Министерство образования и науки Украины
Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»

Ю. Н. ИВАЩЕНКО

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ИНОСТРАННЫХ СТУДЕНТОВ

Утверждено редакционно-издательским советом университета, протокол №1 от 10.04.2008

Харьков НТУ «ХПИ» 2008

ББК 22.171
И 17
УДК 519.21

Рецензенты: **О.М. Ермолаев**, проф., д-р физ.-мат. наук ХНУ им. В.Н. Каразина;
А.О. Медолазов, канд. техн. наук, доц. ХНАДУ;
С.Б. Данилевич, канд. физ.-мат. наук, доц. ХГУ «НУА».

В посібнику розглянуто теоретичні, методичні та практичні питання теорії ймовірностей, які дають необхідний мінімум знань і уявлень про використання методів теорії ймовірностей в теоретичних та прикладних науках.

Призначено для іноземних студентів, що вивчають економічні дисципліни за програмою молодших фахівців.

И 17 **Иващенко Ю.Н.** Основы теории вероятностей: Учебное пособие для иностранных студентов. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2008. – 196 с. – На рус. яз.

ISBN

В пособии рассмотрены теоретические, методические и практические вопросы теории вероятностей, дающие необходимый минимум знаний и представлений об использовании методов теории вероятностей в теоретических и прикладных науках.

Предназначено для иностранных студентов, изучающих экономические дисциплины по программе младших специалистов.

Ил.7. Табл.5. Библиогр. названий 3.

ББК 22.171

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие «Основы теории вероятностей» предназначено для иностранных студентов, изучающих экономические дисциплины по программе младших специалистов.

Основной целью пособия является формирование у студентов навыков, умений и представлений об использовании методов теории вероятностей в различных теоретических и прикладных науках.

Выбор учебного материала определяется программой обучения младших специалистов по экономическим специальностям и включает лексико-терминологический минимум, необходимый для изучения иностранными студентами учебных дисциплин экономического профиля.

Исходя из общего назначения пособия, в нем основное внимание обращено не на проблемы теории или аналитический аппарат, а на общее ознакомление с реальными вопросами, приводящими к теории случайных процессов. Поэтому, кроме глав, отражающих основные аспекты теории вероятностей, в это пособие включены сборник задач и методы их решения.

Автор приносит искреннюю благодарность всем, кто принимал участие в издании и оформлении пособия и с большой благодарностью примет от читателей любые пожелания, относящиеся к содержанию пособия, стилю изложения и характеру рассмотренных примеров.

ВВЕДЕНИЕ

Возникновение теории вероятностей относится к середине семнадцатого столетия и связано с именами Ферма (1601–1665 гг.), Паскаля (1623–1662 гг.) и Гюйгенса (1625–1695 гг.). В работе этих ученых впервые появились понятия вероятности случайного события и математического ожидания случайной величины. Началом для их исследований явились задачи, связанные с азартными играми. Дальнейшее развитие теории вероятностей связано с именами Бернулли (1654–1705 гг.), Муавра (1667–1754 гг.), Бейеса (1710–1763 гг.), Лапласа (1749–1827 гг.) и других.

Русские ученые П.Л. Чебышев, А.М. Ляпунов, А.А. Марков нашли новый путь развития теории вероятностей – всестороннее изучение последовательностей независимых случайных величин (закон больших чисел, теорема Ляпунова).

Начало общей теории случайных процессов было положено работами советских математиков А.Н. Колмогорова, А.Я. Хинчина и В.И. Романовского. Ими была создана аксиоматика теории вероятностей, установлена связь теории вероятностей с теорией множеств и разработаны основы теории случайных функций.

Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях естествознания и техники: в теории надежности, теории массового обслуживания, в теоретической физике, геодезии, астрономии, теории ошибок наблюдений, теории автоматического управления, общей теории связи и во многих других теоретических и прикладных науках.

Глава 1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1. ***Основные понятия теории вероятностей.***
2. ***Теоремы теории вероятностей.***
3. ***Повторение испытаний.***

Тема 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1. Испытания и события. Предмет теории вероятностей.
1.2. Виды случайных событий.
1.3. Классическое определение вероятности.
1.4. Относительная частота. Устойчивость относительной частоты.
1.5. Геометрические вероятности.

1.1. Испытания и события. Предмет теории вероятностей

Событие – это результат испытания (опыта).

Пример. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на четыре части. Выстрел – это испытание. Попадание в определенную часть мишени – событие.

Пример. В ящике есть цветные шары. Из ящика берут один шар. Извлечение шара из ящика – это испытание. Появление шара определенного цвета – событие.

Элементарное событие (исход) – каждый из множества возможных результатов испытания.

Благоприятствующее (удачное) ***событие*** (исход) – это элементарный исход, в котором наступает нужное нам событие.

Все события делятся на три вида:

1. ***Достоверное событие*** (E) – это событие, которое обязательно произойдет, если будут выполнены определенные условия S.

Пример. В сосуде содержится вода при нормальном давлении и температуре. Событие «вода в сосуде находится в жидком состоянии» есть достоверное. В этом примере атмосферное давление и температура воды составляют определенные условия S.

2. ***Невозможное событие*** (U) – это событие, которое никогда не произойдет, если будут выполнены определенные условия S.

<u>*Пример*</u>. Событие «вода в сосуде находится в твердом состоянии» не произойдет, если будут выполнены условия предыдущего примера.

3. ***Случайное событие*** (A) – это событие, которое при выполнении определенных условий S может произойти или не произойти.

<u>*Пример*</u>. Бросают монету. Событие «выпал» герб – случайное.

Каждое случайное событие есть следствие действия многих случайных причин, число которых очень велико и законы их действия неизвестны. Поэтому теория вероятностей не решает задачу предсказания ***единичного*** события – это просто невозможно.

Массовые однородные случайные события – это события, которые многократно происходят при постоянных условиях S.

Оказывается, что большое число однородных случайных событий, независимо от их условий появления, подчиняются определенным закономерностям. Установлением этих закономерностей и занимается теория вероятностей.

Следовательно, ***предметом теории вероятностей*** является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий.

Знание закономерностей, которым подчиняются массовые случайные события, позволяет предвидеть, как эти события будут происходить.

1.2. Виды случайных событий

События называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Пример. Брошена монета. Появление «герба» исключает появление «решки». События «появился герб» и «появилась решка» – несовместимые.

Несколько событий образуют ***полную группу***, если в результате испытания появится хотя бы одно из них. Если события, образующие полную группу, ***попарно несовместны***, то в результате испытания появится только одно из этих событий.

Пример. Стрелок сделал выстрел по цели. Обязательно произойдет одно из следующих двух событий: попадание, промах. Эти два несовместных события образуют полную группу.

События называются ***совместными***, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.

Пример. A – появление четырех очков при бросании игральной кости; B – появления четного числа очков. События A и B совместны.

Два события называются ***противоположными***, если они образуют полную группу событий.

Пример. Попадание и промах при выстреле по цели – противоположные события. Если событие A – попадание, то событие $\overline{A}$ – промах.

События называются ***равновозможными***, если появление каждого из них в результате опыта одинаково.

Пример. Появление одного или иного числа очков на брошенной игральной кости – равновозможные события. Предполагается, что игральная кость изготовлена из однородного металла и имеет форму правильного многогранника

Событие B называют ***независимым*** от события A, если появление события A не изменяет вероятности события B.

В противном случае события называются ***зависимыми***.

1.3. Классическое определение вероятности

Вероятность – одно из основных понятий теории вероятностей. Существует несколько определений этого понятия. Рассмотрим определение, которое называют классическим, на следующем примере.

Пусть в ящике находится 6 одинаковых шаров:

2 шара – красного цвета

3 шара – синего цвета

1 шар – белого цвета

Очевидно, возможность взять произвольно из ящика цветной (красный или синий) шар больше, чем возможность достать белый шар. Найдем количественную оценку возможности того, что взятый произвольно шар – цветной.

Событие (A) – появление цветного шара

Испытание – извлечение шара из ящика.

В нашем примере возможны следующие 6 элементарных исходов: w_1 – появился белый шар; w_2, w_3 – появился красный шар; w_4, w_5, w_6 – появился синий шар.

Все исходы образуют полную группу попарно несовместных событий (обязательно появится только один шар) и равновозможны (шары одинаковые и хорошо перемешаны).

В нашем примере это следующие 5 исходов:

$$w_2,\, w_3,\, w_4,\, w_5,\, w_6\,.$$

Следовательно, событие A произойдет, если наступит ***один***, неважно какой, из удачных исходов. В этом смысле событие A делится на несколько элементарных исходов ($w_1, w_2, w_3, \ldots w_n$): элементарный исход не делится на другие события. В этом и состоит различие между событием A и элементарным исходом.

Отношение числа удачных исходов к числу всех элементарных исходов дает количественную оценку возможности появления цветного шара. В нашем примере это отношение равно $\frac{5}{6}$. Сформулируем определение вероятности. ***Вероятностью*** события A называют отношение:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число удачных исходов;

n – число равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу.

Из определения вероятностей следуют ее свойства:

Свойство 1

Вероятность достоверного события равна единице.

Действительно, если событие достоверно, то каждый элементарный исход испытания благоприятствует событию. В этом случае $m = n$, следовательно:

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Свойство 2

Вероятность невозможного события равна нулю.

Действительно, если событие невозможно, то ни один из элементарных исходов не благоприятствует событию. В этом случае $m = 0$, следовательно,

$$P(U) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

Свойство 3

Вероятность случайного события:

$$0 < P(A) < 1.$$

Свойство 4

Вероятность любого события:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Если при вычислении вероятности события никаких других ограничений, кроме условий S, нет, то такую вероятность называют ***безусловной***. Если есть и другие дополнительные условия, то вероятность события называют ***условной***. Например, часто вычисляют вероятность события B при дополнительном условии, что произошло событие A.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже произошло.

1.4. Относительная частота. Устойчивость относительной частоты

Относительной частотой события называют отношение числа испытаний, в которых событие произошло, к числу произведенных испытаний.

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число появления события A;

n – общее число испытаний.

Сравнивая определения вероятности и относительной частоты, можно сделать вывод: определение вероятности не требует проведения испытаний; определение относительной частоты предполагает фактическое проведение испытаний. Или вероятность вычисляют до испытаний, а относительную частоту – после испытаний.

Пример. По мишени произвели 8 выстрелов. Было сделано 3 попадания. Относительная частота поражения мишени:

$$W(A) = \frac{3}{8}.$$

Свойство устойчивости относительной частоты состоит в том, что в различных испытаниях относительная частота приблизительно равна некоторому постоянному числу. Оказалось, что это постоянное число есть вероятность появления события. Следовательно, если опытным путем установлена относительная частота, то полученное число можно принять за приближенное значение вероятности.

Пример. Многократно проводились опыты бросания монеты, в которых считали число появлений «герба». Результаты опытов приведены в таблице 1. 1.

Таблица 1.1

Число испытаний	Число появления «герба»	Относительная частота
4040	2048	0,5069
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

Здесь относительные частоты незначительно отклоняются от числа 0,5, причем, тем меньше, чем больше число испытаний. Но вероятность появления «герба» равна 0,5. Это доказывает, что относительная частота приблизительно равна вероятности.

Классическое определение вероятности предполагает, что число элементарных исходов испытания конечно. На практике есть испытания, число возможных исходов которых бесконечно. В таких случаях классическое определение вероятности неприменимо. Этот недостаток исчезает с использованием аксиоматической вероятности. В системе аксиом, предложенной А.Н. Колмогоровым, неопределенными понятиями являются элементарное событие и вероятность. Приведем аксиомы, определяющие вероятность:

Каждому событию A поставлено в соответствие неотрицательное действительное число $P(A)$. Это число называется вероятностью события A.

Вероятность достоверного события равна единице:

$$P(A)=1.$$

Вероятность наступления хотя бы одного из попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Исходя из этих аксиом, свойства вероятностей и зависимости между ними выводят в качестве теорем.

Другой недостаток классического определения вероятности состоит в том, что часто невозможно представить результат испытания в виде совокупности элементарных исходов. Еще труднее указать основания, позволяющие считать элементарные исходы равновозможными. Поэтому и используют ***статистическое*** определение вероятности: ***в качестве статистической вероятности события принимают относительную частоту***.

Для существования статистической вероятности события A требуется:

а) возможность производить неограниченное число испытаний, в каждом из которых событие A происходит или не происходит;

б) устойчивость относительных частот появления события A в различных сериях достаточно большого числа испытаний.

Недостатком статистического определения является неоднозначность статистической вероятности; так, в приведенном примере в качестве вероятности события можно принять не только 0,5, но и 0,49; 0,52 и т.д.

1.5. Геометрические вероятности

Для исключения недостатка классического определения вероятности, состоящего в том, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов, вводят геометрические вероятности.

Геометрическая вероятность – вероятность попадания точки в область (отрезок, часть плоскости и т.д.). Если обозначить единицу измерения (длина, площадь, объем) области через mes, то вероятность попадания точки, произвольно поставленной в область g – часть области G, равна:

$$P = \frac{mesg}{mesG}.$$

Пусть отрезок l составляет часть отрезка L. На отрезке L произвольно поставлена точка. Это означает выполнение следующих предположений: поставленная точка может оказаться в любой точке отрезка L, вероятность попадания точки на отрезок l пропорционально длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка L. В этих предположениях вероятность попадания точки на отрезок l определяется равенством:

$$P = \frac{\text{Длина } l}{\text{Длина } L}.$$

Пусть плоская фигура g составляет часть плоской фигуры G. На фигуре G произвольно поставлена точка. Это означает выполнение следующих предположений: поставленная точка может оказаться в любой точке фигуры G, вероятность попадания поставленной точки на фигуру g пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее расположения относительно G и от формы g. В этих предположениях вероятность попадания точки в фигуру g определяется равенством:

$$P = \frac{\text{Площадь } g}{\text{Площадь } G}.$$

Аналогично определяется вероятность попадания точки в пространственную фигуру v, которая составляет часть фигуры V:

$$P = \frac{\text{Объем } v}{\text{Объем } V}.$$

Замечание

В случае классического определения вероятность невозможного события равна нулю. Справедливо и обратное утверждение. Например, если вероятность события равна нулю, то событие невозможно. В случае геометрического определения вероятности обратные утверждения не имеют смысла. Например, вероятность попадания поставленной точки в одну определенную точку области G равна нулю, однако это событие может произойти и, следовательно, не является невозможным.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Приведите примеры невозможного и достоверного события.
2. Что изучает теория вероятностей?
3. Назовите недостатки классического определения вероятности.
4. Какой недостаток классического определения вероятности исключает геометрическая вероятность?
5. Решите задачи (1-13).

Тема 2. ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2.1. Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Суммой $A+B$ ***двух событий*** A и B называют событие, состоящее в появлении события A, или события B, или обоих этих событий. Например, если из орудия сделаны два выстрела и A – попадание при первом выстреле, B – попадание при втором выстреле, то $(A+B)$ – попадание при первом выстреле, или при втором, или в обоих выстрелах. Если два события A и B – несовместные, то $(A+B)$ – событие, состоящее в появлении одного из этих событий, безразлично какого.

Пусть события A и B – несовместные и вероятности этих событий известны. Как найти вероятность того, что произойдет либо событие A, либо событие B? Ответ на этот вопрос дает теорема сложения вероятностей.

Теорема

Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Доказательство

Введем обозначения: n – общее число возможных элементарных исходов испытания; m_2 – число удачных исходов события A; m_2 – число удачных исходов события B.

Число элементарных исходов, удачных для события A, либо события B, равно $m_1 + m_2$. Следовательно,

$$P(A+B) = \frac{(m_1 + m_2)}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n}.$$

Учитывая, что $\frac{m_1}{n} = P(A)$ и $\frac{m_2}{n} = P(B)$, получим

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Следствие

Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_1) + P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Доказательство

Рассмотрим три события: A, B, C .

Так как эти события попарно несовместны, то появление одного из трех событий A, B и C равносильно появлению одного из двух событий $A + B$ и C, поэтому исходя из теоремы сложения

$$P(A+B+C) = P[(A+B)+C] = P(A+B) + P(C) =$$

$$= P(A) + P(B) + P(C).$$

Для любого числа попарно несовместных событий доказательство проводится методом математической индукции.

2.2. Теорема сложения вероятностей совместных событий

Пусть события A и B совместны. Известны вероятности этих событий и вероятность их совместного появления. Как найти вероятность события $(A+B)$, состоящего в том, что произойдет хотя бы одно из событий A и B? Ответ на этот вопрос дает теорема сложения вероятностей совместных событий.

Теорема

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Доказательство

Так как события A и B совместны, то событие $(A+B)$ произойдет, если произойдет одно из следующих трех несовместные событий: $A\overline{B}$, $\overline{A}B$ или AB.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(A+B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)+P(AB). \qquad (1.1)$$

Событие A произойдет, если произойдет одно из двух несовместных событий: $A\overline{B}$ или AB.

По теореме сложения несовместных событий имеем:

$$P(A)=P(A\overline{B})+P(AB).$$

Отсюда,

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB). \qquad (1.2)$$

Аналогично для $P(B)=P(\overline{A}B)+P(AB)$

$$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB). \qquad (1.3)$$

Решая совместно уравнения (1.1), (1.2.) и (1.3.), получим:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (1.4)$$

При использовании этой формулы нужно учитывать, что события A и B могут быть как независимыми, так и зависимыми.

Для ***независимых событий***:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B).$$

Для ***зависимых событий***:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P_A(B).$$

2.3. Теорема умножения вероятностей

Произведением двух событий A и B называют событие AB, состоящее в совместном появлении этих событий.

Например, если A – деталь годная, B – деталь окрашенная, то AB – деталь годная и окрашенная.

Рассмотрим два события: A и B. Как найти вероятность их совместного появления? Ответ на этот вопрос дает теорема умножения.

Теорема

Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже произошло:

$$P(AB) = P(A)P_A(B).$$

Для трех событий:

$$P(ABC) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C).$$

Порядок расположения событий выбирается произвольно.

Для ***независимых*** событий теорема умножения имеет вид:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Это равенство используют для определения независимых событий.

Несколько событий называют независимыми в совокупности (или просто независимыми), если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных. Например, если события A, B, C независимы, то независимы события: A и B, A и C, B и C; A и BC, B и AC, C и AB.

Из этого следует, что если события независимы, то условная вероятность появления любого события, вычисленная в предположении, что произошли другие события из числа остальных, равна его безусловной вероятности.

2.4. Вероятность появления хотя бы одного события

Пусть в результате испытания могут произойти n независимых событий или некоторые из них (одно или ни одного). Известны вероятности появления каждого события. Как найти вероятность появления хотя бы одного из них? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема

Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$.

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\ldots P(\overline{A}_n).$$

Если $P(\overline{A}_1) = P(\overline{A}_2) = \ldots = P(\overline{A}_n) = q$, то $P(A) = 1 - q^n$.

2.5. Формула полной вероятности

Пусть событие A может произойти при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, которые образуют полную группу. Известны вероятности событий и условные вероятности события A. Как найти вероятность события A? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема

Вероятность события A, которое может произойти только при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \\ + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Эту формулу называют «формулой полной вероятности».

Доказательство

По условию, появление события A означает осуществление одного из несовместных событий $B_1A,\ B_2A,\ \ldots,\ B_nA$. Используя теорему сложения, получим:

$$P(A) = P(B_1A) + P(B_2A) + \ldots + P(B_nA).$$

По теореме умножения вероятностей зависимых событий имеем:

$$P(B_1A) = P(B_1)P_{B_1}(A); \quad P(B_2A) = P(B_2)P_{B_2}(A); \ \ldots,$$

$$P(B_nA) = P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Следовательно,

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

2.6. Вероятность гипотез. Формула Бейеса

Пусть событие A может произойти при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу. Так как заранее не известно, какое из этих событий произойдет, их называют ***гипотезами***.

Допустим, что произведено испытание, в результате которого произошло событие A. Определим, как изменились вероятности гипотез, т.е. найдем условные вероятности:

$$P_A(B_1);\quad P_A(B_2);\quad \ldots\quad P_A(B_n).$$

Найдем сначала $P_A(B_1)$. По теореме умножения имеем:

$$P(AB_1)=P(A)P_A(B_1)=P(B_1)P_{B_1}(A).$$

Отсюда

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)},$$

где $P(A)$ – «формула полной вероятности».

Аналогично находим условные вероятности остальных гипотез.

Следовательно, условная вероятность любой гипотезы находится по формуле:

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)P_{B_n}(A)}.$$

Эту формулу называют формулой Бейеса. Формула Бейеса позволяет переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в результате которого произошло событие A.

Контрольные вопросы и задания

1. Найдите вероятность появления одного из двух несовместных событий.
2. Для каких видов событий справедлива теорема сложения вероятностей?
3. Решите задачи (14-33).

Тема 3. ПОВТОРЕНИЕ ИСПЫТАНИЙ

3.1. Теорема Бернулли

Если производится несколько испытаний, причем вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называются ***независимыми относительно события*** A.

В разных независимых испытаниях событие A может иметь различные вероятности. Далее будут рассматриваться независимые испытания, в которых событие A имеет одинаковую вероятность.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может произойти или не произойти. Будем считать, что вероятность события A в каждом испытании одинаковая и равна p. Следовательно, вероятность того, что событие A не произойдет в каждом испытании, будет равна $q = 1 - p$.

Вычислим вероятность того, что при n испытаниях событие A произойдет k раз. Не требуется также, чтобы событие A повторилось k раз в определенной последовательности. Например, если событие A произошло три раза в четырех испытаниях, то возможны следующие события: $AAA\overline{A}$, $AA\overline{A}A$, $A\overline{A}AA$, $\overline{A}AAA$. Запись $AAA\overline{A}$ означает, что в первом, втором и третьем испытаниях событие A произошло, а в четвертом испытании оно не появилось, т. е. произошло противоположное событие $\overline{A}$; соответственный смысл имеют и другие записи.

Искомую вероятность обозначим $P_n(k)$. Например, символ $P_5(3)$ означает вероятность того, что в пяти испытаниях событие произойдет три раза и, следовательно, не наступит два раза.

