

**В.С. ЛУПИКОВ**, д-р техн. наук, проф., НТУ "ХПИ", Харьков  
**Н.А. ЛЕЛЮК**, стажер-преподаватель, НТУ "ХПИ", Харьков  
**Е. МВУДЖО**, канд. техн. наук, Университет Яунде, Камерун

## **ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОТБРОСА КОНТАКТОВ КОМУТАЦИОННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ АППАРАТОВ**

Приведені результати математичного моделювання процесу відскоку рухливого контакту комутаційного електричного апарату для пружнов'язкої моделі удару. Розглянуто особливості моделі та запропоновано рекомендації щодо підвищення точності моделювання.

Приведены результаты математического моделирования процесса отброса подвижного контакта коммутационного электрического аппарата для упруговязкой модели удара. Рассмотрены особенности модели и даны рекомендации по повышению точности моделирования.

**Введение.** Существующие коммутационные электрические аппараты (ЭА) имеют относительно небольшое собственное потребление электроэнергии, пропорциональное их электрическому сопротивлению. В этом случае рассматривать их энергосбережение вроде бы не имеет смысла. Однако, идеология конструирования ЭА, построенная на выборе элементов проектируемого ЭА с запасом, приводит к тому, что при изготовлении ЭА расходуется неоправданно большая энергия, т.е. растет энергоемкость ЭА. Это зависит не только от технологии изготовления и массовости производства ЭА, а именно от идеологии конструирования "с запасом". В частности, выбор контактов коммутационного ЭА, их износ в процессе эксплуатации, конструкция контактной системы, выбор пружин во многом определяются именно с позиций этой идеологии. Для уменьшения энергоемкости коммутационных ЭА требуется развитие теории и практики проектирования ЭА с более точным учетом параметров, определяющих его характеристики. Тем самым на смену идеологии конструирования "с запасом" приходит идеология снижения энергоемкости за счет наукоемкости ЭА.

В коммутационных ЭА при замыкании контактов в большинстве случаев происходит многократный отброс (отскок) подвижных контактов относительно неподвижного. Подвижный контакт движется к

неподвижному контакту с определенной скоростью. Параметры этого движения определяются свойствами контактной системы и связанными с ней элементами конструкции ЭА, в частности контактными и противодействующими пружинами и якорем. При соударении происходит деформация обоих контактов. Различают три вида деформации контактов: упругая, вязкая и пластическая. Упругая деформация приводит к отбросу подвижного контакта от неподвижного на некоторое расстояние от 0,01 до 1 мм и сжимается контактная пружина ЭА. При уравнивании силы отброса и противодействующей пружины отброс контакта заканчивается и он начинает возвратное движение, приводящее к повторному замыканию контактов. В целом процесс состоит из многократно повторяющихся замыканий – размыканий контактов ЭА. При каждом отбросе между контактами возникает электрическая дуга, вызывающая их износ.

В настоящее время используются три модели однократного соударения контактов: упругая, упруговязкая и упруговязкопластическая [1-4]. Первые две модели используют аналитические функции для описания процесса отброса контакта, а последняя модель строится с использованием численных методов [3]. Упрощенное представление о физике процесса отброса контактов нашло отражение в "упругой модели" контактов [3-5]. В случае упруговязкой и упруговязкопластической моделей учитывается деформация контактов, что в принципе повышает их точность. Применение современной вычислительной техники открывает возможность построения и исследования сложных математических моделей процесса отброса контактов. В принципе наблюдается тенденция использования численных методов для получения решений для этих моделей. Однако при этом имеется ряд особенностей, ограничивающих прямое применение численных методов, что связано с использованием одинаковых уравнений для существенно различающихся сред, в которых происходит движение контактов. Выявлению этих особенностей и посвящена данная работа.

**Цель работы** – математическое моделирование многократного отброса подвижного контакта коммутационного электрического аппарата для упруговязкой модели удара.

**Задачи исследования:**

1. Анализ известных соотношений для упруговязкой модели.
2. Расчет процесса отброса.
3. Анализ особенностей численного расчета отброса контактов коммутирующего ЭА с использованием упруговязкой модели.

