Стаття присвячена розв'язанню трьохвимірної задачі нестаціонарної теплопровідності у корпусі штучного супутника Землі типу «Січ-2» при його русі за навколоземною орбітою. Отримано розподіл температур у блоці гіроскопів, встановленому на даному космічному апараті, для різних моментів часу. Визначено площу радіаторних пластин для відведення теплової енергії з метою забезпечення роботи гіроскопів в заданому діапазоні температур у штатному режимі. Проведено дослідження залежності нагрівання корпуса супутника від різних коефіцієнтів теплоізоляції внутрішньої стінки.

Ключові слова: температура, нестаціонарна теплопровідність, штучний супутник Землі, теплоізоляція, метод скінченних елементів, радіаційне випромінювання тепла.

The paper is devoted to solving of the three-dimensional transient heat conduction problem for the case of the Earth artificial satellite of «Sich-2» type. The temperature distribution for the gyroscope block installed on the spacecraft is obtained. Area for heat extraction in order to ensure the gyroscope's work in a regular mode in a given temperature range is determined. An investigation of the satellite's heating with different coefficients of thermal insulation of the inner wall is performed.

Keywords: temperature, transient heat conduction, artificial Earth satellite, thermal insulation, Finite Element Method, heat radiation emission.

УДК 539.3

С. М. ВЕРЕЩАКА, д-р техн. наук, доцент, Сумской государственный университет;
Д. А. ЖИГИЛИЙ, канд. техн. наук, ассистент, Сумской государственный университет

ОДИН ВАРИАНТ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК С МЕЖСЛОЙНЫМИ ДЕФЕКТАМИ СТРУКТУРЫ

На основе вариационного принципа Гамильтона-Остроградского предоставлены дифференциальные уравнения движения тонкостенных конструкций из композиционных материалов. Рассмотрена дискретно-структурная модель многослойных оболочек, согласно которой реализуются как идеальные, так и ослабленные условия контакта соединенных поверхностей анизотропных слоев с различными направлениями армирования материала. Расчет задачи осуществляется на основе геометрически нелинейной теории оболочек с учетом деформаций поперечного сдвига и обжатия.

Ключевые слова: вариационный принцип Гамильтона-Остроградского, композиционные материалы, нелинейная теория оболочек.

Работы по расчету конструкций из композиционных материалов при действии динамических нагрузок привлекают в последние годы все большее внимание исследователей вследствие их безусловной практической значимости. Имеющиеся к настоящему времени исследования характеризуются большим разнообразием подходов, моделей разрушения, уровнем строгости решения задач, методов решения [1-4].

Следует отметить, что решение задач динамического поведения конструкций с расслоениями, пока остается актуальной проблемой. Анализ различных моделей деформирования слоистых оболочек с дефектами структуры выполнен в обзоре [5]. Экспериментальное и аналитическое исследование процесса разрушения сложных пластин при действии продольной сжимающей импульсной нагрузки рассмотрено в [6, 7]. Высокоскоростная киносъемка процесса разрушения [6] показывает, что распространение дефекта в пластине связано с расслоением и локальным выпучиванием отдельных слоев пластины. Аналитическое моделирование такого разрушения в квазистатической постановке с использованием методов механики разрушения выполнено в [7] в предположении, что область расслоения представляет собой полосу, а в [6] рассмотрено развитие дефекта эллипсоидальной формы. Определены условия роста и остановки расслоения в зависимости от нагрузки и геометрии расслоения, области неустойчивого и устойчивого расслоений.

В [8] на примере сферической оболочки в контактной постановке конечно-разностным методом исследовано влияние расслоений на характер волновых переходных процессов. Сферическая оболочка с расслоением рассматривается как система трех оболочек. Осесимметричное деформирование оболочек описывается системой уравнений гиперболического типа, учитывающей инерцию вращения и сдвига. На границе расслоения, соответствующей стыку оболочек, выполняются условия равенства сил и моментов и условия равенства линейных и угловых скоростей. При описании контактного взаимодействия двух оболочек в зоне расслоения местное сжатие материала на поверхности контакта и трение не учитываются. Численно исследована зависимость прогиба в полюсе оболочки от параметров расслоения и начального импульса. Из полученных результатов следует, что учет контактного взаимодействия необходимо учитывать при решении таких задач. Наличие расслоения может качественно менять характер переходного процесса.

Импульсное воздействие на многослойные элементы конструкций с тонкими клеевыми прослойками подробно обсуждается в [9]. Принятая модель расслоения является обобщением известной линейной модели клеевого соединения Голанда-Рейсснера, учитывающим нелинейность характеристик прослойки в поперечном направлении и в продольной плоскости склейки. Результаты численных экспериментов свидетельствуют о том, что влияние параметров нелинейности и предельных деформаций склейки на процесс расслоения несущественно, а определяющую роль играют стандартные характеристики клеевого слоя – предельные напряжения отрыва и сдвига.