Данную задачу можно решить с помощью формулы Бернулли.

Вывод формулы Бернулли

Вероятность одного сложного события, состоящего в том, что в n испытаниях событие A произойдет k раз и не произойдет $(n-k)$ раз, по теореме умножения вероятностей независимых событий равна $p^k q^{n-k}$. Таких сложных событий может быть столько, сколько можно составить сочетаний из n элементов по k элементов, т.е. C_n^k. Так как эти сложные события несовместны, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных сложных событий. Но вероятности всех возможных событий одинаковы, поэтому искомая вероятность равна вероятности ***одного*** сложного события, умноженного на их число:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad \text{или} \quad P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Эту формулу называют формулой Бернулли.

3.2. Локальная теорема Лапласа

Использовать теорему Бернулли для большого количества испытаний $(n >> 1)$ трудно, так как формула требует выполнения действий над большими числами. Например, если $n = 50$, $k = 30$, $p = 0,1$, то для нахождения вероятности $P_{50}(30)$ надо вычислить выражение

$$P_{50}(30) = \frac{50!}{30!\,20!} \cdot (0,1)^{30} \cdot (0,9)^{20}.$$

Вычисления с использованием таблиц логарифмов факториалов легче, но они дают большую погрешность в результате.

Локальная теорема Лапласа дает асимптотическую формулу, которая позволяет приближенно найти вероятность появления события при больших количествах испытаний. Заметим, что для частного случая $(p = 0,5)$ асимптотическая формула была найдена в 1730г. Муавром; в 1783 г. Лаплас обобщил формулу Муавра для произвольного p. Поэтому данную теорему иногда называют теоремой Муавра-Лапласа.

Доказательство локальной теоремы Лапласа сложное, поэтому здесь приведем только ее формулировку.

Если вероятность появления события A в каждом испытании постоянна и равна p $(0 < p < 1)$, то вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A произойдет k раз, приближенно равна:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} l^{-\frac{x^2}{2}}$, $\quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Таблица функции $\varphi(x)$ для положительных значений x приведена в приложении (1). Так как $\varphi(x)$ – четная, функция $\varphi(-x) = \varphi(x)$, то эти таблицы используют и для отрицательных значений этой функции.

3.3. Интегральная теорема Лапласа

Теорема

Если вероятность появления события A в каждом испытании постоянна и равна p $(0 < p < 1)$, то вероятность того, что событие A произойдет в n испытаниях от k_1 до k_2 раз приближенно равна:

$$P_n(k_{1,} k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

где $x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ и $x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

При решении задач, требующих применения интегральной теоремы Лапласа, пользуются специальными таблицами, т.к. неопределенный интеграл $\int e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ не выражается через элементарные функции. Таблица для интеграла

$\varPhi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ приведена в приложении (2).

Функция $\varPhi(x)$ – нечетная, т.е. $\left[\varPhi(-x)=-\varPhi(x)\right]$. В таблице приведены значения функции до $x=5$. Для $x>5$ можно принять $\varPhi(x)=0{,}5$.

Функцию $\varPhi(x)$ называют ***функцией Лапласа***.

Для пользования таблицей функции Лапласа преобразуем соотношение:

$$P_n(k_{1,}\,k_2)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{x'}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}}dz-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{x'} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\varPhi(x'')-\varPhi(x').$$

Следовательно, вероятность того, что событие A появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз,

$$P_n(k_1;k_2)\approx\varPhi(x'')-\varPhi(x').$$

3.4. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях

Производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p $(0<p<1)$. Найдем вероятность того, что отклонение относительной частоты $\frac{m}{n}$ от постоянной вероятности p по абсолютной величине не превышает заданного числа $\varepsilon>0$.

Другими словами, найдем вероятность выполнения неравенства:

$$\left|\frac{m}{n}-p\right| \le \varepsilon \,. \tag{1.5}$$

Эту вероятность обозначим так:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right| \le \varepsilon\right).$$

Заменим неравенство (1.5) равносильными ему:

$$-\varepsilon \le \frac{m}{n}-p \le \varepsilon \quad \text{и} \quad -\varepsilon \le \frac{m-np}{n} \le \varepsilon \,.$$

Умножая эти неравенства на положительный множитель $\sqrt{\dfrac{n}{pq}}$, получим неравенства, равносильные исходному:

$$-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \,.$$

Используя интегральную теорему Лапласа и положив $x' = -\varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}$ и $x'' = \varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}$, имеем:

$$P\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} l^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p}}} l^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Или $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$.

Следовательно, вероятность выполнения неравенства $\left|\frac{m}{n}-p\right|\leq\varepsilon$ приближенно равна значению удвоенной функции Лапласа $2\Phi(\alpha)$ при $x=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Что позволяет переоценить формула Бейеса?
2. Почему теорема Бернулли неприменима для большого числа испытаний?
3. Решите задачи (36-50).

Глава 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. Виды случайных величин.
2. Законы распределения вероятностей дискретной случайной величины.
3. Числовые характеристики дискретных случайных величин.
4. Закон больших чисел.
5. Функция распределения вероятностей случайной величины.
6. Законы распределения вероятностей непрерывной случайной величины.
7. Функция одного случайного аргумента.
8. Показательное распределение.

Тема 1. ВИДЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1.1. Случайная величина. Дискретные и непрерывные случайные величины.

1.1. Случайная величина. Дискретные` и непрерывные случайные величины

Случайная величина – это величина, которая в результате испытания принимает одно возможное значение, неизвестное и зависящее от случайных причин, которые не могут быть учтены.

Пример. Число родившихся мальчиков среди ста новорожденных есть случайная величина, которая имеет следующие возможные значения: $0, 1, 2, 3, \ldots, 100$.

Будем далее обозначать случайные величины прописными буквами X, Y, Z, а их возможные значения – соответствующими строчными буквами x, y, z. Например, ели случайная величина X имеет три возможных значения, то они будут обозначены так: x_1, x_2, x_3.

Дискретная (***прерывная***) ***величина*** – это величина, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Непрерывная величина – это величина, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число возможных значений непрерывной случайности величины бесконечно.

Для задания дискретной случайной величины, недостаточно перечислить все возможные ее значения, нужно еще указать их вероятности.

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Этот закон можно задать в виде таблицы, формулы или графически.

При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая строка – их вероятности:

Таблица 2.1

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Так как в одном испытании случайная величина принимает только одно возможное значение, следовательно, события $X = x_1$, $X = x_2$, $\dots$, $X = x_n$ образуют полную группу событий и сумма вероятностей равна единице:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1\,.$$

При графическом задании дискретной случайной величины в прямоугольной системе координат строят точки (x_i, p_i) и соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют ***многоугольником распределения***.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Приведите пример случайной величины.
2. Назовите виды задания случайной величины.

Тема 2. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

2.1. Биноминальное распределение

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться либо не появиться. Вероятность появления события во всех испытаниях постоянна и равна p (следовательно, вероятность не появления равна $(q = 1 - p)$. Рассмотрим в качестве дискретной случайной величины X число появлений события A в этих испытаниях.

Найдем закон распределения величины X. Очевидно, событие A в n испытаниях может либо не появиться, либо появиться 1 раз, либо 2 раза, …, либо n раз. Таким образом, возможные значения X такие:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad \ldots, \quad x_{n+1} = n.$$

Найдем вероятности этих возможных значений, для чего воспользуемся формулой Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{2.1}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Эта формула является аналитическим выражением данного закона распределения.

Биноминальным называют распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли. Закон назван «биноминальным» потому, что правую часть равенства (2.1) можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + C_n^0 q^n .$$

Первый член разложения (p^n) определяет вероятность появления события n раз в n независимых испытаниях; елрой член $(np^{n-1}q)$ определяет вероятность наступления события $(n-1)$ раз; последний член (q^n) определяет вероятность того, что событие не появится ни разу.

Биноминальный закон в виде таблицы имеет вид:

Таблица 2.2

X	n	$n-1$	$\ldots$	k	$\ldots$	0
P	p^n	$np^{n-1}q$	$\ldots$	$C_n^k p^k q^{n-1}$	$\ldots$	q^n

2.2. Распределение Пуассона

Найдем вероятность того, что при очень большом количестве испытаний, в каждом из которых вероятность событий мала $(p \le 0{,}1)$, событие наступит k раз. Допустим: произведение (np) сохраняет постоянное значение, а именно: $np = \lambda$. Это означает, что среднее число появлений события при различных значениях n остается неизменным.

Воспользуемся формулой Бернулли:

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!} p^k (1-p)^{n-k} .$$

Так как $np = \lambda$., то $p = \dfrac{\lambda}{n}$. Следовательно,

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k},$$

$n >> 1$, поэтому вместо $P_n(k)$ найдем $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(k)$.

$$P_n(k) \approx \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left[1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\right] =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\cdot 1 = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Итак:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Эта формула выражает закон распределения Пуассона вероятностей массовых $(n >> 1)$ и редких $(p \le 0{,}1)$ событий.

Замечание

Имеются специальные таблицы, пользуясь которыми можно найти $P_n(k)$, зная k и λ.

2.3. Простейший поток событий

Потоком событий называют последовательность событий, которые происходят в случайные моменты времени.

<u>*Пример*</u>. еличии ние вызовов на АТС, прилет самолетов в аэропорт, последовательность отказов элементов и многое другое.

Среди свойств, которыми могут обладать потоки, главными являются следующие свойства:

Свойство 1

Свойство стационарности характеризуется тем, что вероятность появления k событий в течение любого промежутка времени зависит только от числа k и от величины t промежутка времени и не зависит от начала его отсчета. При этом различные промежутки времени не должны пересекаться.

Например, вероятности появления k событий на промежутках времени $(1;7)$, $(10;16)$, $(T;T+6)$ одинаковой величины $t=6$ единиц времени равны между собой.

Следовательно, если поток событий обладает свойством стационарности, то вероятность появления k событий за промежуток времени t есть функция, зависящая только от k и t.

Свойство 2

Свойство отсутствия последствия характеризуется тем, что условная вероятность появления k событий на любом промежутке времени, вычисленная при любых предположениях, равна безусловной вероятности.

Следовательно, если поток событий обладает свойством отсутствия последствия, то имеет место взаимная независимость появления любого числа событий в непересекающиеся промежутки времени.

Свойство 3

Свойство ординарности характеризуется тем, что вероятность появления более одного события очень мала по сравнению с вероятностью появления только одного события.

Следовательно, если поток событий обладает свойством ординарности, то за бесконечно малый промежуток времени может произойти не более одного события.

Простейшим (***Пуассоновским***) называется поток событий, который обладает свойствами стационарности, отсутствия последствия и ординарности.

Интенсивностью потока λ называется среднее число событий, которые происходят в единицу времени.

Вероятность появления k событий простейшего потока за промежуток времени t определяется формулой Пуассона:

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}.$$

Эта формула отражает все свойства простейшего потока событий, поэтому ее можно считать математической моделью простейшего потока событий.

2.4. Геометрическое распределение

Производятся независимые испытания в каждом из которых вероятность появления события A равна p $(0 < p < 1)$. Следовательно, вероятность его непоявления $q = 1 - p$. Испытания заканчиваются с появлением события A. Значит, если событие A появилось в k-испытании, то в предшествующих $(k-1)$ испытаниях оно не появилось.

Обозначим через X дискретную случайную величину – число испытаний, которые нужно провести до первого появления события A. Возможными значениями X являются натуральные числа: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, … .

Пусть в первых $(k-1)$ испытаниях событие A не произошло, а в k-м испытании появилось. Вероятность этого события, по теореме умножения вероятностей независимых событий,

$$P(x = k) = q^{k-1} \cdot p .$$

Полагая, что $k = 1; 2; \ldots$ получим геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q $(0 < q < 1)$:

$$p,\ qp,\ q^2 p, \ldots,\ q^{k-1} p,\ \ldots .$$

Поэтому, распределение $P(x = k)$ называется ***геометрическим***.

2.5. Гипергеометрическое распределение

Рассмотрим задачу. Пусть в партии из N деталей есть M стандартных $(M < N)$. Из партии произвольно отбирают n деталей (каждая деталь отбирается с одинаковой вероятностью). Отобранное изделие перед отбором следующего не возвращается обратно в партию (поэтому формула Бернулли неприменима). Обозначим через X случайную величину – число m стандартных деталей среди n отобранных. Возможные значения X следующие: 0; 1; 2; … ; $\min(M, n)$.

Найдем вероятность того, что $X = m$, т.е. что среди n отобранных деталей ровно m стандартных. Используем для этого классическое определение вероятности.

Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно отобрать n из N деталей, т.е. числу сочетаний C_N^n.

Найдем число исходов, благоприятствующих событию $(X = m)$; m стандартных деталей можно отобрать из M деталей C_M^m способами; остальные $(n - m)$ детали должны быть нестандартными, которые можно обобрать из $(N - m)$ нестандартных деталей C_{N-M}^{n-m} способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов по правилу умножения равно $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$.

Искомая вероятность равна

$$P(X = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{b-m}}{C_N^n}.$$

Эта формула определяет распределение вероятностей, которое называется ***гипергеометрическим***.

Учитывая, что m – случайная величина, поэтому гипергеометрическое распределение определяется тремя параметрами: N, M, n. Иногда в качестве параметров этого распределения рассматривают N, n p, где $p = \dfrac{M}{N}$ – вероятность того, что первая отобранная деталь стандартная.

Если $n < 0.1N$, то гипергеометрическое распределение дает вероятности, близкие к вероятностям, найденным по биноминальному закону.

Контрольные вопросы и задания

1. Что определяет первый член разложения бинома Ньютона?
2. Какие события определяет закон распределения Пуассона?
3. Приведите примеры потока событий.
4. Назовите главные свойства потока событий.
5. Назовите математическую модель потока событий.
6. Какими параметрами определяется гипергеометрическое распределение?
7. Решите задачи (52-58, 108-110).

Тема 3. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

3.1. Математическое ожидание дискретной случайной величины.
3.2. Дисперсия дискретной случайной величины.
3.3. Среднее квадратическое отклонение.
3.4. Начальные и центральные теоретические моменты.

3.1. Математическое ожидание дискретной случайной величины

Математическое ожидание дискретной случайной величины – это сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

Пусть случайная величина X может принимать только значения x_1, x_2, …, x_n, вероятности которых соответственно равны p_1, p_2, …, p_n. Тогда математическое ожидание $M(X)$ случайной величины X определяется равенством:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n .$$

Свойства математического ожидания

Свойство 1

Математическое ожидание постоянной еличиины равно самой постоянной:

$$M(C) = C .$$

Свойство 2

Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$MC(X) = CM(X) .$$

Свойство 3

Математическое ожидание произведения n взаимно независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий. Для $n = 2$:

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

Свойство 4

Математическое ожидание суммы n случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых. Для $n = 2$:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

Свойство 5

Математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины:

$$M(X) \approx \overline{X}.$$

Свойство 6

Математическое ожидание числа появлений события в ***одном*** испытании равно вероятности этого события:

$$M(X) = P.$$

Свойство 7

Математическое ожидание числа появлений события в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании:

$$M(X) = np.$$

3.2. Дисперсия дискретной случайной величины

Математическое ожидание полностью случайную величину не характеризует. По этой причине вводят и другие числовые характеристики. Так, например, для того, чтобы оценить, как отличаются возможные значения случайной величины от ее математического ожидания, используют другую числовую характеристику. Для этого введем понятие отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

Отклонением называют разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием:

$$X - M(X).$$

Теорема

Математическое ожидание отклонения равно нулю:

$$M[X - M(X)] = 0.$$

Доказательство

$$M(X) = \text{const},$$

$$M[X - M(X)] = M(X) - M[M(X)] = M(X) - M(X) = 0.$$

Это объясняется тем, что одни возможные отклонения положительны, а другие – отрицательны; в результате их взаимного погашения среднее значение отклонения равно нулю. Эти выводы говорят о целесообразности заменить возможные отклонения их абсолютными значениями.

Дисперсия дискретной случайной величины – это математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины:

$$D(X) = M\left(X^2\right) - [M(X)]^2.$$

Следовательно, для того, чтобы найти дисперсию, нужно вычислить сумму произведений возможных значений квадрата отклонения на их вероятности.

Для вычисления дисперсии удобно пользоваться еще одной формулой.

Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X) = M\left(X^2\right) - [M(X)]^2.$$

Свойства дисперсии

Свойство 1

Дисперсия постоянной величины C равна нулю:

$$D(C) = 0.$$

Свойство 2

Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

Свойство 3

Дисперсия суммы n взаимно независимых величин равна сумме дисперсий этих величин. Для $n = 2$:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Свойство 4

Дисперсия суммы постоянной величины и случайной равна дисперсии случайной величины:

$$D(C+Y)=D(X).$$

Свойство 5

Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

Свойство 6

Дисперсия числа появлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность p появления постоянна, равна:

$$D(X)=npq,\quad q=1-p.$$

3.3. Среднее квадратическое отклонение

Для оценки рассеяния возможных значений случайной величины вокруг его среднего значения служит также и характеристика, которая называется средним квадратическим отклонением.

Среднее квадратическое отклонение случайной величины X – это величина, равная

$$G(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Так как среднее квадратическое отклонение равно квадратному корню из дисперсии, то размерность $G(X)$ совпадает с размерностью X. Поэтому в тех случаях, когда нужно, чтобы оценка рассеяния имела размерность случайной величины, вычисляют среднее квадратическое отклонение, а не дисперсию. Например, если X выражается в метрах, то $G(X)$ будет выражаться также в метрах, а $D(X)$ – в квадратных метрах.

Если известны средние квадратические отклонения нескольких взаимно независимых случайных величин, то среднее квадратическое отклонение суммы этих величин равно:

$$G(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \sqrt{G^2(X_1) + G^2(X_2) + \ldots + G^2(X_n)}\,.$$

3.4. Начальные и центральные теоретические моменты

Если случайная величина X имеет несколько больших и маловероятных значений, то для оценки этих значений на рассеяние случайной величины рассматривают характеристики, которые называются начальными и центральными теоретическими моментами.

Начальный момент порядка k случайной величины X – это математическое ожидание величины X^k:

$$\nu_k = M(X^k)\,.$$

В частности, $\nu_1 = M(X)$, $\nu_\alpha = M(X^2)$.

Пользуясь этими моментами, формулу для вычисления дисперсии $D(X) = M(X)^2 - \left[M(X)\right]^2$ можно записать так:

$$D(X) = \nu_2 - \nu_1^2\,.$$

Центральный момент порядка k случайной величины X – это математическое ожидание величины $\left(X - M(X)\right)^k$:

$$\mu_k = M\left[\left(X - M(X)\right)^k\right].$$

В частности,

$$\mu_1 = M[(X - M(X))] = 0.$$

$$\mu_2 = M\left[(X - M(X))^2\right] = D(X).$$

Исходя из определения центрального момента и пользуясь свойствами математического ожидания, легко получить формулы:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2,$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3,$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4.$$

Моменты более высоких порядков применяются редко. Моменты, рассмотренные здесь, называются ***теоретическими*** моментами. В отличие от теоретических моментов, моменты, которые вычисляются по данным наблюдений, называются ***эмпирическими***.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Назовите свойства математического ожидания.
2. Что характеризует дисперсия?
3. Назовите условия применения квадратического отклонения.
4. Решите задачи (59-66).

Тема 4. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

4.1. Теорема Чебышева.
4.2. Теорема Бернулли.

Как уже известно, нельзя точно определить, какое из возможных значений примет случайная величина в результате испытаний; это зависит от многих случайных причин, учесть которые невозможно. Однако при некоторых условиях суммарное поведение большого числа случайных величин теряет случайный характер и становится закономерным. Эти условия и указываются в теоремах, которые называются «Закон больших чисел». К ним относятся теоремы Чебышева, Бернулли и др.

Теорема Чебышева является общим законом больших чисел, теорема Бернулли – простейшим. Для доказательства этих теорем используют неравенство Чебышева:

Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше, чем $1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$:

$$P\left(\left|X-M(X)\right|\right)<\varepsilon \geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Неравенство Чебышева имеет для практики ограниченное значение, так как дает приближенную оценку.

Например, если $D(X)>\varepsilon^2$ и, следовательно,

$$\frac{D(X)}{\varepsilon^2}>1, \quad \text{то} \quad 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}<0.$$

В этом случае неравенство Чебышева указывает на то, что вероятность отклонения неотрицательна, а это очевидно, так как любая вероятность выражается неотрицательным числом.

4.1. Теорема Чебышева

Если последовательность попарно независимых случайных величин $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n,\ \ldots$ имеет конечные математические ожидания и дисперсии этих величин равномерно ограничены (не больше постоянного числа C), то среднее арифметическое случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий, т.е., если ε – любое положительное число, то:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

В частности, если случайные величины имеют одно и тоже математическое ожидание a, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Сущность теоремы Чебышева такова: среднее арифметическое большого числа независимых случайных величин (дисперсии которых равномерно ограничены) теряют характер случайной величины. Объясняется это тем, что отклонения каждой из величин от своих математических ожиданий могут быть как положительными, так и отрицательными, а в среднем арифметическом они взаимно исключаются.

Теорема Чебышева справедлива и для непрерывных случайных величин и является доказательством связи между случайностью и необходимостью.

Приведем пример применения теоремы Чебышева к решению практической задачи.

Обычно для измерения физической величины производят несколько измерений и их среднее арифметическое принимают в качестве искомого числа. При каких условиях этот способ измерения можно считать правильным? Ответ на этот вопрос дает теорема Чебышева.

Действительно, рассмотрим результаты каждого измерения как случайные величины X_1, X_2, …, X_n. К этим величинам можно применить теорему Чебышева, если выполняются следующие условия:

1. Случайные величины попарно независимы. Выполняется, так как результат каждого измерения не зависит от результатов остальных.
2. Имеют одно и тоже математическое ожидание. Выполняется, так как все измерения произведены без систематических (одного знака) ошибок.
3. Дисперсии их равномерно ограничены. Выполняется, так как прибор обеспечивает определенную точность измерений. Хотя при этом результаты отдельных измерений различны, но отклонение их ограничено.
4. Если указанные требования выполнены, применим к ре-

зультатам измерений теорему Чебышева:

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon .$$

При большом числе измерений среднее арифметическое очень мало отличается от истинного значения измеряемой величины.