**Анализ известной упруговязкой модели процесса отброса контакта в случае упругого удара.** Схема движения подвижного контакта

для упруговязкой модели однократного удара и элементы механической схемы замещения показана на рис. 1. Обозначения на схеме: 1 – подвижный контакт; 2 – неподвижный контакт;  $m$  – масса подвижного контакта;  $c_1$ ,  $c_2$  – коэффициенты жесткости контактной пружины и материала контакта соответственно;  $x$  – ось, вдоль которой происходит движение контактов;  $F$  – сила нажатия пружины в момент соприкосновения подвижного и неподвижного контактов;  $x(t)$  – расстояние между подвижным и неподвижным контактами, характеризующее перемещение подвижного контакта относительно неподвижной точки  $P$  контакта 2;  $v(-0)$ ,  $v(+0)$  – значение вектора скорости подвижного контакта соответственно до и после момента соприкосновения контактов;  $b_1$ ,  $b_2$  – параметры, характеризующие свойства демпфирующих элементов, соответственно пружины и контактов. Контакты 1 и 2 показаны в виде полусфер, что позволяет рассматривать процесс их соприкосновения в одной точке  $P$ . Объемы контактов, подверженные упругой деформации, выделены серым цветом.

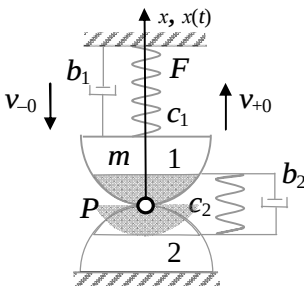


Рис. 1.

В отличие от "упругой" модели [5], "упруговязкая" модель учитывает деформацию контактов при соударении в процессе отброса. Время соударения принимается не мгновенным, а отличным от нуля. Процесс первого отброса включает интервал времени  $t_1$  деформации, в течение которого части объемов контактов подвергаются упругой деформации. Возникающая сила упругой деформации препятствует дальнейшему движению подвижного контакта в тело неподвижного контакта после соприкосновения. В некоторый момент времени движение контактов прекращается и под действием этой силы они расходятся.

При составлении уравнений математической модели отброса в этом случае приняты следующие допущения:

- движение контактов до и после отброса происходит вдоль одной оси;
- процесс отброса (вибрации) рассматривается без учета удара якоря;
- упругие свойства контактов и пружин считаются неизменными при многократных соударениях контактов.

В работе [5] приведена "упруговязкая" модель в виде дифференциального уравнения второго порядка, описывающего изменение силы, действующей на точечную массу при движении после однократного упругого

удара о неподвижное тело (начало отсчета времени процесса) и начальных условий, определяющих величины перемещения и скорости:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + c_1 x(t) + \left( b_2 \frac{dx(t)}{dt} + c_2 x(t) \right) \delta(t_1) = F; \\ x(0) = 0; \\ v(0) = v_{+0}; \\ v_{+0} = -a \cdot v_{-0}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\delta(t_1)$  – обобщенная функция, равная 1 при  $x(t) > 0$  (контакты сомкнуты и деформируются), и 0 при  $x(t) < 0$  (контакты разомкнуты вследствие отброса);  $t_1$  – момент начала первого отброса подвижного контакта;  $a$  – коэффициент восстановления контактного материала.

Как видно из (1), наличие обобщенной функции требует построения решения  $x(t)$  дифференциального уравнения с использованием не аналитических, а обобщенных функций [6]. Однако, момент времени  $t_1$ , для которого определена функция  $\delta(t_1)$ , является неизвестным параметром и задача его определения является самостоятельной. Другими словами, на множестве обобщенных функций построение решения системы (1) представляет собой сложную математическую задачу.

Выходом из этой ситуации является построение решения для двух смежных интервалов времени:

I интервал –  $0 < t \leq t_1$  – замкнутое состояние контактов, деформация;

II интервал –  $t \geq t_1$  – разомкнутое состояние – отброс контактов.