Обычно в теории тонких многослойных пластин и оболочек с идеальным контактом между слоями применяются два различных подхода к построению уточненных двухмерных теорий [10], называемых сейчас часто феноменологическим и дискретно-структурным. При феноменологическом подходе кусочно-неоднородная по толщине слоистая пластина или оболочка рассматривается как квазиоднородная с приведенными упругими характеристиками. Порядок получающихся при этом уравнений не зависит от числа слоев. При дискретно-структурном подходе учитывается неоднородность строения оболочки введением кинематических или статических (или кинематических и статических) гипотез для каждого отдельного слоя. Порядок получающихся при этом уравнений зависит от числа слоев, но эти уравнения позволяют учитывать локальные эффекты на границах контакта слоев. Поэтому именно дискретно-структурный подход оказался пригодным в частности для расчета многослойных конструкций с разного рода несовершенствами по поверхностям контакта сопряженных слоев.

Постановка контактной задачи механики многослойных пластинок и оболочек даны в [11-15], где на основе дискретного подхода построены функционалы и системы уравнений решения задачи при условии неидеального контакта слоев. Новый метод решения нелинейных задач о контакте между двумя оболочками разной формы и эквидистантными слоями, а также обзор по этой проблеме, изложены в книге [16].

Данная статья посвящена выводу дифференциальных уравнений движения тонкостенных конструкций из композиционных материалов на основе дискретно-структурной модели многослойных оболочек [17], согласно которой реализуются как идеальные, так и ослабленные условия контакта сопряженных поверхностей анизотропных слоев с разными направлениями армирования материала.

Постановка задачи. Пусть многослойная оболочка состоит из n жестких слоев. Для обозначения площади нижней и верхней лицевой поверхности применяются символы – S^0 и S^n; боковой поверхности – $Г$. Считается, что каждый слой недеформированной оболочки отнесен к нормальной криволинейной системе координат α^i ($i = 1,2$), $z^{(k)}$. Координата $z^{(k)}$ направлена по общей нормали $\vec{m}^{(k)}$ к срединной поверхности $S^{(k)}$ и эквидистантой поверхности $S_z^{(k)}$ k-слоя. Индекс «z» при введении других символов означает, что соответствующие величины относятся к точке $(\alpha^1,\alpha^2,z^{(k)},t)$ эквидистантой поверхности $S_z^{(k)}$. При этом положение данной точки рассматривается в момент времени t и определяться радиус-вектором

$$\vec{\rho}^{(k)} = \vec{r}^{(k)} + \vec{m}^{(k)}\, z^{(k)}, \qquad -\frac{h^{(k)}}{2} \le z^{(k)} \le \frac{h^{(k)}}{2}, \tag{1}$$

базисные векторы в точке $(\alpha^i,z^{(k)},t)$ поверхности $S_z^{(k)}$ равны

$$\vec{\rho}_i^{(k)} = \frac{\partial \vec{\rho}^{(k)}}{\partial \alpha^i} = \vec{r}_j^{(k)}(\delta_i^j - z^{(k)} b_i^{j(k)}), \qquad \vec{\rho}_3^{(k)} = \vec{m}^{(k)}. \tag{2}$$

Здесь $\vec{r}^{(k)}$ – радиус – вектор точки срединной поверхности $S^{(k)}$, $\vec{m}^{(k)}$ – нормаль единичной длины к поверхности $S^{(k)}$; $\delta^j{}_i$ – тензорная запись символа Кронекера;

$$a_{ij}^{(k)} = \vec{r}_i^{(k)} \vec{r}_j^{(k)}, \quad b_{ij}^{(k)} = -\vec{m}_i^{(k)} \vec{r}_j^{(k)} = \vec{m}_j^{(k)} \vec{r}_i^{(k)},$$

$$b_i^{j(k)} \vec{r}_j^{(k)} = -m_i^{(k)}, (i = 1,2;\ j = 1,2) - \tag{3}$$

коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности $S^{(k)}$; $\vec{m}_i^{(k)} = \dfrac{\partial \vec{m}^{(k)}}{\partial \alpha^i}$ – производная нормали $\vec{m}^{(k)}$.

Вектор полного перемещения $\vec{u}_z^{(k)}$ точки k – жесткого слоя согласно уточненной теории оболочек Тимошенко можно представить в виде

$$\vec{u}_z^{(k)} = \vec{u}^{(k)} + z^{(k)} \vec{\gamma}^{(k)} + g(z) \vec{\psi}^{(k)}, \tag{4}$$

где $\vec{u}^{(k)}$ $(\alpha^1, \alpha^2, z^{(k)}, t)$ – вектор перемещения точек срединной поверхности $S^{(k)}$; $\vec{\gamma}^{(k)}$ $(\alpha^1, \alpha^2, z^{(k)}, t)$ – вектор углов поворота нормали к точкам поверхности $S^{(k)}$ в процессе деформации; $g(z)$ – заданная функция, характеризующая нелинейный закон распределения тангенциальных перемещений по толщине жесткого слоя; $\vec{\psi}^{(k)}$ $(\alpha^1, \alpha^2, z^{(k)}, t)$ – вектор функций сдвига. Ковариантные компоненты векторов $\vec{u}^{(k)}, \vec{\gamma}^{(k)}, \vec{\psi}^{(k)}$ записываются при помощи символов $u_i^{(k)}$, $w^{(k)}$, $\gamma_i^{(k)}$, $\psi_i^{(k)}$:

$$\vec{u}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i} u_i^{(k)} + \vec{m}^{(k)} w^{(k)}; \quad \vec{\gamma}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i} \gamma_i^{(k)}; \quad \vec{\psi}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i} \psi_i^{(k)}. \tag{5}$$

