$ є наступна лінійна комбінація з невід'ємними коефіцієнтами многочленів T:

$$Y_6\left(\frac{4}{5}\right) = 0,0164T_1 + 0,0629T_2 + 0,0215T_3 + 0,0114T_4 +$$

$$+0,0006T_5 + 0,0204T_6 + 0,00004T_7.$$

Звідси, косинус - многочлен $Y_6\left(\frac{4}{5}\right)$ – невід'ємний, і тому

$$E\left(\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6}\right)\le\frac{4}{5}.$$

Висновки. Розгляд многочленів Янга $Y_4\left(\frac{4}{5}\right)$, $Y_5\left(\frac{4}{5}\right)$, $Y_6\left(\frac{4}{5}\right)$ дозволяє припустити, що $Y_n\left(\frac{4}{5}\right)$ $(n\ge 4)$ є невід'ємним косинус - многочленом. Це припущення сильніше за теорему Янга, яка стверджує лише, що $Y_n(1)$ – невід'ємний косинус - многочлен.

Автор вдячний проф. О.Л. Григор'єву за змістовні зауваження.

Список літератури: **1.** *L. Fejer.* Sur les functions bornees et integrables // C.R.Acad. Sci. Paris. – 1900.– №133.– С.984 - 987. **2.** *Бабенко К. И.* Основы численного анализа.– М.: Физматгиз. – 1986.–741с. **3.** *L. Fejer.* Uber trigonometrishe Polynome // J. Reine Angev. Math. – 1915. – № 146.–С 55-82. **4.** *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды, Т.2. – М.: Мир. – 1965. – 615 с. **5.** *E.Hewitt and R.E.Hewitt*, The Gibbs - Wilbracham phenomenon: an episode in Fourier analysis // Arch Hist. Exact Sci. – 1979. - № 21. – С 129 - 160. **6.** *Г. Полиа, Г. Сеге.* Задачи и теоремы из анализа, Ч.2. – М.: ГИТТИ.– 1956.– 432 с. **7.** *Dimitar K. Dimitrov.* Extremal Positive Trigonometric Polynomials // Approximation theory. – A volume dedicated to Blagovest Sendov.–2002.– pp. 1-24.

Надійшла до редколегії 11.03.2011

УДК 539.1

В.А. ВАНИН, д-р техн. наук, проф. НТУ «ХПИ»;
А.А. ГРИГОРЬЕВ, аспирант, НТУ «ХПИ»

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЧАСТИЦ ПРИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ РАСШИРЕНИИ СРЕДЫ

Вивчено поле пришвидшень, що виникає в пружнопластичному гетерогенному середовищі Максвела при його кристалізації. Показано, що неоднорідне розширення цього середовища призводить до взаємного тяжіння частинок (центрів кристалізації) та виникненню силового поля, подібного до гравітаційного поля Ньютона.

Изучено поле ускорений, возникающее в упругопластической гетерогенной среде Максвелла при её кристаллизации. Показано, что неоднородное расширение этой среды приводит к взаимному притяжению частиц (центров кристаллизации) и возникновению силового поля, подобного гравитационному полю Ньютона.

The field of the accelerations which originate in the elasto-plastic heterogeneous Maxwell environment during its crystallization is examined. It is shown that an uneven expansion of this environment causes a mutual attraction of the fragments (centers of the crystallization) and an origination of a field of force which is similar to the gravitational field of Newton.