В известной литературе [2] построение решений для этих интервалов проводится независимо друг от друга, что позволяет использовать локальные системы координат с началом отсчета времени процесса в каждой  $t = 0$ . Такое дополнительное допущение позволяет упростить запись начальных условий для обоих интервалов. Получаемые в результате решения для  $x(t)$  представляются на одном графике, с учетом сдвига на  $t_1$ . Однако, при этом снижается точность моделирования физических процессов, поскольку предполагается, что процессы вибрации контактов на каждом интервале заканчиваются в пределах этих интервалов. На рис. 2 показаны графические зависимости перемещения  $x(t)$  и скорости  $v(t)$  подвижного контакта, приведенные в [2].

*Уравнения модели для замкнутого состояния контактов (деформация).* Полагая  $\delta(t_1) = 1$ , система уравнений (1) приобретает вид:

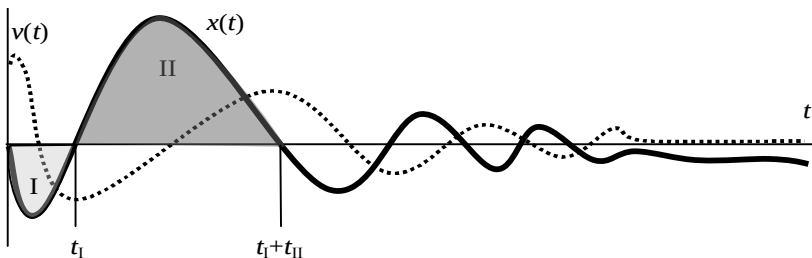


Рис. 2.

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + (b_1 + b_2) \frac{dx(t)}{dt} + (c_1 + c_2) x(t) = -F; \\ 0 < t \leq t_1; \\ x(0) = 0; \\ v(0) = v_{+0} = -a \cdot v_{-0}. \end{cases} \quad (2)$$

Решение системы (2) известно [3] и может быть представлено как:

$$x(t) = C_0 + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (3)$$

где  $C_0, C_1, C_2$  – постоянные интегрирования;  $\lambda_1, \lambda_2$  – корни характеристического уравнения для дифференциального уравнения системы (1).

С использованием математического пакета Maple [7] аналитические выражения для коэффициентов  $C_0, C_1, C_2, \lambda_1, \lambda_2$  получены в виде:

$$\begin{aligned} C_0 &= F / (c_1 + c_2); \\ C_1 &= -\frac{1}{2} \sqrt{(b_1 + b_2)^2 - 4m(c_1 + c_2)} \times \\ &\quad \times \frac{2vam(c_1 + c_2) + F \left( b_1 + b_2 + \sqrt{(b_1 + b_2)^2 - 4m(c_1 + c_2)} \right)}{(c_1 + c_2) \left( (b_1 + b_2)^2 - 4m(c_1 + c_2) \right)}; \\ C_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{(b_1 + b_2)^2 - 4m(c_1 + c_2)} \times \\ &\quad \times \frac{2vam(c_1 + c_2) + F \left( b_1 + b_2 - \sqrt{(b_1 + b_2)^2 - 4m(c_1 + c_2)} \right)}{(c_1 + c_2) \left( (b_1 + b_2)^2 - 4m(c_1 + c_2) \right)}; \\ \lambda_{1,2} &= -\frac{1}{2m} \left( (b_1 + b_2) \pm \sqrt{(b_1 + b_2)^2 - 4m(c_1 + c_2)} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Для определения длительности первого интервала решается урав-

нение  $x(t) = 0$ .

Уравнения модели для разомкнутого состояния контактов (отброс). В этом случае  $\delta(t_1) = 0$  и система уравнений (1) преобразуется:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + c_1 x(t) = F; \\ t > t_1; \\ x(t_1) = 0; \\ v_{II}(t_1) = -av_1(t_1), \end{cases} \quad (5)$$

где  $v_1(t_1), v_{II}(t_1)$  – скорость подвижного контакта в конце первого и начале второго интервала первого отброса.