Тогда радиус-вектор точки k – слоя оболочки после деформации запишется

$$\vec{\rho}^{(k)*} = \vec{\rho}^{(k)} + \vec{u}_z^{(k)}, \tag{6}$$

а соответствующие ему базисные векторы –

$$\vec{\rho}_i^{(k)*} = \vec{\rho}_i^{(k)} + \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha^i}, \quad \vec{\rho}_3^{(k)*} = \vec{m}^{(k)} + \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial z}. \tag{7}$$

Ковариантные компоненты тензора конечных деформаций в точке $(\alpha^1, \alpha^2, z^{(k)}, t)$ определяются как полуразности компонентов метрических тензоров до, и после деформации

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{ij}^{(k)z} &= g_{ij}^{(k)*} - g_{ij}^{(k)}; \\ 2\varepsilon_{i3}^{(k)z} &= g_{i3}^{(k)*} - g_{i3}^{(k)}; \\ 2\varepsilon_{33}^{(k)z} &= g_{33}^{(k)*} - 1, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\quad g_{ij}^{(k)} = \vec{\rho}_i^{(k)} \vec{\rho}_j^{(k)}; \quad g_{ij}^{(k)*} = \vec{\rho}_i^{(k)*} \vec{\rho}_j^{(k)*}; \quad g_{i3}^{(k)} = \vec{\rho}_i^{(k)} \vec{\rho}_3^{(k)};$

$$g_{i3}^{(k)*} = \vec{\rho}_i^{(k)*} \vec{\rho}_3^{(k)*}; \quad g_{33}^{(k)} = \vec{\rho}_3^{(k)} \vec{\rho}_3^{(k)} = \vec{m}^{(k)} \vec{m}^{(k)} = 1;$$

$$g_{33}^{(k)*} = \vec{\rho}_3^{(k)*} \vec{\rho}_3^{(k)*}; \quad (i = 1,2; \quad j = 1,2). \tag{9}$$

Подставляя в (8), (9) значения базисных векторов (2), (7), нетрудно найти геометрические зависимости между деформациями и перемещениями в векторной форме

$$\varepsilon_{ij}^{(k)z} = \frac{1}{2}\left[\vec{\rho}_i^{(k)}\frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha^j} + \vec{\rho}_j^{(k)}\frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha^i} + \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha^i}\frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha^j}\right];$$

$$\varepsilon_{i3}^{(k)z} = \frac{1}{2}\left[\vec{\rho}_3^{(k)}\frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha^i} + \vec{\rho}_i^{(k)}\frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial z^i} + \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha^i}\frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial z}\right];$$

$$\varepsilon_{33}^{(k)z} = \vec{\rho}_3^{(k)}\frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial z}\right)^2. \tag{10}$$

Уравнения движения многослойных оболочек. Для нахождения энергии упругой деформации R и граничных условий многослойной оболочки широко применяются вариационные принципы Лагранжа, Кастильяно, Рейсснера. Значение функционала энергии такого класса задач, следуя Рейсснеру, можно представить в виде

$$R = \sum_{k=1}^{n}(\Pi_{(k)} + \mathrm{A}_{(k)})\,, \tag{11}$$

где $$\Pi_{(k)} = -\iiint_{V_k}[\sigma_{(k)}^{ij}\varepsilon_{ij}^{(k)z} + \sigma_{(k)}^{i3}\varepsilon_{i3}^{(k)z} + \sigma_{(k)}^{33}\varepsilon_{33}^{(k)z} - W_{(k)}]dV \; - \tag{12}$$

потенциальная энергия деформации k – жесткого слоя;

$$\mathrm{A}_{(k)} = \iiint_{V_k}\vec{u}_z^{(k)}\vec{F}^{(k)}dV + \iint_{S^0}\vec{u}_z^{(0)}\vec{P}^{(0)}dS + \iint_{S^n}\vec{u}_z^{(n)}\vec{P}^{(n)}dS +$$

$$+ \iint_{\Gamma_1^{(k)}}\vec{u}_z^{(k)}\vec{P}_s^{(k)}dS + \iint_{\Gamma_2^{(k)}}(\vec{u}_z^{(k)} - \vec{u}_z^{(k)s})\vec{X}^{(k)}dS - \tag{13}$$