Итак, теорема Чебышева указывает условия, при которых описанный способ измерения может быть применен. Однако ошибочно думать, что, увеличивая число измерений, можно достичь большой точности. Дело в том, что сам прибор дает показания с точностью $\pm\alpha$; поэтому каждый из результатов измерений, а, следовательно, и их среднее арифметическое, будут получены с точностью, не превышающей точности прибора.

На теореме Чебышева основан применяемый в математической статистике выборочный метод, суть которого состоит в том, что по небольшой случайной выборке судят о всей совокупности исследуемых объектов. Например, о качестве зерна судят по небольшой его пробе.

4.2. Теорема Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p . Можно ли предсказать, какова будет относительная частота появлений событий? Положительный ответ на этот вопрос дает теорема Бернулли, которая получила название

«Закона больших чисел» и положила начало теории вероятности как науке. Простое доказательство теоремы Бернулли было дано П.Л. Чебышевым.

Теорема

Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события A постоянна, то к единице стремится вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет мало, если число испытаний велико.

Другими словами, если ε – очень малое положительное число, то при соблюдении условий теоремы имеет место равенство:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Доказательство

Обозначим через X_1 дискретную случайную величину – число появлений события в первом испытании, через X_2 – во втором, ..., X_n – в n испытании. Ясно, что каждая величина может принять лишь два значения: 1 (событие A произошло) с вероятностью p и 0 (событие не произошло) с вероятностью $1-p=q$.

Применяя теорему Чебышева к рассматриваемым величинам, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Приняв во внимание, что математическое ожидание a каждой из величин X_i равно $a=p$, получим:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Остается показать, что

$$\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}=\frac{m}{n}.$$

Действительно, каждая из величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ при появлении события в соответствующем испытании принимает значение, равное единице; следовательно, сумма $X_1+X_2+\ldots+X_n$ равна числу m появлений событий в n испытаниях, а значит:

$$\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}=\frac{m}{n}.$$

Учитывая это равенство, получим:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Итак, теорема Бернулли утверждает, что при $n\to\infty$ относительная частота стремится по вероятности к p. Теорема Бернулли объясняет, почему относительная частота при большом числе испытаний обладает свойством устойчивости и доказывает статистическое определение вероятности.

Контрольные вопросы и задания

1. Что доказывает теорема Чебышева?
2. Приведите пример применения теоремы Чебышева.
3. Какой метод математической статистики основан на теореме Чебышева?
4. Какое определение вероятности доказывает теорема Бернулли?
5. Решите задачи (67-70).

Тема 5. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

5.1. Определение функции распределения

Дискретная случайная величина может быть задана перечислением всех ее возможных значений и их вероятностей. Но такой способ задания неприменим для непрерывных случайных величин. С этой целью и вводят функции распределения вероятностей случайной величины.

Пусть x – действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что X примет значение меньшее x, т.е. вероятность события $X < x$, обозначим через $F(x)$.

Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение меньше x, т.е. $F(x) = P(X < x)$.

Геометрически это равенство определяется так: $F(x)$ есть вероятность того, что случайная величина имеет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки x.

Иногда вместо термина «функция распределения» используют термин «интегральная функция».

Сейчас можно дать более точное определение непрерывной случайной величины: случайную величину называют ***непрерывной***, если ее интегральная функция есть непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция с непрерывной производной.

5.2. Свойства функции распределения

Свойство 1

Значение функции распределения принадлежит отрезку $[0;\ 1]$:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

Свойство вытекает из определения функции как вероятности: вероятность всегда есть неотрицательное число, не больше единицы.

Свойство 2

$F(x)$ – неубывающая функция, т.е. $F(x_2) \ge F(x_1)$ если $x_2 > x_1$.

Пусть $x_2 > x_1$. Событие, состоящее в том, что X примет значение, меньшее x_2, можно разделить на два несовместных события:

1. X примет значение, меньшее x, с вероятностью $P(X < x_1)$;
2. X примет значение, удовлетворяющее неравенству $x_1 \le X \le x_2$, с вероятностью $P(x_1 \le X \le x_2)$.

По теореме сложения имеем:

$$P(X < x_2) = P(x < x_1) + P(x_1 \le X \le x_2).$$

Отсюда,

$$P(X < x_2) - P(x < x_1) = P(x_1 \le X \le x_2).$$

Или

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \le X \le x_2).$$

Так как любая вероятность есть число неотрицательное, то $F(x_2) - F(x_1) \ge 0$ или $F(x_2) \ge F(x_1)$.

Следствие 1

Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(a;\ b)$, равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a).$$

Следствие 2

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.

Свойство 3

Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a;\ b)$, то:

1. $F(x) = 0$ при $x \le a$;
2. $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

1. Пусть $x_1 \le a$. Тогда событие $X < x_1$ невозможно (т.к. значений, меньших x_1, величина X по условию не имеет) и, следовательно, вероятность его равна нулю.
2. Пусть $x_2 \ge b$. Тогда событие $X < x_2$ достоверно (т.к. все

возможные значения X меньше x_2) и, следовательно, вероятность его равна единице.

Следствие 1

Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей оси x, то справедливы следующие соотношения:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

Доказанные свойства позволяют представить, как выглядит график функции распределения непрерывной случайной величины показано на рисунке 2.1.

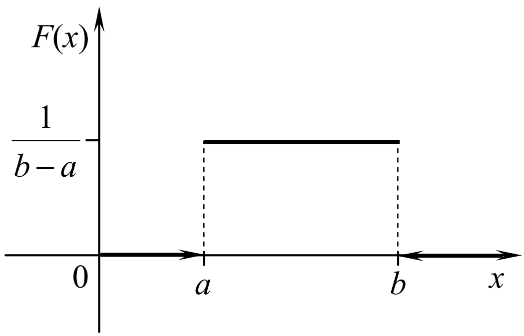

Рисунок 2.1

5.3. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Непрерывную случайную величину задают, используя другую функцию, которую называют плотностью распределения или плотностью вероятности, а также дифференциальной функцией.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют функцию $f(x)$ – первую производную от функции распределения $F(x)$:

$$f(x) = F'(x)$$

Заметим, что для описания распределения вероятностей дискретной случайной величины плотность распределения неприменима. Зная плотность распределения, можно вычислить вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее заданному интервалу. Вычисление основано на теореме.

Теорема

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(a;\ b)$, равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(X)dX\ .$$

Доказательство

Используем соотношение:

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a)\,.$$

По формуле Ньютона-Лейбница:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(X)dX = \int_a^b f(X)dX\ .$$

Следовательно,

$$P(a \le X < b) = \int_a^b f(X)dX .$$

Так как $P(a \le X < b) = P(a < X < b)$, то получим:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(X)dX .$$

Геометрически полученный результат объясняется так: вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу $(a;\ b)$, равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью OX, кривой распределения $f(x)$ и прямыми $X = a$ и $X = b$.

В частности, если $f(x)$ – четная функция и концы интервала симметричны относительно начала координат, то:

$$P(-a < X < a) = P(|X| < a) = 2\int_0^a f(X)dX .$$

Зная плотность распределения $f(X)$, можно найти и функцию распределения $F(X)$ по формуле:

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(X)dx .$$

5.4. Свойства плотности распределения

Свойство 1

Плотность распределения – неотрицательная функция

$$f(X) \ge 0 .$$

График плотности распределения называют кривой распределения.

Свойство 2

Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до ∞ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(X)dX = 1.$$

В частности, если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a;\ b)$, то

$$\int_{a}^{b} f(X)dX = 1.$$

5.5. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Пусть непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(X)$. Допустим, что все возможные значения X принадлежат отрезку $[a;\ b]$. Разделим этот отрезок на n отрезков длиной $\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \ldots,\ \Delta x_n$ и выберем в каждом из них произвольную точку x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Определим математическое ожидание непрерывной величины по аналогии с дискретной; составим сумму произведений возможных значений x_i на вероятности попадания их в интервал Δx_i (напомним, что произведение $f(x) \cdot \Delta x$ приближенно равно вероятности попадания X в интервал ΔX :

$$\sum x_i f(x_i)\,\Delta x_i .$$

Перейдя к пределу при стремлении к нулю длины наибольшего из отрезков, получим определенный интеграл

$$\int_a^b xf(X)dx .$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a;\ b]$, называют определенный интеграл

$$M(X) = \int_a^b xf(X)dx .$$

Если возможные значения принадлежат всей оси OX, то $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(X)dx$.

Предполагается, что несобственный интеграл сходится абсолютно, т.е. существует интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(X)dx$.

Дисперсией непрерывной случайной величины называют математическое ожидание квадрата ее отклонения.

Если возможные значения X принадлежат отрезку $[a;\ b]$, то

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(X)dx .$$

Если возможные значения принадлежат всей оси OX, то

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(X)dx .$$

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется равенством:

$$G(X) = \sqrt{D(X)}\,.$$

Свойства математического ожидания и дисперсии дискретных величин сохраняются и для непрерывных величин.

Для ***вычисления*** дисперсии используют более удобные формулы:

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(X)dx - \left[M(X)\right]^2,$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(X)dx - \left[M(X)\right]^2.$$

Контрольные вопросы и задания

1. С какой целью применяются функции распределения вероятностей случайной величины?
2. Дайте определение плотности распределения вероятностей случайной величины.
3. Решите задачи (71-88).

Тема 6. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

6.1. Равномерное распределение.
6.2. Нормальное распределение.

Плотность распределения непрерывных случайных величин называют также ***законом распределений***. Часто встречаются, например, законы равномерного, нормального и показательного распределений.

6.1. Равномерное распределение

Распределение вероятностей называется ***равномерным***, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения имеет постоянное значение.

Найдем плотность равномерного распределения $f(x)$, считая, что все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a;\, b)$, на котором функция $f(x)$ сохраняет постоянные значения.

По условию $f(x)=0$ при $x<a$ и $x>b$, то должно выполняться соотношение:

$$\int_a^b f(x)dx = 1, \quad \text{или} \quad \int_a^b c dx = 1.$$

Отсюда, $c = \dfrac{1}{\int_a^b dx} = \dfrac{1}{b-a}$.

Следовательно, искомая плотность вероятности равномерного распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le a,\\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad a<x\le b,\\ 0 & \text{при} \quad x>b.\end{cases}$$

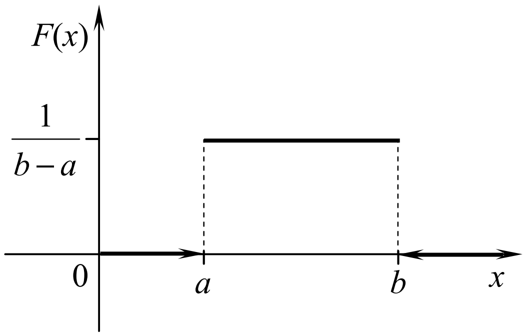

Рисунок 2.2 – График плотности равномерного распределения

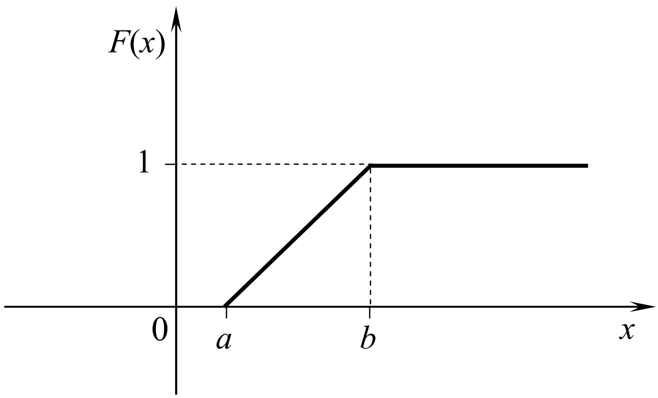

Рисунок 2.3 – График функции распределения

6.2. Нормальное распределение

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Нормальное распределение определяется двумя параметрами: a и σ. Достаточно знать эти параметры, чтобы задать нормальное распределение. Покажем вероятностный смысл этих параметров.

1. По определению математического ожидания непрерывной случайной величины:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Введем новую переменную $z=\frac{x-a}{\sigma}$. Отсюда, $x=\sigma z+a$, $dx=\sigma dx$. Приняв во внимание, что новые пределы интегрирования равны старым, получим:

$$M(X)=\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma z+a)e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma ze^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

Первое слагаемое равно нулю (под знаком интеграла нечетная функция; пределы интегрирования симметричны относительно начала координат).

Второе слагаемое равно a (интеграл Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$).

Следовательно, $M(x) = a$, т.е. ***математическое ожидание нормального распределения равно параметру*** a.

2. По определению дисперсии непрерывной случайной величины, учитывая, что $M(X) = a$, имеем:

$$D(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma}} dx .$$

Введем новую переменную $z = \dfrac{x-a}{\sigma}$. Отсюда

$$x - a = \sigma z, \quad dx = \sigma dz, \quad D(x) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} z \cdot z e^{-\frac{z^2}{2}} dz .$$

Интегрируя по частям, положив, $u = z$, $dv = z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$, найдем $D(X) = \sigma^2$.

Следовательно, $\sigma(X) = \sqrt{D(X) = \sqrt{\sigma^2}} = \sigma$.

Итак, ***среднее квадратическое отклонение нормального распределения равно параметру*** σ .

Замечание

Общим называют нормальное распределение с параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$. Например, если X – нормальная вели чина с параметрами a и σ, то $U = \dfrac{x-a}{\sigma}$ – нормированная величина, причем $M(U) = 0, \quad \sigma(U) = 1$.

Плотность нормированного распределения:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Эта функция табулирована (приложение 1).

График плотности нормального распределения называют ***нормальной кривой*** (кривой Гаусса).

Исследуем функцию $y = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ методом дифференциального исчисления.

Функция определена на всей оси OX.

1. При всех значениях x функция положительная.
2. Предел функции при возрастании x (по абсолютной ве личине) равен нулю: $\lim\limits_{|x|\to\infty} y = 0$. Ось OX служит горизонтальной асимптотой графика.
3. Исследуем функцию на экстремум. Найдем первую производную:

$$y' = -\frac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad \begin{aligned} &y' = 0 \quad \text{при} \quad x = a, \\ &y' > 0 \quad \text{при} \quad x < a, \\ &y' < 0 \quad \text{при} \quad x > a. \end{aligned}$$

Следовательно, при $x = a$ функция имеет максимум, равный $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

4. График функции симметричен относительно прямой $x = a$.
5. Исследуем функцию на точки перегиба. Найдем вторую производную:

$$y'' = -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \left[1 - \frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right].$$

При $x = a + \sigma$ и $x = a - \sigma$ вторая производная $y'' = 0$, а при переходе через эти точки она меняет знак (в этих точках $y = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}\, e}$). Следовательно, точки графика:

$$\left(a - \sigma;\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}\cdot e}\right) \text{ и } \left(a + \sigma;\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}\cdot e}\right).$$

На рис. 2.4 изображена нормальная кривая при $a = 1$ и $\sigma = 2$.

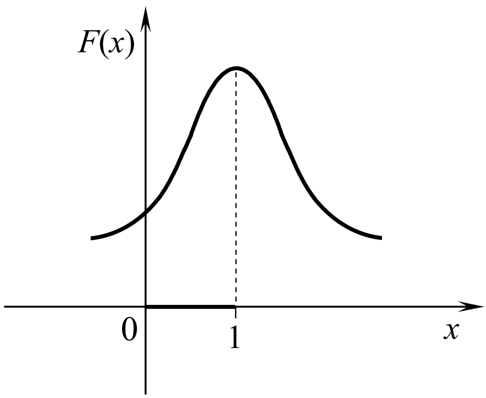

Рисунок 2.4

Изменение величины параметра a не изменяет форму нормальной кривой, а приводит лишь к ее сдвигу вдоль оси OX .

Влияние изменения параметра σ на форму нормальной кривой приведено на рис. 2.5.

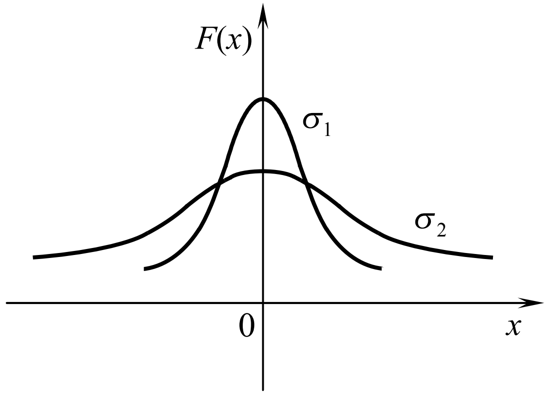

Рисунок 2.5

$$\sigma_1 < \sigma_2 \quad a = 0.$$

Но при любых значениях параметров a и σ площадь, ограниченная нормальной кривой и осью OX , всегда равна единице.

При $a = 1$ и $\sigma = 1$ нормальную кривую называют ***нормированной***.

Если случайная величина X распределена по нормальному закону, то вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\ \beta)$, равна:

$$p(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx .$$

Преобразуем эту формулу так, чтобы можно было пользоваться таблицами. Введем новую переменную $z = \dfrac{x-a}{\sigma}$.

Отсюда, $x = \sigma z + a, \quad dx = \sigma dz$. Найдем новые пределы интегрирования. Если $x = a$, то $z = \dfrac{\alpha - a}{\sigma}$. Если $x = \beta$, то $z = \dfrac{\beta - a}{\sigma}$.

Таким образом, произведя несложные вычисления и используя функцию Лапласа $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$, окончательно получим:

$$p(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \qquad (2.2)$$

Значения функции Лапласа находим по таблицам (приложение 2).

Часто требуется вычислить вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины X по абсолютной величине меньше заданного положительного числа δ, т.е. требуется найти вероятность решения неравенства $|x - a| < \delta$.

Используя формулу (2.2), получим

$$P(|x - a|) < \delta = P(a - \delta < X < a + \delta) =$$

$$= \Phi\left[\frac{(a+\delta)}{\sigma}\right] - \Phi\left[\frac{(a-\delta}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Т.к. функция Лапласа – нечетная $\Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = -\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$, получим: $P(|x-a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

Если принять $\delta = \delta t$, получим $P(|x-a| < \sigma t) = 2\Phi(t)$.

Если $t = 3$, то $\sigma t = 3\sigma$.

$$P(|x-a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973.$$

В этом состоит сущность правила «***трех сигм***» 3σ.

Если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.

На практике правило «трех сигм» применяют так: если распределение изучаемой случайной величины неизвестно, но условие, указанное в правиле, выполняется, то есть основание предполагать, что изучаемая величина распределена ***нормально***.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Назовите пример равномерного распределения случайной величины.
2. Какими параметрами определяется нормальное распределение случайной величины?
3. Решите задачи (89-98).

Тема 7. ФУНКЦИЯ ОДНОГО СЛУЧАЙНОГО АРГУМЕНТА

7.1. Определение функции одного случайного аргумента

Если каждому возможному значению случайной величины X соответствует одно возможное значение случайной величины Y, то Y называют функцией случайного аргумента X: $\quad Y = \varphi(X)$.

Далее найдем распределение функции по известному распределению дискретного и непрерывного аргумента.

1. Пусть аргумент X – дискретная случайная величина.
   а) Если различным возможным значениям аргумента X соответствуют различные возможные значения функции Y, то вероятности соответствующих значений X и Y между собой равны.

Пример. Дискретная случайная величина X задана распределением (закон распределения вероятностей).

X	2	3
P	0,6	0,4

Найти распределение функции $Y = X^2$.

Решение. Найдем возможные значения Y:

$$y_1 = 2^2 = 4; \quad y_2 = 3^2 = 9.$$

Напишем искомое распределение Y:

Y	4	9
P	0,6	0,4

б) Если различным возможным значениям X соответствуют значения Y, среди которых есть равные между собой, то нужно складывать вероятности повторяющихся значений Y.

<u>Пример</u>. Дискретная случайная величина X задана распределением:

Y	-2	2	3
P	0,4	0,5	0,1

Найдем распределение функции $Y = X^2$.

<u>Решение</u>. Вероятность возможного значения $y_1 = 4$ равна сумме вероятностей несовместимых событий $x = -2$, $x = 2$, т.е. $0{,}4 + 0{,}5 = 0{,}9$. Вероятность возможного значения $y_2 = 9$ равна 0,1. Напишем искомое распределение Y:

Y	4	9
P	0,9	0,1

2. Пусть аргумент X – непрерывная случайная величина. Как найти распределение функции $Y = \varphi(X)$, зная плотность распределения случайного аргумента X?

Доказано: если $y = \varphi(x)$ – дифференцируемая строго возрастающая или строго убывающая функция, обратная функция которой $x = \psi(y)$, то плотность распределения $q(y)$ случайной величины Y находится по формуле:

$$q(y) = \int [\psi(y)] \left|\psi'(y)\right|. \tag{2.3}$$

<u>Пример</u>. Случайная величина X распределена нормально и ее математическое ожидание $a = 0$. Найдем распределение функции $Y = X^3$.

<u>Решение</u>. Так как функция $y = x^3$ дифференцируема и строго

возрастает, то можно применить формулу (2.3). Найдем функцию, обратную функции $y = x^3$: $\psi(y) = x = y^{\frac{1}{3}}$.