В общем случае решение системы (5) имеет вид (3). Для локальной системы координат коэффициенты  $C_0, C_1, C_2, \lambda_1, \lambda_2$  равны:

$$C_0 = F/c_1;$$

$$C_1 = -\frac{1}{2} \sqrt{b_1^2 - 4mc_1} \frac{4v_1 mc_1 + F \left( b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4mc_1} \right)}{b_1^2 - 4mc_1}; \quad (6)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \sqrt{b_1^2 - 4mc_1} \frac{4v_1 mc_1 + F \left( b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4mc_1} \right)}{b_1^2 - 4mc_1};$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2m} \left( b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4mc_1} \right).$$

Приведенные соотношения (4) и (6) позволяют получить решения систем (2) и (5) в виде аналитических функций.

Получение аналитических выражений для  $x(t)$  в общей системе координат с учетом начальных условий для  $x(t_1)$  и  $v(t_1)$  при использовании математического пакета Maple не представляет сложностей. Из-за громоздкости это выражение не приводится.

Анализ приведенных соотношений для упруговязкой модели показывает, что решение задачи отброса контакта удастся построить с помощью аналитических функций. Недостатком такого подхода является то, что при построении решения использовано допущение о независимости процессов деформации и отброса контактов. Кроме того, решение пригодно только для одиночного отброса, поскольку для последующих отбросов необходимо получить решение на предыдущем интервале.

### Результаты расчета.

Расчет процесса в интервале  $I$  замкнутого состояния контак-

тов. Численный расчет упруговязкой модели проведен для системы двух контактов с параметрами, использованными для упругой модели [5]. Исходные данные для расчета:  $m = 0,02$  кг,  $F = 40$  Н,  $c_1 = 5000$  кг/м,  $c_2 = 9 \cdot 10^{10}$  кг/м,  $a = 0,7$ ;  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 9563$  Н·с/м; начальная скорость первого отброса  $v(-0) = -1,5$  м/с. Для интервала I уравнение модели имеет вид

$$0.02 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 9563 \frac{dx(t)}{dt} + 9 \cdot 10^{10} x(t) = 40. \quad (7)$$

Решение уравнения (7) для перемещения  $x(t)$  подвижного контакта и скорости  $v(t)$  представляется в виде аналитических функций:

$$x(t) = 4,982 \cdot 10^{-7} e^{239075t} \sin(2,1078 \cdot 10^6 t) - 4.444 \cdot 10^{-10} e^{239075t} \cos(2,1078 \cdot 10^6 t) + 4.444 \cdot 10^{-10}. \quad (8)$$

$$v(t) = 0,12 e^{239075t} \sin(2,1078 \cdot 10^6 t) - 1,05 e^{239075t} \cos(2,1078 \cdot 10^6 t). \quad (9)$$

Длительность интервала времени  $t_1$  от начала процесса до отброса неподвижного контакта равна

$$t_1 = 1,489 \cdot 10^{-6}, \text{ с}. \quad (10)$$

Графики зависимостей  $x(t)$  и  $v(t)$  с учетом соотношений (8)-(10) приведены на рис. 3.

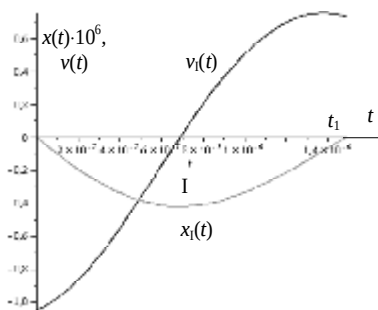


Рис. 3.

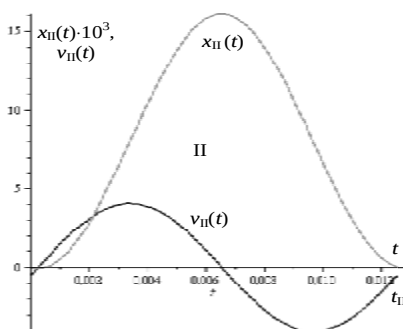


Рис. 4.