работа внешних сил, приложенных к k – жесткому слою оболочки. Индекс «s» указывает на заданные величины. В формулах (11)-(13) введены величины: $\sigma^{ij}{}_{(k)}$, $\sigma^{i3}{}_{(k)}$, $\sigma^{33}{}_{(k)}$ – компоненты тензора напряжений в деформированной косоугольной системе координат α^i и z, определенные для каждого заданного ранее слоя оболочки; $\vec{P}^{(n)}$, $\vec{u}_z^{(n)}$, $\vec{P}^{(0)}$, $\vec{u}_z^{(0)}$ – векторы заданных внешних напряжений и перемещений, которые действуют на ограничивающие лицевые поверхности S^n, S^0 соответственно; $V^{(k)}$ – объем k – жесткого слоя $\vec{F}^{(k)}$ – вектор заданных объемных сил; $\vec{P}_s^{(k)}$ – вектор внешней нагрузки на части боковой поверхности k – жесткого слоя $\Gamma_1^{(k)}$; $\vec{X}^{(k)}$ – вектор внутренних напряжений на части боковой поверхности $\Gamma_2^{(k)}$ с заданным вектором смещений $\vec{u}_z^{(k)}$; $W^{(k)}$ – удельная дополнительная работа деформации рассматриваемых слоев, выраженная через напряжения.

Если между k и $k + 1$ слоями оболочки допустить отсутствие кинематических связей, то на поверхности сопряжения этих слоев $S_z^{(k,k+1)}$ могут возникать неизвестные векторы усилий $\vec{q}_{(k)}$, $\vec{q}_{(k+1)}$ контактного взаимодействия. Согласно 3-му закону Ньютона имеет место зависимость: $\vec{q}_{(k)} = -\vec{q}_{(k+1)}$. Для учета влияния усилий контактного взаимодействия слоев в функционал энергии R необходимо ввести слагаемое, учитывающее работу силы контактного взаимодействия на векторе перемещения каждого слоя участка сопряженной поверхности

$$\mathrm{A}_q = \sum_{m=k}^{k+1} \iint_{S_z^{(k,k-1)}} \vec{q}_{(m)} \vec{U}_z^{(m)} dS. \tag{14}$$

При решении динамических задач, когда имеет место функционал энергии упругих деформаций R, используется вариационный принцип Гамильтона-Остроградского

$$\delta H = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(R - T \right) dt = 0 \,. \tag{15}$$

Здесь $T = \sum_{k=1}^{n} T^{(k)}$ – кинетическая энергия многослойной системы, t – время.

Согласно вариационному принципу Гамильтона-Остроградского в процессе движения тела на отрезке времени между моментами t_0 и t_1 среди кинематически допустимых перемещений, удовлетворяющих геометрическим граничным условиям на границе тела и заданных в начальный $t = t_0$ и конечный $t = t_1$ моменты времени, истинными будут те перемещения, которые приводят функционал H к стационарному значению.

Функционал кинетической энергии k – жесткого слоя оболочки запишется:

$$T^{(k)} = \frac{\rho^{(k)}}{2} \iiint_{V^{(k)}} \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial t} dV \,, \tag{16}$$

где $\rho(k)$ – плотность k – слоя материала слоистой оболочки.

Подставляя компоненты вектора перемещения (4) в (16) и учитывая, что

$$\frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha_i^{(k)}} = \frac{\partial \vec{u}^{(k)}}{\partial \alpha_i^{(k)}} + z^{(k)} \frac{\partial \vec{\gamma}^{(k)}}{\partial \alpha_i^{(k)}} + \varphi^{(k)}(z) \frac{\partial \vec{\psi}^{(k)}}{\partial \alpha_i^{(k)}} =$$
$$= \nabla_i \vec{u}^{(k)} + z^{(k)} \nabla_i \left(\vec{\gamma}^{(k)} + f^{(k)}(z) \vec{\psi}^{(k)} \right) = \nabla_i \vec{u}^{(k)} + z^{(k)} \nabla_i \vec{\beta}^{(k)};$$
$$\frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial z^{(k)}} = \vec{\gamma}^{(k)} + \frac{\partial \varphi^{(k)}(z)}{\partial z^{(k)}} \vec{\psi}^{(k)} = \vec{\gamma}^{(k)} + \varphi^{(k)\prime}(z) \vec{\psi}^{(k)} = \vec{\theta}^{(k)} \,, \tag{17}$$

будут иметь место зависимости:

$$
\begin{aligned}
T={}&\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\iint\limits_{S^{(k)}}\left(\rho_0^{(k)}\frac{\partial u^i_{(k)}}{\partial t}\frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial t}+\rho_1^{(k)}\left(\frac{\partial u^i_{(k)}}{\partial t}\frac{\partial \gamma_i^{(k)}}{\partial t}+\frac{\partial \gamma^i_{(k)}}{\partial t}\frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial t}\right)\right)\cdot dS+\\
&+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\iint\limits_{S^{(k)}}\left(\rho_0^{(k)}\frac{\partial w^{(k)}}{\partial t}\frac{\partial w^{(k)}}{\partial t}+\rho_1^{(k)}\left(\frac{\partial w^{(k)}}{\partial t}\frac{\partial \gamma_3^{(k)}}{\partial t}+\frac{\partial \gamma^3_{(k)}}{\partial t}\frac{\partial w^{(k)}}{\partial t}\right)\right)\cdot dS+\\
&+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\iint\limits_{S^{(k)}}\left(\rho_2^{(k)}\frac{\partial \gamma^i_{(k)}}{\partial t}\frac{\partial \gamma_i^{(k)}}{\partial t}+\rho_3^{(k)}\left(\frac{\partial u^i_{(k)}}{\partial t}\frac{\partial \psi_i^{(k)}}{\partial t}+\frac{\partial \psi^i_{(k)}}{\partial t}\frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial t}\right)\right)\cdot dS+\\
&+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\iint\limits_{S^{(k)}}\left(\rho_2^{(k)}\frac{\partial \gamma^3_{(k)}}{\partial t}\frac{\partial \gamma_3^{(k)}}{\partial t}+\rho_3^{(k)}\left(\frac{\partial w^{(k)}}{\partial t}\frac{\partial \psi_3^{(k)}}{\partial t}+\frac{\partial \psi^3_{(k)}}{\partial t}\frac{\partial w^{(k)}}{\partial t}\right)\right)\cdot dS+\\
&+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\iint\limits_{S^{(k)}}\left(\rho_4^{(k)}(z)\left(\frac{\partial \gamma^i_{(k)}}{\partial t}\frac{\partial \psi_i^{(k)}}{\partial t}+\frac{\partial \psi^i_{(k)}}{\partial t}\frac{\partial \gamma_i^{(k)}}{\partial t}\right)+\rho_5^{(k)}\frac{\partial \psi^i_{(k)}}{\partial t}\frac{\partial \psi_i^{(k)}}{\partial t}\right)\cdot dS+\\
&+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\iint\limits_{S^{(k)}}\left(\rho_4^{(k)}(z)\left(\frac{\partial \gamma^3_{(k)}}{\partial t}\frac{\partial \psi_3^{(k)}}{\partial t}+\frac{\partial \psi^3_{(k)}}{\partial t}\frac{\partial \gamma_3^{(k)}}{\partial t}\right)+\rho_5^{(k)}\frac{\partial \psi^3_{(k)}}{\partial t}\frac{\partial \psi_3^{(k)}}{\partial t}\right)\cdot dS.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Обобщенные плотности $\rho_m^{(k)}(z)$, которые входят в выражение функционала (18), имеют вид

$$
\rho_0^{(k)}=\rho^{(k)}\int\limits_{\delta_{k-1}}^{\delta_k}dz=\rho^{(k)}\left(\delta_k-\delta_{k-1}\right);\qquad \rho_1^{(k)}=\rho^{(k)}\int\limits_{\delta_{k-1}}^{\delta_k}zdz=\rho^{(k)}\frac{\delta_k^2-\delta_{k-1}^2}{2};
$$

$$
\rho_2^{(k)}=\rho^{(k)}\int\limits_{\delta_{k-1}}^{\delta_k}z^2dz=\rho^{(k)}\frac{\delta_k^3-\delta_{k-1}^3}{3};
$$

$$
\rho_3^{(k)}=\rho^{(k)}\int\limits_{\delta_{k-1}}^{\delta_k}\varphi(z)\cdot dz=-\rho^{(k)}\left(\delta_k{}^2-\delta_{k-1}{}^2\right)\left[3\left(\delta_k{}^2+\delta_{k-1}{}^2\right)-2\delta_{k-1}\delta_k\right];
$$

$$
\begin{aligned}
\rho_4^{(k)}&=\rho^{(k)}\int\limits_{\delta_{k-1}}^{\delta_k}z\,\varphi(z)\cdot dz=\\
&=-\rho^{(k)}\left[\frac{2}{5}\left(\delta_k{}^5-\delta_{k-1}{}^5\right)+\frac{3}{4}\left(\delta_k{}^4-\delta_{k-1}{}^4\right)\left(\delta_k-\delta_{k-1}\right)-2\left(\delta_k{}^3-\delta_{k-1}{}^3\right)\delta_{k-1}\delta_k\right];
\end{aligned}
\tag{19}
$$

$$
\rho_5^{(k)}=\rho^{(k)}\int\limits_{\delta_{k-1}}^{\delta_k}\varphi^2(z)\cdot dz=\rho^{(k)}\left[\frac{4\left(\delta_k{}^7-\delta_{k-1}{}^7\right)}{7}-\frac{9\left(\delta_k{}^5-\delta_{k-1}{}^5\right)}{5}\cdot\right.
$$

$$\cdot\left(\delta_k-\delta_{k-1}\right)^2+12\left(\delta_k{}^3-\delta_{k-1}{}^3\right)\delta_{k-1}{}^2\delta_k{}^2+\left(\delta_k{}^6-\delta_{k-1}{}^6\right)\left(\delta_k-\delta_{k-1}\right)-$$

$$\left.-\frac{9\left(\delta_k{}^4-\delta_{k-1}{}^4\right)}{2}\left(\delta_k-\delta_{k-1}\right)\delta_{k-1}\delta_k+\frac{12\left(\delta_k{}^5-\delta_{k-1}{}^5\right)}{5}\delta_{k-1}\,\delta_k\right],$$

где функция $\varphi^{(k)}(z)$ определяется выражением:

$$\varphi^{(k)}(z)=z\left(-2z^2+3z\left(\delta_{k-1}-\delta_k\right)-6\delta_{k-1}\delta_k\right);\; z\in\left[\delta_{k-1},\quad \delta_k\right],$$

а $\delta^{(k)}$ – толщина k – жесткого слоя.