Найдем $f[\psi(y)]$. По условию: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. Поэтому:

$$f[\psi(y)] = f\left[y^{\frac{1}{3}}\right] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^{\frac{2}{3}}}{2\sigma^2}}. \tag{2.4}$$

Найдем производную обратной функции по y:

$$\psi'(y) = (y^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}}. \tag{2.5}$$

Найдем искомую плотность распределения, для чего подставим (2.4) и (2.5) в (2.3):

$$q(y) = \frac{1}{3\sigma y^{\frac{2}{3}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^{\frac{2}{3}}}{2\sigma^2}}.$$

Замечание

Пользуясь формулой (2.3), можно доказать, что линейная функция $Y = AX + B$ нормально распределенного аргумента X тоже распределена нормально и, чтобы найти математическое ожидание Y, надо в выражении функции подставить вместо аргумента X его математическое ожидание a:

$$M(Y) = Aa + B.$$

Чтобы найти среднее квадратическое отклонение Y, надо среднее квадратическое отклонение аргумента X умножить на модуль коэффициента при X:

$$\sigma(Y) = |A|\sigma(x).$$

Пример. Найти плотность распределения линейной функции $Y = 3x + 1$, если аргумент распределен нормально, математическое ожидание $a = 2$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 0,5$.

Решение. $M(Y) = 3 \cdot 2 + 1 = 7, \quad \sigma(Y) = 3 \cdot 0,5 = 1,5.$

Искомая плотность распределения имеет вид:

$$q(y) = \frac{1}{1,5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-7)^2}{[2\cdot(1,5)^2]}}.$$

7.2. Математическое ожидание функции одного случайного аргумента

Задана функция $Y = \varphi(X)$ случайного аргумента X. Нужно найти математическое ожидание этой функции, зная закон распределения аргумента.

1. Пусть аргумент X – дискретная случайная величина с возможными значениями $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, вероятности которых равны $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$. Y – дискретная случайная величина с возможными значениями $y_1 = \varphi(x_1)$, $y_2 = \varphi(x_2), \quad \ldots, \quad y_n = \varphi(x_n)$.

Так как событие «величина X приняла значение x_i» ведет за собой событие «величина Y приняла значение $\varphi(x_i)$», то вероятности возможных значений Y соответственно равны $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n$. Следовательно, математическое ожидание функции:

$$M[\varphi(x)] = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i \ . \qquad (2.6)$$

Пример. Дискретная случайная величина X задана распределением:

X	1	3	5
P	0,2	0,5	0,3

Найти математическое ожидание функции

$$Y=\varphi(X)=X^2+1.$$

Решение. Найдем возможные значения Y:

$\varphi(1)=1^2+1=2;\quad \varphi(3)=3^2+1=10;\quad \varphi(5)=5^2+1=26.$

Математическое ожидание функции Y равно:

$$M\left[X^2+1\right]=2\cdot 0{,}2+10\cdot 0{,}5+26\cdot 0{,}3=13{,}2.$$

2. Пусть аргумент X – непрерывная случайная величина, заданная плотностью распределения $f(x)$. Для нахождения математического ожидания функции $Y=\varphi(X)$ нужно сначала найти плотность распределения $q(y)$ величины Y, а затем использовать формулу:

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} yq(y)dy.$$

Если нахождение функции $q(y)$ является трудным, то математическое ожидание находят по формуле:

$$M[\varphi(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(X)f(X)dx.$$

В частности, если возможные значения X принадлежат интервалу $(a;\ b)$, то

$$M[\varphi(X)]=\int_{a}^{b}\varphi(x)f(x)dx. \qquad (2.7)$$

Пример. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=\sin x$ в интервале $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание функции $Y=\varphi(X)=X^2$.

<u>*Решение*</u>. Используем формулу (2.7). По условию, $f(x)=\sin x$, $\varphi(x)=x^2$, $a=0$. $b=\frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$M[\varphi(X)]=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx .$$

Интегрируя по частям, получим $M\left[X^2\right]=\pi-2$.

7.3. Распределение «хи квадрат»

Пусть $X_i\ (i=1,2,\ldots,n)$ – нормальные независимые случайные величины, математическое ожидание каждой из них равно нулю, а среднее квадратическое отклонение – единице. Тогда сумма квадратов этих величин $\chi^2=\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ распределена по закону χ^2 «χ квадрат» с $k=n$ степенями свободы: если же эти величины связаны одним линейным соотношением, например, $\sum X_i = n\overline{X}$, то число степеней свободы $k=n=1$. Плотность этого распределения:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0, \\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{k}{2}-1} & x>0, \end{cases}$$

где $\Gamma(x) = \int\limits_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ – гамма функция, в частности, $\Gamma(n+1) = n!$

Отсюда видно, что распределение «χ квадрат» определяется одним параметром – числом степеней свободы k. С увеличением числа свободы распределение приближается к нормальному.

7.4. Распределение Стьюдента

Пусть Z – нормальная случайная величина, причем $M(Z) = 0$, $\sigma(Z) = 1$, а V – независимая от Z величина, которая распределена по закону χ^2 с k степенями свободы. Тогда величина $T = \dfrac{Z}{\sqrt{\dfrac{V}{k}}}$ имеет распределение, которое называют – распределением Стьюдента (псевдоним английского ученого В. Госсета), с k степенями свободы. С возрастанием числа степеней свободы распределение Стьюдента быстро стремится к нормальному.

Контрольные вопросы и задания

1. Определите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение линейной функции.
2. Назовите параметр распределения «хи квадрат».
3. При каких условиях распределение Стьюдента стремится к нормальному распределению?

Тема 8. ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

8.1. Определение показательного распределения

Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которая задана плотностью:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0,\end{cases}$$

где λ – постоянная положительная величина.

Показательное распределение зависит только от одного параметра λ, поэтому оно имеет преимущество по сравнению с распределениями, зависящими от большого числа параметров, т.к. эти параметры неизвестны и нахождение их значений требует дополнительных вычислений.

Найдем функцию распределения показательного закона:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\lambda\int_{0}^{x} e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda x}.$$

Итак,

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0,\\ 1-e^{-\lambda x} & x\geq 0.\end{cases}$$

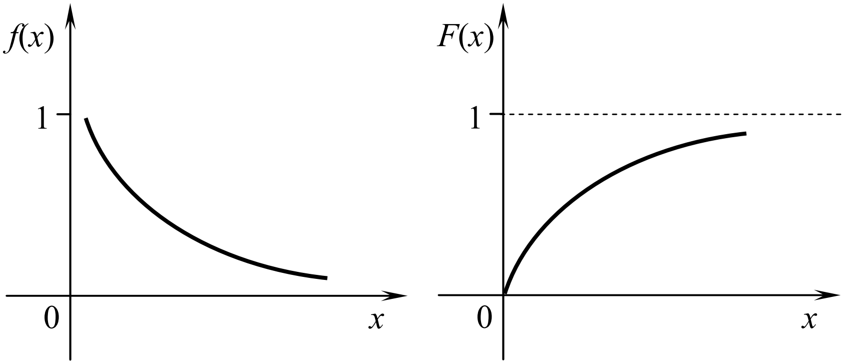

Рисунок 2.6 – Графики плотности и функции распределения показательного закона

8.2. Вероятность попадания в заданный интервал показательного распределения случайной величины

Найдем вероятность попадания в интервал $(a;\ b)$ непрерывной случайной величины X, которая распределена по показательному закону, заданному функцией распределения $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $(x \geq 0)$.

Используем формулу $P(a < x < b) = F(b) - F(a)$.

Учитывая, что $F(a) = 1 - e^{-\lambda x}$, $F(b) = 1 - e^{-\lambda b}$ получим

$$P(a < x < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}. \qquad (2.8)$$

Значение функции e^{-x} находят по таблице.

Пример. Непрерывная случайная величина распределена по закону $f(x) = 2e^{-2x}$ при $x \geq 0$: $f(x) = 0$ при $x > 0$.

Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в интервал $(0{,}3;\, 1)$.

Решение. По условию $\lambda = 2$. Используем формулу (2.8):

$$P(0,3 < X < 1) = e^{-(2\cdot 0,3)} - e^{-(2\cdot 1)} = e^{-0,6} - e^{-2} =$$

$$= 0,54881 - 0,13534 \approx 0,41 .$$

8.3. Числовые характеристики показательного распределения

Пусть непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону. Найдем математическое ожидание:

$$M(X) = \int_0^\infty xf(x)dx = \lambda\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx .$$

Интегрируя по частям, получим: $M(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Итак, математическое ожидание показательного распределения равно обратной величине параметра λ.

Найдем дисперсию:

$$D(X) = \int_0^\infty x^2 f(x)dx - [M(x)]^2 = \lambda\int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2} .$$

Интегрируя по частям, получим: $\lambda\int\limits_0^\infty x^2 e^{-\lambda x}dx = \dfrac{2}{\lambda^2}$, следовательно, $D(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$. Значит среднее квадратическое отклонение: $\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \dfrac{1}{\lambda}$.

Показательное распределение широко применяется в теории надежности, одним из основных понятий которой является функция надежности.

8.4. Функция надежности

Будем называть ***элементом*** любое устройство независимо от его сложности.

Пусть элемент начинает работать в момент времени $t = 0$, а через промежуток времени t происходит отказ. Обозначим через T непрерывную случайную величину – длительность времени безотказной работы элемента. Если элемент проработал безотказно время, меньше t, то, следовательно, за время t поступит отказ.

Следовательно, функция $F(t) = P(T < t)$ определяет вероятность безотказной работы за это время, т.е. вероятность противоположного события $T > t$ равна:

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t).$$

Функцией надежности $R(t)$ называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы элемента за промежуток времени t:

$$R(t) = P(T > t).$$

8.5. Показательный закон надежности

Часто промежуток времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение, функция распределения которого $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Следовательно, функция надежности имеет вид:

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}.$$

Показательным законом надежности называют функцию надежности, определяемую равенством $R(t)=e^{-\lambda t}$, где λ – интенсивность отказов.

Если отказы элементов в случайные моменты времени образуют простейший поток, то вероятность того, что за промежуток времени t не наступит ни одного отказа $P_t(0)=e^{-\lambda t}$, $P_t(0)=R(t)$.

Пример. Время безотказной работы элемента распределено по закону $f(t)=0{,}02e^{-0{,}02t}$ при $t\geq 0$. Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно 100 часов.

Решение. По условию интенсивность отказов $\lambda=0{,}02$. Поэтому $R(100)=e^{-0{,}02\cdot 100}=e^{-2}=0{,}13554$.

Искомая вероятность того, что элемент проработает безотказно 100 часов, равна 0,14.

Показательный закон надежности имеет важное свойство: вероятность безотказной работы элемента за промежуток времени t не зависит от времени предшествующей работы, а зависит только от величины этого промежутка времени (при заданной величине λ).

Для доказательства свойства введем обозначение событий:

A – безотказная работа элемента в промежутке времени $(0;t_0)$.

B – безотказная работа элемента в промежутке времени $(t_0;t_0+t)$.

Тогда AB – безотказная работа в промежутке времени $(0;t_0+t)$.

Найдем вероятности событий по формуле:

$$P(A) = e^{-\lambda t_0}, \quad P(B) = e^{-\lambda t}, \quad P(AB) = e^{-\lambda(t_0+t)}.$$

Найдем условную вероятность того, что элемент будет работать безотказно в промежутке $(t_0;\ t_0 + t)$, при условии, что он уже проработал безотказно в промежутке времени $(0;\ t_0)$:

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{e^{-\lambda t_0} e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t_0}} e^{-\lambda t}.$$

Итак, в случае показательного закона надежности безотказная работа элемента «в прошлом» не влияет на величину вероятности его безотказной работы в настоящем времени.

Контрольные вопросы и задания

1. Назовите параметр, определяющий показательное распределение.
2. Дайте определение функции надежности.
3. Определите главное свойство функции надежности.
4. Решите задачи (99-107).

Глава 3. РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

ТИПЫ ЗАДАЧ И ПРИМЕРЫ ИХ РЕШЕНИЯ:

– ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ;

– ЗАДАЧИ НЕПОСРЕДСТВЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ;

– ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ;

– ПОВТОРЕНИЕ ИСПЫТАНИЙ;

– ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ;

– ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ;

– ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН;

– ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ.

Тема 1. ТИПЫ ЗАДАЧ И ПРИМЕРЫ ИХ РЕШЕНИЯ

1.1. Основные формулы комбинаторики

При непосредственном вычислении вероятностей используют формулы комбинаторики. Комбинаторика изучает количество комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов заданного конечного множества.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок $P_n = n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

По определению $0! = 1$. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае комбинации с повторениями вычисляют по другим формулам. Например, если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и т.д., то число перестановок с повторениями:

$$P_n(n_1,\ n_2,\ \ldots) = \frac{n!}{(n_1!\ n_2! \ldots)}.$$

<u>*Пример*</u>. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1,

2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

Решение. Искомое число трехзначных чисел $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Размещением называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком.

Число всех возможных размещений:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1).$$

Пример. Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Решение. Искомое число сигналов $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$.

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример. Сколько способов нужно, чтобы выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

Решение. Искомое число способов: $C_{10}^2 = \frac{10!}{2!\,8!} = 45$.

Число размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством: $A_n^m = P_m C_n^m$.

При решении задач комбинаторики используют следующие правила:

Правило произведения

Если некоторый объект A может (быть) выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A, либо B можно $(m+n)$ способами.

Правило произведения

Если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B может быть выбран n способами, то пара объектов $(A; B)$ в указанном порядке может быть выбрана $m\,n$ способами.

1.2. Задачи непосредственного вычисления вероятностей

Задача 1

Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

Решение

Обозначим через A событие – набрана нужная цифра. Абонент мог набрать любую из 10 цифр, потому общее число возможных элементарных исходов равно 10. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Благоприятствует событию A лишь один исход (нужная цифра лишь одна). Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(A)=\frac{1}{10}.$$

Задача 2

Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и, помня, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение

Обозначим через A событие – набраны две нужные цифры. Всего можно набрать столько различных цифр, сколько может быть составлено размещений из десяти цифр по две, т.е.:

$$A_{10}^{2} = 10 \cdot 9 = 90 .$$

Общее число элементарных исходов равно 90. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Искомая вероятность равна:

$$P(A) = \frac{1}{90} .$$

Задача 3

Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях – четная, причем на грани хотя бы одной из костей появится шестерка.

Решение

На выпавшей грани «первой» игральной кости может появиться одно очко, два очка, … шесть очков. Аналогично, шесть элементарных исходов возможны при бросании «второй» кости. Каждый из исходов бросания «первой» кости может сочетаться с каждым из исходов бросания «второй». Поэтому, общее число возможных элементарных исходов равно $6 \times 6 = 36$. Эти исходы единственно возможны и, в силу симметрии костей, равновозможны. Благоприятствующими интересующему нас событию являются следующие пять исходов (первым записано число очков, выпавших на «первой» кости, вторым – число очков, выпавшим на «второй» кости; далее найдена сумма очков):

1) 6; 2; 6+2=8;
2) 6; 4; 6+4=10;
3) 6; 6; 6+6=12;
4) 2; 6; 2+6=8;
5) 4; 6; 4+6=10.

Искомая вероятность равна отношению числа благоприятствующих исходов к числу всех возможных элементарных исходов: $P = \dfrac{5}{36}$.

1.3. Теоремы теории вероятностей

Задача 1

В ящике 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение

Появление цветного шара означает появление любо красного, либо синего шара.

Вероятность появления красного шара (событие A)

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Вероятность появления синего шара (событие B)

$$P(A) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

События A и B несовместны (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому теорема сложения применима.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

Задача 2

Стрелок стреляет по мишени, разделенной на 3 области. Вероятность попадания в первую область равна 0,45, во вторую – 0,35. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет либо в первую, либо во вторую область.

Решение

Событие A – стрелок попал в первую область.

Событие B – стрелок попал во вторую область.

Эти события несовместны (попадание в одну область исключает попадание в другую), поэтому по теореме сложения искомая вероятность равна:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=0{,}45+0{,}35=0{,}8.$$

Задача 3

В ящике 3 белых и 3 черных шара. Из ящика дважды отбирают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие B), если при первом испытании был отобран черный шар (событие A).

Решение

После первого испытания в урне осталось 5 шаров, из них 3 белых. Искомая условная вероятность

$$P_A(B)=\frac{3}{5}.$$

Этот результат можно получить по формуле:

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)},\quad P(A)>0.$$

Вероятность появления черного шара при первом испытании:

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Найдем вероятность $P(AB)$ того, что при первом испытании появится черный шар, а во втором – белый. Общее число исходов – совместного появления двух шаров, безразлично какого цвета, равно числу размещений:

$$A_6^2=6\cdot 5=30.$$

Из этого числа исходов событию AB благоприятствуют 3·3=9 исходов. Следовательно,

$$P(AB)=\frac{9}{30}=\frac{3}{10}.$$

Искомая вероятность:

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{3\cdot 2}{10\cdot 1}=\frac{3}{5}.$$

Задача 4

В цехе работают 7 мужчин и 3 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны 3 человека. Найти вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами.

Решение

Событие A – первым отобран мужчина.

Событие B – вторым отобран мужчина.

Событие C – третьим отобран мужчина.

Вероятность того, что первым будет отобран мужчина:

$$P(A) = \frac{7}{10}.$$

Вероятность того, что вторым отобран мужчина, при условии, что первым уже был отобран мужчина, т.е. условная вероятность события B:

$$P_A(B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Вероятность того, что третьим будет отобран мужчина, при условии, что уже отобраны двое мужчин, т.е. условная вероятность события C:

$$P_{AB}(C) = \frac{5}{8}.$$

Искомая вероятность того, что все отобранные лица есть мужчины:

$$P(ABC) = \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{7}{24}.$$

Задача 5

Вероятности появления каждого из трех независимых событий A_1, A_2, A_3 соответственно равны p_1, p_2, p_3. Найти вероятность появления только одного из этих событий.

Решение

Заметим, что, например, появление только первого события A_1 равносильно появлению события $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$ (появилось первое и не появилось второе и третье события).

Введем обозначения:

B_1 – появилось только событие A_1, т.е. $B_1 = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

B_2 – появилось только событие A_2, т.е. $B_2 = \overline{A_1}A_2\overline{A_3}$.

B_3 – появилось только событие A_3, т.е. $B_3 = \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$.

Чтобы найти вероятность появления только одного из событий A_1, A_2, A_3 надо найти вероятность $P(B_1 + B_2 + B_3)$ появления одного из событий B_1, B_2, B_3.

Так как события B_1, B_2, B_3 несовместны, то по теореме сложения:

$$P(B_1 + B_2 + B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3).$$

События A_1, A_2, A_3 независимы, следовательно независимы события $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$, поэтому к ним применима теорема умножения:

$$P(B_1) = P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}) = P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3}) = p_1q_2q_3.$$

Аналогично,

$$P(B_2) = P(A_2\overline{A_1}\,\overline{A_3}) = P(A_2)\cdot P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_3}) = p_2q_1q_3,$$

$$P(B_3) = P(A_3\overline{A_1}\,\overline{A_2}) = P(A_3)\cdot P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2}) = p_3q_1q_2.$$

Отсюда

$$P(B_1 + B_2 + B_3) = p_1 q_2 q_3 + p_2 q_1 q_3 + p_3 q_1 q_2 .$$

Задача 6

Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: $p_1 = 0{,}8$, $p_2 = 0{,}7$, $p_3 = 0{,}9$. Найти вероятность хотя бы одного попадания (событие A) при одном залпе из всех орудий.

Решение

Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результатов стрельбы из других орудий, поэтому рассматриваемые события A_1 (попадание первого орудия), A_2 (попадание второго орудия) и A_3 (попадание третьего орудия) независимые в совокупности.

Вероятности событий, противоположных событиям A_1, A_2, A_3 (вероятности промахов), соответственно равны

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2 ;$$

$$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3 ;$$

$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1 .$$

Искомая вероятность:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}994 .$$

Задача 7

Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадет в цель, равна 0,4. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,9 он попал в цель хотя бы один раз?

Решение

Обозначим через A событие «при n выстрелах стрелок попадет в цель хотя бы один раз».

События, состоящие в попадании в цель при первом, втором выстрелах и т.д., независимы в совокупности, поэтому применима формула:

$$P(A) = 1 - q^n,$$

По условию, $P(A) \geq 0{,}9$, $p = 0{,}4$, $q = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$, получим:

$$1 - 0{,}6^n \geq 0{,}9;$$

$$0{,}6^n \leq 0{,}1.$$

Прологарифмируем это неравенство:

$$n \lg 0{,}6 \leq \lg 0{,}1;$$

$$n = \frac{\lg 0{,}1}{\lg 0{,}6} = 4{,}5.$$

Итак, $n \geq 5$, т.е. стрелок должен произвести не менее 5 выстрелов.

Задача 8

Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартная, равна 0,8, а второго – 0,9. Найти вероятность того, что взятая произвольно деталь из любого набора – стандартная.

Решение

Обозначим через A событие «взятая из набора деталь стандартная».

Деталь может быть взята либо из первого набора (событие B_1), либо из второго набора (событие B_2).

Вероятность того, что деталь взята из первого набора:

$$P(B_1) = \frac{1}{2}.$$

Вероятность того, что деталь взята из второго набора:

$$P(B_2) = \frac{1}{2}.$$

Условная вероятность того, что из первого набора будет взята стандартная деталь:

$$P_{B_1}(A) = 0{,}8.$$

Условная вероятность того, что из второго набора будет взята стандартная деталь:

$$P_{B_2}(A) = 0{,}9.$$

Искомая вероятность того, что взятая произвольно деталь – стандартная, по формуле полной вероятности равна:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) =$$

$$= 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}9 = 0{,}85.$$

Задача 9

В первом ящике находится 20 деталей, из них 18 стандартных; во втором ящике – 10 деталей, из них 9 стандартных. Из второго ящика произвольно взята деталь и переложена в первый ящик. Найти вероятность того, что деталь, произвольно взятая из первого ящика, будет стандартной.

Решение

Обозначим через A событие «из первого ящика взята стандартная деталь».

Из второго ящика могла быть взята либо стандартная деталь (событие B_1), либо нестандартная (событие B_2).

Вероятность того, что из второго ящика взята стандартная деталь, $P(B_1)=\frac{9}{10}$.

Вероятность того, что из второго ящика взята нестандартная деталь, $P(B_2)=\frac{1}{10}$.