Расчет процесса в интервале II первого отброса контактов. Для интервала II уравнение модели имеет вид

$$0.02 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 5000 x(t) = 40. \quad (11)$$

Решение уравнения (11) для перемещения  $x_{II}(t)$  и скорости  $v_{II}(t)$  подвижного контакта в локальной системе координат представляется

аналитическими функциями:

$$x_{II}(t) = -1,0298 \cdot 10^{-3} \sin(500t) - 8 \cdot 10^{-3} \cos(500t) + 8 \cdot 10^{-3}. \quad (12)$$

$$v_{II}(t) = -0,515 \sin(500t) + 4 \cos(500t). \quad (13)$$

Длительность интервала времени  $t_{II}$  в локальной системе координат (от начала отброса неподвижного контакта) равна

$$t_{II} = 1,256 \cdot 10^{-2}, \text{ с}. \quad (14)$$

Графики зависимостей  $x_{II}(t)$  и  $v_{II}(t)$  с учетом соотношений (12)-(14) приведены на рис. 4.

### **Анализ особенностей упруговязкой модели.**

*Первая особенность.* Численные расчеты показали, что рассматриваемые интервалы процесса одиночного отброса неподвижного контакта существенно различаются масштабами как по времени, так и по перемещению. Так, временные интервалы I и II отличаются на 4 порядка, а по перемещению – на 5 порядков. В результате при графическом отображении результатов расчета их не удастся отобразить "информативно" в едином интервале процесса одиночного отброса, а тем более многократного отброса контакта. Это связано с тем, что кратковременные интервалы деформации "не видны" на фоне интервалов отбросов. Для графического представления результатов расчета однократного отброса контактов можно воспользоваться "совмещенными разномасштабными" графиками. Они строятся отдельно для положительных и отрицательных перемещений, соответствующих интервалам деформации (I) и отброса (II) с учетом "удобных" для чтения масштабов перемещений и времени. Схема построения таких совмещенных разномасштабных графиков показана на рис. 5.

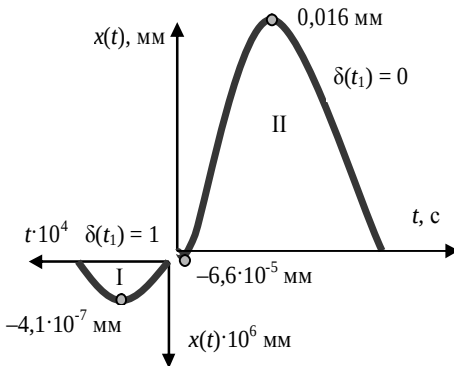


Рис. 5.

### *Вторая особенность.*

Как показано ранее, модель предполагает построение решения для двух интервалов (I и II), причем параметры интервала отброса (II) существенно зависят от параметров предыдущей деформации (I) контактов. В случае многократного отброса точность модели в основном определяется точностью моделирования деформации **неподвижного** контакта. Это необходимо



учитывать при экспериментальных исследованиях.

*Третья особенность.* Как видно на рис. 4, кривая  $x_{II}(t)$  для перемещения контакта в интервале отброса вначале имеет пологий участок. Результаты численного моделирования этого участка и предыдущего интервала приведены на рис. 6. Анализ

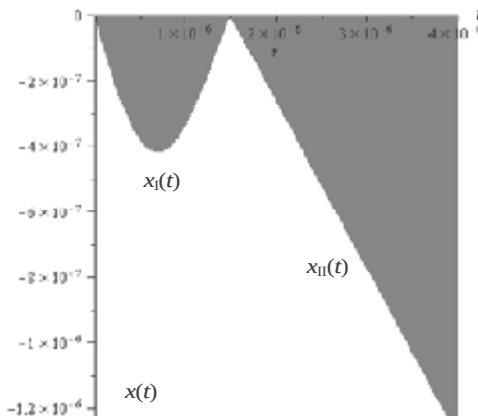


Рис. 6.