Из условия стационарности функционала энергии (15)

$$\delta H=\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta R-\delta T\right)dt=0\,, \tag{20}$$

в котором варьируются независимые между собой перемещения и напряжения, позволяет получить систему уравнений движения многослойных оболочек, физические соотношения, статические и кинематические граничные условия. Использование обобщенного закона Гука, нелинейного варианта деформационных соотношений в квадратичном приближении с учетом поперечного сдвига по уточненной теории Тимошенко значительно упрощает вывод рассматриваемых уравнений и граничных условий.

Принимая обозначения [17], для случая одностороннего контакта по области $S_z^{(k,k+1)}$, когда между слоями отсутствуют кинематические связи, можно получить уравнения движения в скалярной форме:

$$\nabla_i T^{ij}_{(k)}-b_i^{j(k)}Q^i_{(k)}+q^i_{(k)}+X^i_{(k)}-\rho_0^{(k)}\frac{\partial^2 u^i_{(k)}}{\partial t^2}-$$

$$-\frac{\rho_1^{(k)}}{2}\frac{\partial^2\gamma^i_{(k)}}{\partial t^2}-\frac{\rho_3^{(k)}}{2}\frac{\partial^2\psi^i_{(k)}}{\partial t^2}=0,\qquad (i=1,2);$$

$$\nabla_i Q^i_{(k)}+b_{ij}^{(k)}T^{ij}_{(k)}+q^3_{(k)}+X^3_{(k)}-\rho_0^{(k)}\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial t^2}-\frac{\rho_1^{(k)}}{2}\frac{\partial^2\gamma^3_{(k)}}{\partial t^2}-\frac{\rho_3^{(k)}}{2}\frac{\partial^2\psi^3_{(k)}}{\partial t^2}=0;$$

$$\nabla_i M^{ij}_{(k)}-Q^i_{(k)}-T^{ij}_{(k)}\gamma_j^{(k)}+M^i_{(k)}-\frac{\rho_1^{(k)}}{2}\frac{\partial^2 u^i_{(k)}}{\partial t^2}-$$

$$-\rho_2^{(k)}\frac{\partial^2\gamma^i_{(k)}}{\partial t^2}-\frac{\rho_4^{(k)}}{2}\frac{\partial^2\psi^i_{(k)}}{\partial t^2}=0,\qquad (i=1,2); \tag{21}$$

$$\nabla_i L^{ij}_{(k)}-Q^{0i}_{(k)}-\frac{\rho_3^{(k)}}{2}\frac{\partial^2 u^i_{(k)}}{\partial t^2}-\frac{\rho_4^{(k)}}{2}\frac{\partial^2\gamma^i_{(k)}}{\partial t^2}-\rho_5^{(k)}\frac{\partial^2\psi^i_{(k)}}{\partial t^2}=0,\qquad (i=1,2)\,.$$

Кроме того, как дополнение к уравнениям движения из выражения (20) следуют: статические –

$$\Phi_n^{(k)s}=T_{(k)}^{ij}n_i^{(k)}n_j^{(k)},\ \Phi_\tau^{(k)s}=T_{(k)}^{ij}n_i^{(k)}\tau_j^{(k)},\ \Phi_m^{(k)}=Q_{(k)}^{i}n_i^{(k)}+Q_{(k)}^{0i}n_i^{(k)}+\frac{\partial M_{(k)}^{ij}n_i^{(k)}\tau_j^{(k)}}{\partial s};$$

$$G_n^{(k)s}=M_{(k)}^{ij}n_i^{(k)}n_j^{(k)};\ \ H_\tau^{(k)s}=-M_{(k)}^{ij}n_i^{(k)}\tau_j^{(k)};\ \ L_n^{(k)s}=L_{(k)}^{ij}n_i^{(k)}n_j^{(k)};$$

$$\Lambda_\tau^{(k)s}=L_{(k)}^{ij}n_i^{(k)}\tau_j^{(k)}, \tag{22}$$

геометрические –

$$u_n^{(k)s}=u_{(k)}^{i}n_i^{(k)};\qquad u_\tau^{(k)s}=u_{(k)}^{i}\tau_i^{(k)};\qquad w_{(k)}^{s}=w_{(k)};\qquad \gamma_n^{(k)s}=\gamma_{(k)}^{i}n_i^{(k)};$$

$$\gamma_\tau^{(k)s}=\gamma_{(k)}^{i}\tau_i^{(k)};\qquad \psi_n^{(k)s}=\psi_{(k)}^{i}n_i^{(k)};\qquad \psi_\tau^{(k)s}=\psi_{(k)}^{i}\tau_i^{(k)}, \tag{24}$$