Условная вероятность того, что из первого ящика взята стандартная деталь, при условии, что из второго ящика в первый была переложена стандартная деталь, равна:

$$P_{B_1}(A)=\frac{19}{21}.$$

Условная вероятность того, что из первого ящика взята стандартная деталь, при условии, что из второго ящика в первый была переложена нестандартная деталь, равна:

$$P_{B_2}(A)=\frac{18}{21}.$$

Условная вероятность того, что из первого ящика будет взята стандартная деталь, по формуле полной вероятности равна:

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)=$$

$$=\frac{9}{10}\cdot\frac{19}{21}+\frac{1}{10}\cdot\frac{18}{21}=0{,}9.$$

Задача 10

Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру, равна 0,6, а ко второму – 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0,94, а вторым – 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

Решение

Обозначим через A событие, состоящее в том, что годная деталь признана стандартной. Можно сделать два предположения (гипотезы):

1) деталь проверил первый контролер (гипотеза B_1);

2) деталь проверил второй контролер (гипотеза B_2).

Искомую вероятность того, что деталь проверил первый контролер, найдем по формуле Бейеса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A)}.$$

По условию задачи:

$P(B_1) = 0{,}6$ (вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру);

$P(B_2) = 0{,}4$ (вероятность того, что деталь попадет ко второму контролеру);

$P_{B_1}(A) = 0{,}94$ (вероятность того, что годная деталь будет признана первым контролером стандартной);

$P_{B_2}(A)=0{,}48$ (вероятность того, что годная деталь будет признана вторым контролером стандартной).

Искомая вероятность:

$$P_A(B_1)=\frac{0{,}6\cdot 0{,}94}{0{,}6\cdot 0{,}94+0{,}4\cdot 0{,}98}\approx 0{,}59\,.$$

До испытания вероятность гипотезы B_1 равнялась 0,6, а после того, как стал известен результат испытания, вероятность этой гипотезы изменилась, и стала равной 0,59. Следовательно, использование формулы Бейеса позволило переоценить вероятность рассматриваемой гипотезы.

Задача 11

Батарея из трех орудий произвела залп, причем два снаряда попали в цель. Найти вероятность того, что первое орудие попало в цель, если вероятности попадания в цель первым, вторым и третьим орудиями соответственно равны $P_1=0{,}4$, $P_2=0{,}3$, $P_3=0{,}5$.

Решение

Обозначим через A событие – два орудия попали в цель. Сделаем две гипотезы:

B_1 – первое орудие попало в цель;

B_2 – первое орудие не попало в цель.

По условию $P(B_1)=0{,}4$; следовательно (событие B_2 противоположно событию B_1) $P(B_2)=1-0{,}4=0{,}6$.

Найдем условную вероятность $P_{B_1}(A)$, т.е. вероятность того, что в цель попало два снаряда, причем один из них послан первым орудием и, следовательно, второй – либо вторым орудием, либо третьим (при этом второе орудие дало промах). Эти два события несовместны, поэтому применима теорема сложения:

$$P_{B_1}(A) = p_2 q_3 + p_3 q_2 = 0{,}3 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}5\,.$$

Найдем условную вероятность $P_{B_2}(A)$, т.е. вероятность того, что в цель попало два снаряда, причем первое орудие дадало промах, или вероятность того, что в цель попали второе и третье орудие. Эти два события независимы, поэтому применима теорема умножения:

$$P_{B_1}(A) = p_2 \cdot p_3 = 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15\,.$$

Искомая вероятность того, что первое орудие попало в цель, по формуле Бейеса равна:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)} =$$

$$= \frac{0{,}4 \cdot 0{,}5}{0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}6 \cdot 0{,}15} = \frac{20}{29}\,.$$

Задача 12

Два из трех независимо работающих элементов устройства отказали. Найти вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятности отказа первого, второго и третьего элементов соответственно равны $P_1 = 0{,}2$; $P_2 = 0{,}4$; $P_3 = 0{,}3$.

Решение

Обозначим через A событие – отказали два элемента. Можно сделать следующие гипотезы:

B_1 – отказали первый и второй элементы, а третий элемент исправен. События независимы, поэтому по теореме сложения:

$$P(B_1) = p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 = 0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}056\,;$$

B_2 – отказали первый и третий элементы, а второй элемент исправен:

$$P(B_2) = p_1 \cdot p_3 \cdot q_2 = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}036\,;$$

B_3 – отказали второй и третий элементы, а первый элемент исправен:

$$P(B_3) = p_2 \cdot p_3 \cdot q_1 = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}096\,;$$

B_4 – отказал только один элемент;

B_5 – отказали все три элемента;

B_6 – ни один из элементов не отказал.

Вероятности последних трех гипотез не вычислены, так как при этих гипотезах событие A невозможно и значит условные вероятности $P_{B_4}(A)$, $P_{B_5}(A)$ и $P_{B_6}(A)$ равны нулю, следовательно, равны нулю и произведения $P(B_4) \cdot P_{B_4}(A)$, $P(B_5) \cdot P_{B_5}(A)$, $P(B_6) \cdot P_{B_6}(A)$ при любых значениях вероятностей гипотез B_4, B_5, B_6.

При гипотезах B_1, B_2, B_3 событие A достоверно, то соответствующие условные вероятности равны единице:

$$P_{B_1}(A) = P_{B_2}(A) = P_{B3}(A) = 1\,.$$

По формуле полной вероятности вероятность того, что отказали два элемента,

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + P(B_3)\cdot P_{B_3}(A) =$$

$$= 0{,}056\cdot 1 + 0{,}036\cdot 1 + 0{,}096\cdot 1 = 0{,}188\,.$$

По формуле Бейеса искомая вероятность того, что отказали первый и второй элементы,

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}056}{0{,}118} \approx 0{,}3\,.$$

1.4. Повторение испытаний

Задача 1

Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее выиграть две партии из четырех или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются)?

Решение

Играют равносильные шахматисты, поэтому вероятность выигрыша $p = \frac{1}{2}$, следовательно, вероятность проигрыша $q = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$. Так как во всех партиях вероятность выигрыша постоянна и не зависит от последовательности выигранных партий, то применима формула Бернулли.

Найдем вероятность выигрыша двух партий из четырех:

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}\,.$$

Вероятность выигрыша трех партий из шести:

$$P_6(3) = C_6^3 p^3 q^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}.$$

Так как $P_4(2) > P_6(3)$, то вероятнее выиграть две партии из четырех, чем три из шести.

Вероятность того, что событие наступит:

а) менее k раз

б) $P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(k-1)$;

б) более k раз

в) $P_n(k+1) + P_n(k+2) + ... + P_n(n)$;

в) не менее k раз

г) $P_n(k) + P_n(k+1) + ... + P_n(n)$;

г) не более k раз

$$P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(k).$$

Задача 2

Найти вероятность того, что событие A произойдет не менее трех раз в четырех независимых испытаниях, если вероятность появления события A в одном испытании равна 0,4.

Решение

По условию задачи $k = 3$, $n = 4$, $p = 0{,}4$, $q = 1 - p = 0{,}6$.

Искомая вероятность равна:

$$P_4(3) + P_4(4) = C_4^3 p^3 q^1 + C_4^4 p^4 q^0;$$

$$C_4^3 = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1} = 4\,,\ P_4(3) = 4\cdot\left(0{,}4\right)^3\cdot 0{,}6 = 0{,}1536\,;$$

$$C_4^4 = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1} = 1\,,\ P_4(4) = 1\cdot\left(0{,}4\right)^3\cdot\left(0{,}6\right)^0 = 0{,}0256\,;$$

$$P_4(3) + P_4(4) = 0{,}1536 + 0{,}0256 = 0{,}1792\,.$$

Задача 3

Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом независимом испытании равна 0,25.

Решение

По условию $k = 70$, $n = 243$, $p = 0{,}25$, $q = 0{,}75$. Так как $n = 243$ – большое число, воспользуемся локальной теоремой Лапласа:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)\,,$$

где $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Найдем значение x:

$$x = \frac{70 - 243\cdot 0{,}25}{\sqrt{243\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75}} = \frac{9{,}25}{6{,}75} = 1{,}73\,.$$

По таблице (приложение 1) найдем

$$\varphi(1{,}73) = 0{,}1561\,.$$

Искомая вероятность:

$$P_{243}(70) = \frac{1}{\sqrt{6{,}75}}\cdot 0{,}1561 = 0{,}0231\,.$$

Задача 4

Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаниях постоянна и равна $p = 0{,}8$. Найти вероятность того, что событие произойдет:

а) не менее 75 раз и не более 90 раз;

$$P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(k-1);$$

б) не менее 75 раз;

в) не более 74 раз.

Решение

Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P_n(k_1, k_2) = \phi(x'') = \phi(x'),$$

где $x' = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x'' = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

а) По условию задачи $n = 100$; $p = 0{,}8$; $q = 0{,}2$; $k_1 = 75$; $k_2 = 90$.

$$x' = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -1{,}25;$$

$$x'' = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 2{,}5.$$

Учитывая, что функция Лапласа нечетная, т.е. $\phi(-x) = -\phi(x)$, получим:

$$P_{100}(75;90) = \phi(2{,}5) - \phi(-1{,}25) = \phi(2{,}5) + \phi(1{,}25).$$

По таблицам (приложение 2) найдем:

$$\phi(2{,}5) = 0{,}4938\,;\ \phi(1{,}25) = 0{,}3944\,.$$

Искомая вероятность:

$$P_{100}(75;90) = 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882\,.$$

б) Требование, чтобы событие произошло не менее 75 раз, означает, что число появлений события может быть равно 75, либо 76, …, либо 100. Таким образом, в нашем примере следует считать $k_1 = 75$; $k_2 = 100$.

Тогда $x' = -1{,}25$, $\quad \phi(1{,}25) = 0{,}3944$,

$$x'' = 5; \quad \phi(5) = 0{,}5\,.$$

Искомая вероятность

$$P_{100}(75;100) = 0{,}5 + 0{,}3944 = 0{,}8944\,.$$

в) События – «A произошло не менее 75 раз» и «A произошло не более 74 раз» противоположны, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице. Следовательно, искомая вероятность:

$$P_{100}(0;74) = 1 - P_{100}(75;100) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056\,.$$

Задача 5

Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать, что событие появится не менее 75 раз?

Решение

По условию $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$, $k_1 = 75$, $k_2 = n$, $P_n(75;n) = 0{,}9$.

Используем интегральную теорему Лапласа:

$$P_n(k_1,k_2)=\phi(x'')=\phi(x')=\phi\left[\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right]-\phi\left[\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right].$$

Подставляя данные задачи, получим:

$$0{,}9=\phi\left[\frac{n-0{,}8n}{\sqrt{n\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right]-\phi\left[\frac{75-0{,}8n}{\sqrt{n\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right],$$

$$0{,}9=\phi\left[\frac{\sqrt{n}}{2}\right]-\phi\left[\frac{75-0{,}8n}{0{,}4\sqrt{n}}\right].$$

Очевидно, число испытаний $n<75$, поэтому $\frac{\sqrt{n}}{2}>\frac{\sqrt{75}}{2}\approx 4{,}33$. Функция Лапласа возрастающая функция и $\phi(4)\approx 0{,}5$, тогда $\phi(\frac{\sqrt{n}}{2})=0{,}5$.

$$0{,}9=0{,}5-\phi\left[\frac{75-0{,}8n}{0{,}4\sqrt{n}}\right],\qquad \phi\left[\frac{75-0{,}8n}{0{,}4\sqrt{n}}\right]=-0{,}4.$$

По таблице (примечание 2) найдем, что $\phi(1{,}28)=0{,}4$. Отсюда $\frac{75-0{,}8n}{0{,}4\sqrt{n}}=-1{,}28$.

Решив это квадратное уравнение относительно $\sqrt{n}$, получим $\sqrt{n}=10$, $n=100$.

Задача 6

Вероятность появления в каждом из 625 независимых испытаниях равна 0,8. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,04.

Решение

По условию $n = 625$; $p = 0{,}8$; $q = 0{,}2$; $\varepsilon = 0{,}04$.

Требуется найти вероятность $P\left(\left|\frac{m}{625} - 0{,}8\right| \le 0{,}04\right)$.

Используем формулу: $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$.

Имеем:

$$P\left(\left|\frac{m}{625} - 0{,}8\right| \le 0{,}04\right) = 2\phi\left(0{,}04\sqrt{\frac{625}{0{,}8\cdot 0{,}2}}\right) = 2\phi(2{,}5).$$

По таблицам (приложение 2) найдем $\phi(2{,}5) = 0{,}4938$,

$$2\phi(2{,}5) = 2\cdot 0{,}4938 = 0{,}9876.$$

Искомая вероятность равна 0,9876.

Задача 7

Вероятность появления события в каждом из независимых испытаниях равна 0,5. Найти число испытаний n, при котором с вероятностью 0,7698 можно ожидать, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.

Решение

По условию $p = 0{,}5$; $q = 0{,}5$; $\varepsilon = 0{,}02$:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}5\right| \le 0{,}02\right) = 0{,}7698.$$

Используем формулу

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=2\phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right);$$

$$2\phi\left(0{,}02\sqrt{\frac{n}{0{,}5\cdot 0{,}5}}\right)=0{,}7698;$$

$$\phi\left(0{,}04\sqrt{n}\right)=0{,}3849.$$

По таблицам (приложение 2) найдем $\phi(1{,}2)=0{,}3849$. Следовательно, $0{,}04\sqrt{n}=1{,}2$;

$$\sqrt{n}=30;$$

$$n=900.$$

1.5. Дискретные случайные величины

Задача 1

Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

Решение

Дискретная случайная величина X (число отказавших элементов в одном опыте) имеет следующие возможные значения:

$x_1=0$ (ни один из элементов устройства не отказал),

$x_2=1$ (отказал один элемент),

$x_3=2$ (отказали два элемента),

$x_4 = 3$ (отказали три элемента).

Отказы элементов независимы один от другого, вероятности отказа каждого элемента равны между собой, поэтому применима формула Бернулли.

По условию задачи $n = 3$; $p = 0{,}1$; $q = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

$$P_3(0) = q^3 = 0{,}729;$$

$$P_3(1) = C_3^1 pq^2 = 3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}243;$$

$$P_3(2) = C_3^2 p^2 q = 3 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 = 0{,}027;$$

$$P_3(3) = p^3 = 0{,}1^3 = 0{,}001.$$

Контроль: $0{,}729 + 0{,}243 + 0{,}027 + 0{,}001 = 1$.

Напишем искомый биноминальный закон распределения X:

X	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0,027	0,001

Задача 2

В партии из 10 деталей есть 8 стандартных. Произвольно отобрали 2 детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Решение

Случайная величина X – число стандартных деталей среди отобранных деталей – имеет следующие возможные значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

По формуле

$$P(x = k) = \frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m},$$

где N – число деталей в партии,

n – число стандартных деталей,

m – число отобранных деталей,

k – число стандартных деталей среди отобранных,

находим

$$P(x=0)=\frac{C_8^0 C_2^3}{C_{10}^2}=\frac{1}{45};$$

$$P(x=1)=\frac{C_8^1 C_2^1}{C_{10}^2}=\frac{16}{45};$$

$$P(x=2)=\frac{C_8^2 C_2^0}{C_{10}^2}=\frac{28}{45}.$$

Напишем искомый закон распределения:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

Контроль: $\frac{1}{45}+\frac{16}{45}+\frac{28}{45}=1$.

Задача 3

Завод отправил в магазин 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. найти вероятность того, что в пути будет повреждено изделие:

а) ровно три;

б) менее трех;

в) более трех;

г) хотя бы одно.

Решение

Число $n = 500$ велико вероятность $p = 0{,}002$ мала и рассматриваемые события независимы, поэтому имеет место формула Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Найдем λ:

$$\lambda = np = 500 \cdot 0{,}002 = 1.$$

а) Найдем вероятность того, что будет повреждено ровно три изделия ($k = 3$):

$$P_{500}(3) = \frac{e^{-1}}{3!} = \frac{0{,}36788}{6} = 0{,}0613.$$

б) Найдем вероятность того, что будет повреждено менее трех изделий:

$$P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(3) = e^{-1} + e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2} =$$

$$= \frac{5}{2}e^{-1} = \frac{5}{2} \cdot 0{,}36788 = 0{,}9197.$$

в) Найдем вероятность P того, что будет повреждено более трех изделий. События «повреждено более трех изделий» и «повреждено не более трех изделий» (вероятность этого события обозначим через Q) противоположны, поэтому:

$$P + Q = 1;$$

$$P = 1 - Q = 1 - \left[P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) + P_{500}(3)\right].$$

Используя результаты, полученные выше, имеем:

$$P = 1 - [0{,}9197 + 0{,}0613] = 0{,}019 .$$

г) Найдем вероятность P_1 того, что будет повреждено хотя бы одно изделие. Это событие противоположно событию Q_1 – ни одно из изделий не повреждено. Поэтому:

$$P_1 + Q_1 = 1 .$$

Отсюда

$$P_1 = 1 - Q_1 = 1 - P_{500}(0) = 1 - e^{-1} = 1 - 0{,}36788 = 0{,}632 .$$

Задача 4

Устройство состоит из большого числа независимо работающих элементов с равной (очень малой) вероятностью отказа каждого элемента за время T. Найти среднее число отказавших за время T элементов, если вероятность тог, что за это время откажет хотя бы один элемент, равна 0,98.

Решение

Нужно найти λ. Вероятность того, что откажет хотя бы один элемент, равна 0,98.

Из примера 3(г) имеем:

$$1 - e^{-\lambda} = 0{,}98 ,$$

$$e^{-\lambda} = 1 - 0{,}98 = 0{,}02 .$$

По таблицам функции e^{-x} находим: $\lambda = 3{,}9$. Итак, за время T работы устройства откажет примерно 4 элемента.

Задача 5

Среднее число вызовов, поступающих на АТС за одну минуту, равно двум. Найти вероятность того, что за пять минут поступит:

а) два вызова;

б) менее двух вызовов;

в) не менее двух вызовов.

Поток вызовов предполагается простейшим.

Решение

По условию, $\lambda = 2$, $t = 5$, $k = 2$. Используем формулу Пуассона.

а) Искомая вероятность того, что за пять минут поступит два вызова:

$$P_5(2) = \frac{10^2 \cdot e^{-10}}{2!} = \frac{100 \cdot 0{,}000045}{2} = 0{,}00225.$$

Это событие невозможно.

б) События «не поступило ни одного вызова» и «поступил один вызов» несовместны, поэтому по теореме сложения вероятностей искомая вероятность того, что за пять минут поступит менее двух вызовов, равна:

$$P_5(k < 2) = P_5(0) + P_5(1) = e^{-10} + \frac{10 \cdot e^{-10}}{1!} = 0{,}000495.$$

Это событие невозможно.

в) События «поступило менее двух вызовов» и «поступило не менее двух вызовов» противоположны, поэтому искомая вероятность того, что за пять минут поступит не менее двух вызовов:

$$P_5(k \geq 2) = 1 - P_5(k < 2) = 1 - 0{,}000495 = 0{,}999505.$$

Это событие достоверное.

Задача 6

Из орудия производится стрельба до первого попадания. Вероятность попадания в цель $p = 0{,}6$. Найти вероятность того, что попадание произойдет при третьем выстреле.

Решение

По условию, $p = 0{,}6$, $q = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$, $k = 3$. Искомая вероятность находится по формуле:

$$P(x = k) = q^{k-1} \cdot p = 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}096.$$

Задача 7

Среди 50 деталей 20 стандартных. Найти вероятность того, что среди произвольно отобранных 5 деталей будет 3 стандартных.

Решение

По условию, $N = 50$, $M = 20$, $n = 5$, $m = 3$. Искомая вероятность:

$$P(x = 3) = \frac{C_{20}^3 \cdot C_{30}^2}{C_{50}^5} = 0{,}234.$$

Задача 8

Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	-4	6	10
P	0,2	0,3	0,5

Решение

Математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений X на их вероятности:

$$M(X) = -4 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}3 + 10 \cdot 0{,}5 = 6 .$$

Задача 9

Дан ряд возможных значений дискретной случайной величины X:

$$x_1 = -1 ;\ x_2 = 0 ;\ x_3 = 1 .$$

Известны математическое ожидание этой величины и ее квадрата:

$$M(X) = 0{,}1 ;\ M(X^2) = 0{,}9 .$$

Найти вероятности p_1, p_2, p_3 соответствующие возможным значениям x_1, x_2, x_3.

Решение

Используя то, что сумма вероятностей всех возможных значений X равна единице и $M(X) = 0{,}1$; $M(X^2) = 0{,}9$ составим систему трех линейных уравнений относительно неизвестных вероятностей:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1; \\ (-1) \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3 = 0{,}1; \\ (-1)^2 \cdot p_1 + 0^2 \cdot p_2 + 1^2 \cdot p_3 = 0{,}9. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем искомые вероятности:

$$p_1 = 0{,}4 ;\ p_2 = 0{,}1 ;\ p_3 = 0{,}5 .$$

Задача 10.

Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X – числа бросаний пяти игральных костей, в каждом из которых на двух костях появится по одному очку, если общее число бросаний равно двадцати.

Решение

Используем формулу:

$$M(X) = nP\,,$$

где n – общее число испытаний (бросаний пяти костей);

X – число появлений интересующего нас события (на двух костях из пяти появится по одному очку) в n испытаниях;

P – вероятность появления рассматриваемого события в одном испытании.

По условию $n = 20$. Найдем P – вероятность того, что на гранях двух из пяти костей появится по одному очку. Эту вероятность вычислит по формуле Бернулли, учитывая, что вероятность появления одного очка на грани одной кости $p = \frac{1}{6}$ и, следовательно, вероятность непоявления $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

$$P = P_5(2) = C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{5^4}{3 \cdot 6^4}\,.$$

Искомое математическое ожидание:

$$M(X) = nP = 20 \cdot \frac{5^4}{3 \cdot 6^4} \approx 3\,.$$

Задача 11

Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	-5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Решение

Используем формулу:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Найдем математическое ожидание X:

$$M(X) = -5 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 = -0{,}3.$$

Напишем закон распределения X^2:

X^2	25	4	9	16
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Найдем математическое ожидание X^2:

$$M(X^2) = 25 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}3 + 9 \cdot 0{,}1 + 16 \cdot 0{,}2 = 15{,}3.$$

Найдем дисперсию:

$$D(X) = 15{,}3 - (-0{,}3)^2 = 15{,}21.$$

Найдем среднее квадратическое отклонение:

$$G(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{15{,}21} = 3{,}9.$$

Задача 12

Найти дисперсию дискретной случайной величины X – числа появлений события A в пяти независимых испытаниях, если вероятность появления события A в каждом испытании равна 0,2.