этих данных позволяет сделать вывод о том, что рассматриваемая модель упруговязкого удара не в полной мере учитывает физические процессы деформации и отброса контактов. Начальные условия для интервала II не учитывают вибрации подвижно-

го и неподвижного контактов. При численном моделировании это привело к тому, что в кривой перемещения для интервала отброса появился участок с отрицательным перемещением, характерным для деформации, причем величина этого перемещения превышает амплитуду деформации подвижного контакта. Учесть вибрацию контактов можно было бы путем усложнения модели, однако этот вопрос требует дополнительных исследований.

*Четвертая особенность.* Эта особенность связана с возможностью моделирования многократного отброса контакта с использованием численных методов. Учет временных участков или интервалов, в пределах которых амплитуды перемещений отличаются на несколько порядков может быть реализован только при использовании сеток с переменным шагом. Обоснование выбора шага для каждого интервала становится самостоятельной задачей. Проведенные исследования позволяют, что как одно из возможных направлений решения этой задачи, использовать упрощенные модели (упругую и упруговязкую) удара контактов для получения оценок временных интервалов и амплитуд перемещений контактов, поскольку для них известны аналитические соотношения.

**Выводы.** 1. Проведен анализ известной математической модели процесса однократного отброса подвижного контакта коммутационного электрического аппарата для случая упруговязкого удара. Установлены основные недостатки этой модели: существенное различие интервалов времени и перемещений контактов при деформации и отбросе, достигающее 4-5 порядков. Для графического представления результатов расчета однократного отброса контактов в этом случае

можно воспользоваться совмещенными графиками, которые строятся раздельно для положительных и отрицательных перемещений в соответствующих масштабах перемещений и времени.

2. Установлено, что при расчете отброса его параметры (перемещение и длительность) существенно зависят от параметров предыдущей деформации, что требует высокой точности расчетов как отброса, так и деформации контактов. При многократном отбросе подвижного контакта точность известной модели в основном определяется точностью моделирования деформации неподвижного контакта. Этот факт необходимо учитывать при экспериментальных исследованиях отброса контактов.

3. При использовании численных методов для расчета многократного отброса контактов на основе сложных моделей (упруговязкого либо упруговязкопластического) удара шаг дискретизации перемещения контакта должен быть переменным и существенно (на 4-5 порядков) отличаться для интервалов деформации и отброса контактов. Для выбора временных интервалов рекомендуется использовать приближенную модель, позволяющую оценить длительности этих интервалов по аналитическим соотношениям.

4. Проведен анализ численного моделирования процесса отброса контактов на основе модели упруговязкого удара, который позволил установить, что эта модель не в полной мере учитывает физические процессы удара. В частности, из-за неучета вибрации неподвижного контакта при расчетах отскока подвижного контакта в кривой его перемещения появляется участок с отрицательным перемещением, характерным для деформации. Для учета вибрации контактов в этом случае необходимо усложнение модели удара.

**Список литературы:** 1. *Яковенко В.Б.* Моделирование и расчет вибрационных систем / Уч. пособие. – К.:УМК ВО, 1988. – 232 с. 2. Справочник по расчету и конструированию контактных частей силовых электрических аппаратов / Н.М. Афанасьев, В.В. Афанасьев, В.В. Борисов и др.: Под ред. В.В. Афанасьева. – Л.: Энергоатомиздат, 1988. – 384 с. 3. *Шевченко С.М.* Движение и удары в электрических аппаратах автоматического управления. – М.: Энергия, 1979. – 144 с. 4. *Лелюк Н.А., Лутиков В.С.* Модели контактов электрического аппарата при исследовании вибрации // Вестник Национального технического университета "Харьковский политехнический институт". – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2008. – № 7. – С. 73-81. 5. *Лелюк Н.А., Лутиков В.С.* Моделирование функции отброса подвижного контакта коммутирующего электрического аппарата для упругой модели вибрации // Вестник Национального технического университета "Харьковский политехнический институт". – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2010. – № 36. – С. 69-79. 6. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1971. – 512 с. 7. *Матросов А.В.* Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. – СПб.: БХВ-Петербург, 2001. – 528 с.

*Поступила в редколлегию 27.09.2010*