граничные условия на части контуров $\Gamma_1^{(k)}$ и $\Gamma_2^{(k)}$ соответственно. В выражениях (21)-(24) приняты обозначения: $X^i_{(k)}$, $X^3_{(k)}$ – тензор внутренних и внешних сил, приложенных к срединной поверхности $S_{(k)}$; $T^{ij}_{(k)}$, $M^{ij}_{(k)}$, $M^{i}_{(k)}$ – тензоры внутренних усилий и моментов, а также тензор внешних моментов соответственно, приведенные к срединной поверхности $S_{(k)}$; $Q^{i}_{(k)}$ – тензор поперечных сил; $Q_{(k)}^{0i}$, $L_{(k)}^{ij}$ – тензоры дополнительных обобщенных внутренних удельных усилий сдвига и моментов соответственно, которые появляются при выводе уравнений равновесия с учетом деформаций поперечного сдвига; ∇_i – символ ковариантного дифференцирования по метрике $a_{ij}^{(k)}$; $u_n^{(k)s}$, $u_\tau^{(k)s}$, $w_{(k)}^{s}$, $\gamma_n^{(k)s}$, $\gamma_\tau^{(k)s}$, $\psi_n^{(k)s}$, $\psi_\tau^{(k)s}$ – заданные ковариантные компоненты векторов обобщенных перемещений; $\Phi_n^{(k)s}$, $\Phi_\tau^{(k)s}$, $\Phi_m^{(k)s}$, $G_n^{(k)s}$, $H_\tau^{(k)s}$, $L_n^{(k)s}$, $\Lambda_\tau^{(k)s}$ – ковариантные компоненты заданных векторов внешних усилий $\vec{\Phi}_{(k)}^{s}$, моментов $\vec{G}_{(k)}^{s}$ и дополнительных моментов $\vec{L}_{(k)}^{s}$, приложенных к части граничного контура $\Gamma_1^{(k)}$; $n_i^{(k)}$, $\tau_i^{(k)}$ – ковариантные компоненты векторов единичной нормали $\vec{n}$ и касательной $\vec{\tau}$ к контурной линии.

Усилия контактного взаимодействия $\vec{q}_{(k)}=q_{(k)}^{i}\vec{r}_i^{(k)}+q_{(k)}^{3}\vec{m}^{(k)}$ возникают при выполнении условия

$$(\vec{u}_z^{(k)}-\vec{u}_z^{(k+1)})<0 \tag{25}$$

в зонах сопряжения жестких слоев. В случае, когда неравенство (25) не выполняется при перемещении точек области $S_z^{(k,k+1)}$ в процессе деформации, усилие $\vec{q}_{(k)}$ в формулах (16) принимает значение $\vec{q}_{(k)}=0$. Статические и кинематические граничные условия на контуре области $S_z^{(k,k+1)}$ имеют вид зависимостей (23), (24).

Таким образом, имея уравнения равновесия (21) несложно с заданной точностью найти значение контактного давления на основе итерационного метода, предложенного в [16].

Вследствие того, что между жесткими слоями в процессе изготовления анизотропных оболочек образуется межфазный мягкий клеевой слой, толщину этого слоя, как правило, считают равной нулю. Тогда в соответствии с допущениями первого варианта модели предполагается упругое проскальзывание жестких слоев относительно друг друга, то есть по лицевым сопряженным поверхностям выполняются только статические условия контакта:

$$\sigma_{i3}^{(k)+} = \sigma_{i3}^{(k+1)-}; \qquad \sigma_{i3}^{(k)-} = \sigma_{i3}^{(k-1)+}, \quad (i = 1,2);$$
$$\sigma_{33}^{(k)+} = \sigma_{33}^{(k+1)-}; \qquad \sigma_{33}^{(k)-} = \sigma_{33}^{(k-1)+}. \tag{26}$$

Считается, что напряжения поперечного сдвига и обжатия на границе контакта равны между собой. Статические условия контакта (26) по сопряженным лицевым поверхностям k-го слоя удовлетворяются согласно процедуры метода штрафных функций. Уравнения движения (21) должны дополниться вектором

$$\vec{P}_{(k)} = K\left(\vec{X}^{+}_{(k-1)} - \vec{X}^{-}_{(k)}\right)^2,$$

где K – коэффициент штрафа. После несложных преобразований в первые три уравнения правой части системы уравнений (21), составленных для k – слоя, войдут соответствующие штрафные функции:

$$P^1_{(k)} = 2K(\sigma_{13}^{(k-1)+} - \sigma_{13}^{(k)-}); \quad P^2_{(k)} = 2K(\sigma_{23}^{(k-1)+} - \sigma_{23}^{(k)-}); \quad P^3_{(k)} = 2K(\sigma_{33}^{(k-1)+} - \sigma_{33}^{(k)-}).$$

В [17] получены функции распределения напряжений поперечного сдвига и обжатия $\sigma_{i3}^{(k)}$, $\sigma_{33}^{(k)}$ $(i = 1,2)$ по толщине слоя, которые соответствуют введенным ранее допущениям об изменениях деформаций $\varepsilon_{i3}^{(k)z}$, $\varepsilon_{33}^{(k)z}$.