Решение

Дисперсия числа появлений события в независимых испытаниях равна:

$$D(x) = npq\ .$$

По условию $n = 5$; $p = 0{,}2$; $q = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

Искомая дисперсия $D(x) = 5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}8$.

Задача 13

Найти дисперсию дискретной случайной величины X – числа появлений события A в двух независимых испытаниях, если вероятности появления события в этих испытаниях одинаковы и известно, что математическое ожидание $M(x) = 1{,}2$.

Решение

Первый способ. Возможные значения величины X такие:

$x_1 = 0$ (событие не появилось);

$x_2 = 1$ (событие появилось один раз);

$x_3 = 2$ (событие появилось два раза).

Найдем вероятности возможных значений по формуле Бернулли:

$$P_2(0) = q^2\ ;\ P_2(1) = C_2^1 pq = 2pq\ ;\ P_2(2) = p^2\ .$$

Напишем закон распределения X:

X	0	1	2
P	q	$2pq$	p^2

Найдем $M(x)$:

$$M(x)=2pq+2p^2=1p(q+p)=2p.$$

По условию $M(x)=1{,}2$,

$$2p=1{,}2;\ p=0{,}6;\ q=1-0{,}6=0{,}4.$$

Искомая дисперсия:

$$D(x)=npq=2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4=0{,}48.$$

Второй способ. Воспользуемся формулой $M(x)=np$. По условию $M(x)=1{,}2$; $n=2$. Следовательно, $1{,}2=2p$; $p=0{,}6$; $q=0{,}4$. Искомая дисперсия:

$$D(x)=npq=2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4=0{,}48.$$

Задача 14

Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	3
P	0,4	0,6

Найти начальные моменты первого, второго и третьего порядков.

Решение

Найдем начальный момент первого порядка:

$$\gamma_1=M(x)=1\cdot 0{,}4+3\cdot 0{,}6=2{,}2.$$

Напишем закон распределения X^2:

X^2	1	9
P	0,4	0,6

Найдем начальный момент второго порядка:

$$\gamma_2 = M\left(x^2\right) = 1 \cdot 0{,}4 + 9 \cdot 0{,}6 = 5{,}8\,.$$

Напишем закон распределения X^3:

X^3	1	27
P	0,4	0,6

Найдем начальный момент третьего порядка:

$$\gamma_3 = M\left(x^3\right) = 1 \cdot 0{,}4 + 27 \cdot 0{,}6 = 16{,}6\,.$$

Задача 15

Дискретная случайная величина задана законом распределения:

X	1	2	4
P	0,1	0,3	0,6

Найти центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

Решение

Центральный момент первого порядка равен нулю: $\mu_1 = 0$. Для вычисления центральных моментов удобно пользоваться формулами, выражающими центральные моменты через начальные, поэтому сначала найдем начальные моменты:

$$\gamma_1 = M(x) = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}6 = 3{,}1\,;$$

$$\gamma_2 = M\left(x^2\right) = 1 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}3 + 16 \cdot 0{,}6 = 10{,}9\,;$$

$$\gamma_3 = M\left(x^3\right) = 1 \cdot 0{,}1 + 8 \cdot 0{,}3 + 64 \cdot 0{,}6 = 40{,}9\,,$$

$$\gamma_4 = M\left(x^4\right) = 1\cdot 0{,}1 + 16\cdot 0{,}3 + 256\cdot 0{,}6 = 158{,}5\,.$$

Найдем центральные моменты:

$$\mu_2 = \gamma_2 - \gamma_1^2 = 10{,}9 - (3{,}1)^2 = 1{,}29\,;$$

$$\mu_3 = \gamma_3 - 3\gamma_1\gamma_2 + 2\gamma_1^3 = 40{,}9 - 3\cdot 3{,}1\cdot 10{,}9 + 2\cdot(3{,}1)^3 = -0{,}888\,;$$

$$\mu_4 = \gamma_4 - 4\gamma_3\gamma_1 + 6\gamma_2\gamma_1^2 - 3\gamma_1^4 = 158{,}5 - 4\cdot 40{,}9\cdot 3{,}1 +$$

$$+ 6\cdot 10{,}9\cdot(3{,}1)^2 - 3\cdot(3{,}1)^4 = 2{,}7777\,.$$

1.6. Закон больших чисел

Задача 1

Устройство состоит из десяти независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,05. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время T окажется:

а) меньше двух;

б) не меньше двух.

Решение

а) Обозначим через X дискретную случайную величину – число отказавших элементов за время T. Тогда

$$M(X) = np = 10\cdot 0{,}05 = 0{,}5\,,$$

$$D(X) = npq = 10\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95 = 0{,}475\,.$$

Воспользуемся неравенством Чебышева:

$$P\left(\left|X - M(X)\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}\,.$$

Подставим сюда $M(X)=0{,}5$; $D(X)=0{,}475$; $\varepsilon=2$, получим $P(|X-0{,}5|<2)\ge 1-\dfrac{0{,}475}{4}=0{,}88$.

б) События $|X-0{,}5|<2$ и $|X-0{,}5|\ge 2$ противоположны, поэтому сумма их вероятностей равна единице. Следовательно, $P(|X-0{,}5|<2)\le 1-0{,}88=0{,}12$.

Задача 2

Вероятность появления события A в каждом испытании равна 0,5. Используя неравенство Чебышева, оцените вероятность того, что число X появлений события A будет заключено в пределах от 40 до 60, если будет сделано 100 независимых испытаний.

Решение

Найдем математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины X – числа появлений события A в 100 независимых испытаниях.

$$M(X)=np=100\cdot 0{,}1=50;$$

$$D(X)=npq=100\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5=25.$$

Найдем максимальную разность между заданным числом появлений события и математическим ожиданием:

$$\varepsilon=60-50=10.$$

Воспользуемся неравенством Чебышева в форме:

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\ge 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Подставляя значения $M(X)=50$; $D(X)=25$; $\varepsilon=10$, получим: $P(|X-50|<10)\geq 1-\dfrac{25}{100}=0{,}75$.

Задача 3

Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	0,3	0,6
P	0,2	0,8

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X-M(X)|<0{,}2$.

Решение

Найдем математическое ожидание и дисперсию величины X:

$$M(X)=0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}6\cdot 0{,}8=0{,}54;$$

$$D(X)=M\left(X^2\right)-[M(X)]^2=$$

$$=(0{,}3)^2\cdot 0{,}2+(0{,}6)^2\cdot 0{,}8-(0{,}54)^2=0{,}0144.$$

Воспользуемся неравенством Чебышева в форме:

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Подставляя значения $M(X)=0{,}54$; $D(X)=0{,}0144$; $\varepsilon=0{,}2$; получим $P(|X-0{,}54|<0{,}2)\geq 1-\dfrac{0{,}0144}{0{,}04}=0{,}64$.

Задача 4

Последовательность независимых случайных величин

X_1, X_2, … X_n, задана законом распределения:

X_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
P	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

Можно ли применить последовательности теоремы Чебышева?

Решение

Так как случайные величины независимы, то они также попарно независимы, т.е. первое требование теоремы Чебышева выполняется.

Проверим, выполняется ли требование конечности математических ожиданий:

$$M(X_n) = -n\alpha\cdot\frac{1}{2n^2} + 0\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right) + n\alpha\cdot\frac{1}{2n^2} = 0.$$

Таким образом, каждая случайная величина имеет конечное (равное нулю) математическое ожидание, т.е. второе требование теоремы выполняется.

Проверим, выполняется ли требование равномерной ограниченности дисперсий.

Запишем закон распределения X_n^2

X_n^2	$n^2\alpha^2$	0	$n^2\alpha^2$
P	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

или, сложив вероятности одинаковых возможных значений,

X_n^2	$n^2\alpha^2$	0
P	$\dfrac{1}{2n^2}$	$1-\dfrac{1}{n^2}$

найдем $M\left(X_n^2\right)$ и дисперсию $D\left(X_n\right)$:

$$M\left(X_n^2\right)=n^2\alpha^2\cdot\frac{1}{n^2}=\alpha^2;$$

$$D\left(X_n\right)=M\left(X_n^2\right)-\left[M\left(X_n\right)\right]^2=\alpha^2.$$

Следовательно, дисперсии заданных случайных величин равномерно ограничены числом α^2, т.е. третье требование выполняется.

Итак, все требования выполняются, значит, к данной последовательности случайных величин теорема Чебышева применима.

1.7. Функции распределения вероятностей случайных величин

Задача 1

Случайная величина X задана интегральной функцией:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 1,\\ \dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4} & -1<x\le\dfrac{1}{3},\\ 1 & x>\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале

$(a;\, b)$, равно приращению интегральной функции в этом интервале:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

Положив $a = 0$, $b = \frac{1}{3}$, получим:

$$P\left(0 < X < \frac{1}{3}\right) = F\left(\frac{1}{3}\right) - F(0) =$$

$$= \left[\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}\right]_{x=\frac{1}{3}} - \left[\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}\right]_{x=0} = \frac{1}{4}.$$

Задача 2

Случайная величина X задана интегральной функцией:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 2, \\ 0{,}5x + 1 & 2 < x \le 4, \\ 1 & x > 4. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение:

а) меньшее 0,2;

б) меньшее трех;

в) не меньшее трех;

г) не меньшее пяти.

Решение

а) Так как при $x \le 2$ функция $F(x) = 0$, то $F(0{,}2) = 0$, т.е. $P(x < 0{,}2) = 0$.

б) $P(x < 3) = F(3) = [0{,}5x - 1]_{x=3} = 1{,}5 - 1 = 0{,}5$.

в) События $x \geq 3$ и $x < 3$ противоположны, поэтому $P(x \geq 3) + P(x < 3) = 1$. Учитывая, что $P(x < 3) = 0{,}5$, получим $P(x \geq 3) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

г) $P(x \geq 5) + P(x < 5) = 1$. Но при $x > 4$ функция $F(x) = 1$, получим:

$$P(x \geq 5) = 1 - P(x < 5) = 1 - F(5) = 1 - 1 = 0.$$

Задача 3

Случайная величина X задана на всей оси OX интегральной функцией $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$.

Найти возможное значение x_1, удовлетворяющее условию: с вероятностью 0,25 случайная величина X в результате испытания примет значение, большее x_1.

Решение

События $X \leq x_1$ и $X > x_1$ – противоположные, поэтому

$$P(X \leq x_1) + P(X > x_1) = 1.$$

Следовательно,

$$P(X \leq x_1) = 1 - P(X > x_1) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$$

Так как $P(X = x_1) = 0$, то

$$P(X \leq x_1) = P(X = x_1) + P(X < x_1) = P(X < x_1) = 0{,}25.$$

По определению интегральной функции

$$P(X < x_1) = P(x_1) = 0{,}5 + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x_1}{2}.$$

Следовательно,

$$0{,}5+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x_1}{2}=0{,}75, \qquad \operatorname{arctg}\frac{x_1}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

Отсюда $\dfrac{x_1}{2}=1$, или $x_1=2$.

Задача 4

Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	2	4	7
P	0,5	0,2	0,3

Найти интегральную функцию $F(x)$ и начертить ее график.

Решение

1. Если $x \le 2$, то $F(x)=0$. Действительно, значений, меньших числа 2, величина X не имеет. Значит при $x \le 2$ функция $F(x)=P(X<x)=0$.
2. Если $2<x\le 4$, то $F(x)=0{,}5$. Действительно, X может иметь значение 2 с вероятностью 0,5.
3. Если $4<x\le 7$, то $F(x)=0{,}7$. Действительно, X может иметь значение 2 с вероятностью 0,5 и значение 4 с вероятностью 0,2; следовательно, одно из этих значений X может принимать (по теории сложения вероятностей несовместных событий) с вероятностью $0{,}5+0{,}2=0{,}7$.
4. Если $x>7$, то $F(x)=1$. Действительно, событие $X\le 7$ достоверно и вероятность его равна единице.

Итак, искомая интегральная функция имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 2,\\ 0{,}5 & 2<x\le 4,\\ 0{,}7 & 4<x\le 7,\\ 1 & x>7.\end{cases}$$

График этой функции имеет вид:

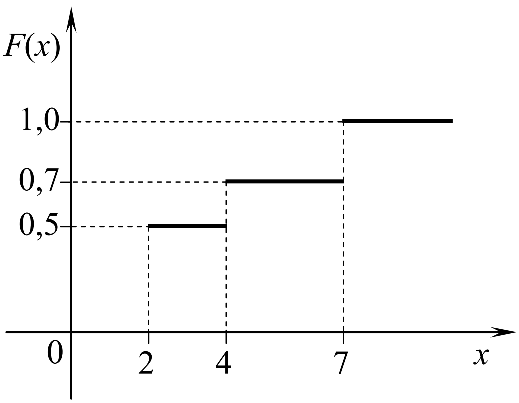

Рисунок 3.1

Задача 5

Дана интегральная функция непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0,\\ \sin x & 0<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 1 & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти дифференциальную функцию $f(x)$.

Решение

Дифференциальная функция равна первой производной от интегральной функции:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \cos x & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 & x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

При $x = 0$ производная $F'(x)$ не существует.

Задача 6

Непрерывная случайная величина X задана дифференциальной функцией $f(x) = \dfrac{2}{3}\sin 3x$ в интервале $\left(0;\ \dfrac{\pi}{3}\right)$. Вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $\left(\dfrac{\pi}{6};\ \ \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Решение

Используем формулу:

$$p(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx\,.$$

По условию $a = \dfrac{\pi}{6}$, $b = \dfrac{\pi}{4}$, $f(x) = \dfrac{2}{3}\sin 3x$. Следовательно, искомая вероятность

$$p\left(\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x dx = \frac{\sqrt{2}}{9}\,.$$

Задача 7

Дана дифференциальная функция непрерывной случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0, \\ \cos x & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 & x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти интегральную функцию $F(x)$.

Решение

Используем формулу $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Если $x \le 0$, то $f(x) = 0$, следовательно, $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0$.

Если $0 < x \le \dfrac{\pi}{2}$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{x} \cos xdx = \sin x.$$

Если $x > \dfrac{\pi}{2}$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x} 0dx = \sin x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Искомая интегральная функция имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0,\\ \sin x & 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 1 & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Задача 8

Случайная величина X задана дифференциальной функцией $f(x)=2x$ в интервале $(0;\ 1)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найдите математическое ожидание величины X.

Решение

Используем формулу:

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx\,.$$

Подставив $a=0$, $b=1$, $f(x)=2x$, получим:

$$M(X)=2\int_0^1 x\cdot xdx=2\int_0^1 x^2dx=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{2}{3}\,.$$

Задача 9

Случайная величина X задана интегральной функцией $F(x)=\dfrac{x}{4}$ в интервале $(0;\ 4)$; вне этого интервала $F(x)=0$. Найдите математическое ожидание величины X.

Решение

Найдем дифференциальную функцию величины X.

$$f(x)=F'(x)=\frac{1}{4}\,.$$

Найдем искомое математическое ожидание:

$$M(X)=\int_0^4 xf(x)dx=\frac{1}{4}\int_0^4 xdx=\frac{x^2}{8}\Big|_0^4=2\,.$$

Задача 1.

Случайная величина X задана интегральной функцией $F(x)=\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}$ в интервале $(-2;\ 2)$; вне этого интервала $F(x)=0$. Найдите математическое ожидание величины X.

Решение

Найдем дифференциальную функцию величины X.

$$f(x)=F'(x)=\frac{1}{4}.$$

Найдем искомое математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{-2}^{2} xf(x)dx=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2} xdx=0\,.$$

Найдем дисперсию:

$$D(X)=\int_{-2}^{2}[x-M(x)]^2 f(x)dx=\int_{-2}^{2}x^2\frac{1}{4}dx=\frac{2}{4}\int_{-2}^{2}x^2dx=\frac{4}{3}\,.$$

1.8. Законы распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Задача 1

Цена деления шкалы амперметра равна $0{,}1A$. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, большая $0{,}02A$.

Решение

Ошибку округления отсчета рассматриваем как случайную величину X, которая распределена равномерно между двумя соседними целыми делениями.

Дифференциальная функция равномерного распределения в нашей задаче:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{0{,}1} = 10.$$

Ошибка отсчета большая $0{,}02$ находится в интервале $(0{,}02;\ 0{,}08)$. По формуле $p(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$ получим:

$$P(0{,}02 < x < 0{,}08) = \int_{0{,}02}^{0{,}08} 10dx = 0{,}6.$$

Задача 2

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, равномерно распределенной в интервале $(a;\ b)$.

Решение

График дифференциальной функции равномерного распределения симметричен относительно прямой $X = \frac{a+b}{2}$, поэтому $M(X) = \frac{a+b}{2}$ или

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_a^b =$$

$$= \frac{1(b-a)(b+a)}{(b-a)\cdot 2} = \frac{a+b}{2}.$$

Найдем дисперсию и среднее квадратическое отклонение:

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - [M(x)]^2 = \frac{(b-a)^2}{12},$$

$$G(X) = \sqrt{D(x)} = \frac{b-a}{\sqrt{12}}.$$

Задача 3

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(12;\ 14)$.

Решение

Используем формулу:

$$P(\alpha < X < \beta) = \phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Подставив $\alpha = 12$; $\beta = 14$; $a = 10$; $\sigma = 2$, поучим

$$P(12 < X < 14) = \phi(2) - \phi(1).$$

По таблицам (приложение 2) находим

$$\phi(2) = 0{,}4772;\quad \phi(1) = 0{,}3413.$$

Искомая вероятность:

$$P(12 < X < 14) = 0{,}1359.$$

Задача 4

Автомат изготавливает шарики. Шарик считается стандартным, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Считая, что случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}4$ мм, найти, сколько будет стандартных шариков из ста изготовленных.

Решение

Так как X – отклонение диаметра шарика от проектного размера, то $M(X) = a = 0$.

Используем формулу:

$$P(|X| < \delta) = 2\phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Подставив $\delta = 0{,}7$, $\sigma = 0{,}4$, получим:

$$P(|X| < 0{,}7) = 2\phi\left(\frac{0{,}7}{0{,}4}\right) = 2\phi(1{,}75) = 2 \cdot 0{,}4599 = 0{,}92\,.$$

Таким образом, вероятность отклонения, меньшего 0,7мм равна 0,92. Отсюда следует, что примерно 92 шарика из 100 будут стандартными.

Задача 5

Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a = 10$. Вероятность попадания X в интервал $(10;\ 20)$ равна 0,3. Чему равна вероятность попадания X в интервал $(0;\ 10)$?

Решение

Так как нормальная кривая симметрична относительно прямой $x = a = 10$, то площади, ограниченные сверху нормальной кривой и снизу – интервалами $(10;\ 20)$ и $(0;\ 10)$

равны между собой. Но эти площади численно равны вероятностям попадания X в соответствующий интервал, то

$$P(0 < X < 10) = P(10 < X < 20) = 0{,}3 .$$

Задача 6

Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному дифференциальной функцией $f(x) = 3e^{-3x}$ при $x \geq 0$; $f(x) = 0$ при $x < 0$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в интервал $(0{,}13;\ 0{,}7)$.

Решение

Используем формулу:

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} .$$

По условию $a = 0{,}13$; $b = 0{,}7$; $\lambda = 3$. Используя таблицу значений функции e^{-x}, получим:

$$P(0{,}13 < X < 0{,}7) = e^{-0{,}39} - e^{-2{,}1} = 0{,}677 - 0{,}122 = 0{,}555 .$$

Задача 7

Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение $F(t) = 1 - e^{-0{,}01t}$ $(t > 0)$. Найти вероятность того, что за время $t = 50$ часов:

а) элемент откажет;

б) элемент не откажет.

Решение

а) Так как интегральная функция $F(t)$ определяет вероятность отказа элемента за определенное время, то, подставив $t = 50$ в интегральную функцию, получим:

$$F(50) = 1 - e^{-0,01 \cdot 50} = 1 - e^{-0,5} = 1 - 0,606 = 0,394 .$$

б) События «элемент откажет» и «элемент не откажет» – противоположные, поэтому, вероятность того, что элемент не откажет $P = 1 - 0,394 = 0,606$.

Задача 8

Испытывают два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого элемента имеет показательное распределение $F_1(t) = 1 - e^{0,02t}$, второго $F_2(t) = 1 - e^{-0,05t}$. Найти вероятность того, что за время $t = 6$ часов:

а) оба элемента откажут;
б) оба элемента не откажут;
в) только один элемент откажет;
г) хотя бы один элемент не откажет.

Решение

а) Вероятность отказа первого элемента:

$$p_1 = F(6) = 1 - e^{-0,12} = 1 - 0,887 = 0,113 .$$

Вероятность отказа второго элемента:

$$p_2 = 1 - e^{-0,3} = 1 - 0,741 = 0,259 .$$

Вероятность того, что оба элемента откажут по теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$p_1 p_2 = 0,113 \cdot 0,258 = 0,03 .$$

б) Вероятность безотказной работы первого элемента:

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}113 = 0{,}887 .$$

Вероятность безотказной работы второго элемента:

$$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}259 = 0{,}741 .$$

Вероятность безотказной работы обоих элементов:

$$q_1 q_2 = 0{,}741 \cdot 0{,}741 = 0{,}66 .$$

в) Вероятность того, что откажет только один элемент:

$$p_1 q_2 + p_2 q_1 = 0{,}113 \cdot 0{,}741 + 0{,}259 \cdot 0{,}887 = 0{,}31 .$$

г) Вероятность того, что хотя бы один элемент не откажет:

$$p = 1 - q_1 q_2 = 1 - 0{,}66 = 0{,}34 .$$

Глава 4. СБОРНИК ЗАДАЧ

Рекомендуется следующий порядок решения задач:

1. **Прочитайте условие задачи.**
2. **Определите тип задач и метод ее решения.**
3. **Решите задачу самостоятельно.**
4. **Проверьте решение в ответе.**

Рекомендуется следующий порядок решения задач:

1. Прочитайте условие задачи.
2. Определите тип задач и метод ее решения.
3. Решите задачу самостоятельно.
4. Проверьте решение в ответе.

1. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет четное число очков.
2. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях равна семи.
3. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях равна пяти, а произведение – четырем.
4. В ящике есть 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из следующих букв: **О**, **П**, **Р**, **С**, **Т**. Найти вероятность того, что из взятых из ящика по одному кубику можно составить слово «спорт».
5. В ящике есть 6 одинаковых карточек. На каждой карточке напечатана одна из следующих букв: **А**, **Т**, **М**, **Р**, **С**, **О**. Найти вероятность того, что на четырех, взятых по одной карточке, можно составить слово «трос».
6. В ящике 15 деталей, среди которых 10 стандартных. Наудачу берут 3 детали. Найти вероятность того, что взятые детали стандартные.
7. В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табель-

ным номерам отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных людей 3 женщины.

8. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 5 отличников.

9. Библиотека состоит из 10 различных книг. Из них пять книг стоят по 4 гривне каждая, три книги – по одной гривне и две книги – по 3 гривне. Найти вероятность того, что взятые две книги стоят 5 гривен.

10. Отдел технического контроля обнаружил 10 бракованных изделий из случайно отобранных 100 изделий. Найти относительную частоту появления бракованных изделий.

11. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,9. Найти число годных приборов, если было проверено 200 приборов.

12. На отрезок OA длины L числовой оси OX произвольно поставлена точка $B(x)$. Найти вероятность того, что меньший из отрезков OB и BA будет иметь длину, большую чем $\frac{1}{3}$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

13. Внутрь круга радиуса R произвольно поставлена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг:

    а) квадрата;

б) правильного треугольника.

Предполагается, что вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от ее расположения относительно круга.

14. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле наберет 10 очков, равна 0,1; вероятность набрать 9 очков равна 0,3; вероятность набрать 8 или меньше очков равна 0,6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок наберет не менее 9 очков.

15. Найти вероятность совместного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием равна 0,8, а вторым – 0,7.

16. Найти вероятность совместного появления «герба» при бросании двух монет.

17. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет только один из стрелков.

18. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым орудием, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

19. Из партии изделий отбирают стандартные изделия. Вероятность того, что произвольно взятое изделие будет стандартным, равна 0,8. Найти вероятность того, что из трех

отобранных изделий только два будут стандартными.

20. Вероятность того, что стандартная деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятности того, что стандартная деталь содержится:
    а) не более чем в трех ящиках;
    б) не менее чем в двух ящиках.

21. Брошены три игральные кости. Найти вероятности следующих событий:
    а) на каждой из выпавших граней появится 5 очков;
    б) на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков.

22. Отрезок разделили на три равные части. На этот отрезок произвольно поставлены три точки. Найти вероятность того, что на каждую из трех частей отрезка попадет по одной точке. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

23. Среднее число пасмурных дней в июле равно шести. Найти вероятность того, что первого и второго июля будет ясная погода.

24. В ящике 10 деталей, среди которых 6 стандартных. Произвольно берут 4 детали. Найти вероятность того, что все отобранные детали будут стандартными.

25. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему

преподавателем три вопроса.

26. Устройство содержит 2 независимо работающих элемента. Вероятности отказов элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятность отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.
27. Для разрушения моста достаточно попадания одной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить 4 бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.
28. Вероятность попадания в мишень каждым из двух стрелков равна 0,3. Стрелки стреляют по очереди, причем каждый должен сделать по 2 выстрела. Попавший в мишень получает приз. Найти вероятность того, что стрелки получат приз.
29. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.
30. В первом ящике содержится 10 шаров, из них 8 белых; во втором ящике 25 шаров, из них 4 белых. Из каждого ящика произвольно берут по одному шару, а затем из этих двух шаров берут один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.
31. В каждом из трех ящиков содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первого ящика произвольно берут один шар и кладут его во второй ящик, после чего из второ-

го ящика берут один шар и кладут его в третий ящик. Найти вероятность того, что шар, произвольно взятый из третьего ящика, будет белым.

32. Два рабочих изготавливают детали. Вероятность того, что первый рабочий изготовит бракованную деталь, равна 0,05. Для второго рабочего эта вероятность равна 0,1. При проверке деталей был обнаружен брак. Найти вероятность того, что бракованную деталь изготовил первый рабочий.

33. Деталь проверяется на стандартность одним из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру, равна 0,55, а ко второму – 0,45. Вероятность того, что стандартная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0,9, а вторым – 0,98. Стандартная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что деталь проверил второй контролер.

34. Три стрелка произвели залп, причем две пули попали в мишень. Найти вероятность того, что третий стрелок попал в мишень, если вероятности попадания в мишень первым, вторым и третьим стрелками соответственно равны 0,6; 0,5; 0,4.

35. Два из четырех независимо работающих компьютера отказали. Найти вероятность того, что отказали первый и второй компьютеры, если вероятности отказа первого, второго, третьего и четвертого компьютера

соответственно равны: $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}2$; $p_3 = 0{,}3$; $p_4 = 0{,}4$.

36. Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет:
    а) менее двух раз;
    б) не менее двух раз.

37. Найти вероятность того, что событие A появится не менее трех раз в четырех независимых испытаниях, если вероятность появления события A в одном испытании равна 0,4.

38. В семье пять детей. Найти вероятность того, что среди этих детей:
    а) два мальчика;
    б) не более двух мальчиков;
    в) более двух мальчиков;
    г) не менее двух и не более трех мальчиков.

    Вероятность рождения мальчика равна 0,51.

39. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

40. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных будет 50 мальчиков.

41. Монета брошена $2N$ раза ($N >> 1$). Найти вероятность того, что «герб» выпадет равно N раз.

42. Вероятность появления события в каждой из 2100 независимых испытаниях равна 0,7. Найти вероятность того, что событие произойдет:
    а) не менее 1470 и не более 1500 раз;
    б) не менее 1470 раз;
    в) не более 1469 раз.

43. Вероятность появления положительного результата в каждом из n опытов равна 0,9. Сколько нужно сделать опытов, чтобы с вероятностью 0,98 можно было ожидать, что не менее 150 опытов дадут положительный результат.

44. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.

45. Вероятность появления события в каждом из 10000 независимых испытаний равна 0,75. Найти вероятность того, что относительная чистота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,01.

46. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти число испытаний n, при котором с вероятностью 0,9876 можно ожидать, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,04.

47. В ящике содержатся белые и черные шары в отношении 4:1. После извлечения шара регистрируется его цвет, и шар возвращается в ящик. Чему равно число извлечений n, при котором с вероятностью 0,9722 можно ожидать, что абсолютная величина отклонения относительной частоты появления белого шара от его вероятности будет не более чем 0,01?

48. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,7698 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности 0,5 не превысила ε.

49. Вероятность появления события в каждом из 1000 независимых испытаний равна 0,75. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,979 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности 0,75 не превысила ε.

50. Отдел технического контроля проверяет 475 изделий на брак. Вероятность того, что изделие бракованное, равна 0,05. Найти с вероятностью 0,9426 границы, в которых будет заключено число n бракованных изделий среди проверенных.

51. Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа появлений «герба» при двух бросаниях монеты.

52. Две игральные кости одновременно бросают два раза.

Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа выпадений четного числа очков на двух игральных костях.

53. В партии из шести деталей есть четыре стандартных. Произвольно отобраны три детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных.

54. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа любого элемента в течении времени T равна 0,002. Найти вероятность того, что за время T откажут ровно три элемента ($e^{-2} = 0{,}13534$).

55. Станок делает детали. Вероятность того, что изготовленная деталь будет бракованной, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей будет 4 бракованных.

56. Найти среднее число λ бракованных изделий в партии изделий, если вероятность того, что в этой партии есть хотя бы одно бракованное изделие, равна 0,95. Предполагается, что число бракованных изделий в партии изделий распределено по закону Пуассона ($e^{-3} = 0{,}05$).

57. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, заданной законом распределения.

X	0,21	0,54	0,61
P	0,1	0,5	0,4

58. Даны возможные значения дискретной случайной ве-

личины X: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, а также известны $M(X) = 2{,}3$, $M(X^2) = 5{,}9$. Найти вероятности, соответствующие возможным значениям X.

59. В партии из 10 деталей есть 3 нестандартных. Произвольно отобраны 2 детали. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди двух отобранных.

60. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

а)	X	4,3	5,1	10,6
	P	0,2	0,3	0,5

б)	X	131	140	160	180
	P	0,05	0,1	0,25	0,6

61. Найти дисперсию дискретной случайной величины X – числа отказов элемента устройства в десяти независимых опытах, если вероятность отказа элемента в каждом опыте равна 0,9.

62. Найти дисперсию дискретной случайной величины X – числа появлений события A в двух независимых испытаниях, если вероятности появления события в этих испытаниях одинаковы и известно, что $M(X) = 0{,}9$.

63. Производятся независимые испытания с одинаковой вероятностью появления события A в каждом испытании. Найти вероятность появления события A, если

дисперсия числа появлений события в трех независимых испытаниях $D(X) = 0{,}63$.

64. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения: x_1 и x_2, $x_1 < x_2$. Вероятность того, что случайная величина X примет значение x_1 равна 0,2. Найти закон распределения X, зная, что $M(X) = 2{,}6$, $G(X) = 0{,}8$.

65. Дискретная случайная величина X имеет только три возможных значения: x_1, x_2 и x_3, $x_1 < x_2 < x_3$. Вероятности того, что случайная величина X примет значение x_1 и x_2 соответственно равны 0,3 и 0,2. Найти закон распределения X, зная, что $M(X) = 2{,}2$ и $D(X) = 0{,}76$.

66. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	3	5
P	0,2	0,8

Найти центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

67. Дано $P(|X - M(\alpha)| < \varepsilon) \geq 0{,}9$, $D(X) = 0{,}009$. Используя неравенство Чебышева, найти ε.

68. В цехе есть 20 станков. Вероятность того, что за время T будет работать станок, равна 0,8. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом работаю-

щих станков и средним числом (математическим ожиданием) работающих станков за время T будет:

а) меньше трех;

б) не меньше трех.

69. Вероятность появления события в каждом испытании равна 0,25. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число X появлений события заключено в пределах от 150 до 250, если будет сделано 800 испытаний.

70. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	0,1	0,4	0,6
P	0,2	0,3	0,5

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $\left|X - M(\alpha)\right| < \sqrt{0{,}4}$.

71. Случайная величина X задана интегральной функцией

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le -2, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{2} & -2 < x \le 2, \\ 1 & x > 2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале $(-1;\ 1)$.

72. Интегральная функция непрерывной случайной величины X (времени безотказной работы устройства)

равна $F(x)=1-e^{-\frac{x}{T}}$, ($x \geq 0$). Найти время безотказной работы устройства за время $x \geq T$.

73. Случайная величина X задана интегральной функцией:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x \leq 0,\\ x^2 & 0<x \leq 1,\\ 1 & x>1.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате четырех испытаний величина X три раза примет значение, заключенное в интервале $(0{,}25;\ 0{,}75)$.

74. Случайная величина X задана на всей оси OX интегральной функцией $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$. Найти возможное значение x_1, удовлетворяющее условию: с вероятностью $\frac{1}{6}$ случайная величина X в результате испытания примет значение, большее x_1.

75. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	3	4	7	10
P	0,2	0,1	0,4	0,3

Найти интегральную функцию и построить ее график.

76. Дана интегральная функция непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0,\\ \sin 2x & 0<x\le\dfrac{\pi}{4},\\ 1 & x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

Найти дифференциальную функцию $f(x)$.

77. Непрерывная случайная величина в интервале $(0;\ +\infty)$ задана дифференциальной функцией $f(x)=ae^{-\alpha x}$ ($\alpha>0$); вне этого интервала $f(x)=0$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(1;\ 2)$.

78. Дана дифференциальная функция непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0,\\ \sin x & 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0 & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти дифференциальную функцию $F(x)$.

79. Дана дифференциальная функция непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\le 1,\\ x-0{,}5 & 1<x\le 2,\\ 0 & x>2.\end{cases}$$

Найти дифференциальную функцию $F(x)$.

80. Дифференциальная функция непрерывной случайной величины X задана на всех оси OX равенством $f(x)=\dfrac{2C}{1+x^2}$ Найти постоянную величину C.

81. Дифференциальная функция непрерывной случайной величины X в интервале $\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ равна $f(x)=C\sin 2x$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти постоянную величину C.

82. Дифференциальная функция непрерывной случайной величины X в интервале $(0;\ 1)$ равна $f(x)=C\operatorname{arctg}x$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти постоянную величину C.

83. Случайная величина X задана дифференциальной функцией $f(x)=\dfrac{1}{2}x$ в интервале $(0;\ 2)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание величины X.

84. Случайная величина X задана дифференциальной функцией (распределение Лапласа) $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}$. Найти математическое ожидание величины X.

85. Случайная величина X задана дифференциальной функцией $f(x)=C\left(x^2+2x\right)$ в интервале $(0;\ 1)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти
    а) постоянную величину C;
    б) математическое ожидание величины X.

86. Случайная величина X задана дифференциальной функцией $f(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{9 - x^2}}$ в интервале $(-3; 3)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти дисперсию величины X.

87. Случайная величина X в интервале $(0; 5)$ задана дифференциальной функцией $f(x) = \dfrac{2}{25}x$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти дисперсию величины X.

88. Случайная величина X задана интегральной функцией

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x^3}{x^2} & x \geq x_0 (x_0 > 0), \\ 0 & x < x_0. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X.

89. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределенной равномерно в интервале $(2;\ 8)$.

90. Написать дифференциальную функцию нормально распределенной случайной величины X, зная что $M(X) = 3$; $D(X) = 16$.

91. Нормально распределенная случайная величина X задана дифференциальной функцией $f(x) = \dfrac{2}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}$. Найти математическое ожидание и дисперсию величины X.

92. Дана интегральная функция нормированного нормального распределения $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$. Найти дифференциальную функцию $f(x)$.

93. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X равны $M(X)=20$, $G(X)=5$. Найти вероятность того, что в результате испытания величина X будет иметь значения, заключенные в интервале $(15;\ 25)$.

94. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением $G=20$ мм и математическим ожиданием $M(X)=0$. Найти вероятность того, что из трех независимых измерений ошибка хотя бы одного не будет больше по абсолютной величине 4 мм.

95. Деталь, изготовленная рабочим, считается годной, если отклонение ее контролируемого размера от проектного не больше 10 мм. Случайные отклонения контролируемого размера от проектного подчинены нормальному закону распределения с $G=5$ мм и $M(X)=0$. Сколько процентов годных деталей изготавливает рабочий?

96. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $M(X)=25$. Вероятность попадания X в интервал $(10;\ 15)$ равна 0,2. Найти вероятность попадания величины X в интервал $(35;\ 40)$.

97. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $M(X)=10$ и средним квадратическим отклонением $G=5$. Найти интервал, в котором с вероятностью 0,9973, попадет в результате испытаний величина X.

98. Случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением $G=5$ мм. Найти длину интервала, в который с вероятностью 0,9973 попадет величина X в результате испытаний.

99. Написать дифференциальную и интегральную функции показательного распределения, если параметр $\lambda=6$.

100. Найти параметр λ показательного распределения:

а) $f(x)=0$ при $x<0$,

б) $f(x)=2e^{-2x}$ при $x\geq 0$,

в) $F(x)=1-e^{-0,4x}$ при $x<0$,

г) $F(x)=0$ при $x\geq 0$.

101. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному при $x\geq 0$ дифференциальной функцией $f(x)=0{,}04\,e^{-0,004x}$; при $x<0$ $f(x)=0$. Найти вероятность того, что в результате испытания величина X попадет в интервал $(1;\ 2)$.

102. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному интегральной функцией $F(x)=1-e^{-0,6x}$ при $x\geq 0$, $F(x)=0$ при $x<0$. Найти вероятность того, что в результате испы-

тания величина X попадет в интервал $(2;\ 5)$.

103. Найти математическое ожидание показательного распределения, заданного интегральной функцией $F(x)=1-e^{-0,1x}$ при $x\geq 0$.

104. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательного распределения, заданного интегральной функцией:

а) $F(x)=1-e^{-0,4x}$ при $x\geq 0$,

б) $F(x)=10e^{-10x}$ при $x\geq 0$,

105. Найти теоретический центральный момент четвертого порядка $\mu_4=M\left[X-M(X)\right]^4$ показательного распределения.

106. Испытывают три элемента, которые работают независимо друг от друга. Длительность времени безотказной работы элементов распределена по показательному закону:

– для первого элемента $F_1(t)=1-e^{-0,1t}$,
– для второго элемента $F_2(t)=1-e^{-0,2t}$,
– для третьего элемента $F_3(t)=1-e^{-0,3t}$.

Найти вероятность того, что в интервале времени $(0;\ 5)$ часов откажут:

а) только один элемент;

б) только два элемента;

в) все три элемента.

107. Испытывают три элемента, которые работают независимо друг от друга. Длительность времени безотказной работы элементов распределена по показательному закону:

   – для первого элемента $f_1(t) = 0{,}1e^{-0{,}1t}$;
   – для второго элемента $f_2(t) = 0{,}2e^{-0{,}2t}$;
   – для третьего элемента $f_3(t) = 0{,}3e^{-0{,}3t}$.

   Найти вероятность того, что в интервале времени $(0;\ 10)$ часов откажут:

   а) хотя бы один элемент,
   б) не менее двух элементов.

108. В цехе работают 1000 станков. Вероятность отказа одного станка в течение одной минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течении одной минуты откажут 5 станков.

109. АТС обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение 1 минуты позвонит абонент равна 0,02. какое из двух событий вероятнее: в течение 1 минуты позвонят 3 абонента; позвонят 4 абонента?

110. Производится бросание игральной кости до первого выпадения шести очков. Найти вероятность того, что первое выпадение «шестерки» произойдет во втором бросании игральной кости.

ОТВЕТЫ

1. $p=0{,}5$. **2.** $p=\frac{1}{6}$. **3.** $p=\frac{1}{18}$. **4.** $p=\frac{1}{120}$.

5. $p=\frac{1}{360}$. **6.** $p=\frac{24}{91}$. **7.** $p=0{,}5$. **8.** $p=\frac{14}{55}$.

9. $p=\frac{1}{3}$. **10.** $p=\frac{1}{10}$. **11.** $n=180$. **12.** $p=\frac{1}{3}$.

13. а) $p=\frac{2}{\pi}$; б) $p=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$. **14.** $p=0{,}4$. **15.** $p=0{,}56$.

16. $p=\frac{1}{4}$. **17.** $p=0{,}38$. **18.** $p=0{,}7$. **19.** $p=0{,}384$.

20. а) $p=0{,}6976$; б) $p=0{,}9572$. **21.** а) $p=\frac{1}{63}$; б) $p=\frac{1}{36}$.

22. $p=3!\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3$. **23.** $p=\frac{20}{31}$. **24.** $p=\frac{1}{14}$. **25.** $p=\frac{15}{115}$.

26. $p=0{,}126$. **27.** $p\approx 0{,}95$. **28.** $p=0{,}76$. **29.** $p=0{,}8$.

30. $p=0{,}5$. **31.** $p=0{,}4$. **32.** $p=\frac{1}{3}$. **33.** $p\approx 0{,}42$.

34. $p=\frac{10}{19}$. **35.** $p=0{,}039$. **36.** а) $p=\frac{3}{16}$; б) $p=\frac{13}{16}$.

37. $p=0{,}1792$. **38.** а) 0,31; б) 0,48; в) 0,52; г) 0,62. **39.** $p=0{,}04565$.

40. $p=0{,}0782$. **41.** $p=0{,}5642\sqrt{N}$. **42.** а) 0,4236; б) 0,5; в) 0,5.

43. $n=177$. **44.** $p=0{,}7696$. **45.** $p=0{,}979$. **46.** $n=625$.

47. $n=378$. **48.** $\varepsilon=0{,}02$. **49.** $\varepsilon=0{,}01$. **50.** $14\le m\le 3$.

51.

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

52.

X	0	1	2
P	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$

53.

X	0	1	2	3
P	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

54. $P_{1000}(3)=0{,}18.$ **55.** $p_{200}(4)=0{,}09.$ **56.** $\lambda = 3.$ **57.** $M(\lambda)=0{,}535.$

58. $p_1 = 0{,}2$; $p_2 = 0{,}3$; $p_3 = 0{,}5$. **59.** $M(x)=\dfrac{3}{5}$.

60. а) $D(x)\approx 8{,}54$; $\sigma(x)\approx 2{,}92$;
б) $D(x)\approx 248{,}4$; $\sigma(x)\approx 15{,}8$.
61. $D(x)=0{,}9.$ **62.** $D(x)=0{,}495.$

63. $p_1 = 0{,}3;$ $p_2 = 0{,}7$.

64.

X	1	3
P	0,2	0,8

65.

X	1	2	3
P	0,3	0,2	0,5

66. $\mu_1 = 0;$ $\mu_2 = 0{,}64;$ $\mu_3 = -012;$ $\mu_4 = 1{,}33.$ **67.** $\varepsilon = 0{,}3.$ **68.** а) $p \ge 0{,}36$; б) $p \le 0{,}64$.

69. $p = 0{,}94.$ **70.** $p = 0{,}909.$ **71.** $p=\dfrac{1}{3}$. **72.** $p=\dfrac{1}{e}$.