Выводы. Таким образом, в данной статье на основе вариационного принципа Гамильтона-Остроградского получены дифференциальные уравнения движения тонкостенных конструкций из композиционных материалов. Рассматривалась дискретно-структурная модель многослойных оболочек, согласно которой реализуются как идеальные, так и ослабленные условия контакта сопряженных поверхностей анизотропных слоев с разными направлениями армирования материала. Расчет задачи проводится на основе геометрически нелинейной теории оболочек с учетом деформаций поперечного сдвига и обжатия.

Список литературы: **1.** *Leissa A. W.* Vibration of shells. – NASA SP – 288, 1973. – 428 с. **2.** *Marku* The mechanics of vibration of cylindrical shells. – Amsterdam: Elsevier, 1988. – 159 p. **3.** *Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И.* Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наукова думка, 1986. – 171 с. **4.** *Рассказов А. О., Соколовская И.И.* Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – К.: Вища школа, 1986. – 191 с. **5.** *Григолюк Э. И., Коган Е. А., Мамай В. И.* Проблемы деформирования тонкостенных слоистых конструкций с расслоениями // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1994. – № 2. – С. 6-32. **6.** *Чай Х., Бэбкок К. Д., Кнаусс В. Г.* О моделировании роста дефекта расслоения в композитной пластине при действии продольной импульсной нагрузки // Прочность и разрушение композитных материалов. Тр. 2-го советско-американского симпозиума. – Рига: Зинатне, 1983. – С. 45-47. **7.** *Chai H., Babcock C. D., Knauss W. G.* One dimensional modelling of failure in laminated plates by domination buckling // lnt. J. Solids and Struct. – 1981. – V. 17, № 11. – P. 1069-1083. **8.** *Малышев А. П.* Переходные процессы в оболочке с расслоениями // Изв. АН СССР. МТТ. – 1978. – № 6. – С. 101-105. **9.** Методы динамических расчетов и испытаний тонкостенных конструкций / Под ред. *А. В. Кармишина*. – М.: Машиностроение, 1990. – 288 с. **10.** *Григолюк Э .И., Коган Ф. А.* Современное состояние теории многослойных оболочек // Прикл. механика. – 1972. – Т. 8, №6. – С. 3-17. **11.** *Лазько В.А.* Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев. I. Вариационный принцип теории упругих слоистых анизотропных систем при наличии зон неидеального контакта // Механика композитных материалов. – 1981. – № 5. – С. 832-836. **12.** *Лазько В.А.* Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев. II. Обобщенные уравнения ортотропных слоистых оболочек при разрывных перемещениях на границе раздела // Механика композитных материалов. – 1982. – № 1. – С.77-84. **13.** *Пелех Б.Л., Лазько В.А.* Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. – К.: Наукова думка, 1982. – 296 с. **14.** *Паймушин В.И.* Обобщенный вариационный принцип Рейсснера в нелинейной механике пространственных составных тел с приложениями к теории многослойных оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 2. – С. 171-180. **15.** *Паймушин В. Н.* Нелинейная теория среднего изгиба трехслойных оболочек с дефектами в виде участков непроклея // Прикладная механика. – 1987. – Т. 23, № 11. – С. 32-38. **16.** *Кантор Б. Я.* Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения / Отв. ред. *Подгорный А.Н.* : АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения. – К.: Наукова думка, 1990. – 136 с. **17.** *Верещака С. М.* Нелинейное деформирование и устойчивость многослойных элементов конструкций с дефектами структуры. – Сумы: Изд-во СумГУ, 2009. – 286 с.

Поступила в редколлегию 25.09. 2013.

УДК 539.3

Один вариант теории колебания многослойных оболочек с межслойными дефектами структуры / С. М. Верещака, Д. А. Жигилий // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 58 (1031). – С. 41-51. – Бібліогр.: 17 назв.

На основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського надані диференціальні рівняння руху тонкостінних конструкцій із композиційних матеріалів. Розглянута дискретно-структурна модель багатошарових оболонок, згідно з якою реалізуються як ідеальні, так і ослаблені умови контакту сполучених поверхонь анізотропних шарів з різними напрямками армування матеріалу. Розрахунок задачі здійснюється на основі геометрично нелінійної теорії оболонок з урахуванням деформацій поперечного зсуву та обтиснення.

Ключові слова: варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського, композиційні матеріали, нелінійна теорія оболонок .

Based on the variational principle of Hamilton-Ostrogradskii was given the conclusion of differential equations of motion of thin-walled constructions made of composite materials on the base of discrete structural model of multilayer shells, according to which implemented as ideal, so as weakened contact conditions of the mating surfaces of anisotropic layers with different directions of the reinforcement material. The calculation of the task is carried out on the basis of geometrically nonlinear theory of shells taking into account the transverse shear deformations and compression.

Key words: variational principle of Hamilton-Ostrogradskii, composite materials, nonlinear theory of shells.