73. $P_4(3)=0{,}25.$ **74.** $x_1 = 2\sqrt{3}$. **75.** $F(x)=\begin{cases} 0 & x \le 3, \\ 0{,}2 & 3 < x \le 4, \\ 0{,}3 & 4 < x \le 7, \\ 0{,}7 & 7 < x \le 10, \\ 1 & x > 10. \end{cases}$

76. $f(x)=2\cos 2x$ в интервале $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$, $f(x)=0$ вне этого интервала. **77.** $p(1<x<2)=\dfrac{\left(e^{\alpha}-1\right)}{e^{2\alpha}}.$

78. $F(x)=\begin{cases} 0 & x \le 0, \\ 1-\cos\alpha & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 & x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ **79.** $F(x)=\begin{cases} 0 & x \le 1, \\ 10{,}5(x^2-x) & 1 < x \le 2, \\ 1 & x > 2. \end{cases}$

80. $C=\dfrac{1}{2\pi}.$ **81.** $C=1.$ **82.** $C=\dfrac{\pi-\ln 4}{4}.$ **83.** $M(x)=\dfrac{4}{3}.$

84. $M(x)=0.$ **85.** $C=\dfrac{3}{4};$ $M(x)=\dfrac{11}{16}.$ **86.** $D(x)=4{,}5.$

87. $D(x)=\dfrac{25}{18}.$ **88.** $M(x)=\dfrac{3x_0}{2};$ $D(x)=\dfrac{3x_0^2}{4};$ $\sigma(x)=\dfrac{\sqrt{3}\cdot x_0}{2}.$

89. $M(x)=5;$ $D(x)=3;$ $\sigma(x)=\sqrt{3}.$ **90.** $f(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-3)^2}{32}}$.

91. $M(x)=1;$ $D(x)=25.$ **92.** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$ **93.** $p=0{,}6826.$

94. $p\approx 0{,}41.$ **95.** $n\approx 95\%.$ **96.** $p=0{,}2.$

97. $(a-3\sigma;\,a+3\sigma)=(-5;\,25).$ **98.** $6\sigma=30$мм.

99. $f(x)=6e^{-6x};\ (0;\infty);\ f(x)=0;$ $F(x)=1-e^{-6x};\ (0;\infty);\ F(x)=0.$ **100.** а) $\lambda=2;$ б) $\lambda=0{,}4.$ **101.** $p=0{,}038.$

102. $p=0{,}252.$ **103.** $M(x)=10.$ **104.** а) $D(x)=6{,}25;\ \sigma(x)=2{,}5;$ б) $D(x)=0{,}01;\ \sigma(x)=0{,}1.$

105. $\mu_4=\frac{9}{\lambda^4}.$ **106.** а) 0,445; б) 0,29; в) 0,65. **107.** $a=0{,}95;$ $b=0{,}35.$

108. $p=0{,}1562.$ **109.** $p_1=0{,}18;$ $p_2=0{,}09.$ **110.** $p=\frac{5}{36}.$

РУССКО-АНГЛИЙСКИЙ СЛОВАРЬ

А	Абонент	subscriber
	абсолютный	absolute
	абсурд	absurdity
	аванс	advance
	авария	accident
	автомат	automatic machine
	автор	author
	авторитет	authority
	агент	agent
	агрегат	aggregate
	азарт	passion
	азбука	alphabet
	аксиома	axiom
	акт	act
	активность	activity
	активный	active
	акция	share
	анализ	analysis
	анонс	announcement, notice
	аргумент	argument
	аргументировать	to argue
	архив	archives
	ассортимент	choice
	аукцион	auction
Б	База	base
	базис	basis
	баланс	balance
	банк	bank
	банкрот	bankrupt

Б	барьер	barrier
	батарея	radiator
	бесполезно	uselessly
	бесполезный	useless
	беспорядок	disorder
	бесконечно	infinitely
	бесконечный	infinite
	бесспорный	indisputable
	бессрочный	permanent
	билет	ticket
	биржа	exchange
	более	more
	большинство	majority
	брак	spoilage
	браковать	reject as defective
	бредовый	delirious
	бросить	to throw
	бросок	throw; hurl
	будущее	future
	буква	letter
	бывший	former
	быстрый	rapid
	бюджет	budget
	бюллетень	bulletin
В	Важный	important
	важно	it is important
	вакансия	vacancy
	вакантный	vacant
	валовой	gross, total
	вариант	version
	введение	introduction

В	ввести	to introduce
	ввоз	import
	вдоль	along
	вдруг	suddenly
	везде	everywhere
	величие	grandeur
	величина	quantity; value
	вера	trust
	вероятность	probability
	вероятный	probable, likely
	версия	version
	вес	weight
	весить	to weigh
	весы	scales; balance
	весьма	very
	весьма вероятно	most probably
	вето	veto
	вещество	matter, substance
	вещь	thing; object
	взаимный	mutual, reciprocal
	взаимодействие	to interaction
	взаимоотношение	relation, interrelation
	взамен	in exchange
	взгляд	look
	взятие	to taking
	вид	kind, sort
	видение	vision
	винтовка	rifle
	висеть	to hang
	включение	inclusion
	включительно	inclusive

В	вкратце	briefly
	владелец	owner
	владеть	to own
	влечение	inclination, bent
	влияние	influence
	вложить	to put in
	вместе	together
	вместимость	capacity
	вместо	instead
	вначале	at first
	внедрение	inculcation
	внезапно	suddenly
	внимание	attention
	внимательно	attentively
	внутри	in, inside
	возможно	possibly
	возможный	possible
	возникновение	rise
	возникнуть	to arise
	возрастание	growth
	вписать	to enter, put down
	временно	temporarily
	временный	temporary
	всемирный	world; universal
	вследствие	because of
	вставить	to insert
	выбор	choice; selection
	выборка (действие)	to selection
	выбрать	to choose
	вывод	conclusion, inference
	выгода	profit

В	выстрел	shot; report
	выстрелить	to fire
	вычисление	calculation
	вычислить	to calculate
Г	Геометрический	geometrical
	геометрия	geometry
	герб	State Emblem
	гипотеза	hypothesis
	глава	chapter
	главный	chief; principal
	годный	fit
	горизонт	horizon
	грань	border
	графа	column
	график	diagram, graph
Д	Давний	old
	давно	long ago
	давность	remoteness
	данные	data, facts
	данный	given; present
	двойник	double
	действие	action
	действительно	really, actually
	действовать	to act
	делать	to make
	деление	division
	делить	to divide
	держать	to hold
	деталь	detail
	детальный	detailed
	дети	children

Д	дефект	defect
	диагональ	diagonal
	диаграмма	diagram
	диапазон	diapason, range
	дифференциал	differential
	длина	length
	длинный	long
	добавить	to add
	добиться	to get
	доверие	trust
	довод	reason
	догма	dogma
	доказательство	proof
	доказать	to prove
	дополнение	addition
	дополнительно	in addition
	дополнить	to complete
	допустимый	admissible
	допустить	to admit
	допущение	admission
	достаточно	enough
Е	Единица	unity
	единичный	single
	единство	unity
	единственный	only
	единица измерения	unit of measurement
	естественно	naturally
Ж	Ждать	to wait
	желание	wish
	желать	to wish
	железо	iron

Ж	жесткий	hard
	жребий	fate
З	Завершить	to complete
	зависеть (от чего)	to depend
	зависимость (чего от чего)	dependence
	завод	works, factory
	загрузка	charge; load
	задача	problem
	заключение	conclusion
	закон	law
	закономерность	regularity
	закономерный	regular
	закончить	to finish
	залп (дать залп)	volley (to fire a volley)
	замена	substitution
	замечание	remark
	замкнутость	insularity
	замкнутый	closed
	запас	reserve
	запасной	reserve
	записать	to write down
	записка	note
	запись	record
	запомнить	to remember
	запрет	interdiction
	затрата	expenditure
	затратить	to spend
	зачет	examination
	защита	defence
	заявка	statement
	заявление	declaration

З	звук	sound
	знак	symbol
	значение	meaning
	зона	zone
И	Игра	game
	играть	to play
	игрок	player
	идеал	ideal
	идентичный	identical
	идея	idea
	избыток	surplus
	известно	t is known
	извлечь	to extract
	извне	from outside
	изделие	manufactured article
	изделия	ware
	изменение	change
	измерение	measuring
	измерять	to measure
	изолировать	to isolate
	израсходовать	to spend
	изучать	to study
	изъян	defect
	имущество	property
	индекс	index
	иной	other, another
	интеграл	integral
	интенсивный	intensive
	интервал	interval
	исключение	expulsion
	испарение	evaporation

И	использование	utilization
	использовать	to use
	исправить	to correct
	исправность	good condition
	испытание	test
	испытанный	tested
	исследование	investigation
	истина	truth
	исход	result
	исходный	initial
	итог	result
	итого	altogether; in all
К	Кадры	personnel
	каждый	each, every
	как-нибудь	somehow
	каков, какова, каковы	what
	какой-нибудь	any
	какой-то	some
	калибр	calibre
	карта	card
	касательная	tangent
	категория	category
	качество	quality
	квадрат	square
	классификация	classification
	клиент	client
	ключ	key
	кодекс	code
	кое-где	somewhere
	кое-как	anyhow
	кое-кто	somebody

К	кое-что	something
	количество	quantity
	коллекция	collection
	колода	pack
	комплект	complete set
	конец	end
	конечно	certainly, surely
	конечный	final
	конкурент	competitor
	конспект	summary
	констатировать	to state
	контролер	controller
	контроль	control
	конус	cone
	краткий	short; brief
	кривая	curve
	кривизна	crookedness
	критерий	criterion
	куб	cube
	кусок	piece, bit
Л	Лампа	lamp
	лексика	vocabulary
	линейка	ruler
	линия	line
	логарифм	logarithm
	лотерея	lottery
	луч	ray
	любой	any
М	Магазин	shop
	мало	little
	маловероятный	unlikely

М	маршрут	route
	масштаб	scale
	матрица	matrix
	мгновение	instant, moment
	мгновенный	instantaneous, momentary
	медленно	slowly
	медленный	slow
	менее	less
	меньшинство	minority
	мера	measure
	мешать	to stir, to mix
	мимо	past, by
	мнимый	imaginary
	много	many, much
	многократно	many times
	многообразный	diverse, varied
	многосторонний	many-sided
	многоугольник	polygon
	многочисленный	numerous
	множество	multitude
	можно	one may, one can
	наблюдать	to observe
	наблюдение	observation
	набор	collection
	набрать	to collect
Н	Наверно(е)	surely
	надежный	sure, safe
	назначить	to fix
	наклон	inclination
	нанести	to bring
	нарушить	to break

Н	наряду	side by side
	наугад	at random
	наудачу	haphazard
	наука	science
	научный	scientific
	начертить	to draw
	неблагоприятный	unfavorable
	невероятный	incredible
	невозможно	impossible
	недостаток	lack
	независимость	independent
	неисправный	in disrepair
	некоторый	some
	ненадежный	insecure
	необходимо	it is necessary
	необходимость	necessity
	необъяснимый	inexplicable
	неограниченный	unlimited
	неоднократный	repeated
	неопределенный	indefinite
	непрерывный	continuous
	нюанс	shade
О	Оба	both
	обеспечить	to provide
	обман	fraud
	обмен	exchange
	обобщить	to generalize
	обобщение	generalization
	обозначать	to mean
	обоснование	basis
	обрабатывать	to till

О	образец	example, model
	обследование	inspection
	обстоятельство	circumstance
	обстрел	bombardment
	обстрелять	to bombard
	общий	common, general
	одновременно	simultaneously
	опыт	experiment
	орудие (зенитное орудие)	gun (anti-aircraft gun)
	оружие	arms
	ось	axis
	отбор	selection, choice
	отклонение	deflection
	открытие	discovery
	отличие	difference
	отношение	attitude
	отрезок	piece, segment
	очко	point
	ошибка	mistake
П	Падение	fall
	падать	to fall
	пара	pair, couple
	парадокс	paradox
	парный	twin
	перебрать	to sort out
	передача	transference
	перемешать	to mix up
	перенести	to transfer
	переоценить	to overrate
	пересчитать	to count all
	повод	pretext

П	повторение	repetition
	погрешность	error, mistake
	подбор	selection
	подобие	likeness
	подобный	similar
	покой	rest
	полезно	usefully
	полезный	useful
	понижение	fall
	понятие	idea, notion
	попадание	hit
	попасть	to get
	попытка	attempt
	порядок	order
	предположение	hypothesis
	предположить	to suppose, to assume
	прежний	previous, former
	пренебрегать	to neglect
	приблизительно	approximately
	признак	sign
	пример	example
	примечание	note, footnote
	присоединить	to join
	причина	cause, reason
	проверить	to check, to control
	проиграть	to lose
	производная	derivative
	произойти	take place, to happen
	простой	simple
	против	opposite
	противоположность	contrast

П	противоположный	contrary
	процент	percentage
	пустой	empty
Р	Работа	work
	рабочий	workman
	равенство	equality
	равновесие	balance
	равномерный	even, uniform
	равный	equal
	раз	once
	раздел	part
	разделить	to divide
	раздельно	apart
	различие	difference
	различный	different
	разложение	decomposition
	разнообразный	various
	распределение	distribution
	редкий	rare
	резюме	summary
	решить	to decide, to solve
	решение	solution
	рисовать	to draw
	ряд	row
С	Сам, сама, само	itself
	свободно	freely
	свой	our
	свойство	property
	связь	tie
	сделка	agreement
	символ	symbol, emblem

С	склад	warehouse
	следовательно	consequently
	следствие	consequence
	следующий	following
	сложить	to add
	сложение	addition
	сложный	complicated
	случай	case, occurrence
	случайно	accidentally
	случайность	chance
	случайный	accidental
	смысл	sense, meaning
	событие	event
	совершить	to accomplish
	совершиться	to be accomplished
	совместно	jointly
	совокупность	totality
	совпадение	coincidence
	соединение	union
	соединить	to unite
	соответственно	accordingly
	соотношение	correlation
	состав	composition
	состояние	condition
	сохранение	preservation
	сохранить	to keep
	способ	means, way
	способность	capacity
	сравнение	comparison
	средний	middle
	средняя величина	mean quantity

Т	Таблица	table
	тираж	draw, circulation
	товар	goods, commodity
	тождество	identity
	только	exactly, just
	точно	only
	требование	demand
У	Убыль	decrease
	убыток	loss
	увеличение	increase
	узнать	to learn
	уменьшаемое	minuend
	уменьшение	decrease
	умножить	to increase
	уравнение	equation
	условие	condition
	условно	conditionally
	условный	conditional
Ф	Фабрика	factory
	факт	fact
	фактор	factor
	фиктивный	fictitious
	флаг	flag
	функция	function
Х	Хоть	at least
	хотя	although
	хранить	to keep
Ц	Цвет	colour
	цветной	coloured
	цель	target
	цена	price

Ц	цепь	chain
	цикл	cycle, round
	цифра	figure
Ч	Частично	partially
	частное	quotient
	часто	often
	часть	part
	чужой	strange
Ш	Шар	bale
	шахматы	chess
	шахматист	chess-player
Э	Эволюция	evolution
	экзамен	examination
	эквивалент	equivalent
	экзаменатор	examiner
	экземпляр	copy5,05
	эксперт	expert
	эпизод	episode
Я	Явление	appearance
	явный	evident
	якобы	as if
	ящик	box

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3314	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	8251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0801
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551

Продолжение приложения 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица значений функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,31	0,1217	0,62	0,2324	0,93	0,3238
0,01	0,0040	0,32	0,1255	0,63	0,2357	0,94	0,3264
0,02	0,0080	0,33	0,1293	0,64	0,2389	0,95	0,3289
0,03	0,0120	0,34	0,1331	0,65	0,2422	0,96	0,3315
0,04	0,0160	0,35	0,1368	0,66	0,2454	0,97	0,3340
0,05	0,0199	0,36	0,1406	0,67	0,2486	0,98	0,3365
0,06	0,0239	0,37	0,1443	0,68	0,2517	0,99	0,3389
0,07	0,0279	0,38	0,1480	0,69	0,2549	1,00	0,3413
0,08	0,0319	0,39	0,1517	0,70	0,2580	1,01	0,3438
0,09	0,0359	0,40	0,1554	0,71	0,2611	1,02	0,3461
0,10	0,0398	0,41	0,1591	0,72	0,2642	1,03	0,3485
0,11	0,0438	0,42	0,1628	0,73	0,2673	1,04	0,3508
0,12	0,0478	0,43	0,1664	0,74	0,2703	1,05	0,3531
0,13	0,0517	0,44	0,1700	0,75	0,2734	1,06	0,3554
0,14	0,0557	0,45	0,1736	0,76	0,2764	1,07	0,3577
0,15	0,0596	0,46	0,1772	0,77	0,2794	1,08	0,3599
0,16	0,0636	0,47	0,1808	0,78	0,2823	1,09	0,3621
0,17	0,0675	0,48	0,1844	0,79	0,2852	1,10	0,3643
0,18	0,0714	0,49	0,1879	0,80	0,2881	1,11	0,3665 .
0,19	0,0753	0,50	0,1915	0,81	0,2910	1,12	0,3686
0,20	0,0793	0,51	0,1950	0,82	0,2939	1,13	0,3708
0,21	0,0832	0,52	0,1985	0,83	0,2967	1,14	0,3729
0,22	0,0871	0,53	0,2019	0,84	0,2995	1,15	0,3749
0,23	0,0910	0,54	0,2054	0,85	0,3023	1,16	0,3770
0,24	0,0948	0,55	0,2088	0,86	0,3051	1,17	0,3790
0,25	0,0987	0,56	0,2123	0,87	0,3078	1,18	0,3810
0,26	0,1026	0,57	0,2157	0,88	0,3106	1,19	0,3830
0,27	0,1064	0,58	0,2190	0,89	0,3133	1,20	0,3849
0,28	0,1103	0,59	0,2224	0,90	0,3159	1,21	0,3869
0,29	0,1141	0,60	0,2257	0,91	0,3186	1,22	0,3883
0,30	0,1179	0,61	0,2291	0,92	0,3212	1,23	0,3907

Продолжение приложения 2

10	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,24	0,3925	1,58	0,4429	1,92	0,4726	2,52	0,4941
1,25	0,3944	1,59	0,4441	1,93	0,4732	2,54	0,4945
1,26	0,3962	1,60	0,4452	1,94	0,4738	2,56	0,4948
1,27	0,3980	1,61	0,4463	1,95	0,4744	2,58	0,4951
1,28	0,3997	1,62	0,4474	1,96	0,4750	2,60	0,4953
1,29	0,4015	1,63	0,4484	1,97	0,4756	2,62	0,4956
1,30	0,4032	1,64	0,4495	1,98	0,4761	2,64	0,4959
1,31	0,4049	1,65	0,4505	1,99	0,4767	2,66	0,4961
1,32	0,4066	1,66	0,4515	2,00	0,4772	2,68	0,4963
1,33	0,4082	1,67	0,4525	2,02	0,4783	2,70	0,4965
1,34	0,4099	1,68	0,4535	2,04	0,4793	2,72	0,4967
1,35	0,4115	1,69	0,4545	2,06	0,4803	2,74	0,4969
1,36	0,4131	1,70	0,4554	2,08	0,4812	2,76	0,4971
1,37	0,4147	1,71	0,4564	2,10	0,4821	2,78	0,4973
1,38	0,4162	1,72	0,4573	2,12	0,4830	2,80	0,4974
1,39	0,4177	1,73	0,4582	2,14	0,4838	2,82	0,4976
1,40	0,4192	1,74	0,4591	2,16	0,4846	2,84	0,4977
1,41	0,4207	1,75	0,4599	2,18	0,4854	2,86	0,4979
1,42	0,4222	1,76	0,4608	2,20	0,4861	2,88	0,4980
1,43	0,4236	1,77	0,4616	2,22	0,4868	2,90	0,4981
1,44	0,4251	1,78	0,4625	2,24.	0,4875	2,92	0,4982
1,45	0,4265	1,79	0,4633	2,26	0,4881	2,94	0,4984
1,46	0,4279	1,80	0,4641	2,28	0,4887	2,96	0,4985
1,47	0,4292	1,81	0,4649	2,30	0,4893	2,98	0,4986
1,48	0,4306	1,82	0,4656	2,32	0,4898	3,00	0,49865
1,49	0,4319	1,83	0,4664	2,34	0,4904	3,20	0,49931
1,50	0,4332	1,84	0,4671	2,36	0,4909	3,40	0,49966
1,51	0,4345	1,85	0,4678	2,38	0,4913	3,60	0,499841
1,52	0,4357	1,86	0,4686	2,40	0,4918	3,80	0,499928
1,53	0,4370	1,87	0,4693	2,42	0,4922	4,00	0,499968
1,54	0,4382	1,88	0,4699	2,44	0,4927	4,50	0,499997
1,55	0,4394	1,89	0,4706	2,46	0,4931	5,00	0,499997
1,56	0,4406	1,90	0,4713	2,48	0,4934		
1,57	0,4418	1,91	0,4719	2,50	0,4938		

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика/Гмурман В.Е. – М.: Высш. шк., 1975. – 400 с.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для втузов/Гмурман В.Е. – Изд. 2-е, доп. – М.: Высш. шк., 1975. – 333 с.
3. Гнеденко Б.В. Теория вероятностей/Гнеденко Б.В. – К.: Высш. шк., 1990.

СОДЕРЖАНИЕ

Навчальне видання

Упорядник ИВАЩЕНКО Юрій Миколайович

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Навчальний посібник для студентів-іноземців
підготовчого факультету

Російською мовою

Роботу до видання рекомендував проф. А.І. Лобода

В авторській редакції

Оригінал – макет підготували Космачова Т.С.
Костенко Н.П.

План 2008 р., поз.____

Підписано до друку _____2008 р. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.
Друк – ризографія. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 12,5. Обл.-вид. арк.13,7.
Наклад 100 прим. Зам. № _______ Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ». 61002, Україна, Харків, вул. Фрунзе, 21
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 116 від 10.07.2000 р.

Друкарня НТУ «ХПІ» 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21